

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



**Université Ammar Telidji - Laghouat**  
**Faculté de Technologie**  
**Département de GENIE CIVIL**

**Mémoire de Master**

*Présenté par :*

**LAGARI Asma**

*En vue de l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique*  
*Option: Ressources en Eau*

**THÈME:**

***Modélisation Géostatistique par Krigeage de la variabilité spatiale de la piézométrie***  
***(Cas de la nappe alluviale de la région de Bennaceur Benchohra)***

*Soutenu publiquement le 27 Septembre 2017 devant le jury composé de :*

*Mr. GAFSI Mustapha*  
*Mr. CHETTIH Mohamed*  
*Mr. BOUACHE Mohamed*  
*Mr. TADJ Walid*

*Président*  
*Encadreur*  
*Examineur*  
*Examineur*

2016-2017

## *Remerciement*

*J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon DIEU qui m'a donné le courage, la Volonté et la santé d'achever ce travail.*

*Je tiens à remercier un grand merci adressé à **mon père et ma mère** qui m'avez toujours incité à être assidue, excellente*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire, Monsieur **Mohammed CHETTIH**, qui m'a fait l'honneur d'avoir veillé et dirigé ce mémoire. Ses qualités scientifiques et sa passion pour la recherche m'ont permis de mener à bien ce travail de mémoire. Un très grand merci.*

*J'exprime ma gratitude à monsieur **BOUACHE.M**, pour m'avoir orienté et conseillé durant mon travail.*

*Je voudrai remercier **Messieurs les membres du jury** d'avoir accepté d'évaluer cette thèse.*

## Dédicace

A **mes parents**, depuis mes premiers pas à l'école, vous me vous être jamais lasser de me relater l'importance des études, vous m'avez toujours incité à être assidue, excellente. Votre affection sans limite m'a accompagné tout au long de la réalisation de cet œuvre. Je ne pourrai jamais vous ne remerciez assez. Puisse ce travail vous comble de joie et d'espoir. Qu'ALLAH vous garde longtemps parmi nous.

A mes sœurs et frères : **Hanaa, Fatima zohra, Selsabil, Khadidja, Douaa, Mohammed, Mosaab**

A tous mes oncles et tantes des familles **LAGARI** et **REGEUGBA**

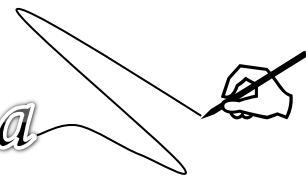
Spécialement à mes proche amis : Aladin, Imad eddinne, Hassna fatima zohra, Massouda,  
Hanane

A Mes collègues de mon *promotion*.

A tous mes amis et mes camarades : May, Siham, Fatima, Meriem, Messouda, Fatiha, Wissam, Chaima.



*Asma*



---

## Sommaire :

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

### Chapitre I : Géostatistique linéaire

1.1. Introduction .....	3
1.2. Historique .....	3
1.3. Concept de la Fonction Aléatoire.....	4
1.3.1. Variable régionalisée .....	4
1.3.2. Variable aléatoire .....	5
1.3.3. Fonctions aléatoires .....	5
1.4. Moment et stationnarité.....	7
1.4.1. Moment du premier ordre .....	7
1.4.2. Moment du second ordre .....	7
1.4.3. Stationnarité .....	8
1.4.4. Ergodicité .....	10
1.5. Notion de Variance d'estimation.....	11
1.6. Analyse variographique .....	12
1.6.1. Introduction .....	12
1.6.2. Estimation du variogramme .....	13
1.6.3. Modélisation du variogramme .....	17

### Chapitre II : Théorie du Krigeage

2.1. Introduction.....	24
2.2. Estimation par krigeage.....	24
2.2.1. Définition.....	24
2.2.2. Objectif du krigeage .....	24
2.3. Equations générales du krigeage.....	25
2.4. Les étapes du krigeage .....	27
2.4.1. Linéarité (L) .....	27
2.4.2. Autorisation (A) .....	28

---

2.4.3. Universalité (U) .....	28
2.4.4. Optimalité (O) .....	28
<b>2.5. Mise en place des équations du krigeage .....</b>	<b>29</b>
2.5.1. Krigeage stationnaire à moyenne connue – krigeage simple .....	29
2.5.2. Krigeage stationnaire à moyenne inconnue – krigeage ordinaire .....	30
<b>2.6. Les modèles non stationnaires .....</b>	<b>32</b>
2.6.1. La dichotomie.....	32
2.6.2. Krigeage universel à modèle sous-jacent stationnaire d'ordre .....	34
2.6.2.1. Signification du modèle .....	34
2.6.2.2. Estimation.....	34
2.6.3. Krigeage universel à modèle sous-jacent intrinsèque strict.....	35
2.6.3.1. Particularité de ce modèle .....	35
2.6.3.2. Estimation.....	35
<b>2.7. Propriétés du krigeage .....</b>	<b>37</b>
<b>2.8. Evaluation de l'erreur : la variance de krigeage.....</b>	<b>38</b>
<b>2.9. Conclusion.....</b>	<b>39</b>

## **Chapitre III : application à la piézométrie de la nappe alluviale de Benaceur Benchohra**

<b>3.1. Introduction.....</b>	<b>41</b>
3.1.1 Analyse Géostatistique d'un premier exemple théorique....	41
3.1.2. Analyse Géostatistique d'un deuxième exemple théorique..	43
<b>3.2. Présentation de la zone d'étude.....</b>	<b>45</b>
3.2.1. Cadre Géographique.....	45
3.2.2. Contexte Hydrogéologique.....	46
<b>3.3. Analyse des données.....</b>	<b>47</b>
3.3.1. Système de Bennaceur Benchohra.....	47
3.3.2. Piézométrie .....	48
<b>3.4. Discussions des résultats .....</b>	<b>50</b>

---

<b>3.5. Conclusion.....</b>	<b>59</b>
-----------------------------	-----------

## Liste des figures

Figure 1 - concept de la fonction aléatoire.....	6
Figure 2 - Nuée variographique. ....	13
Figure 3 - la carte variographique. ....	14
Figure 4 - h-scattergramme. ....	14
Figure 5-27 - Modèle de variogramme pépitique pur. ....	18
Figure 6 - Modèle de variogramme sphérique. ....	18
Figure 7 - Modèle de variogramme exponentiel. ....	19
Figure 8 - Modèle de variogramme gaussien. ....	19
Figure 9 - Modèle de variogramme cubique. ....	20
Figure 10 - Modèle de variogramme à effet de trou. ....	20
Figure 11 - Modèle de variogramme puissance. ....	21
Figure 12 - Modèle de variogramme linéaire. ....	21
Figure 13 - Eléments de structuration de la variable régionalisée z. ....	41
Figure 14 - Histogramme de la variable régionalisée z. ....	42
Figure 15 - Variogramme Expérimental.....	42
Figure 16 - Anisotropie directionnelle du variogramme. ....	42
Figure 17 - Champ aléatoire de la variable Z avec lieux d'échantillonnage de la variable régionalisée z. ....	43
Figure 18 - Variogramme expérimental et variogramme théorique Gaussien.....	44
Figure 19 - Répartition spatiale de la variable régionalisée z obtenue par krigeage. ...	44
Figure 20 - Répartition de la variance de krigeage . ....	45
Figure 21 - Carte de situation géographique du secteur d'étude. ....	46
Figure 22 - Carte géologique de la région de la vallée de l'Oued M'Zi. ....	47
Figure 23 - Coupe géologique interprétative de la vallée de l'oued M'zi. ....	48
Figure 24 - Carte piézométrique de la Nappe Mio-pliocène. ....	49
Figure 25 - Localisations des forages et des puits de la vallée de l'Oued M'Zi. ....	49

Figure 26 - répartition des données. ....	51
Figure 27 - le variogramme. ....	51
Figure 28 - carte piézométrie par krigeage. ....	52
Figure 29 - carte de variance de krigeage. ....	52
Figure 30 - Carte de la répartition de la variance de krigeage des charges hydrauliques .....	53
Figure 31 -Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental, Carte piézométrique estimée par krigeage et carte de variance de krigeage, (Distance h maximale =100m).....	53
Figure 32 -Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental, Carte piézométrique estimée par krigeage et carte de variance de krigeage, (Distance h maximale =200m). ....	54
Figure 33 -Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental, Carte piézométrique estimée par krigeage et carte de variance de krigeage, (Distance h maximale =500m). ....	54
Figure 34 - Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental, Carte piézométrique estimée par krigeage et carte de variance de krigeage, (Distance h maximale =1000m). ....	55

**Liste des tableaux :**

Tableaux n°01 : Gradients hydrauliques des différentes zones de la vallée de l'Oued M'Zi  
(Nappe du Tertiaire Continental période Mai-Juin 2011)

## ملخص

كجزء من برنامج البحث العلمي، تقرر اختبار امكانيات مختلفة لتطبيق دراسة الموارد المائية، توجد عدة برامج للاحصاء الجغرافي متاحة للدراسة المكانية للمتغيرات العشوائية (في حالتنا).

يحتوي البحث على ثلاثة أجزاء، الجزء الأول هو المفاهيم الأساسية للإحصاءات الجغرافية، حيث يتم شرح مفاهيم الجيولوجيا الأرضية لتنفيذ دراستنا ..

الجزء الثاني هو عرض للتقنية المستخدمة لتقدير البيانات من قياس القياسات في وادي مزي ، هو كريجينغ.

وفي الجزء الثالث نقترح أن نقدم مثالا على تطبيق البيانات بيزوميتريك يرافقه تفسيرات هذه النتائج.

## RESUME

Dans le cadre du programme de recherche scientifique il a été décidé de tester différentes possibilités d'application à l'étude des ressources en eau, des logiciels de géostatistique disponible pour l'étude spatiale des variables aléatoires (dans notre cas).

La synthèse comporte trois parties, la première partie est des concepts de bases de la géostatistique, ou il est exposé les notions de cette dernière pour mener à bien notre étude.

La deuxième partie est une présentation de la technique utilisée pour l'estimation des données de la piézométrie de la nappe de oued M'zi, c'est le krigeage

Et dans la troisième partie nous nous proposons d'exposé un exemple d'application aux données piézométriques avec les résultats accompagnés de ces interprétations.

## ABSTRACT

As part of the scientific research program, it was decided to test different possibilities of application to the study of water resources, geostatistics software available for the spatial study of random variables (in our case).

The synthesis has three parts, the first part is basic concepts of geostatistics, or the notions of geostatistics are explained to carry out our study.

The second part is a presentation of the technique used to estimate the data of the piezometry of the wadi M'zi wad, it is the kriging

And in the third part we propose to present an example of application to the piezometric data with the results accompanied by interpretations.

# Introduction générale

---

## Introduction générale :

L'apport de la géostatistique dans les sciences de l'eau n'est plus à démontrer. Des données à référence spatiale sont de plus en plus exploitées dans divers domaines de recherche. Dans le domaine des sciences de l'eau, ces données possèdent toutes un point en commun : elles sont localisées dans l'espace géographique. Cependant, le traitement statistique de ce type de données demande une attention particulière car l'hypothèse classique selon laquelle les observations sont indépendantes et identiquement distribuées est rarement vérifiée. A ce titre, des méthodes statistiques adaptées à l'analyse de données à référence spatiale ont été développées par de nombreux auteurs parmi lesquels Matheron (1970), Delhomme (1976), Ripley (1981), Cressie (1993) . .

Ce mémoire porte sur l'une de ces méthodes, le krigeage, développé par Georges Matheron. Le krigeage sert à effectuer de l'interpolation spatiale, c'est-à-dire qu'il permet de prévoir la valeur prise par un phénomène naturel d'un site à partir d'observations ponctuelles de ce phénomène en des sites voisins.

La première question qui a motivé ce travail est donc simplement : qu'est-ce que le krigeage ? La réponse à une question en amenant une autre, il faut d'abord se demander en quoi consiste l'interpolation spatiale. Evidemment, ce travail ne vise pas seulement à définir le krigeage, mais, le but est de comprendre la méthode et d'apprendre comment l'utiliser. Ainsi, parmi les objectifs de ce travail l'approfondissement des fondements mathématiques du krigeage et l'examen de la méthodologie générale de mise en œuvre du krigeage.

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres. Le premier chapitre donne une première idée générale sur la géostatistique linéaire et ses notions élémentaires. Le deuxième chapitre présente la théorie du krigeage. Enfin, le troisième chapitre permet des applications sur deux cas théoriques et un cas pratique, celui de la piézométrie de la nappe alluviale de la région de Bennaceur Benchohra. Les calculs ont été réalisés à l'aide de nos programmes de calcul sous l'environnement Matlab.

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

---

## 1.1. Introduction

Interpoler, c'est intercaler des valeurs dans une série de valeurs existantes et connues. Par extension, interpoler spatialement la piézométrie consiste à réaliser, à partir de données mesurées ponctuellement, dans les stations de mesure, des champs de charge, de manière à connaître une charge estimée en chaque point de l'espace étudié. L'interpolation est donc une notion liée à celle de variable régionalisée, fonction numérique décrivant des valeurs dans un espace dénommé champ. La plupart du temps, cette variable régionalisée varie de façon irrégulière et on ne peut lui appliquer une fonction mathématique explicite. Néanmoins, une structure spatiale lui est associée: ses valeurs sont plus ou moins corrélées entre elles. C'est cette propriété qui permet la prévision de valeurs manquantes ou inconnues, à partir de valeurs connues, localisées dans l'espace grâce à des techniques dites d'estimation. Pour les phénomènes régionalisés, les techniques d'interpolation stochastiques semblent plus fiables que les méthodes déterministes, puisqu'elles tiennent compte de l'auto corrélation spatiale des données d'une part, et permettent de calculer l'erreur d'estimation, d'autre part.

Le krigeage constitue le meilleur estimateur linéaire sans biais dans le domaine de la géostatistique et sera mis en pratique dans ce mémoire pour le calcul des cartes des charges piézométriques. Pour cela, nous allons, dans cette partie, présenter le détail mathématique afin d'obtenir la forme d'une prévision en krigeage.

## 1.2. Historique

Dans les années 1950, des ingénieurs des mines sud-africains H.S. Sichel (1949), D.G. Krige (1951) et H.J de Wijs (1952) faisaient des calculs pour évaluer les ressources en minerai d'un gisement à partir d'un petit nombre de sondages prélevés en des sites irrégulièrement repartis dans le domaine d'étude (Gilles Guillot, 2004), (H. Feki, 2009). Dans ce contexte, la quantité d'intérêt était inconnue et traitée comme une variable aléatoire. Mais il était impossible d'assimiler les teneurs mesurées aux différents sites de sondes à des réalisations de variables aléatoires indépendantes. Cette situation : (i) un formalisme probabiliste pour représenter des quantités inconnues (ii) l'impossibilité de supposer une indépendance entre les données, (iii) l'existence d'une structuration de la variable étudiée par rapport aux coordonnées d'espace est caractéristiques de la statistique spatiale. Quand les mesures sont réalisées en des sites irrégulièrement espacés choisis par l'expérimentateur, on se trouve exactement dans la situation du problème d'évaluation d'un gisement, qui a donné lieu à de nombreux développements méthodologiques : *la Géostatistique*.

Le Professeur Georges Matheron est le fondateur de la Géostatistique, on la définit comme étant l'application du formalisme des fonctions aléatoires à la reconnaissance et l'estimation spatiale des phénomènes naturels (G. Matheron, 1970). Le mot « géostatistique » fait son apparition en 1962 et il est indéniable que les problèmes miniers ont joué un rôle privilégié, plus précisément encore, ce sont les problèmes rencontrés par les mineurs d'or d'Afrique du Sud qui suscitent les premières recherches c'est le premier âge de la géostatistique (H. Feki,

2009). L'idée directrice de ces recherches est de pallier les insuffisances de la statistique classique constatées dans l'étude des gisements très disséminés (G. Matheron, 1970).

Le second âge de la Géostatistique peut situer entre 1965 jusqu'à la fin des années 1970, il y a eu le développement de la géostatistique non stationnaire puis la géostatistique non linéaire. Des formalismes nouveaux apparaissent tel que les simulations conditionnelles ou non conditionnelles, les ensembles aléatoires,... etc. Ce second âge peut être clos par l'ouvrage qui s'intitule : « Estimer et Choisir », écrit par G. Matheron en 1978.

Actuellement, la géostatistique du troisième âge est en pleine expansion.

## 1.3. Concept de la Fonction Aléatoire

Avant de commencer toute étude géostatistique, le spécialiste dispose d'informations brutes telles que le phénomène, qu'il va chercher à mettre en forme puis à exploiter dans le cadre de tel ou tel problème. Or, les modèles déterministes ne permettent pas de décrire le phénomène de façon quantitative, vu leur variabilité spatiale. Toutefois, celle-ci n'est pas pour autant totalement « chaotiques » ou aléatoires ; il présente une structure spatiale que les méthodes géostatistiques mettent en évidence par l'analyse des données disponibles (G. Matheron, 1970) (H. Feki, 2009).

Pour cela, la géostatistique a choisi de s'attaquer aux phénomènes régionalisés. *Par phénomène régionalisé nous entendons un phénomène naturel qui se déploie dans l'espace et y manifeste une certaine structure.* A la base de toute analyse géostatistique, il faut nécessairement un jeu de données réparties dans l'espace d'étude  $D$ .

Notons  $(z(s_i))$  avec  $s_i \in D$  tel que  $D = \{i / i = 1 \dots n\}$ , l'ensemble des valeurs de la variable d'étude  $z$  mesurée en  $n$  points si de coordonnées  $(x_i, y_i) i = 1, n$ .

### 1.3.1. Variable régionalisée

Nous supposons que le phénomène régionalisé est connu sur un domaine borné  $D$  et prenant ses valeurs dans  $\mathfrak{R}$ . Ce phénomène se laisse décrire de manière satisfaisante par la donnée d'une fonction  $z$  définie sur  $D$ . Celle-ci n'est pas nécessairement une fonction analytique mais elle est définie plus généralement comme une variable régionalisée (VR) (G. Matheron, 1970, G. Matheron 1978). Les manipulations effectuées sur les VR peuvent également être appliquées au cas particulier des fonctions analytiques, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie (G. Matheron, 1970).  $\mathbb{R} \mathcal{R}$

C'est précisément parce que les phénomènes régionalisés naturels ne pouvaient pas être modélisés de façon satisfaisante par des fonctions analytiques, que Georges Matheron a proposé la théorie des variables régionalisées ou géostatistique. En effet, les variations spatiales de la plupart des propriétés observables à la surface de la terre sont souvent si erratiques qu'aucune fonction mathématique simple ne puisse les décrire ; il y a néanmoins

dans la plupart des cas une structure, une tendance spatiale laquelle est prise en compte par la théorie des VR dans les calculs d'interpolation du phénomène : le phénomène régionalisé était une réalité physique, la VR est une fonction : c'est un être mathématique susceptible de traitement numérique (H. Feki, 2009).

