N° d'ordre:

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي الأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيــة العـلــوم

FACULTE DES SCIENCES

قسم الرياضـيات

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT 3ème cycle (LMD)

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques

Présentée par :

Chellaoua Houria

<u>THEME</u>

Etude de quelques problèmes aux limites d'évolution non linéaires abstraits

Soutenu publiquement le : 20/05/2021 devant le jury composé de :

Mr. Belabbaci Youcef	MCA	Univ. de Laghouat	Président
Mm. Boukhatem Yamna	MCA	Univ. de Laghouat	Directrice de thèse
Mr. Benabderrahmane Benyattou	Prof	Univ. de M'sila	Examinateur
Mr. Guerbati Kaddour	Prof	Univ. de Ghardaia	Examinateur
Mr. Rahmoune Abita	MCA	Univ. de Laghouat	Examinateur

Année Universitaire 2020/2021

Remerciements

Je remercie tout d'abord **ALLAH** le tout puissant, de m'avoir permis d'atteindre ce modeste niveau scientifique et de m'avoir donné le courage et la patience afin de mener à bien le travail réalisé dans cette thèse.

Mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à madame **Boukhatem Yamna**, ma directrice de thèse, pour son appui scientifique, sa disponibilité, ses orientations judicieuses et dont les compétences intellectuelles, l'expérience, la modestie et la patience ont grandement contribué à l'aboutissement de cette thèse. Qu'elle trouve, ici, l'expression de mon profond respect.

Je remercie professeur Mr. **Belabbaci Youcef**, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.

J'adresse aussi mes sincères reconnaissances à membres du comité de jury : Mr. **Benabderrahmane Benyattou**, Mr. **Guerbati Kaddour** et Mr. **Rahmoune Abita** qui ont accepté de participer à mon jury de thèse. Leurs présences constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

Je remercie très sincèrement mes collègues : **Limam Abdelaziz** et **Benzian Ahmed** d'avoir prisent le temps de m'aider pour la relecture de mon cursus de recherche et pour leurs idées et leurs suggestions m'ont permis d'ajouter certains éléments importants que j'avais négligés.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres de laboratoire Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) et tous les professeurs de département de Mathématiques à l'université de Laghouat pour leurs aides et leurs conseils, sans oublier tous mes collègues et mes amis.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes sœurs et mes frères pour leurs soutiens constant et leurs encouragement, surtout de m'avoir supportés toutes ces années, et eux qui je dédie ce travail.

Résumé :

Dans ce travail, nous étudions quelques équations viscoélastiques abstraites du second ordre dans des espaces de Hilbert avec retard. Nous commençons par des équations d'évolution abstraites avec retard et une mémoire infinie et nous établissons la stabilité sous une décroissance exponentielle et arbitraire de la fonction noyau. Ensuite, nous étudions un problème linéaire avec un retard constant et une mémoire infinie. Pour le troisième problème, nous considérons une équation viscoélastique abstraite avec un retard dans un terme non linéaire d'amortissement et une source non linéaire.

Sous certaines hypothèses sur les données initiales et une fonction noyau $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait, pour tout $t \geq 0$, $h'(t) \leq -\zeta(t)G(h(t))$ où ζ et G sont des fonctions satisfaisant certaines propriétés spécifiques. De plus, sous une hypothèse appropriée sur le poids du terme retard et le poids d'amortissement linéaire/non linéaire, nous prouvons l'existence globale et l'unicité de la solution de ces deux problèmes. Ensuite, on établit un résultat de stabilité explicite et générale de la solution où les décroissances exponentielle et polynomiale sont des cas particuliers, en se basant sur la méthode d'énergie avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov et en utilisant quelques propriétés des fonctions convexes pour une classe très large des fonctions noyaux du terme viscoélastique. En outre, l'étude de ces deux problèmes est fournie par quelques exemples et applications pour illustrer les résultats obtenus.

Enfin, la dernière partie est consacrée à l'étude de l'existence locale et de l'explosion de la solution pour une équation semi-linéaire abstraite avec une mémoire infinie et un retard dépend du temps dans un terme d'amortissement non linéaire et une source non linéaire. Sous certaines hypothèses sur les données initiales et en utilisant la théorie des semi groupes et la technique de Kato, nous établissons l'existence locale de solution. Ensuite, on prouve le résultat d'explosion en temps fini de la solution avec une énergie initiale positive et on donne quelques applications.

Mots clés : Décroissance générale, Équation d'évolution abstraite, Espaces de Hilbert, Existence locale, Explosion en temps fini, Fonction de Lyapunov, Mémoire infinie, Terme d'amortissement non linéaire, Terme source non linéaire, Terme de retard.

Abstract :

In this work, we study some second-order abstract viscoelastic equations in Hilbert spaces with time delay. We start the study with some abstract linear and semi linear evolution equations with delay and infinite memory. Then, we establish the stability results under an exponential and arbitrary decay of the kernel function. The second is a linear problem with constant delay and infinite memory. For the third problem, we consider an abstract viscoelastic equation with delay term in the nonlinear internal damping and a nonlinear source term.

Under certain hypotheses on the initial data and a kernel function $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfying, for all $t \geq 0$, $h'(t) \leq -\zeta(t)G(h(t))$ where ζ and G are functions satisfying some specific properties. In addition, under a suitable assumption on the weight of the delayed feedback and the weight of the non-delayed feedback, we prove the global existence and uniqueness of the solution of the both problems. Then, we establish an explicit and general decay results of the energy solution where the exponential and the polynomial decay rates are a special cases, by introducing a suitable Lyapunov functional and some properties of the convex functions for this much larger class of kernel functions. Moreover, the study of the two problem is provided by some examples and applications to illustrate the results obtained.

Finally, the fourth setting is devoted to study the local existence and the blow up of solution for a semi linear abstract viscoelastic equation with infinite memory, time varying delay in the nonlinear internal damping and a nonlinear source term. Under a suitable conditions on the initial data and by using the semigroup arguments and variable norm technique of Kato, we establish the local existence of solution. Next, we prove the blow up result in finite time of solution with positive initial energy and we give some specific applications.

Key-words : Abstract evolution equation, Blow up, General decay, Hilbert spaces, Infinite memory, Local existence, Lyaponov Function, Nonlinear damping, Nonlinear source term, Time delay.

ملخص:

في هذا العمل، نعتبر عدة مسائل تجريدية لزجة من الدرجة الثانية في فضاءات هيلبرت مع تأخير زمني. نستهل بمعادلات تجريدية لزجة خطية و شبه خطية مع تأخير وذاكرة لانهائية حيث نبرهن الوجود الكلي و وحدانية الحل، بالإضافة إلى الاستقرار في ظل السلوك الأسي والعشوائي لدالة النواة. أما المسألة الثانية فعبارة عن مسألة خطية مع تأخير ثابت وذاكرة لانهائية. و بالنسبة للمسألة الثالثة، فإننا نعتبر معادلة لزجة مجردة مع تأخير في حد تخميد داخلي غير خطي ومنبع غير خطي.

تحت فرضيات معينة على المعطيات ودالة النواة $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$، التي تحقق من أجل كل $t \geq 0$، $h'(t) \leq -\zeta(t)G(h(t))$ حيث ζ و G عبارة عن دوال تحقق بعض الخصائص، و مع فرض مناسب على حد التأخير وحد التخميد الخطي / الغير الخطي، فإننا نثبت الوجود الكلي و وحدانية الحل بالنسبة لهاتين المسألتين الأخيرتين. بعد ذلك، نعمل على ايجاد نتيجة استقرارعامة للحل حيث يكون التناقص الأسي وتناقص كثير الحدود حالات خاصة منها، و ذلك بالاعتماد على اختيار مناسب لدالة ليابونوف وباستخدام بعض خصائص الدوال المحدبة. و كذلك تم ادراج بعض الأمثلة والتطبيقات لدراسة هاتين المسألتين لتوضيح النتائج التي تم الحصول عليها.