## 1.3.2. Variable aléatoire

Une autre approche est de considérer le jeu des  $n$  valeurs  $(z(s_i))_{i=1,n}$  observées sur le domaine étudié comme le résultat d'un mécanisme aléatoire : la valeur échantillonnée représente une des valeurs possibles de la variable aléatoire (VA)  $Z(s_i)$ .

En chaque point  $(s_i)_{i=1,n}$ , la variable aléatoire  $Z(s_i)$  peut a priori prendre différentes valeurs de  $(z(s_i))_{i=1,n}$ .

## 1.3.3. Fonctions aléatoires

L'ensemble des VA  $\{Z(s)/s \in D\}$  constitue une fonction aléatoire (FA) notée  $Z(\cdot)$ , qui est le pendant probabiliste de la VR  $z(\cdot)$ . Le modèle de FA étant défini à la fois dans un espace topologique et dans un espace probabilisé, il est parfois qualifié de topo-probabiliste (G. Matheron, 1970).

L'espace probabilisé est un triplet  $(\Omega, A, P)$ , où en termes intuitifs (G. Matheron, 1978):

- $\Omega$  est l'inventaire des états possibles du système étudié.
- $A$  est l'ensemble des événements relatifs aux états du système ayant un sens.
- $P$  est une loi de probabilité.

Considérer que la VR  $z(\cdot)$  est une réalisation de la FA  $Z(\cdot)$ , consiste à identifier  $z(\cdot)$  et  $Z(s, \omega)$  où  $s \in D$  et  $\omega$  est un événement de  $A$  de probabilité  $P(\omega)$ .

Chauvet insiste sur le fait que cette démarche constitue *une décision complètement arbitraire*. Décision, qui, une fois prise nous permet d'aller puiser dans la trousse à outils géostatistiques pour tenter de faire apparaître cette loi spatiale. L'intérêt est de passer de mesures discrètes à un phénomène continu.

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

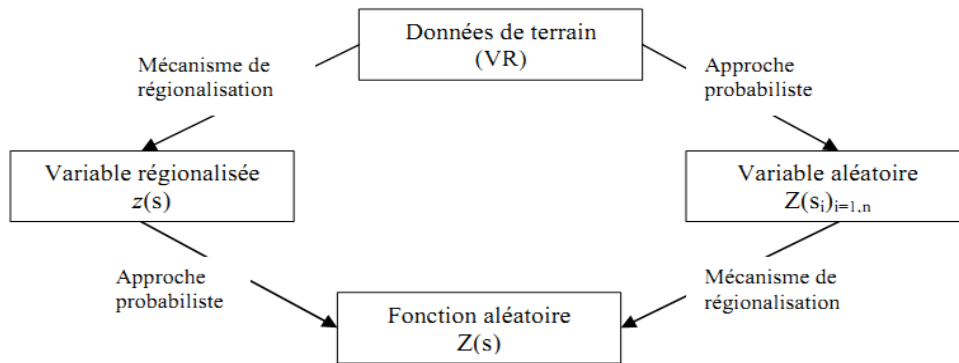


Fig. 01 : - Concept de la Fonction Aléatoire

En pratique, nous notons plus simplement  $Z(\cdot)$ , et une première source de confusion relativement fréquente dans la littérature consiste à nommer VR la FA elle-même. Un abus de langage encore plus prononcé consiste à identifier directement la FA au phénomène régionalisé lui-même ce qui, évidemment, n'a aucun sens (G. Matheron, 1970).

Dès lors que le principe de la modélisation topo-probabiliste est retenu, l'objectif central de la géostatistique est de proposer des modèles de FA qui puissent rendre compte de façon suffisamment fine de la variation spatiale exhibée par la VR, tout en autorisant des opérations mathématiques moins restrictives que possibles. Le choix d'un type de FA étant fait, la géostatistique propose d'opérer dans l'espace probabilisé, puis d'exprimer les résultats de ces opérations sur le même plan que la VR (G. Matheron, 1970). Devant la richesse du modèle de FA, la première idée sera de nous limiter à une classe plus modeste, c'est-à-dire à un ensemble de FA satisfaisant à un certain nombre de contraintes.

On choisit des contraintes qui permettent, dans une certaine mesure, de contourner la difficulté liée à l'unicité de la réalisation disponible (G. Matheron, 1970 & 1978). La VR  $z(s)$  a donc une signification concrète, en ce sens que l'on pourrait imaginer la connaître entièrement en échantillonnant exhaustivement le champ. Au contraire, la FA  $Z(s)$  est une entité abstraite, qui n'existe pas dans la réalité ; plusieurs fonctions aléatoires peuvent être acceptables pour modéliser une même VR, car il existe de nombreuses façons pour décrire les dépendances entre des valeurs numériques.

Mathématiquement, une FA  $Z(s_i)$ , notée  $Z_i$ , est caractérisée par sa loi spatiale, qui correspond à la donnée de toutes les lois de probabilité de tous les vecteurs aléatoires  $(Z_1, \dots, Z_n)$  que l'on peut extraire de  $Z(s)$  avec  $s = \{s_i / i=1, \dots, n\}$ . Cette définition paraît extrêmement complexe en effet, afin de pouvoir mettre en œuvre les techniques géostatistiques, il sera nécessaire de résumer la loi spatiale à ses paramètres les plus importants et significatifs. Cette contrainte de simplification est motivée par deux

raisons : d'une part, la commodité des manipulations mathématiques, et d'autre part, la possibilité de réaliser l'inférence statistique : il est illusoire de vouloir déterminer la loi spatiale entière, qui contient une infinité de paramètres, à partir d'un nombre nécessairement limité de données disponibles. Une première simplification du modèle consiste à distinguer deux FA:  $Z_1$  et  $Z_2$  uniquement sur la base de leurs deux premiers moments : L'Espérance et la Variance.

## 1.4. Moment et stationnarité

### 1.4.1. Moment du premier ordre :

Le moment du premier ordre d'une FA  $Z(.)$  Correspond à son espérance mathématique qui dépend du point  $s$  :

$$E [Z(s)] = m(s) \quad (1)$$

L'espérance en un point  $s$  donné représente la moyenne autour de laquelle les valeurs possibles de  $Z(.)$  se distribuent. Il s'agit d'une moyenne prise sur les différentes réalisations de la fonction aléatoire, pas d'une moyenne dans l'espace ; par abus de langage cependant, on confond parfois les termes « espérance » et «moyenne». La moyenne  $m$  est appelée aussi dérive de la FA  $Z(.)$ .

### 1.4.2. Moment du second ordre :

Les moments du second ordre vont fournir une description élémentaire de la loi bivariable de  $Z(.)$ , c'est-à-dire la loi de probabilité entre les valeurs prises en deux sites  $S_i$  et  $S_j$ . La variance, lorsqu'elle est définie, s'exprime par :

$$var [Z(s) ] = E \{[Z(s) - m(s)]^2\} \quad (2)$$

Si la variance est définie, la covariance «  $cov (Z_i, Z_j)$  » entre  $Z_i$  et  $Z_j$  l'est également. Elle qualifie la corrélation entre les valeurs prises en  $S_i$  et  $S_j$  et elle sera notée  $C_{ij}$  :

$$C_{ij} = cov [ Z_i, Z_j ] = E \{[Z_i - m_i][Z_j - m_j] \} \quad (3)$$

avec  $m_i$  qui représente l'espérance en  $S_i$  :  $m(s_i)$

La covariance entre la FA  $Z(s)$  et elle-même est égale à sa variance :

$$cov [Z(s), Z(s)] = var [ Z(s) ] = E \{[Z(s) - m(s)]^2\} \quad (4)$$

qui mesure la dispersion de  $Z(s)$  autour de sa valeur moyenne  $m(s)$ .

## 1.4.3. Stationnarité :

Il existe plusieurs acceptions du terme stationnarité selon qu'il s'agit de la VR ou de la FA qui la modélise. Dans le cas de la VR, nous parlons d'homogénéité spatiale pour décrire l'absence de tendance marquée à l'échelle considérée, et nous réservons le terme de stationnarité aux FA.

Faire l'hypothèse de la stationnarité revient à compenser l'absence de plusieurs réalisations de la FA par une forme de redondance de l'information au sein d'une seule réalisation. Il convient toutefois de distinguer plusieurs formes de stationnarité d'une FA. Chauvet définit la stationnarité en disant que «tout se passe de la même façon dans toutes les régions de l'espace».

### ➤ Stationnarité stricte :

Une fonction aléatoire est stationnaire (FASt) si pour  $n$  fini, la loi spatiale est invariante par translation. Matheron énonce :

Si  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  sont  $n$  points d'appui arbitraire et si  $h$  est un vecteur quelconque, les  $n$  FA  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ , ont la même loi que les  $n$  FA  $\{Z_{1+h}, Z_{2+h}, \dots, Z_{n+h}\}$ .

Modéliser une VR par une FASt stricte correspond à une hypothèse irréaliste parce que beaucoup trop forte vis-à-vis de l'homogénéité spatiale de la VR. En outre, comme la géostatistique linéaire (la plus largement utilisée en pratique) ne fait référence qu'aux deux premiers moments de la FA, il suffit d'affaiblir les hypothèses en ne pas imposant la stationnarité des moments au-delà de l'ordre deux.

### ➤ Stationnarité d'ordre deux :

En ce qui concerne la stationnarité d'ordre 2, elle s'énonce comme suit : « *Les espérances des valeurs ponctuelles et des doublets de points du processus existent, et sont invariants par translation* ».

Mathématiquement, Matheron [1970] définit la stationnarité d'ordre deux comme suit : Une FA  $Z(s)$  est dite stationnaire du second ordre (FASt-2) si la VA  $Z_0$  admet une espérance  $m$  indépendante de  $s_0$  et si pour tout vecteur  $h$  la covariance existe et ne dépend pas du point  $s_0$  soit:

$$C(h) = E[Z_{0+h} \cdot Z_0] - m^2 \quad (5)$$

On se limite aux moments d'ordre deux car la covariance permet de caractériser la structure spatiale de la VR. En toute rigueur, l'hypothèse d'existence des moments d'ordre 1 et 2 suffit pour que la covariance puisse être définie en tout point du

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

champ géométrique. Mais l'inférence de la covariance est impossible en une infinité de points.

L'hypothèse de stationnarité d'ordre deux permet de s'affranchir de ce problème et permet donc d'estimer l'espérance et la covariance sur le domaine d'étude, à partir de mesures de la VR.

A l'instar de la covariance, la variance en tout site  $s$  existe:

$$\forall s, \text{var} \{Z(s)\} = E \{[Z(s) - m]^2\} = C(0) \quad (6)$$

avec 0 désigne le vecteur nul. Cette hypothèse suppose l'existence d'une variance à priori finie  $C(0)$  (G. Matheron, 1970).

## ➤ Hypothèse intrinsèque :

La stationnarité d'ordre deux étant une hypothèse forte, Matheron [1970] propose d'utiliser une autre classe de fonctions pouvant caractériser la structure spatiale de la FA : c'est l'hypothèse intrinsèque. Cette dernière cherche à affaiblir l'hypothèse de stationnarité du second ordre, de sorte à être compatible avec des variances infinies car d'assez nombreux phénomènes présentent une capacité de dispersion illimitée et ne peuvent pas être décrits correctement si on leur attribue une variance a priori finie (G. Matheron, 1970 et 1978).

On dit que  $Z(s)$  est une fonction aléatoire intrinsèque, notée FAI, si pour tout vecteur  $h$ , l'accroissement  $Z(s+h) - Z(s)$  est stationnaire d'ordre deux, autrement dit, si l'espérance et la variance de l'incrément  $Z(s+h) - Z(s)$  existent et ne dépendent pas de  $s$  (G. Matheron, 1970), (H. Feki, 2009), (G. Matheron, 1978).

$$\forall s, h, E \{Z(s+h) - Z(s)\} = m(h) \quad (7)$$

$$\forall s, h, \text{var}\{Z(s+h) - Z(s)\} = E\{[Z(s+h) - Z(s) - m(h)]^2\} = 2\gamma(h) \quad (8)$$

où  $m(h)$  est appelée dérive de la FA et  $\gamma(h)$  est le variogramme.

$$\forall s, h, \text{var}\{Z(s+h) - Z(s)\} = E \{[Z(s+h) - Z(s)]^2\} = 2\gamma(h) \quad (9)$$

Il convient de noter que dans le modèle intrinsèque, il ne figure plus aucune hypothèse d'existence concernant l'espérance et la variance des FA elles-mêmes, de sorte que tous les développements mathématiques s'effectuent, en toute rigueur, uniquement sur les accroissements. Par conséquent, la covariance peut ne pas exister et seul le variogramme est défini avec certitude.  $\gamma(h)$  est une fonction appelée semi variogramme, ou selon l'usage de plus en plus répandu, variogramme (G. Matheron, 1970 & 1978), (H. Feki, 2009).

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

---

Pour deux points  $s_i$  et  $s_j$ , la relation entre  $\gamma(Z_i, Z_j)$  (noté  $\gamma_{ij}$ ) et  $C_{ij}$  est donnée par :

$$\gamma_{ij} = C(0) - C_{ij} \quad (10)$$

En effet, on a par définition :  $2\gamma_{ij} = E \{ [Z_i - Z_j]^2 \}$

En développant,  $2\gamma_{ij} = E \{ (Z_i)^2 + (Z_j)^2 - 2 Z_i Z_j \}$

$$2\gamma_{ij} = E(Z_i)^2 + E(Z_j)^2 - 2 E(Z_i Z_j)$$

En s'appuyant sur les équations (5) et (6) on aura :

$$2\gamma_{ij} = 2C(0) - 2C_{ij}$$

Soit  $h$  le vecteur distance entre les deux points  $s_i$  et  $s_j$  de coordonnées respectives

$(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  on a alors :  $|h| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Et :  $\gamma(h) = C(0) - C(h)$

## 1.4.4. Ergodicité :

Dans un contexte de mono réalisation, l'hypothèse de stationnarité d'ordre deux doit être complétée par l'hypothèse d'ergodicité. Une FA est dite ergodique si ses paramètres peuvent être inférés à partir d'une seule réalisation, c'est-à-dire, si les espérances peuvent être estimées par des moyennes spatiales.

L'ergodicité considère que la suite des moyennes d'espace

$$Z_n = \frac{1}{[S_n]} \int_{S_n} Z(x) dx$$

converge vers l'espérance mathématique  $E(Z)$  (qui est invariante dans l'espace d'après l'hypothèse de stationnarité) lorsque les domaines  $S_n$  tendent vers l'infini.

Il est important de noter que l'ergodicité n'a de raison d'être que dans la mesure où le problème posé est celui de l'inférence des paramètres d'une FA à partir d'une seule réalisation. Dès lors que le point de vue se porte sur la VR elle-même et que la FA est considérée comme un intermédiaire opératoire, il n'est plus nécessaire d'invoquer l'ergodicité du modèle (H. Feki, 2009).

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

---

On dit qu'une fonction aléatoire  $Z(s)$  est stationnaire à l'ordre 1 si son espérance est la même en tout point de l'espace, soit formellement :

$$\exists m \in R = E [Z(s)] = m \quad \forall s \quad (11)$$

On dit que  $Z(s)$  est stationnaire à l'ordre 2 si l'espérance et la covariance sont invariantes par translation :

$$\exists C \quad Cov [Z(s), Z(s')] = C(s - s') \quad \forall s ; s' \quad (12)$$

Lorsque les hypothèses (11) et (12) sont vérifiées, la description de la distribution statistique de  $Z$  s'en trouve considérablement simplifiée. Tous les moments d'ordre deux se déduisent de la fonction de covariance  $C(h) = C(s - s')$  et de la moyenne  $m$ .

En toute généralité, une fonction de covariance est définie pour tous les couples  $s, s'$ .

Lorsque  $Z$  est stationnaire, la fonction de covariance se réduit à une fonction d'une seule variable d'espace, ce que l'on note abusivement  $C(s; s') = C(s - s') = C(h)$ . Il arrive que cette fonction  $C$  ne dépendent pas non plus de la direction du vecteur  $h$ , mais seulement de sa norme :  $C(h) = C(|h|)$ . Ceci exprime que la variable n'est pas structurée selon des directions préférentielles, on dit que  $Z$  et  $C$  sont isotropes. Dans le cas contraire, on dit que  $Z$  et  $C$  sont anisotropes.

Il se trouve que l'hypothèse de stationnarité constitue souvent en première approximation un bon compromis entre fidélité aux données et simplicité mathématique. Mais bien souvent, cette hypothèse est faite d'emblée sur les données car il est difficile de la tester efficacement. On cherche ensuite le moins mauvais modèle dans ce cadre simplificateur ( H. Feki, 2009).

## 1.5. Notion de Variance d'estimation

Soit  $Z_0$  une FA que l'on veut interpoler en  $s_0$ , donc son estimateur  $Z_0^*$  s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire donnée par :

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^n \gamma_i Z_i \quad (13)$$

Avec  $Z_i$  sont les valeurs observées en  $S_i$  ( $i=1 \dots n$ )

L'erreur d'estimation est définie par :

$$e = Z_0 - Z_0^* \quad (14)$$

La variance de cette erreur est la variance d'estimation, elle permet de fournir

une mesure de la précision des estimés effectués par une méthode d'estimation quelconque. Dans un cadre stationnaire d'ordre 2, on a :

$$\sigma_e^2 = \text{var} (Z_0 - Z_0^*)$$

$$\sigma_e^2 = \text{var} (Z_0) + \text{var} (Z_0^*) - 2 (Z_0, Z_0^*)$$

En substituant  $Z_0^*$  par son expression (13), on obtient :

$$\sigma_e^2 = \underbrace{\text{var} (Z_0)}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C_{ij}}_{\mathbf{b}} - 2 \underbrace{\sum_i \lambda_i C_{i0}}_{\mathbf{c}}$$

Dans la formule précédente, on reconnaît trois termes, un terme (a) liée au point à estimer, un second terme (b) lié aux points servant à l'estimation et un dernier terme (c) croisé entre les deux premiers.