و في الأخير، تم تخصيص الفصل الأخير لدراسة الوجود المحلي وانفجار الحل لمعادلة مجردة لزجة شبه خطية مع ذاكرة لانهائية، تأخير متغير بدلالة الزمن في حد تخميد داخلي غير خطي و منبع غير خطي. بفرضيات معينة حول المعطيات وباستخدام نظرية شبه الزمرة وتقنية كاتو، فإننا نثبت الوجود المحلي لحل المسألة. بعد ذلك، نثبت نتيجة الانفجار في زمن محدود للحل مع اعتماد طاقة ابتدائية موجبة ونختم ببعض التطبيقات.

كلمات مفتاحية: الإستقرار العام، الإنفجارفي زمن محدود، تأخير زمني، دالة ليابونوف، فضاء هلبرتي، مسألة تجريدية، الوجود المحلي.

Table des matières

Introduction générale

Le retard de temps survient dans de nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques, thermiques et économiques car ce phénomène dépend non seulement de l'état actuel, mais aussi de l'histoire passée du système d'une manière très compliquée. Récemment, l'étude des équations différentielles aux dérivées partielles avec retard est devenue un domaine de recherche actif. Dans de nombreux cas, le retard est une source d'instabilité et un petit retard peut déstabiliser le système qui est asymptotiquement stable dans l'absence du retard, voir [28, 7, 75, 59].

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini de la solution des équations viscoélastiques abstraites du second ordre dans des espaces de Hilbert avec retard, en considérant les problèmes suivants :

1. Problèmes d'évolutions abstraits linéaires et semi linéaires avec retard et une mémoire infinie
2. Problème d'évolution abstrait linéaire avec un retard constant et une mémoire infinie.
3. Problème d'évolution abstrait avec un retard dans un terme d'amortissement non linéaire et une source non linéaire.
4. Une équation semi-linéaire abstraite avec une mémoire infinie et un retard dépend du temps dans un terme d'amortissement non linéaire et avec une source non linéaire.

Plus précisément, ce travail est constitué de quatre chapitres, dans le premier, nous allons considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + Cu_t(t-\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + F_1(u_t(t)) = F_2(u(t)), & t \in (0, +\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0, \tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

où A, B et C trois opérateurs linéaires positifs auto-adjoints dans un espace de Hilbert H, $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction noyau du terme viscoélastique et τ est une constante réelle positive représentant le retard. $F_1 : H \to H$ et $F_2 : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ sont des fonctions non linéaires satisfaisant certaines conditions à spécifier ultérieurement avec (u_0, u_1, f_0) sont les conditions initiales.

Pour le problème linéaire ($F_1 = F_2 = 0$) et en l'absence du retard, il existe dans la littérature des nombreux résultats d'existence, d'unicité et de stabilité, voir [27, 29, 64, 33, 36]. Différentes estimations de stabilité ont été obtenues qui dépendent du comportement de h à l'infini. Dans [17], Cavalcanti et al. ont considéré l'équation d'onde viscoélastique suivante :

$$u_{tt}(t) - \Delta u(t) + f(x,t,u) + \int_0^{+\infty} h(s)\Delta u(t-s)ds + a(x)u_t = 0,$$

sur $\Omega \times (0, +\infty)$ où $a : \Omega \to \mathbb{R}^+$ est une fonction satisfaite $a(x) \geq a_0$ sur $w \subset \Omega$ et qui peut être nulle sur une partie du domaine Ω. La fonction f est de classe C^1 sur $\Omega \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}$ et h satisfait

$$-\zeta_1 h(t) \leq h'(t) \leq -\zeta_2 h(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Les auteurs ont montré un résultat de décroissance exponentielle sous certaines restrictions géométriques sur le sous ensemble $w \subset \Omega$. Le même résultat avait été prouvé par Berrimi et Messaoudi [10] dans des conditions plus faibles sur les deux données a et h pour $f = |u|^\gamma u$, $\gamma > 0$ et $a(x)u_t$ est remplacé par $a(x)|u_t|^m u_t$ avec $m \geq 0$.

Dans le cas du problème linéaire avec retard, Nicaise et Pignoti dans [59] ont étudié l'effet du retard sur la frontière et interne de l'équation d'onde dans les domaines de $\mathbb{R}^n$. Ils ont considéré le système qui suit :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a(x)[\mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau)] = 0, & \Omega \times (0,+\infty), \\ u_t(x,t) = 0, & \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0, & \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & t \in (0,\tau), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que $a(x) \geq 0$ p.p sur Ω et $a(x) > a_0 > 0$ p.p sur w, avec $w \subset \Omega$ un ouvert de frontière Γ_N. Sous la condition $0 < \mu_2 < \mu_1$, les auteurs ont obtenu la stabilité exponentielle de la solution et un résultat d'instabilité si $\mu_2 \geq \mu_1$. Dans le cas du retard dépend du temps, Nicaise et al dans [61] ont étudié une équation d'onde et ont prouvé un résultat de stabilité exponentielle sous la condition $0 < |\mu_2| \leq \sqrt{1-d}\mu_1$, où μ_2 est un nombre réel et la constante d satisfait $\tau'(t) \leq d < 1$, $\forall t > 0$. Dans [60], Nicaise, Pignotti et Valein ont étendu le résultat ci-dessus à une dimension d'espace supérieur et ont établi une décroissance exponentielle. Le même résultat de stabilité a été établi pour une équation d'évolution semi-linéaire abstraite avec un terme de retard en feedback par Nicaise et Pignoti dans [63], plus précisément, ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) + k\mathcal{B}U(t-\tau), \quad \text{in } (0,+\infty), \\ U(0) = u_0, \ \mathcal{B}U(t-\tau) = f(t), \quad \forall t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{2}$$

où $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ exponentiellement stable, i.e., il existe deux constantes positives M et w telles que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $\mathcal{L}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur H, $k \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ un opérateur borné sur H. La fonction $F : H \longrightarrow H$ satisfait certaines conditions de Lipschitz avec les données initiales U_0 et $f \in C([0, \tau]; H)$. Ils ont montré que, si le C_0-semi groupe décrivant la partie linéaire du modèle est exponentiellement stable, alors la solution du système (2) est exponentiellement stable sous une condition approprié sur le retard en feedback.

Pour viscoélastique problèmes avec retard, Guesmia dans [34] a traité le problème (1) avec $B = A$, $Cu = \mu u$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $F_1 = F_2 = 0$. Il a établi l'existence globale en utilisant la théorie des semi groupes et la décroissance exponentielle de la solution par la méthode énergétique. Il a prouvé que la dissipation unique donnée par le terme mémoire est suffisamment forte pour stabiliser de manière exponentielle le système en présence de retard. Dans [44], Kirane et Said-Houari ont établi l'existence par les approximations de Faedo-Galerkin et une estimation générale d'énergie sous la condition $\mu_2 \leq \mu_1$ pour le système d'ondes suivant :

$$u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t-\tau) = 0,$$

avec h satisfait la condition suivante

$$h'(s) \leq -\zeta(t)h(s), \quad \forall s \geq 0, \tag{3}$$

où ζ est une fonction différentiable positive décroissante. Dai et Yang dans [26] ont considéré le même problème que [44] et ils ont résolu le problème ouvert proposé par Kirane et Said-Houari. In [3], Alabau-Boussouira et al. ont introduit la condition suivante : $h'(t) \leq -G(h(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, où G est une fonction convexe. Pour des travaux considérés cette dernière condition sur h, voir [18, 45, 74, 54].