La variance de l'erreur d'estimation est une mesure de la précision de l'estimation. On pourrait vouloir choisir les pondérateurs  $\lambda_i$  de façon à ce que la variance d'estimation  $\sigma_e^2$  soit minimale, c'est le krigeage.

## 1.6. Analyse variographique

### 1.6.1 Introduction :

Nous avons vu dans la partie précédente qu'une FA représente des VR, dont nous avons convenu de n'étudier que les deux premiers moments. Ceci a nécessité des hypothèses limitatives:

le concept de stationnarité et d'ergodicité.

Or, le moment du premier ordre (l'espérance) ne permet pas d'apprécier la structuration des données ; par contre, les moments d'ordre 2 (covariance et variogramme) quantifient le degré de ressemblance ou de dissemblance entre les valeurs prises en deux sites en fonction de leur séparation ; ils vont donc refléter la structure de la régionalisation. Leur inférence à partir des données expérimentales et leur modélisation est une étape cruciale dans une étude géostatistique, elle permettra postérieurement d'estimer les valeurs inconnues de la VR et d'assortir les estimations d'une mesure de leur précision. Nous allons nous baser dans l'analyse structurale, sur le variogramme car, contrairement à la covariance, c'est un outil plus général. Le variogramme est défini comme un outil servant à décrire la continuité spatiale d'un phénomène. Il repose sur l'idée voulant que deux observations séparées par une faible distance vont en moyenne se ressembler davantage que deux observations séparées par une plus grande distance.

## 1.6.2. Estimation du variogramme

### ➤ Outils d'analyse

#### ○ Nuée Variographique :

Pour étudier la stabilité numérique du variogramme expérimental, il est utile de visualiser la « nuée variographique » (fig. 02), c'est-à-dire le nuage des carrés des différences  $\left\{ \frac{1}{2} [Z_{i+h} - Z_i]^2 \right\}$  en fonction du vecteur  $h$  ou de son module.

L'examen de la nuée variographique permet de repérer les couples de données qui déstabilisent le variogramme expérimental. On peut ainsi identifier les mesures les plus atypiques, et vérifier si elles sont aberrantes ou non. Dans cette étude, cet outil d'analyse ne sera pas utilisé, car nous ne nous intéresserons pas à l'étude de stabilité de variogrammes.

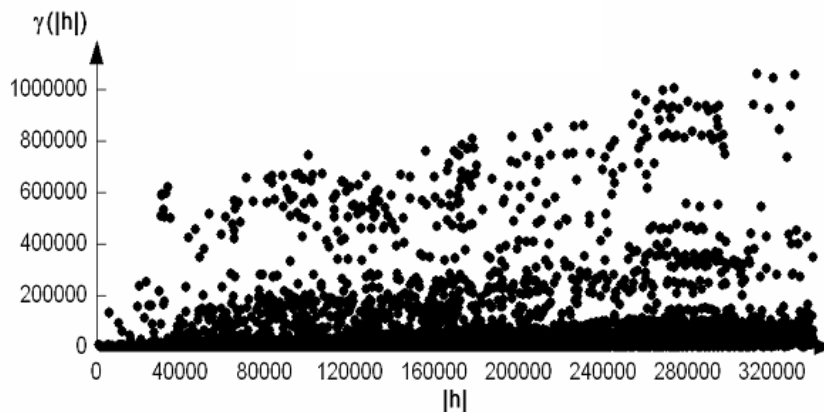


Fig. 02 : - Nuée variographique

#### ○ Carte variographique :

En pratique, les estimateurs du variogramme ne sont calculés et modélisés que le long de certaines directions de l'espace. Il est donc important de pouvoir identifier les directions les plus « significatives » lorsque le phénomène étudié est anisotrope.

Pour détecter les anisotropies, un outil graphique simple consiste à visualiser la « carte variographique » (fig. 03), c'est-à-dire les valeurs du variogramme expérimental lorsque le vecteur de séparation  $h$  se déplace dans l'espace. La direction de dépendance spatiale maximale est indiquée par les valeurs faibles de semi variance pour une distance donnée (Nord-Est/Sud-Ouest).

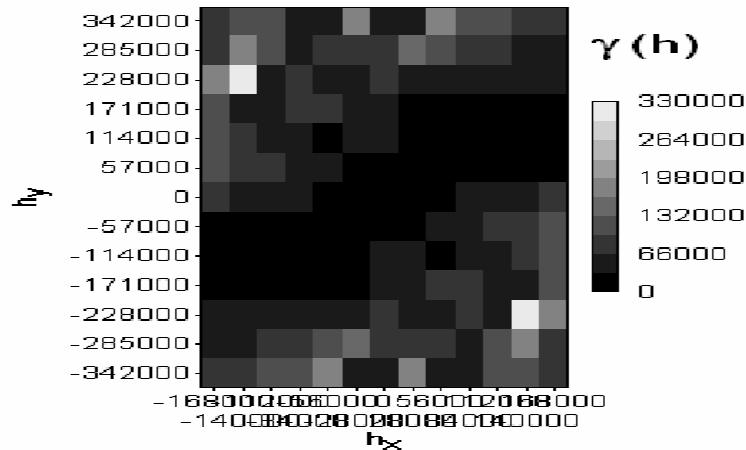


Fig. 03 : - La carte variographique

○ **h-scattergrammes :**

Les h-scattergrammes constituent un moyen simple d'exprimer la similarité (ou dissimilarité) entre paires de valeurs  $\{Z(s), Z(s+h)\}$ . Pour une distance h donnée, un h-scattergramme est obtenu en représentant Z(s) en fonction de  $Z(s+h)$  (fig. 04).

L'interprétation d'un h-scattergramme est la suivante :

- Les points alignés sur la bissectrice principale correspondent à des valeurs identiques. En conséquence, un point éloigné de cette droite est une valeur extrême qui doit être examinée et éventuellement supprimée ou corrigée s'il s'agit d'une valeur aberrante (erreur de mesure, erreur de transcription,...)

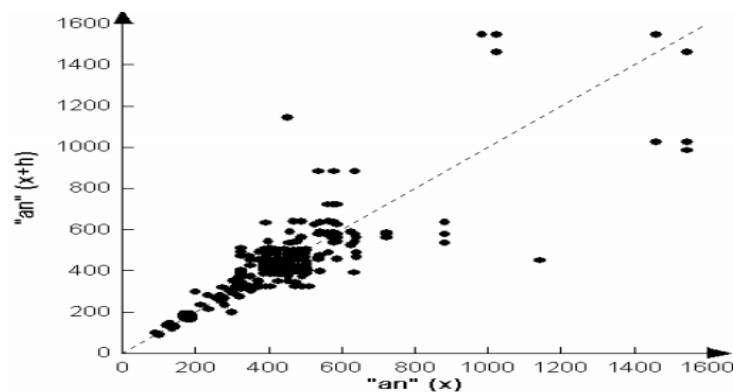


Fig. 04 : - h-scattergramme

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

---

- Plus la distance entre les points augmente, plus le nuage est diffus autour de la bissectrice principale, ce qui traduit l'affaiblissement de l'autocorrélation spatiale.
- Une asymétrie du nuage de part et d'autre de la bissectrice principale doit faire suspecter des différences entre moyennes et/ou variances locales.

## ➤ Définition du Variogramme

Le variogramme est défini comme un outil servant à décrire la continuité spatiale d'un phénomène. Il repose sur l'idée voulant que deux observations séparées par une faible distance vont en moyenne se ressembler davantage que deux observations séparées par une plus grande distance.

## ➤ Variogramme Expérimental

Soit  $Z$  une FA de supports ponctuels si tel que  $\{i=1\dots n\}$ ,  $h$  un vecteur quelconque et  $\theta$  un angle quelconque, le variogramme expérimental  $\gamma^*$  peut être directionnel ou omnidirectionnel, il s'écrit, d'après Matheron :

$$\gamma^*(h, \theta) = \frac{1}{2n(h, \theta)} \sum_{i=1}^{n(h, \theta)} [Z_i - Z_{i+h}]^2 \quad (15)$$

$n(h, \theta)$  est le nombre de paires dont les points sont espacés de  $h$  et de direction  $\theta$  et  $Z_i$  représente la FA  $Z$  au point  $s_i$ . L'équation 15 est généralement appelée estimateur de « Matheron » ou bien estimateur «classique».

Le variogramme expérimental n'est pas exactement une fonction, mais un nuage de points indiquant que plus les points de mesures sont éloignés, plus l'écart moyen entre les valeurs mesurées est grand. Idéalement, afin qu'un point du variogramme expérimental soit jugé représentatif, il est nécessaire que  $n(h) \geq 30$ .

En analysant la précision de l'estimateur de Matheron, Yang et Lake (1989) concluent que la précision de cet estimateur décroît quand le pas de distance et/ou la longueur d'auto corrélation croît. Donc, c'est uniquement les premiers points de l'estimateur de Matheron qui peuvent être considérés significatifs.

Au-delà de ces points, le variogramme est déformé et la structure spatiale est inconnue. La raison principale pour cette déformation est que l'estimation du variogramme est basée sur de moins en moins de paires de données quand les pas de distance augmentent. C'est pour cela qu'Arnaud et al. conseillent de calculer le variogramme expérimental seulement pour les distances inférieures à la moitié de la distance maximale entre deux points d'observation. D'autre part, le variogramme expérimental est souvent considéré comme un estimateur peu robuste, c'est-à-dire il est sensible à la présence des valeurs extrêmes ou aberrantes parmi les données en raison du carré qui intervient dans son expression.

# Chapitre I : Géostatistique Linéaire

---

La sensibilité aux valeurs extrêmes concerne généralement toutes les mesures d'auto corrélation spatiale, mais elle s'avère particulièrement grande dans le cas du variogramme. Afin de pallier l'absence de robustesse de l'estimateur classique, des estimateurs ont été proposés par différents auteurs. A titre d'exemple, nous citons l'estimateur de Cressie l'estimateur de Srivastava et Parker et l'estimateur de Li . Plusieurs auteurs considèrent que ces estimateurs ne peuvent pas être utilisés à la place de l'estimateur classique lorsque les données présentent une distribution fortement dissymétrique .

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser au variogramme classique car Matheron a été assez critique envers ces estimateurs. En effet, ceux-ci sont souvent plus robustes vis-à-vis des données mais moins robustes vis-à-vis du modèle que des estimateurs plus simples.

## ○ Paramètres de calcul du variogramme expérimental :

Le calcul du variogramme expérimental requiert la spécification de plusieurs paramètres tel que : le pas de calcul, les directions et la tolérance.

### ▪ Pas de calcul :

Le variogramme expérimental est calculé pour des distances multiples d'un pas de référence. La procédure classique consiste à fixer à priori des classes de distances de pas constant de la forme  $h \pm \varepsilon(h)$ , où  $\varepsilon(h)$  est une tolérance et  $h$  un multiple de  $\Delta$  . Le plus simple est de considérer que la tolérance est constante, soit  $\varepsilon(h) = \varepsilon$  .

Le regroupement en classe de distances entraîne un lissage du variogramme Expérimental. Afin de pouvoir négliger l'effet introduit par le regroupement en classes de distances, il faut que la tolérance  $\varepsilon$  soit petite vis-à-vis de la portée du variogramme.

En outre, il est souhaitable d'estimer  $\gamma(\cdot)$  en utilisant toute l'information disponible, ce qui nécessite de définir les classes de distances avec une tolérance maximale  $\varepsilon = 0.5 * \Delta$  : cette tolérance est d'utilisation courante. Pour limiter les effets d'échantillonnage et à cause de la non indépendance des couples entre eux, l'effectif d'une classe doit être au moins de l'ordre d'une trentaine de couples.

### ▪ Direction de calcul

Si le phénomène étudié est anisotrope, le variogramme expérimental doit être calculé dans différentes directions de l'espace, on ne sélectionne alors pour le calcul que les couples de points orientés dans la direction choisie. En cas d'anisotropie, ce seront les directions principales d'anisotropie. En cas d'isotropie, toutes les directions sont équivalentes, et on calculera un variogramme omnidirectionnel.

## ▪ Tolérance

Lorsque l'échantillonnage est irrégulier, on introduit des tolérances de calcul, à la fois sur les distances et les angles, afin de rendre le variogramme expérimental plus stable (H. Lefki, 2009).

### 1.6.3. Modélisation du variogramme

Le variogramme expérimental est malheureusement insuffisant dès que l'on souhaite aller au-delà de la simple description et ceci pour plusieurs raisons :

- les courbes empiriques sont souvent assez erratiques, il est donc difficile de résumer en quelques mots comment elles se comportent ;
- la covariance est une fonction positive, condition qui n'est pas assurée empiriquement.

On résout ces deux problèmes, en substituant à la fonction de structure empirique une fonction appartenant à une famille paramétrique de fonction. Pour répondre au problème de l'interpolation, on a besoin d'un modèle de variogramme théorique.

L'intérêt de la modélisation d'un variogramme expérimental est essentiellement pratique :

il s'agit de passer d'une fonction définie par des points à une fonction continue dans l'espace et possédant une expression mathématique. Le modèle ne peut être quelconque, il doit appartenir à une famille paramétrique de fonction. En pratique, on utilise pour cela des fonctions de bases (modèle de variogramme sphérique, exponentiel, linéaire, ...) et leurs combinaisons linéaires positives dont on sait qu'elles possèdent les propriétés requises (H. Feki, 2009).

#### ➤ Choix du Modèle

A des fins de calcul, le choix du modèle de variogramme est tout d'abord contraint par des exigences mathématiques (G. Matheron 1976). En effet, il faut que le variogramme et la covariance assurent des variances positives quelles que soit la combinaison des fonctions aléatoires utilisée (H. Feki 2009). L'utilisation d'un modèle autorisé est une condition nécessaire pour garantir l'unicité des solutions des systèmes de krigeage.

➤ **Les Modèles théoriques élémentaires**

○ Modèles avec palier :

- Comportement discontinu à l'origine :
  - Modèle pépitique pur de palier C :

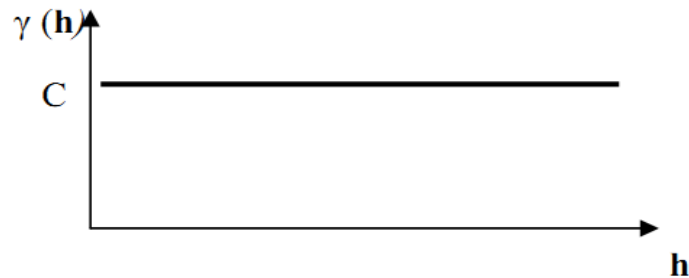


Fig. 05 : - Modèle de variogramme pépitique pur

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{pour } h = 0 \\ C & \text{pour } h > 0 \end{cases} \quad (16)$$

- Comportement linéaire à l'origine :
  - Modèle sphérique de portée d et de palier C

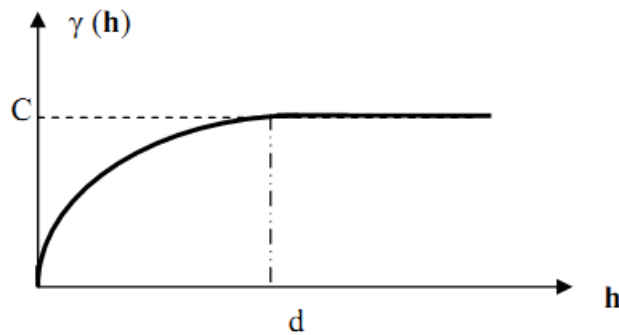


Fig. 06 : - Modèle de variogramme sphérique

$$\begin{cases} \gamma(h) = C \left[ 1,5 \frac{h}{d} - 0,5 \left( \frac{h}{d} \right)^3 \right] & \text{si } h < d \\ \gamma(h) = C & \text{si } h \geq d \end{cases} \quad (17)$$

- Modèle exponentiel de paramètre  $d$  et de palier  $C$

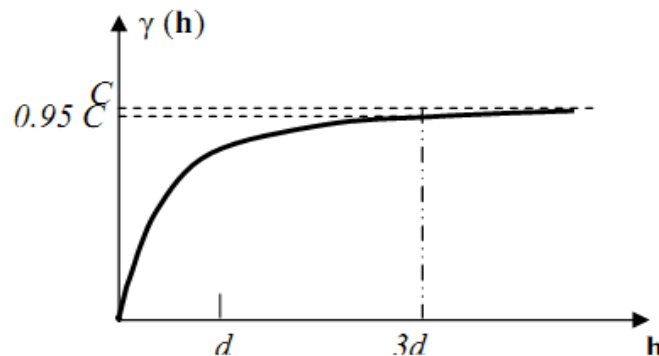


Fig. 07 : - Modèle de variogramme exponentiel

$$\gamma(h) = C \left[ 1 - e^{-\frac{h}{d}} \right] \quad (18)$$

En toute rigueur, le palier n'est jamais atteint et la portée de ce modèle est infinie. On définit toutefois une portée pratique égale à  $3d$  pour laquelle  $\gamma(h)$  atteint 95% de la valeur de son palier.

- Comportement parabolique à l'origine:
- Modèle gaussien de paramètre  $d$  et de palier  $C$

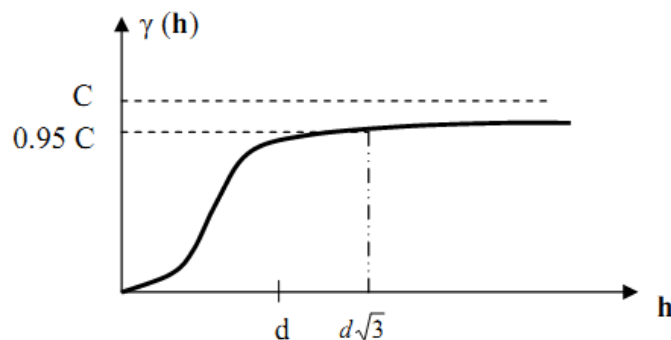


Fig. 08 : - Modèle de variogramme gaussien

$$\gamma(h) = C \left[ 1 - e^{-\frac{h^2}{d^2}} \right] \quad (19)$$

Ce modèle est indéfiniment dérivable et décrit un phénomène régulier. On définit une portée pratique égale à  $d\sqrt{3}$ .

- Modèle cubique de portée  $d$  et de palier  $C$

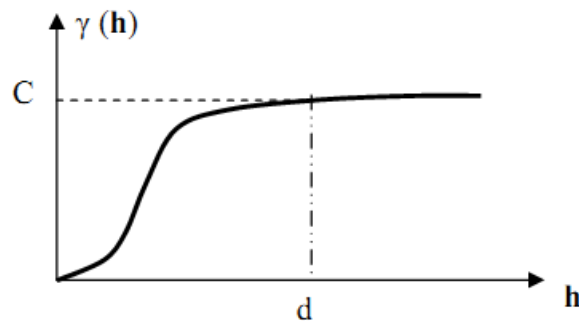


Fig. 09 : - Modèle de variogramme cubique

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[ 7 \frac{h^2}{d^2} - \frac{35}{4} \frac{h^3}{d^3} + \frac{7}{2} \frac{h^5}{d^5} - \frac{3}{4} \frac{h^7}{d^7} \right] & \text{pour } 0 < h < d \\ C & \text{pour } h \geq d \end{cases} \quad (20)$$

On parle d'effet de trou lorsque le variogramme n'est pas une fonction croissante de la distance. Il convient d'identifier la raison physique : dans l'étude des phénomènes temporels, il est fréquent d'obtenir des oscillations périodiques. On distingue :

- Modèle sinus cardinal de paramètre  $d$  et de palier  $C$

Le variogramme est pseudo périodique, sa portée pratique vaut  $20,7d$ .

$$\gamma(h) = C \left[ 1 - \frac{\sin(h/d)}{h/d} \right] \quad (21)$$

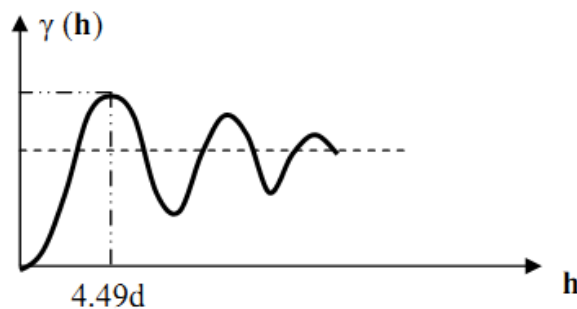


Fig. 10 : - Modèle de variogramme à effet de trou

- Modèles sans palier :

Ces modèles décrivent des fonctions aléatoires de variance infinie et sont incompatibles avec l'hypothèse de stationnarité d'ordre 2.

- Modèle puissance d'exposant  $\theta$  et facteur d'échelle  $\omega$  :

Plus  $\theta$  est proche de deux, plus la variable régionalisée est régulière ; plus  $\theta$  est faible, plus la variable régionalisée est erratique.

$$\gamma(\mathbf{h}) = \omega h^\theta \quad 0 < \theta < 2 \quad (22)$$

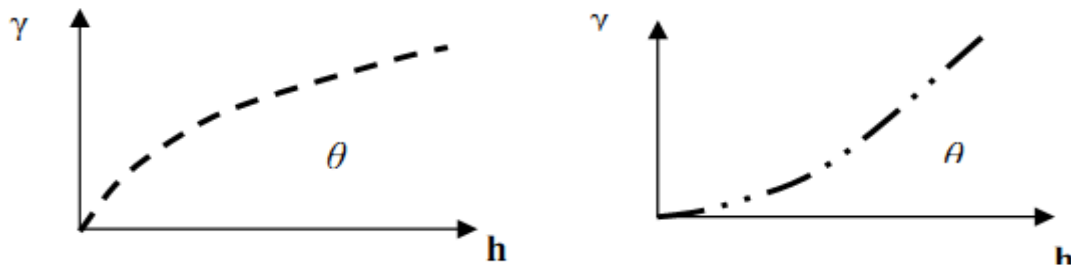


Fig. 11 : - Modèle de variogramme puissance

- Modèle linéaire de pente  $\omega$  :

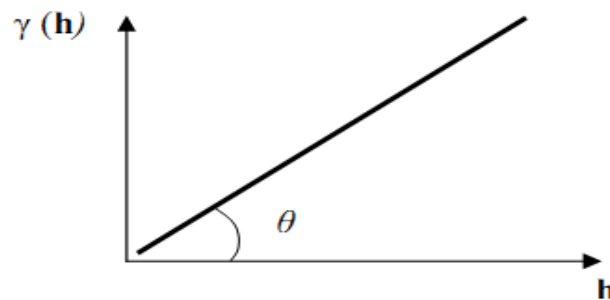


Fig. 12 : - Modèle de variogramme linéaire

Cas particulier du modèle puissance avec  $\theta = 1$ .

$$\gamma(\mathbf{h}) = \omega h \quad (23)$$

### ➤ Variogramme Théorique

Le variogramme théorique ( $h$ ) est défini par l'hypothèse intrinsèque.

L'hypothèse intrinsèque est formée de deux conditions sur les accroissements  $\mathbf{Z}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{Z}(\mathbf{x})$  de la fonction aléatoire :

- la moyenne des accroissements est invariante pour toute translation du vecteur  $h$  dans le domaine. Plus spécifiquement, la moyenne des accroissements est supposée nulle, quelle que soit la position de  $h$  dans le domaine.

## Chapitre I : Géostatistique Linéaire

---

- la variance des accroissements admet une valeur finie en fonction de  $h$  et indépendante de la position de  $h$  dans le domaine.

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} E [Z(x + h) - Z(x)] = 0 & \text{pour tout } x, x + h \in D \\ \text{var} [Z(x + h) - Z(x)] = 2\gamma(h) & \text{pour tout } x, x + h \in D \end{cases}$$

ce qui donne le variogramme théorique :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[ (Z(x + h) - Z(x))^2 \right] \quad \text{pour tout } x; x + h \in D$$

L'existence de l'espérance des accroissements d'une fonction aléatoire intrinsèque n'implique pas celle de l'espérance de la fonction aléatoire. Une fonction aléatoire intrinsèque peut avoir une variance infinie, tout en ayant une variance des accroissements finie pour tout vecteur  $h$  (H. Wackernagel 1993).

## 2.1. Introduction

Le krigeage est une méthode d'interpolation applicable à des données spatiales. Elle s'appuie sur la géostatistique linéaire, notamment le variogramme. La théorie du krigeage a été développée par un mathématicien français (G. Matheron) à partir des travaux de l'ingénieur minier sud-africain D.G. Krige. Dans les années 50, Krige a développé une série de méthodes statistiques empiriques afin de déterminer la distribution de minerais à partir d'un ensemble de forages.

## 2.2. Estimation par krigeage

Différents types de krigeage coexistent. Citons entre autres, le krigeage simple (pour une fonction aléatoire d'espérance connue), le krigeage ordinaire (le plus communément utilisé), le krigeage universel (prise en compte d'une dérive), le cokrigeage (lorsque l'on considère différents phénomènes liés) (Hengl, 2007 ; Arnaud et Emery, 2000 ; Wakernagel, 1993). Nous nous limitons ici à l'étude du krigeage ordinaire dans le cas d'une structuration isotrope du phénomène (variogramme à 1 dimension) (P. Bossier, 2013)

### 2.2.1. Définition :

Le krigeage est un outil d'interpolation linéaire et sans biais ayant la propriété d'offrir une variance d'estimation minimale. Le krigeage est nommé d'après Gerhardus Danie Krige, un ingénieur minier sud-africain qui a présenté les idées dans sa thèse de maîtrise en 1951. Ces idées ont ensuite été formalisées par un éminent mathématicien français Georges Matheron en 1962.

### 2.2.2. Objectif du krigeage :

Un problème qui se pose très souvent dans les questions environnementales et celui de l'estimation d'une valeur non mesurée : à partir d'un échantillon  $z_1; \dots; z_n$ , comment évaluer la valeur qu'on aurait trouvée au site  $s_0$  si on l'avait mesurée. Pour résoudre ce problème on va supposer que les  $z_i$  sont les valeurs aux points  $s_i$  de la réalisation d'une fonction aléatoire de fonction de covariance  $C$  connue.

Le problème de krigeage consiste à trouver la meilleure estimation possible de la teneur d'un panneau, compte tenu de l'information disponible, c'est-à-dire des teneurs de différents échantillons qui ont été prélevés, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du panneau l'on veut estimer. Le krigeage revient à effectuer une pondération, c'est-à-dire à attribuer un poids à la teneur de chaque échantillon, ces poids étant calculés de manière à rendre minimale la variance d'estimation relative, compte tenu des caractéristiques géométriques du problème (formes, dimension et implantation relative du panneau et des

échantillons). En gros, comme cela est naturel, le krigeage attribuera des poids faibles aux échantillons éloignés, et inversement. Mais cette règle intuitive peut être partiellement mise en défaut lorsqu'apparaissent des phénomènes plus complexes d'effet d'écran de transfère de l'influence. Il n'est pas naturellement possible de résoudre un problème de krigeage, c'est-à-dire de calculer effectivement le poids optimal qu'il convient d'attribuer à chaque échantillon qu'à la condition de faire certaines hypothèses sur les caractéristiques géostatistiques du gisement que l'on a étudié.

### 2.3. Equations générales du krigeage :

Enoncé sous sa forme la plus générale, le problème du krigeage peut se formuler de la manière suivante : étant donné un gisement homogène doué d'un demi-variogramme (isotrope ou non, de Wjisien ou non), dans lequel on a prélevé  $n$  échantillons  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , dont les teneurs (connues) sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on cherche à former le meilleur estimateur  $Z^*$ , soit :

$$Z^* = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \quad (24)$$

De la teneur réelle inconnue  $Z$  d'un panneau  $P$ , connaissant la forme, les dimensions et l'implantation relative de  $P$ ,  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . On peut toujours résoudre ce problème en déterminant les coefficients  $\omega_i$  de l'équation par deux conditions.

La première condition exprime que l'erreur  $Z - Z^*$  doit avoir une espérance nulle. Elle s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (25)$$

La deuxième condition est une condition de variance minimum. Elle exprime que les coefficients  $\omega_i$  krigeage ont des valeurs telles – compte tenu de la condition impérative – que la variance de  $D^2 (Z - Z^*)$  mesurant l'amplitude de l'erreur possible prenne sa valeur minimale. Or, compte tenu de (24) cette variance a pour expression :

$$D^2(Z - Z^*) = \sigma_z^2 - 2 \sum_i \omega_i \sigma_{zx_i} + \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \quad (26)$$

Les notations se comprennent d'elle-même.  $\sigma_z^2$  est la variance de la teneur réelle du panneau,  $\sigma_{zx_i}$  la covariance de  $Z$  avec la teneur  $x_i$  de l'échantillon  $s_i$  et  $\sigma_{ij}$  la covariance de  $x_i$  et  $x_j$  (en particulier  $\sigma_{ii}$  est la variance de  $x_i$ ) toutes ces variances et covariances sont calculées dans un gisement fictif, dont la dimension n'intervient pas réellement : l'influence de ce gisement fictif se manifeste pas une même constante  $A$

## Chapitre II : Théorie du Krigage

---

qui majore toutes les variances et covariances, et s'élimine en vertu de (25) l'expression (26) ne dépend donc que du demi-variogramme  $\gamma(\mathbf{h})$ .

On exprimera que cette variance est minimale compte tenu de la condition de la liaison (25) en écrivant :

$$\begin{cases} \sum_j \omega_j \sigma_{ij} = \sigma_{zx_i} + h \\ \sum_j \omega_j = 1 \end{cases} \quad (27)$$

On obtient donc un système de  $n + 1$  équations linéaire a  $n + 1$  inconnus ( les  $\omega_i$  et les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  ). Comme le paramètre de Lagrange  $\lambda$  ne présente pas d'intérêt pas lui-même, on cherchera à l'éliminer. Pour cela, on fera jouer un rôle particulier à l'un des échantillons par exemple  $S_n$  ( on pratique en choisira un échantillon occupant une position privilégiée vis-à-vis des  $n - 1$  autres, par exemple position centrale) et on écrira la condition (25) sous la forme :

$$\begin{aligned} \omega_n \\ = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \end{aligned} \quad (28)$$

Et en remplacera dans (27)  $\omega_n$  par sa valeur, soit :

$$\begin{cases} \sum_j^{n-1} \omega_j \sigma_{ij} + \omega_n \sigma_{in} = \sigma_{zx_i} + \lambda \\ \sum_j^{n-1} \omega_j \sigma_{nj} + \omega_n \sigma_{nn} = \sigma_{zx_n} + \lambda \end{cases}$$

On élimine  $\lambda$  en retranchant la dernière équation des  $n - 1$  précédente, et en remplace  $\omega_n$  par sa valeur. si l'on pose :

$$\begin{cases} R_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{nj} - \sigma_{ni} + \sigma_{nn} \\ N_i = \sigma_{zx_i} - \sigma_{zx_i} - \sigma_{in} + \sigma_{nn} \end{cases} \quad (29)$$

Le système (27) se réduit a :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \omega_j R_{ij} = N_i \quad (30)$$

## Chapitre II : Théorie du Krigeage

La résolution de ce système de  $n - 1$  équations linéaires à  $n - 1$  inconnues permet de calcul effectif des  $n$  coefficients  $\omega_i$  du krigeage,  $\omega_n$  étant donnée par (28).

En portant les valeurs ainsi obtenues dans l'expression (26) de la variance d'estimation, on obtient la valeur minimale  $\sigma_K^2$  de celle-ci que nous appellerons **variance de Krigeage**. On constate qu'elle prend la forme très simple suivante :

$$\sigma_K^2 = \sigma_Z^2 - 2 \sigma_{zx_n} + \sigma_{x_n}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i N_i \quad (31)$$

La première partie de cette expression de la variance d'extension :

$$\sigma_K^2 = \sigma_Z^2 - 2 \sigma_{zx_n} + \sigma_{x_n}^2$$

De l'échantillon  $S_n$  dans le panneau P. c'est la variance d'estimation que l'on obtiendrait si l'on ne déposait que de la teneur  $X_n$  du seul échantillon  $S_n$ . chacun des autres échantillons  $S_1, S_2, \dots \dots S_{n-1}$

Apporte une amélioration qui se traduit par la soustraction des termes  $\omega_i N_i$  toujours positifs. Les équations (30) et (31) constituent **les équations générales du Krigeage**. les termes de la matrice  $R_{ij}$  et les deuxièmes membres de  $N_i$  sont données par (29) et ne dépendent que de la fonction intrinsèque.

### 2.4. Les étapes du krigeage :

La forme de l'estimateur dépend des spécifications de la FA ainsi que du respect d'un certain nombre de critères. Ainsi, en géostatistique linéaire, les estimateurs de krigeage classiques sont construits selon la démarche « LAUO » composée des étapes de Linéarité, d'Autorisation, d'Universalité, et d'Optimalité.

Ces quatre étapes sont hiérarchisées et ne peuvent pas être considérées dans n'importe quel ordre.

#### 2.4.1. Linéarité (L)

La contrepartie des hypothèses peu contraignantes qui sont faites lors de la modélisation du variogramme est que l'espérance et la variance ne peuvent opérer que sur des formes linéaires de la FA.

La première étape consiste donc en deux contraintes :

- s'assurer que la quantité à estimer est bien une fonctionnelle linéaire de la FA étudiée.
- Exprimer que l'estimateur  $Z_0^*$  que l'on veut construire est une CL des données disponibles.

$$Z_0^* = \sum_i \lambda_i Z_i \quad (32)$$

### 2.4.2. Autorisation (A)

Nous savons que l'erreur d'estimation, au sens large, est une CL construite sur la FA. Il faut donc contraindre l'erreur d'estimation à être autorisée c'est-à-dire que son espérance et sa variance doivent exister. Dans le modèle stationnaire d'ordre 2, toutes les combinaisons linéaires sont autorisées. Dans ce modèle, il n'y a pas donc de contrainte effective d'autorisation. Dans le modèle intrinsèque, une CL est autorisée si et seulement si son poids total est nul. Cette fois, il surgit une contrainte : l'erreur d'estimation doit être de poids total nul.

### 2.4.3. Universalité (U)

Cette contrainte est connue aussi sous le nom de « contrainte de non biais », elle impose que l'erreur d'estimation est d'espérance nulle :

$$E(Z - Z^*) = 0 \quad (33)$$

Cette condition introduit éventuellement une contrainte sur les inconnues  $\lambda_i$ . Dans la littérature, il y a souvent confusion entre la contrainte d'autorisation et celle d'universalité. La modélisation par une FAS-2 à dérive inconnue ne conduit à aucune contrainte d'autorisation mais à la contrainte d'universalité :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (34)$$

En revanche, la modélisation par une FAI à dérive nulle conduit à la contrainte d'autorisation qui s'écrit comme la contrainte (34), mais il n'y a pas de contrainte d'universalité, l'espérance d'une CLA dans ce modèle est nulle. Les deux contraintes sont donc formellement identiques, mais leurs signification et importance respectives sont différentes : il est possible de ne pas respecter la contrainte d'universalité mais formellement impossible de ne pas respecter la contrainte d'autorisation. Dans la littérature, la contrainte (34) est pratiquement toujours mentionnée comme une contrainte d'universalité, ce qui ne change évidemment rien aux calculs.

### 2.4.4. Optimalité (O) :

Cette dernière étape consiste à sélectionner le meilleur estimateur linéaire sans biais. Généralement, l'optimalité impose que la variance de l'erreur d'estimation soit minimale. D'après les deux premières étapes, nous connaissons que cette variance existe.

Il faut noter que l'erreur d'estimation étant par hypothèse d'espérance nulle, sa variance s'identifie à l'espérance de son carré.

### 2.5. Mise en place des équations du krigeage :

En fonction de la problématique, du type de la VR, du modèle de la FA, et du critère optimisé, l'application de la démarche LAUO conduit à un estimateur de krigeage particulier. Nous allons introduire dans ce paragraphe le krigeage simple et le krigeage ordinaire qui constituent deux systèmes de krigeage fondamentaux.

#### 2.5.1. Krigeage stationnaire à moyenne connue – krigeage simple :

Soit  $Z$  une FAS<sub>t</sub>-2, de covariance  $C$  et d'espérance  $m$  connue.

Nous pouvons alors supposer que  $m = 0$ .

La démarche « LAUO » nous donne :

➤ **(L) : Linéarité :**

L'erreur d'estimation  $Z_0^* - Z_0$  doit être de forme linéaire sur  $Z$ . Donc,

$Z_0^*$  s'écrit sous la forme de l'équation (32), avec les  $\lambda_i$  les inconnues du problème.

➤ **: Autorisation :**

L'erreur d'estimation  $Z_0^* - Z_0$  doit être autorisée dans le modèle, ce qui est vrai par hypothèse (on se trouve dans le cadre stationnaire d'ordre 2 de sorte que toute CL

est autorisée).

➤ **(U) : Universalité :**

La condition d'universalité s'exprime par l'équation 33. Mais par hypothèse, on a  $E(Z_0) = E(Z_i) = 0$ . La condition est donc satisfaite.

➤ **(O) : Optimalité :**

La variance de l'erreur d'estimation ou variance de krigeage s'exprime par :

$$\sigma_e^2 = C(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} \quad (35)$$

Le minimum de l'expression (35) est obtenu en annulant les dérivées partielles par rapport aux inconnues  $\lambda_i$ . On obtient un système linéaire de  $n$

## Chapitre II : Théorie du Krigeage

équations à  $n$  inconnues, dont la résolution donnera les pondérateurs cherchés. L'existence et l'unicité de cet optimum étant admis :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} - C_{i0} = 0 \quad \forall i = 1 \dots \dots n \quad (36)$$

La variance de krigeage est donnée par :

$$\sigma_{KS}^2(s_0) = C(0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} \quad (37)$$

Notons que les valeurs des observations ne figurent pas explicitement dans ces équations. Afin d'utiliser l'estimateur du KS, il est nécessaire de connaître la valeur de la moyenne  $m$ , ce qui n'est pas toujours évident.

### 2.5.2. Krigeage stationnaire à moyenne inconnue – krigeage ordinaire :

Soit  $Z$  une FAS<sub>t</sub>-2, de covariance  $C$  et d'espérance  $m$  inconnue.

Il est également possible de considérer le krigeage ordinaire dans un modèle de  $FAl$  de dérive nulle ; dans ce cas il n'y a pas de contrainte d'universalité mais une contrainte d'autorisation.

#### ➤ (L) : Linéarité :

La linéarité est donnée par l'équation 32.

#### ➤ (A) : Autorisation :

Toutes les combinaisons linéaires sont autorisées dans le modèle.

#### ➤ (U) : Universalité :

Par hypothèse,  $E(Z_0) = E(Z_i) = m$ . Pour avoir la condition (33), il faut et il suffit que l'équation (34) soit vérifiée.

#### ➤ (O) : Optimalité :

Il faut maintenant minimiser l'équation (35) sous la contrainte d'universalité (34). On a un problème de minimisation d'une fonction quadratique sous contrainte d'égalité que l'on solutionne par la méthode de Lagrange. On forme alors le Lagrangien:

$$L(\lambda) = \sigma_e^2 + 2 \mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right)$$

En développant, on obtient :

## Chapitre II : Théorie du Krigage

---

$$L(\lambda) = C(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + 2 \mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right)$$

où  $\mu$  est le multiplicateur de Lagrange. Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles par rapport à chacun des  $\lambda_i$  et par rapport à  $\mu$  s'annulent.

Ceci introduit au système de krigage ordinaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_i C_{ij} - C_{i0} + \mu = 0 \quad \forall i = 1 \dots \dots n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{array} \right. \quad (38)$$

La variance du krigage ordinaire est donnée par :

$$\sigma_{KS}^2(s_0) = C(0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + \mu \quad (39)$$

Cette variance ne dépend pas des valeurs observées, elle ne dépend que du variogramme et de la configuration des points servants à l'estimation par rapport au point à estimer.

- **Ecriture en variogramme**

En tenant compte des deux équations 10 et 34, on peut réécrire le système de krigage en fonction du variogramme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_i \gamma_{ij} + \mu = \gamma_{i0} \quad \text{pour } i = 1 \dots \dots n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{array} \right. \quad (40)$$

et la variance de krigage est :

$$\sigma_{KS}^2(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} + \mu \quad (41)$$

Le système de krigage et la variance de krigage sont complètement déterminés par les valeurs des variogrammes, elles même sont déterminées par : (i) le type de variogramme et ses paramètres, (ii) la disposition des sites de données utilisés pour chaque estimé et (iii) la proximité du site à estimer par rapport à chacun des sites de données.

- **Ecriture matricielle**

Le système d'équation 36 peut alors être réécrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix}
 \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1j} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\
 \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{2n} & 1 \\
 \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3j} & \cdots & \gamma_{3n} & 1 \\
 \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
 \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \gamma_{i3} & \cdots & \gamma_{ij} & \cdots & \gamma_{in} & 1 \\
 \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
 \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nj} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 \\
 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 0
 \end{pmatrix}
 \times
 \begin{pmatrix}
 \lambda_1 \\
 \lambda_2 \\
 \lambda_3 \\
 \vdots \\
 \lambda_j \\
 \vdots \\
 \lambda_n \\
 \mu
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \gamma_{10} \\
 \gamma_{20} \\
 \gamma_{30} \\
 \vdots \\
 \gamma_{i0} \\
 \vdots \\
 \gamma_{n0} \\
 1
 \end{pmatrix}
 \quad (42)$$

La somme des pondérateurs est égale à l'unité, ceci n'implique pas qu'ils soient nécessairement positifs ou qu'ils doivent avoir des valeurs entre zéro et un.

### 2.6. Les modèles non stationnaires

Un modèle non stationnaire est un modèle qui présente une dérive. Dans certains cas, cette dérive sera définie sans ambiguïté ; ce pourra être, par définition, la partie invariante dans le temps pour un phénomène se répétant dans le temps ou bien la composante à grande distance, connue pour un phénomène présentant par ailleurs des fluctuations à courte distance (la notion de distance dépendant naturellement de l'échelle de travail).

#### 2.6.1. La dichotomie

Nous supposons que la FA  $Z(s)$  étudiée est une superposition de deux composantes :

- Une dérive  $m(s)$ , fonction considérée comme déterministe dans le modèle.
- Un résidu  $Y(s)$ .

donc :

$$Z(s) = Y(s) + m(s) \quad (43)$$

Au niveau physique, nous espérons en général une signification naturaliste à cette dichotomie. Nous souhaitons séparer d'une part, une composante régionale, régulière,... etc. et une composante résiduelle, erratique,...etc., d'autre part.

## Chapitre II : Théorie du Krigeage

---

Donc physiquement, la dichotomie n'aura d'intérêt que si elle sépare des phénomènes d'échelles différentes. Au niveau mathématique, ce que l'on attend de la dichotomie est d'une nature totalement différente. On souhaite avant tout que le résidu  $Y(s)$  possède les bonnes propriétés de stationnarité d'ordre deux qui permettront de le traiter par les méthodes déjà connues de la géostatistique.

### Structure de la dérive

La forme de la dérive est:

$$m(s) = \sum_{l=0}^k a_l f^l(s) \quad (44)$$

où :

- Les  $f^l(s)$ , noté aussi  $f_s^l$ , sont un jeu de fonctions de base. Il s'agit généralement de monômes  $1, x, x^2, y, \dots$ . Nous imposons que la première fonction de base soit constante:  $f_s^0 = 1$  ;
- La somme porte sur un nombre d'indices  $l$  en général assez limité ;
- Les coefficients  $a_l$  sont des coefficients numériques.

Ainsi modélisée, la dérive peut prêter à deux interprétations.

La plus intuitive consiste à dire que, à l'échelle de travail, la dérive a effectivement une forme analytique simple. L'autre interprétation, consiste en ceci : on considère que la dérive est un phénomène suffisamment régulier pour pouvoir être approché, à l'échelle de travail, par les premiers termes d'un développement selon un certain jeu de fonctions simples.

### Hypothèses aux différents modèles de krigeage universel

La FA  $Z$  s'écrit :

$$Z(s) = Y(s) + \sum_{l=0}^k a_l f^l(s) \quad (45)$$

où :

- $Z(s)$  est la fonction aléatoire brute.
- Dans la dérive  $m(s) = \sum_{l=0}^k a_l f^l(s)$ , le nombre de termes du développement est supposé connu, les fonctions de base  $f_s^l$  sont données et on suppose que  $f_s^0 = 1$ .
- Les coefficients  $a_l$  sont déterministes dans le modèle, et inconnus.
- Les différentes hypothèses sur la stationnarité portent sur le résidu  $Y(s)$ .

## Chapitre II : Théorie du Krigeage

Toute caractéristique relative à ce résidu sera qualifiée de sous-jacente.

### 2.6.2. Krigeage universel à modèle sous-jacent stationnaire d'ordre 2

#### 2.6.2.1. Signification du modèle

Dans la décomposition (43), le résidu  $Y(s)$  est supposé admettre une variance finie et que son espérance est nulle. Si tel n'est pas le cas, ou bien cette espérance est connue et il suffit de la soustraire à  $Y(s)$ , ou bien elle est inconnue et on l'inclut dans la dérive.

Alors :

$$\begin{cases} E[Y(s)] = 0 & (46) \\ E[Y(s)] = \sum_{l=0}^k a_l f^l(s) & (47) \\ cov[Y(s_1), Y(s_2)] = cov[Z(s_1), Z(s_2)] & (48) \end{cases}$$

#### 2.6.2.2. Estimation

Afin de construire le système de krigeage, nous utiliserons la démarche LAUO :

- **(L) : Linéarité** : elle est donnée par l'équation (32)  $Z_0^* = \sum_i \lambda_i Z_i$
- **(A) Autorisation** :

Il n'y a pas de contrainte d'autorisation, puisque dans le modèle, toutes les combinaisons linéaires admettent espérance et variance.

- **(U) : Universalité** :

$$\sum_{l=0}^k a_l \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_0^l \right) = 0$$

Cette contrainte est satisfaite que si chacune des expressions affectée à un  $a_l$  soit nulle séparément, soit :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_0^l = 0 \quad \forall l = 0 \dots k \quad (49)$$

- **(O) : Optimalité** :

Il faut maintenant minimiser l'expression (35), pour cela, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Il y a autant de multiplicateurs  $\mu_1$

que de conditions d'universalité. Nous devons alors exprimer la nullité des dérivées partielles, par rapport aux  $\lambda_i$  et  $\mu_l$ , de l'expression :

$$L(\lambda) = C(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + 2 \sum_{l=0}^k \mu_l \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_0^l \right)$$

Le système de krigeage s'écrit alors :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{ij} + \sum_{l=0}^k \mu_l f_i^l = C_{i0} & \forall i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_0^l = 0 & \forall l = 0 \dots k \end{cases} \quad (50)$$

La variance du krigeage universel est donnée par :

$$\sigma_{UK}^2 = C(0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - \sum_{l=0}^k \mu_l f_0^l \quad (51)$$

### 2.6.3. Krigeage universel à modèle sous-jacent intrinsèque strict

#### 2.6.3.1. Particularité de ce modèle

Dans ce cas, seules admettent une espérance et une variance les CL du résidu  $Y(s)$  ayant un poids total nul. Il en sera de même en ce qui concerne la FA globale, puisque l'addition de la quantité déterministe  $m$  ne change rien en ce qui concerne l'existence des moments. Comme on travaille sur des FAI sans dérive, alors :

$$\begin{cases} E(Y(s+h) - Y(s)) = 0 & (52) \\ \text{var}[Y(s+h) - Y(s)] = \text{var}[Z(s+h) - Z(s)] = 2\gamma(h) & (53) \end{cases}$$

Il faut noter que les quantités  $E(Z)$  et  $E(Y)$  n'existent pas dans le modèle et que nous nous fondons toujours sur la dichotomie (45). Mais cette fois, seules sont autorisées les combinaisons d'accroissements de la forme :

$$Z(s_1) - Z(s_2) = Y(s_1) - Y(s_2) + \sum_{l=0}^k a_l (f_{s_1}^l - f_{s_2}^l) \quad (54)$$

#### 2.6.3.2. Estimation

- **(L) : Linéarité** : elle est donnée par :  $Z_0^* = \sum_i \lambda_i Z_i$
- **(A) : Autorisation** :

L'erreur d'estimation doit être de poids total nul :  $\sum_{i=0}^n \lambda_i - 1 = 0$

## Chapitre II : Théorie du Krigage

---

➤ **(U) : Universalité** :  $E(Z_0^* - Z_0) = 0$

D'après la décomposition de Z, on obtient :

$$E \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i - Y_0 + \sum_{l=0}^k a_l (\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_0^l) \right] = 0$$

Ensuite :

$$\sum_{l=0}^k a_l \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^l - f_0^l \right) = 0$$

d'où :

$$\sum_{l \neq 0} a_l \left( \sum_i \lambda_i f_i^l - f_0^l \right) = 0$$

La combinaison sur Y est autorisée par hypothèse, et donc d'espérance nulle puisque Y est intrinsèque sans dérive. Le terme correspondant à  $a_0$  disparaît de la sommation. Sachant que :  $\sum_{i=0}^n \lambda_i - 1 = 0$  on obtient :  $\sum_i \lambda_i f_i^l - f_0^l = 0, \forall l \neq 0$

➤ **(O) : Optimalité** :

Sous les contraintes d'autorisation et d'universalité, il faut minimiser :

$$\sigma_e^2 = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0}$$

Nous devons introduire un multiplicateur de Lagrange  $\mu_0$  pour la contrainte d'autorisation, et des multiplicateurs  $\mu_l (l \neq 0)$  pour chaque contrainte d'universalité. Le système de krigage obtenu, s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} + \mu_0 + \sum_{l \neq 0} \mu_l f_i^l - \gamma_{i0} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j - 1 = 0 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j^l - f_0^l = 0 \quad \forall l \neq 0 \end{array} \right. \quad (55)$$

## Chapitre II : Théorie du Krigage

Notons que les coefficients  $a_l$  ne sont pas mentionnés dans le système de krigage universel. En effet, ils sont implicites dans la solution mais ils affecteront les poids de krigage à chaque point d'estimation.

La variance du krigage universel est :

$$\sigma_{UK}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} + \mu_0 + \sum_{l \neq 0} \mu_l f_0^l \quad (56)$$

Matriciellement, le système de krigage s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1j} & \dots & \gamma_{1n} & f_1^0 & f_1^1 & f_1^2 & \dots & f_1^l & \dots & f_1^k \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2j} & \dots & \gamma_{2n} & f_2^0 & f_2^1 & f_2^2 & \dots & f_2^l & \dots & f_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \dots & \gamma_{ij} & \dots & \gamma_{in} & f_i^0 & f_i^1 & f_i^2 & \dots & f_i^l & \dots & f_i^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nj} & \dots & \gamma_{nn} & f_n^0 & f_n^1 & f_n^2 & \dots & f_n^l & \dots & f_n^k \\ f_1^0 & f_2^0 & \dots & f_j^0 & \dots & f_n^0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_j^1 & \dots & f_n^1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^l & f_2^l & \dots & f_j^l & \dots & f_n^l & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^k & f_2^k & \dots & f_j^k & \dots & f_n^k & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_l \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_0 \\ 1 \\ f_0^l \\ \vdots \\ f_0^l \\ \vdots \\ f_0^k \end{pmatrix} \quad (57)$$

La matrice de gauche est carrée, symétrique constituée de la sous matrice carrée des variogrammes sur les données, complétée par le vecteur des fonctions de base sur ces mêmes données. La covariance étant de type strictement défini positif, ce système est régulier pourvu seulement que les fonctions  $f^l(s)$  soient linéairement indépendantes sur le champ d'étude D, cette condition est supposée toujours remplie.

### 2.7. Propriétés du krigage

Les principales propriétés et caractéristiques associées au krigage sont:

- i.** Linéaire, sans biais, à variance minimale, par construction.
- ii.** Interpolateur exact. : si l'on estime un point connu, on retrouve la valeur connue.
- iii.** Effet d'écran: les points les plus près reçoivent les poids les plus importants.

## Chapitre II : Théorie du Krigeage

---

Cet effet d'écran varie selon la configuration et selon le modèle de variogramme utilisé pour le krigeage. Plus l'effet de pépité est important, moins il y a d'effet d'écran. Il permet de limiter les systèmes de krigeage aux observations avoisinantes.

**iv.** Influence de la taille du champ : Lorsque la taille du champ estimé augmente, les poids tendent à devenir égaux et la variance d'estimation diminue puis augmente si on cherche à estimer un champ plus grand que celui renfermant les données.

**v.** Position des points entre eux : contrairement aux méthodes de type 'inverse de la distance', la position des points entre eux est très importante. Chaque point est pondéré automatiquement en fonction de sa « zone d'influence ».

**vi.** Influence de l'effet de pépité et de la portée : plus l'effet de pépité est important, plus la variance d'estimation augmente. Inversement, plus la portée augmente, plus la variance d'estimation diminue.

**vii.** Effet de lissage : effectue généralement un lissage, c'est-à-dire les estimations sont moins variables que les valeurs réelles que l'on cherche à estimer.

**viii.** Influence d'anisotropie : on doit adapter l'échantillonnage en augmentant sa densité dans la direction de plus faible portée.

**ix.** Influence du choix de modèle : le choix du modèle a peu d'influence sur les résultats du krigeage pour autant que chaque modèle fournisse un ajustement équivalent pour les courtes distances.

**x.** Biais conditionnel : presque sans biais conditionnel. Ceci signifie que lorsqu'on applique une teneur de coupure à des valeurs estimées, on récupérera approximativement la teneur prévue.

**xi.** Transitif : si l'on observe en un point une valeur coïncidant avec la valeur krigée pour ce point, alors les valeurs krigées en d'autres points ne sont pas modifiées par l'inclusion de ce nouveau point dans les krigeages. Par contre les variances de krigeage, elles, sont diminuées.

### 2.8. Evaluation de l'erreur : la variance de krigeage

Le krigeage fournit une valeur estimée en n'importe quel point de l'espace  $s_0$ . L'erreur commise  $Z(s) - Z(s_0)$  est évidemment inconnue mais on peut évaluer la variance de cette erreur appelée variance de krigeage. Dans le cas du krigeage simple elle s'écrit :

$$\sigma_{KS}^2 = C(0) - \sum_i \lambda_i C(s_i - s_0)$$

Pour le krigeage ordinaire, on obtient :

$$\sigma_{KS}^2 = C(0) - \sum_i \lambda_i C(s_i - s_0) - \mu_{KO}$$

$\mu_{KO}$  est la valeur du multiplicateur de Lagrange dans la solution du système (G. Guillot, 2004).

### 2.9. Conclusion :

Les deux chapitres de cette partie ont présenté l'essentiel de la théorie du krigeage formalisée par G. Matheron. Ces sections doivent donc suffire à une compréhension de la méthode dans le but d'une utilisation de base.

Toute étude géostatistique doit commencer par une analyse exploratoire suivie d'une analyse variographique. Ces deux étapes permettent de se familiariser dans un premier temps avec les données de l'étude par l'exploration de simples statistiques telles que la moyenne, les minimums et les maximums, les relations linéaires simples entre les variables...etc., ensuite, dans un second temps, de chercher les dérivées et de représenter la dépendance spatiale des données à l'aide du semi variogramme – outil principal du krigeage. Les rudiments de l'analyse variographique ont été présentés et nous avons montré comment estimer et modéliser le variogramme dans le cadre mono et multi variables.



## 3.1. Introduction

Afin de mettre en œuvre l'application de la géostatistique à la piéométrie de la nappe alluviale de la région de Bennaceur Benchohra, nous avons préféré commencer par l'application sur deux exemples théoriques sous Matlab.

### 3.1.1 Analyse Géostatistique d'un premier exemple théorique :

L'exemple 1 permet de générer 1000 valeurs aléatoires pour  $x$ , et 1000 valeurs aléatoires pour  $y$  selon les relations suivantes :

$$x = \text{rand}(1000,1) * 4 - 2$$

$$y = \text{rand}(1000,1) * 4 - 2$$

On calcule par la suite  $z$  à l'aide de la relation suivante :

$$z = 3 * \sin(x * 15) + \text{randn}(\text{size}(x))$$

La carte de la répartition spatiale de la valeur  $z$  est donnée par la figure suivante :

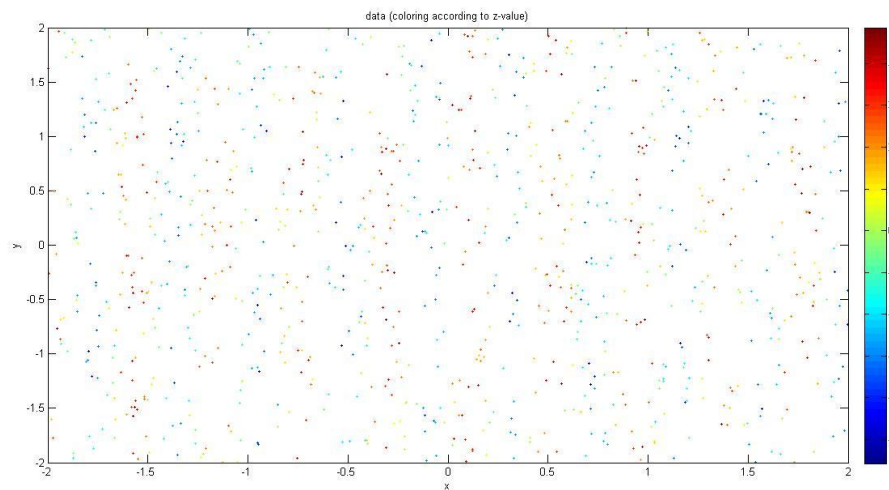


Fig. 13 : - Eléments de structuration de la variable régionalisée  $z$ .

Elle montre une alternance de valeurs faibles et de valeurs fortes; ceci est dû vraisemblablement à la fonction Sinusoïdale de la variable  $z$ , mais prouve déjà une organisation structurelle.

La figure 14 présente un histogramme qui donne la répartition des valeurs prise par la variable régionalisée où on constate qu'elle est fortement différente d'une répartition Gaussienne. Elle est proche d'une forme bimodale due à l'échantillonnage.

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

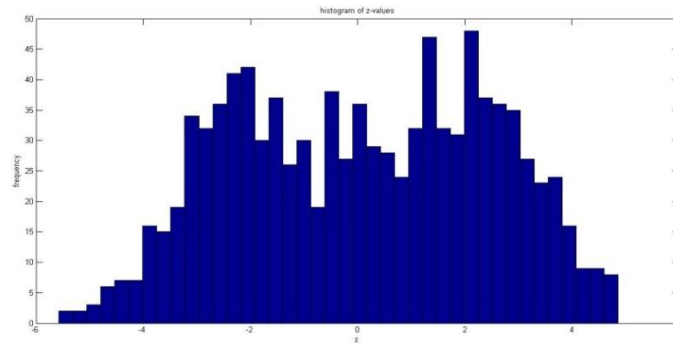


Fig. 14 : - Histogramme de la variable régionalisée z.

La figure 15 montre la forme obtenue de la fonction variogramme. Il s'agit d'un variogramme expérimental à effet de trou dû à la forme sinusoïdale de la fonction z

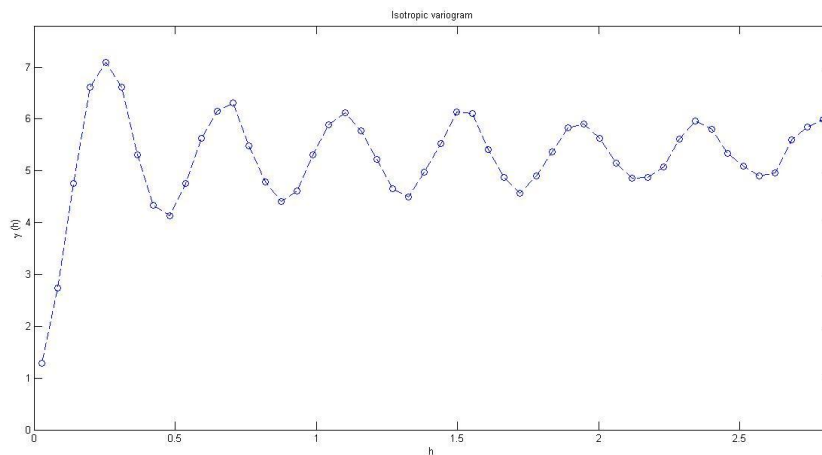


Fig. 15 : - Variogramme Expérimental

Pour un champ donné de la variable, rien n'assure que la continuité soit identique dans toutes les directions. La figure 16 représente l'anisotropie du variogramme où on constate une anisotropie directionnelle.

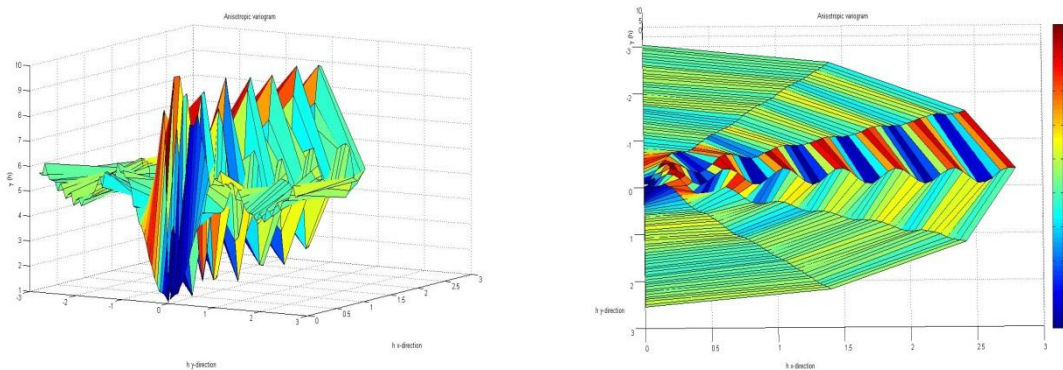


Fig. 16 : - Anisotropie directionnelle du variogramme.

## 3.1.2. Analyse géostatistique d'un deuxième exemple théorique

Le deuxième exemple permet de calculer le variogramme théorique selon le modèle Gaussien et la carte de la répartition spatiale de la variable régionalisée  $z$  par krigeage ainsi que la variance de krigeage.

On commence par initialiser les matrices  $[X,Y]$  de dimension  $501 \times 501$  et par initialiser le vecteur  $Z$  par des variables aléatoires selon la relation suivante : ( $Z = \text{randn}(\text{size}(X))$ ). Ensuite, on crée un filtre 2D prédéfini du type « Gaussian lowpass filter ».

Par la suite, on génère les variables aléatoires  $x(500)$  et  $y(500)$ , et à l'aide de la relation suivante :  $z = \text{interp2}(X,Y,Z,x,y)$ , on interpole pour trouver la variable régionalisée  $z$ . Les matrices  $X$  et  $Y$  précisent les points auxquels la donnée  $Z$  est donnée.

Ainsi, on obtient la répartition de  $Z$  selon  $X$  et  $Y$  et les points d'observation de la variable régionalisée  $z$  (Fig. 17) .

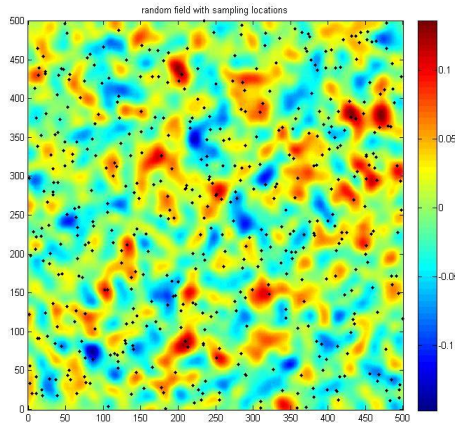


Fig. 17 : - Champ aléatoire de la variable  $Z$  avec lieux d'échantillonnage de la variable régionalisée  $z$ .

Par la suite, on calcule le variogramme en choisissant le modèle Gaussien parabolique à l'origine pour une distance  $h = 50$  m.

## Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

---

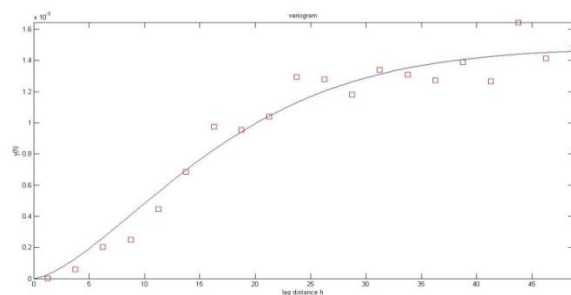


Fig. 18 : - Variogramme expérimental et variogramme théorique Gaussien.

On calcule la répartition spatiale de la variable régionalisée par krigeage (fig. 19) et on apprécie l'incertitude du krigeage par la variance de krigeage (fig. 20).

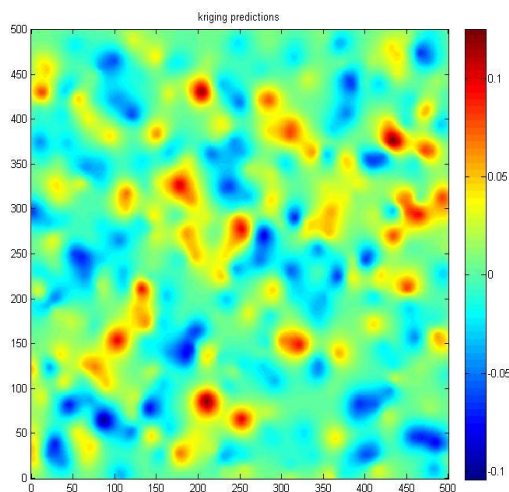


Fig. 19 : - Répartition spatiale de la variable régionalisée  $z$  obtenue par krigeage.

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

---

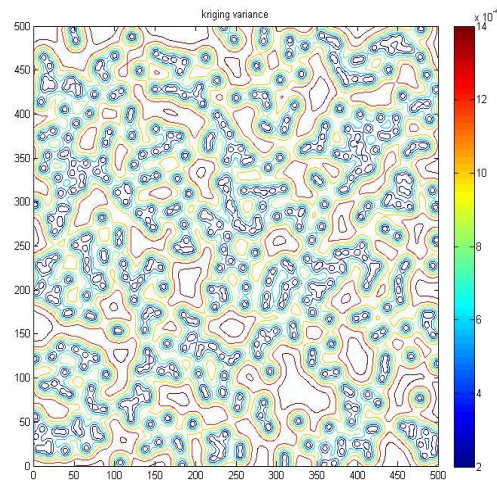


Fig. 20 : - Répartition de la variance de krigeage

## 3.2. Présentation de la zone d'étude

### 3.2.1. Cadre Géographique

La région de Bennaceur Benchohra est située sur le piémont Sud de l'Atlas Saharien. Elle est limitée au Nord par les Chaînon de l'Atlas et au Sud par le pays des Dayas (Fig. 21).

La zone d'étude est située :

- à l'Est et à l'Ouest respectivement par les longitudes  $03^{\circ} 14' 05''$  et  $02^{\circ} 49' 46''$  Est ;
- au Nord et au Sud respectivement par les latitudes  $33^{\circ} 53' 24''$  et  $33^{\circ} 42' 51''$  Nord.

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

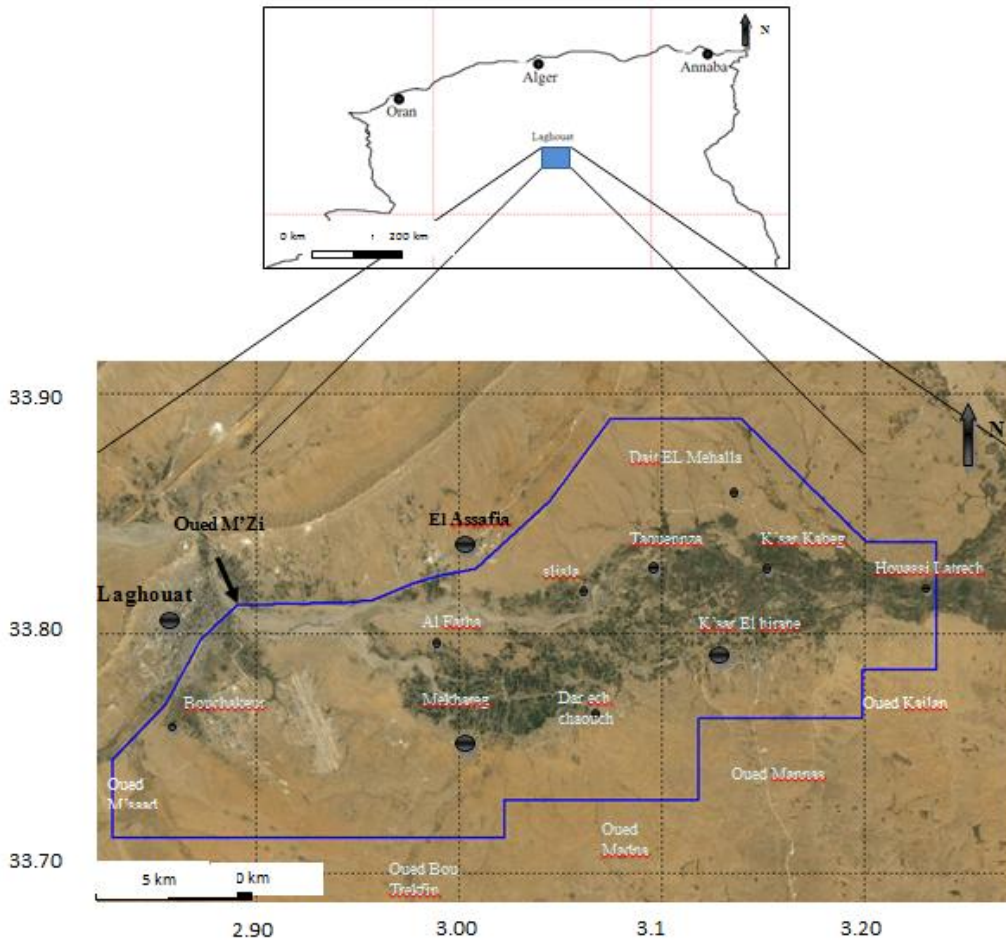


Fig. 21 : - Carte de situation géographique du secteur d'étude.

## 3.2.2. Contexte géologique et hydrogéologique:

La géologie de la zone d'étude, est essentiellement représentée par des formations quaternaires sous forme de terrasses témoignant d'oscillations climatiques. Les sols de la vallée ont une origine alluviale. Notons aussi que les dunes de sable occupent les zones déprimées et les flancs de reliefs. Cependant, au niveau de l'accident sud-atlasique quelques reliefs forment les derniers contreforts de l'Atlas représentés par du Crétacé Supérieur calcaréo-dolomitique et du Crétacé inférieur gréseux (Fig. 22).

Dans le secteur d'étude le système de Bennaceur Benchohra comprend plusieurs niveaux aquifères superposés de haut en bas (Fig. 23) .

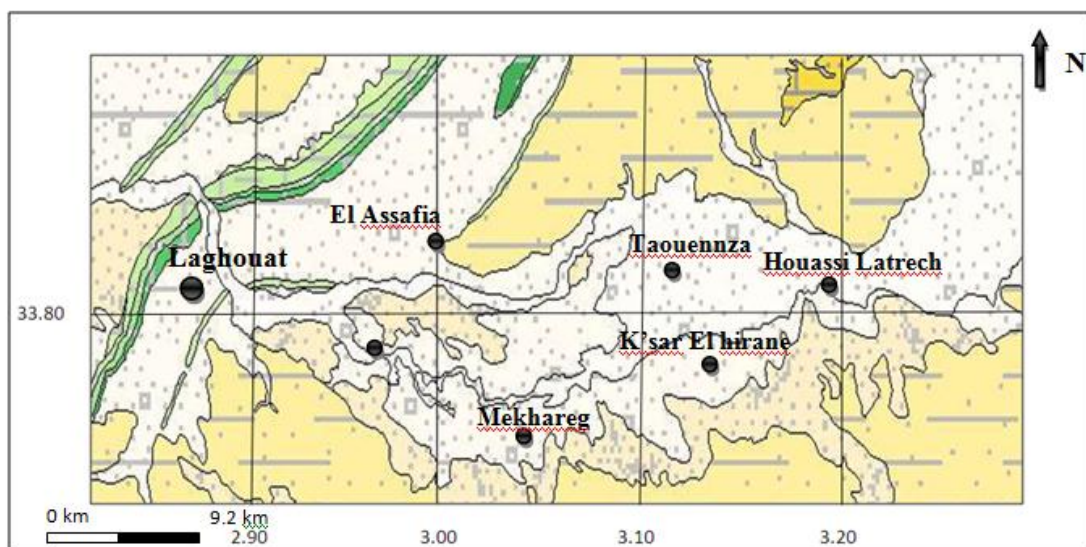
# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

## 3.3. Analyse des données

### 3.3.1. Système de Bennaceur Benchohra

#### a) – Nappe alluviale :

C'est une formation grossière constituée de dépôts fluviatiles (galets, graviers, sables grossiers, ...), c'est le niveau aquifère superficiel qui assure la transmission et l'emmagasinement de l'eau. Cependant, la salinité des eaux est très élevée en aval. Le substratum des alluvions est représenté par des argiles faiblement sableuses mio-pliocènes.



#### Légende

	Quaternaire : Dépôts actuelles (sable, graviers, limons et argile)
	Quaternaire récent : Sables, graviers et argiles
	Quaternaire moyen : Formation dunaires consolidées
	Quaternaire moyen : Croute calcaire
	Mio-pliocène : Grès et argiles
	Crétacé supérieur (sénonien) : Calcaires et marnes
	Crétacé supérieur (Turonien) : Calcaires dolomitique massifs
	Crétacé supérieur (Cénomaniens) : Marnes gypseuses
	Crétacé inférieur (Albien) : Grès, calcaires mameux
	Crétacé inférieur (Aptien) : Argiles et Calcaires
	Crétacé inférieur (Barémien) : Grès à dragées de quartz

Fig. 22 : - Carte géologique de la vallée de l'Oued M'Zi

#### a) – Nappe Mio-Pliocène :

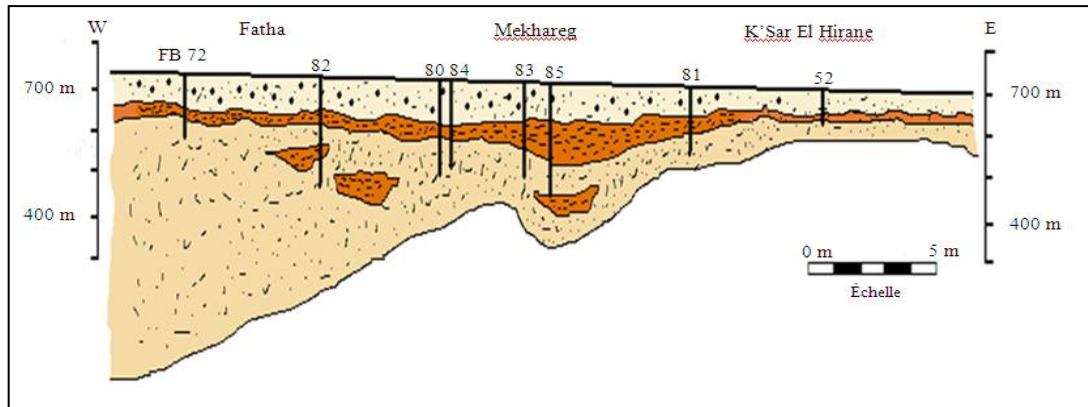
Les Tertiaire Continental correspond au '*Continental Terminal*' de Kilian (1939), c'est un puissant ensemble grés-argileux qui s'étend sur tout le Sahara et qui repose en discordance, indifféremment sur le Primaire, le Continental Intercalaire, le Cénomaniens, le Turonien, le Sénonien et l'Eocène. Son épaisseur varie de quelques mètres à plus de 2000 m dans la fosse Sud-atlasique (Levassor 1978).

Dans la vallée de l'Oued M'Zi, les données provenant des forages du secteur de Mekhareg montrent que le Tertiaire Continental est composé d'argiles, de sables

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

argileux rougeâtres, de quelques niveaux de grès, d'argiles gypseuses et des petits bancs de calcaires.

Dans la plaine de Bennaceur Benchohra et le secteur de K'Sar El Hirane, le Tertiaire Continental est composé d'argiles, de grès argileux, de quelques bancs de calcaires et de grès argileux à la base.



Légende




-  Alluvions quaternaires
-  Argiles rouges miopliocènes
-  Remplissage miopliocènes

Fig. 23 : - Coupe géologique interprétative de la vallée de l'oued M'zi

### 3.3.2. Piézométrie :

La carte piézométrique réalisée par M. Makoudi (2012) dans la vallée de l'Oued M'Zi sur la base de relevés piézométriques dans la période Mai-Juin 2011 (Fig. 24 et 25), nous a donné une idée précieuse sur la continuité de la nappe, sa forme et son sens d'écoulement.

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

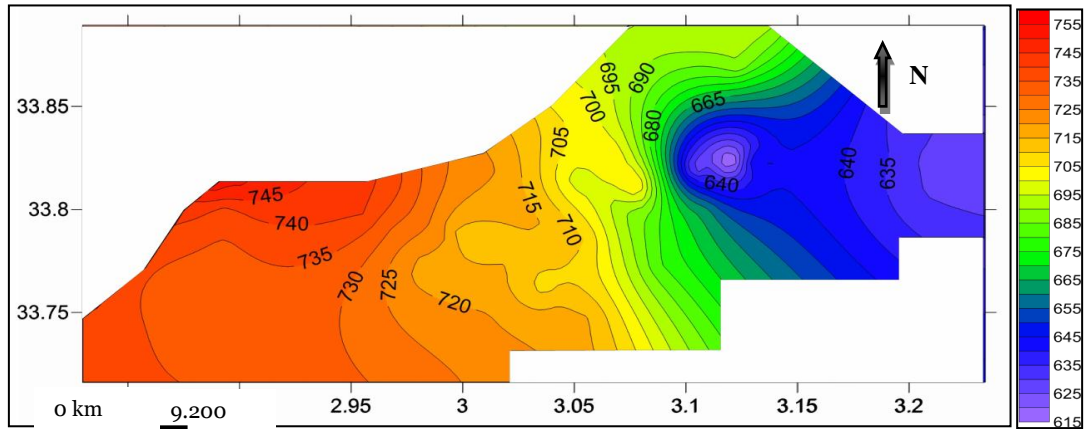


Fig. 24 : - Carte piézométrique de la Nappe alluviale de la vallée de l'Oued M'Zi (période Mai-Juin 2011).

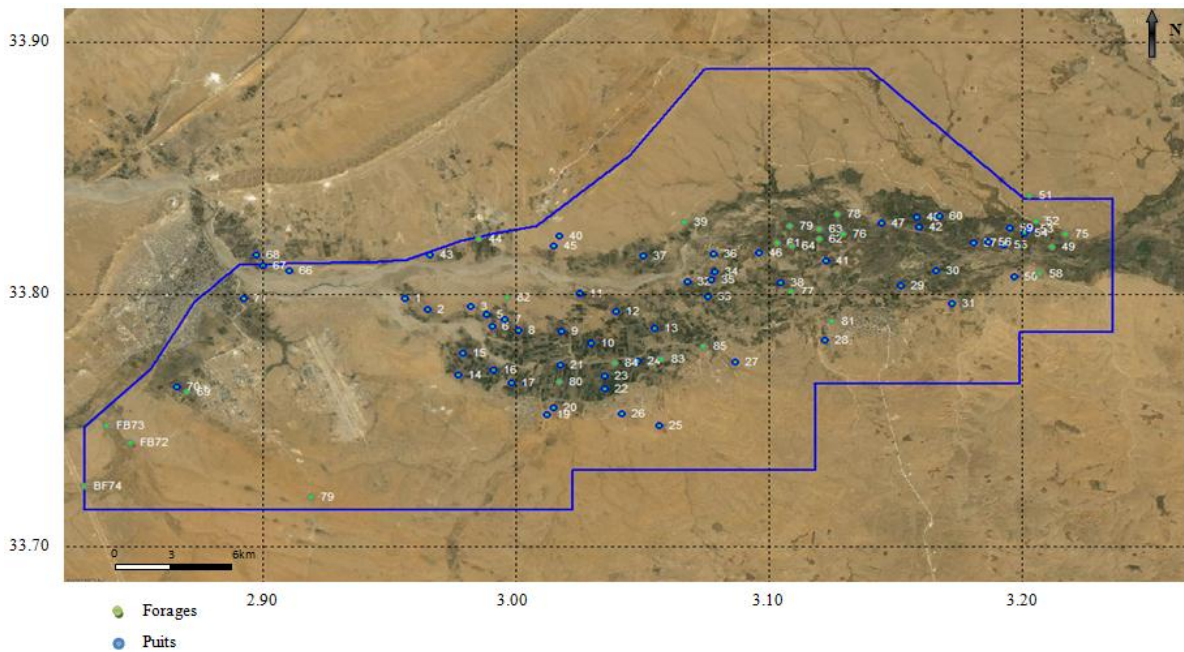


Fig. 25 : - Localisations des forages et des puits de la vallée de l'Oued M'Zi

L'allure des courbes isopiézes montre que l'apport est nul le long de l'accident Sud-Atlasique (El Assafia, Bouchakeur, ..), par contre, on constate des apports considérables au niveau de la cluse de l'Oued Mzi et Oued M'saad. Toutefois, on note de faibles apports d'eau souterraine de la zone Sud (Mekharg, Boutrekfine, K'Sar Hirane et Oued Kilane. Le secteur Nord de Daiet El Mehalla contribue également par de faibles apports. Le seul exutoire naturel est celui de Houassi Latrech.

## Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

La carte piézométrique montre un sens d'écoulement général d'Ouest vers l'Est avec une zone de très fort gradient dans le secteur de Taouennza dû à une très forte sollicitation au prélèvement par pompage.

Le tableau n° : 3.1 indique les différentes valeurs obtenues des gradients hydrauliques pour les différentes zones:

Zones		Gradients Hydrauliques
Oued M'zi		0.13922
Oued M'saad		0.00167
<b>Bennasser Benchohra</b>	I	0.00041
	II	0.00029
	III	0.00075
Boutrekfine	I	0.00171
	II	0.00178
K'sar hirane	I	0.00305
	II	0.00239
Oued Kilane		0.00169
Houassi latrech	I	0.00088
	II	0.00048
Kabeg		0.00063
Nord de Daiet El Mehalla		0.00592

Tableau 3.1 : - Gradients hydrauliques des différentes zones de la vallée de l'Oued M'Zi (Nappe du Tertiaire Continental période Mai-Juin 2011).

### 3.4 Résultats et Discussions :

Nous avons échantillonnés 117 points d'observation (puits et forages) dans le secteur de Bennaceur Benchohra, et nous avons utilisé notre programme de calcul sous Matlab qui a été testé au préalable pour les deux exemples théoriques précédents.

A ce titre les résultats obtenus sont les suivants :

- La carte de répartition des charges hydrauliques mesurées (Fig. 26): Elle montre que la variable est bien structurée ce qui prouve que la charge hydraulique est une variable régionalisée.

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

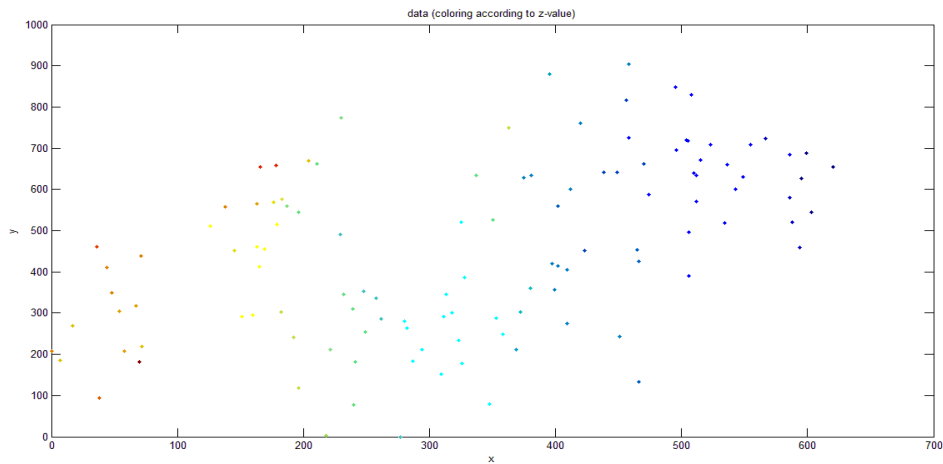


Fig. 26 : - Eléments de structuration de la variable régionalisée (piézométrie)

La carte initiale générée à partir de variables aléatoires donnant une répartition plus ou moins structurée de la variable et la localisation des points d'observation (Fig. 27) :

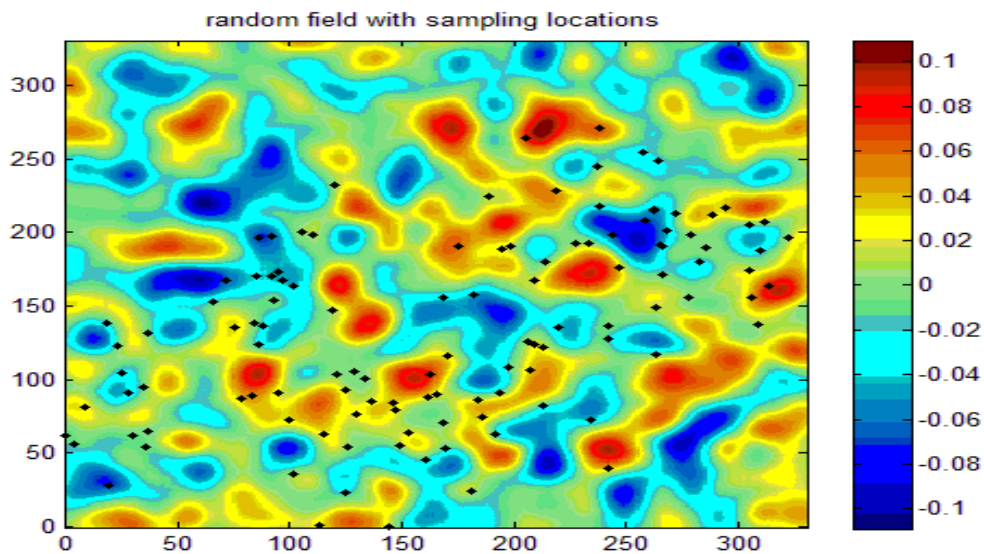


Fig. 27 : - Répartition initiale de la variable et localisation des points d'observation.

- Calcul et présentation du variogramme théorique et du variogramme expérimental (fig. 28), sur la base d'un modèle Gaussien et d'une distance maximale de 50 m : Il donne un variogramme de pépite nul est d'une portée de 30 m et d'un pallier au environ de 30 à 35.

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

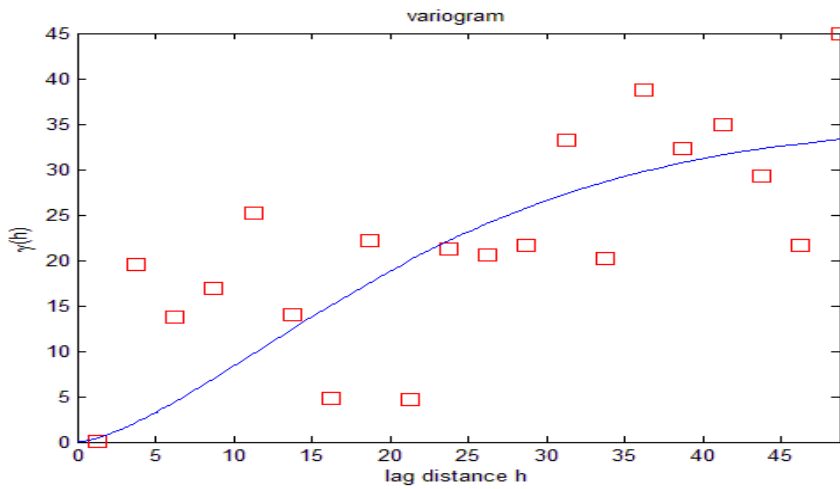


Fig. 28 : - Variogramme expérimental de la charge hydraulique et variogramme théorique Gaussien

- La carte piézométrique obtenue par krigeage à partir du jeu d'observation dont on dispose est illustrée en figure 29. Elle montre bien les zones d'alimentation de la nappe, le sens d'écoulement et les zones de surexploitation de la nappe.

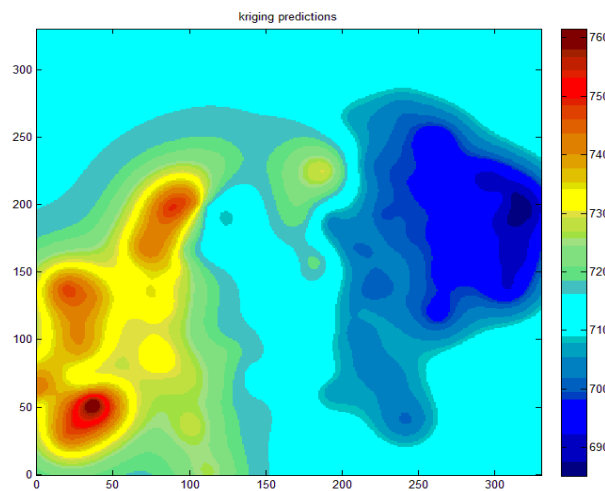


Fig. 29 : - Carte piézométrique obtenue par krigeage.

- La carte de répartition de la variance de krigeage qui illustre l'erreur du krigeage sur les valeurs estimées de la charge hydraulique (fig. 30). Elle montre que l'erreur est minimale dans le secteur modélisable.

## Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

---

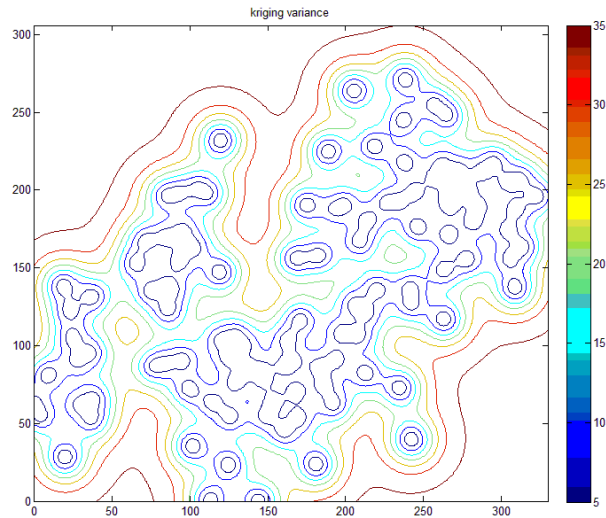
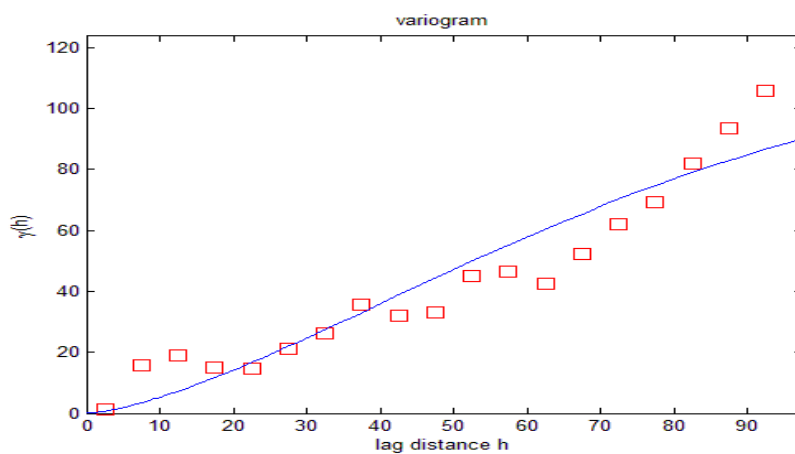


Fig. 30 : - Carte de la répartition de la variance de krigeage des charges hydrauliques

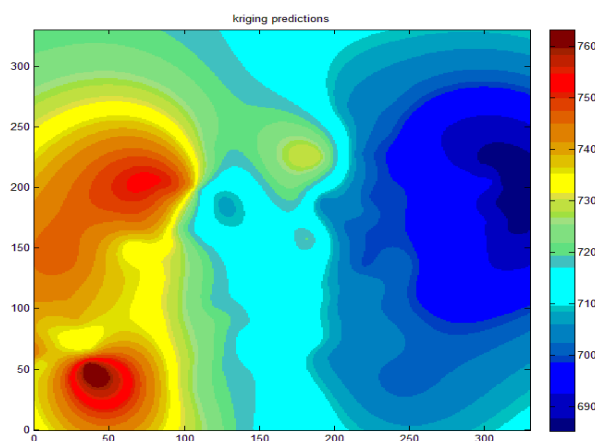
Afin de voir l'importance de la distance maximale choisie pour le variogramme théorique sur la répartition des charges hydrauliques estimées par krigeage, nous avons effectué plusieurs simulations pour différentes distances : 100, 200, 500 et 1000 m, et nous avons calculé les variogrammes et les charges hydrauliques estimées par krigeage ainsi que leurs variances (Fig. ). Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

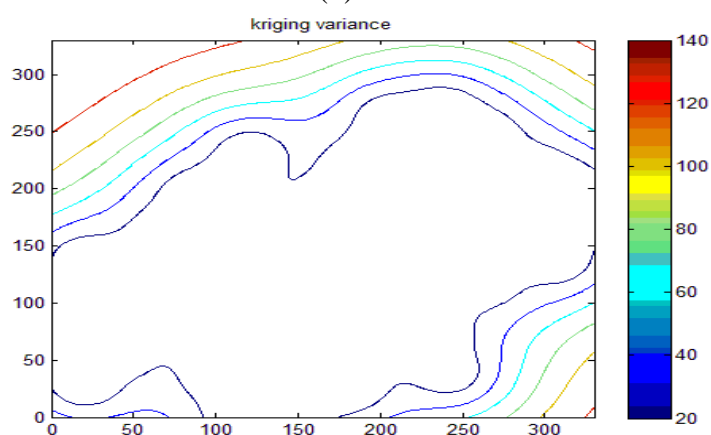
- Pour la distance 100 m :



(a)



(b)

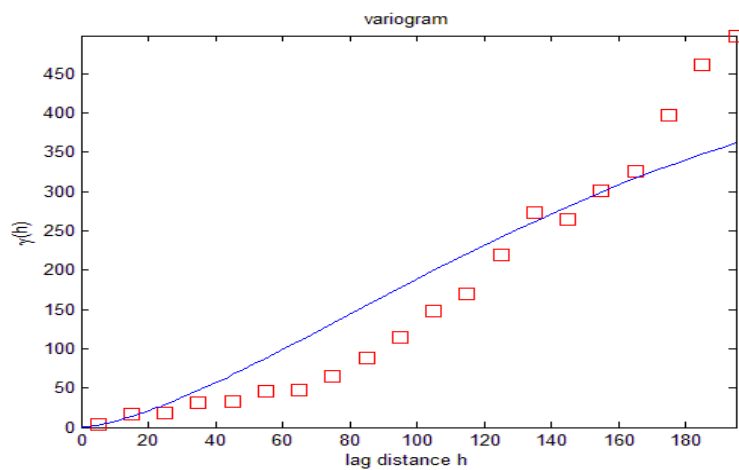


(c)

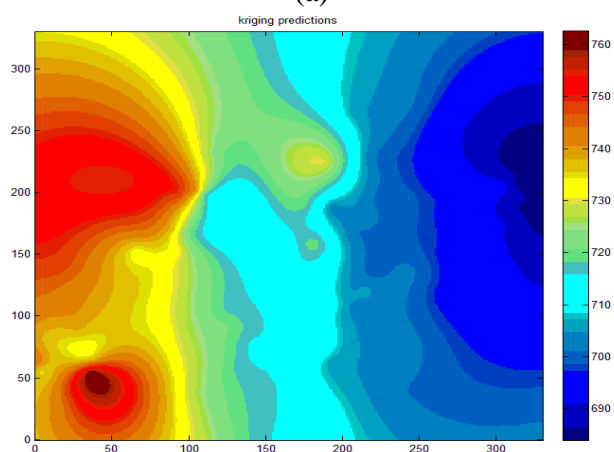
Fig. 31 : - Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental (a) , Carte piézométrique estimée par krigeage (b) et carte de variance de krigeage (c) , (Distance h maximale =100m).

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

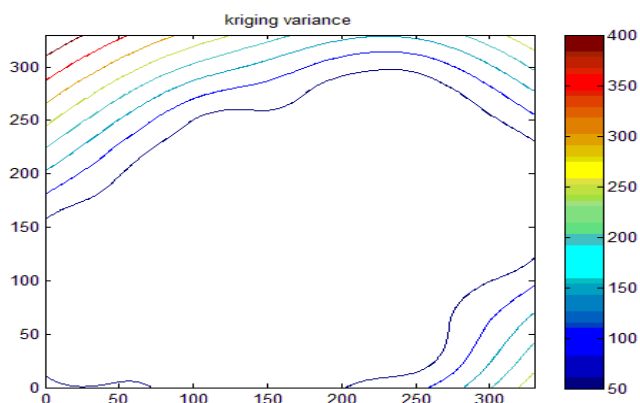
- Pour la distance 200 m :



(a)



(b)



(c)

Fig. 32 : - Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental(a), Carte piézométrique estimée par krigeage(b) et carte de variance de krigeage(c), (Distance h maximale =200m)

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

- Pour la distance 500 m :

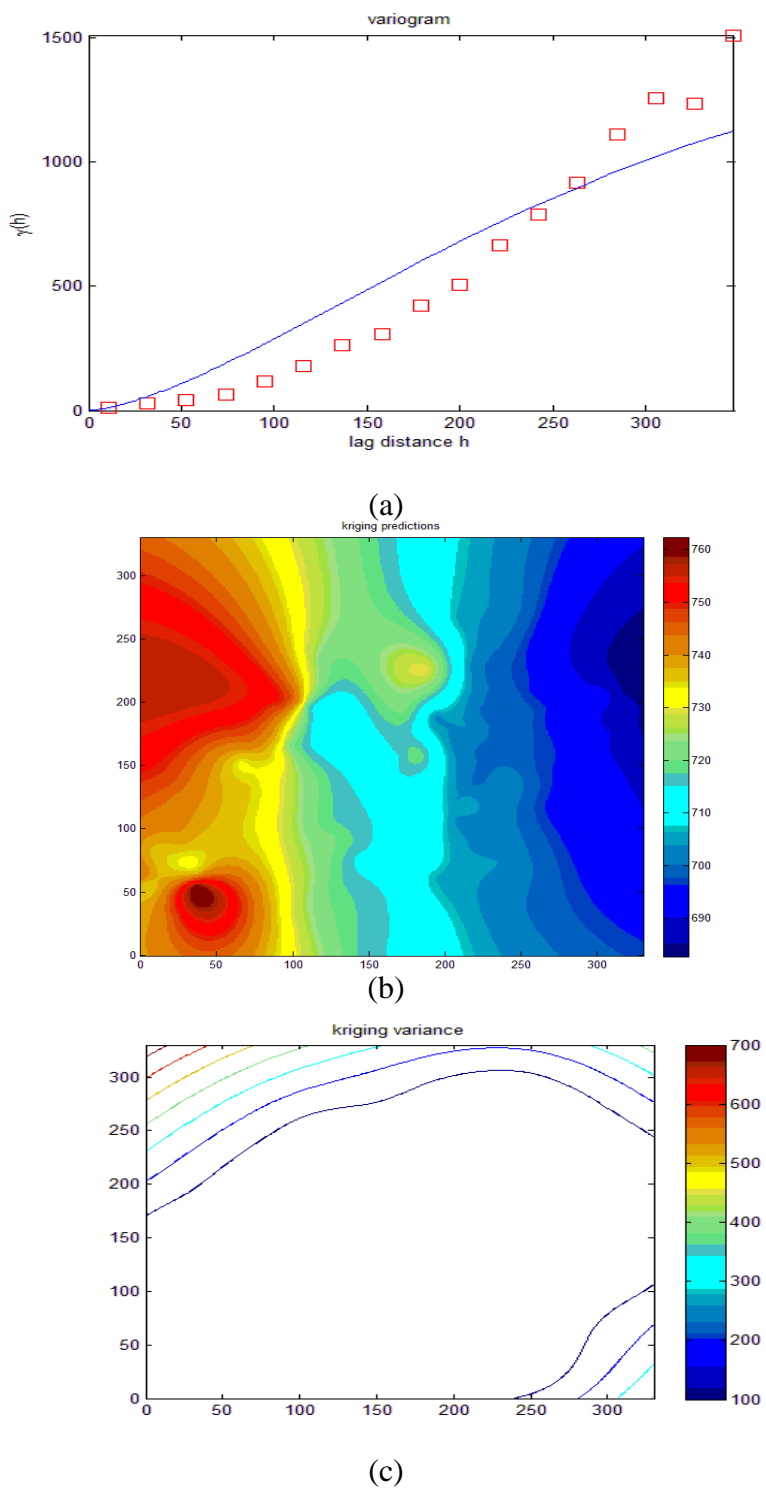


Fig. 33 : - Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental(a), Carte piézométrique estimée par krigeage (b) et carte de variance de krigeage(c), (Distance h maximale =500m)

# Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

- Pour la distance 1000 m :

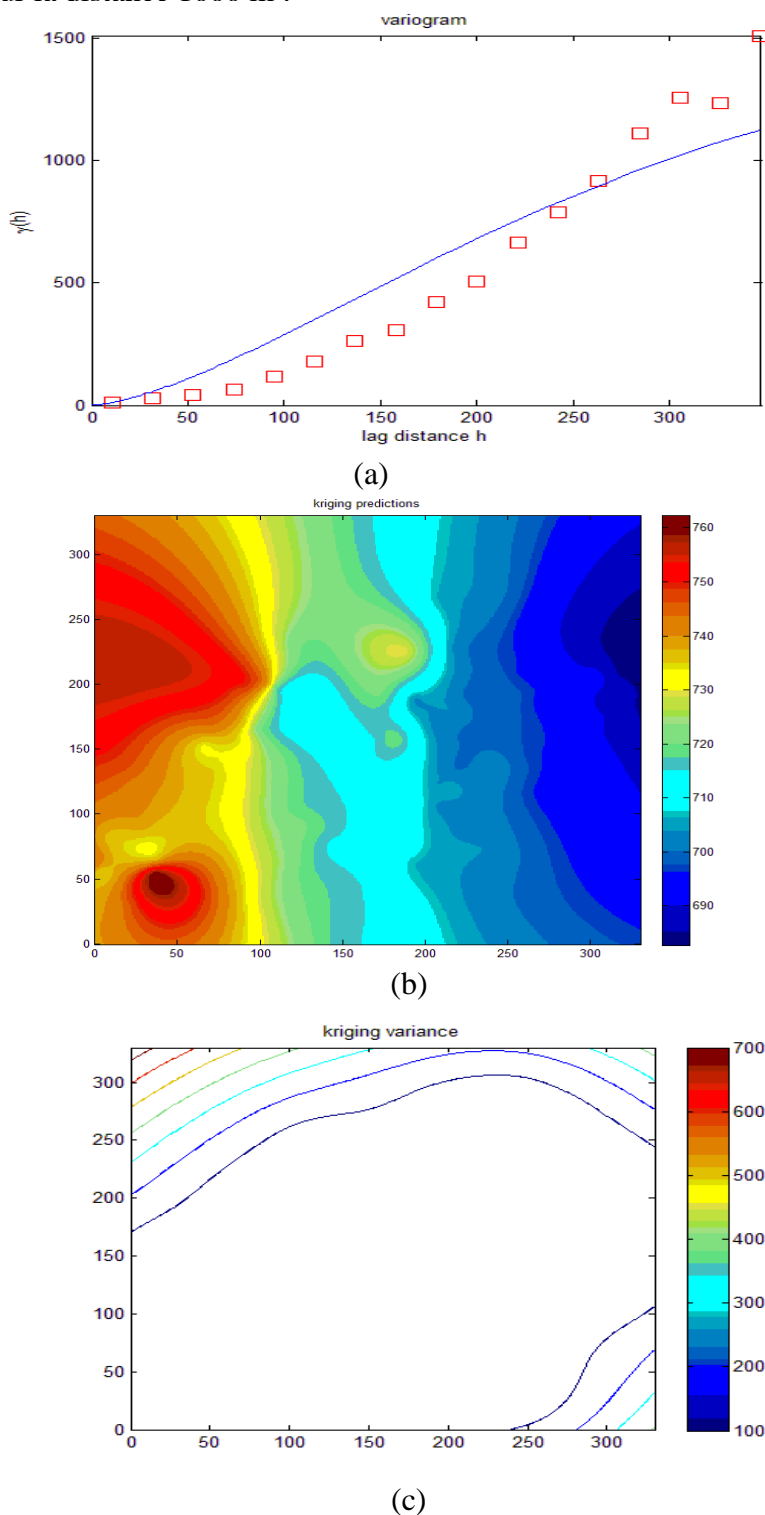


Fig. 34 : - Variogramme théorique Gaussien et variogramme expérimental(a), Carte piézométrique estimée par krigeage (b) et carte de variance de krigeage(c) , (Distance h maximale =1000m).

## Chapitre III : Application à la piéométrie de la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra

---

D'une façon générale, nous constatons que les variogrammes perdent leur structure avec la distance. Nous constatons également que les cartes piézométriques perdent leur précision lorsque la distance augmente. De même, les cartes de variance de krigeage montrent une augmentation avec la distance et ainsi l'erreur de krigeage augmente.

### **3.5. Conclusion :**

La géostatistique nous a permis de modéliser la structure du phénomène régionalisé étudié qui en est la piézométrie. L'application pour la nappe alluviale de Bennaceur Benchohra nous a bien visualisée les zones d'alimentation, le sens d'écoulement, les zones de fuite et de surexploitation. Les exemples théoriques traités dans ce travail, nous ont permis de maîtriser l'outil et tester sa validité.

### **Conclusion générale :**

En définitive, le Krigeage est la méthode optimale, au sens statistique, d'interpolation et d'extrapolation. C'est la méthode d'estimation la plus précise. Contrairement à toutes les autres méthodes, elle nous permet aussi de calculer l'erreur d'estimation à travers la variance de krigeage.

L'application à la distribution spatiale de la piézométrie dans la zone de Bennaceur Benchohra nous a permis de visualiser les zones d'alimentation, de montrer le sens d'écoulement et localiser les zones de surexploitation et les cônes de pompage.

Elle a permis également de dresser la carte de la variance de krigeage et d'apprécier ainsi l'erreur d'estimation.

On tient à rappeler que le système du krigeage prend bien en considération la structure des phénomènes à travers le variogramme. Le calcul de ce dernier permet de visualiser la cohérence spatiale du champ piézométrique et d'analyser les éventuels effets de pépites.

## Bibliographie

---

### ❖ Bibliographie :

- ✚ Aide-Mémoire de Géostatistique Linéaire. l'école des mines de Paris. Paris.
- ✚ FEKI, H. décembre(2009) thèse de doctorat en sciences agronomiques. Tunisie.
- ✚ FORTET, R. et A. Blanc-Lapierre (1953) Theorie des fonctions aleatoires. Masson, Paris.
- ✚ GILLES, G. (2004) Introduction à la géostatistique.
- ✚ JOURNAL, A (1974) Simulation conditionnelle de gisements miniers. Theorie et pratique. These, Universite de Nancy.
- ✚ KECHICHED, R (2011) : Typologie géochimique et géostatistique des mineraux de phosphate du gisement de phosphate de Bled El Hadba-Djebel Onk (Algérie Orientale), Annexes Mémo Magister, Univ –Annaba.
- ✚ KRIGE, D.G. (1951) A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand. Master's Thesis, University of Witwatersrand.
- ✚ LEVASSOR, (1978).
- ✚ MATHERON, G. (1962a) Traite de geostatistique appliquee (tome I). Technip, Paris.
- ✚ MATHERON, G. (1962b) Traite de geostatistique appliquee (tome III). B.R.G.M..
- ✚ MATHERON, G. (1963a) Traite de geostatistique appliquee (tome II). Technip, Paris.
- ✚ MATHERON, G. (1969a) Theorie des ensembles aleatoires. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, n°4, Ecole des Mines de Paris.
- ✚ MATHERON, G. (1969a) Theorie des ensembles aleatoires. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, n° 4, Ecole des Mines de Paris.
- ✚ MATHERON, G. et Ch. Huijbregts (1970) Universal Kriging. Rapport technique N-180, Centre de Geostatistique, Ecole des Mines de Paris.
- ✚ MATHERON, G. (1971b) La theorie des fonctions aleatoires intrinseques generalisees. Note geostatistique n°117, Centre de Geostatistique, Ecole des Mines de Paris.
- ✚ MATHERON, G. (1973) Le krigeage disjonctif . Rapport technique N-360, Centre de Geostatistique, Ecole des Mines de Paris.
- ✚ MATHERON, G. (1975a) Random sets and integral geometry. Wiley & Sons, New-York.
- ✚ M. Makoudi (2012).
- ✚ PIERRE, B. (2013) Introduction à l'interpolation spatiale et aux géostatistiques.
- ✚ SICHEL, H. S. (1949) Mine valuation and maximum likelihood. Master's Thesis, University of Witwatersrand.
- ✚ SICHEL, H. S. (1952) New methods in the statistical evaluation of mine sampling data. Transactions of the Institution of Mining and metallurgy, Londres.

## Bibliographie

---

- ✚ WIENER, N. (1949) Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series with engineering applications. MIT Press, Cambridge, Mass.