Récemment, Mustafa dans [56] a établi un résultat de stabilité explicit d'énergie où la décroissance exponentielle et polynomiale sont des cas particuliers pour une équation viscoélastique d'onde sans un terme de retard, sous la condition générale suivante, $h'(t) \leq -\zeta(t)h^p(t)$, avec $1 \leq p < 2$, voir aussi [52]. Dans [57], le même auteur a établi un résultat de stabilité optimal, explicit et général par la méthode de Lyapunov et quelques propriétés des fonctions convexes avec la fonction du noyau h satisfait

$$h'(t) \leq -\zeta(t)G(h(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

où $G : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ est une fonction de classe C^1 qui est linéaire ou elle est strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$, $r \leq h(0)$, $G(0) =$

$G'(0) = 0$. Pour les travaux qui ont utilisé (4), nous donnons les références suivantes : [58, 8, 37]. Dans le cas d'une mémoire infinie, Guesmia dans [35] a considéré les problèmes suivants :

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} h(s)\Delta u(t-s)ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \tag{5}$$

et

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \int_0^{+\infty} h(s)u(t-s)ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \tag{6}$$

où Ω est un domaine régulière de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$. L'auteur a établi une relation entre le taux de décroissance des solutions et le comportement de h à l'infini sous l'hypothèse très générale sur h ; la condition (4). Les mêmes résultats de stabilité sont obtenus par Al-Mahdi dans [5] pour un système de Petrovsky ($A = \Delta^2$).

Motivé par ces travaux, le deuxième chapitre est consacré d'étendre les résultats précédentes avec h satisfait la condition (4) pour le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t-\tau) = 0, & t > 0, \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & t \in (0,\tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

où $\mu_1 > 0$, μ_2 sont des constantes réelles avec (u_0, u_1, f_0) sont des données. En comparant le problème (7) avec les derniers problèmes, on trouve que le système (7) est plus générale comme les opérateurs $A \neq B$ et on a traité le cas d'un terme mémoire infinie et le plus intérêt, la présence du terme retard qui n'était pas considéré auparavant, voir [23].

Dans [55], Mustafa a considéré l'équation de plaque suivante

$$u_{tt}(t) + \Delta^2 u(t) - \int_0^{+\infty} h(s)\Delta^2 u(t-s)ds + \mu_1 u_t|u_t|^{k-2} + \mu_2 u_t(t-\tau)|u_t(t-\tau)|^{k-2} = 0,$$

où $k \geq 2$. Il a établi un résultat de taux de décroissance explicit et général sans imposer d'hypothèses restrictives sur le comportement de la fonction noyau à l'infini. Par la suite, Boukhatem et Benabderrahmane dans [14] ont considéré une équation viscoélastique à coefficient variable avec un retard dépend du temps, des conditions aux limites acoustiques et une source non linéaire. Ils ont établi des résultats de dissipation générale où la fonction noyau satisfait une décroissance exponentielle et la condition suivant :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(s)}{G^{-1}(-h'(s))}ds + \sup_{s\in\mathbb{R}_+} \frac{h(s)}{G^{-1}(-h'(s))} < +\infty.$$

En cas de retard distribué, Aili et Khemmoudj dans [1] ont considéré l'équation d'onde viscoélastique suivante de type Kirchhoff avec un terme d'amortissement non linéaire

$$\begin{aligned} |u_t|^l u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|_2^2\right)\Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds \\ + \mu_0 g_1(u_t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) g_2(u_t(x,t-s))ds + f(u) = 0, \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

l et μ_0 sont des constantes positives. $M(s) = m_0 + m_1 s^\beta$ pour $m_0 > 0$, $m_1 \geq 0$, $\beta \geq 1$ et $s \geq 0$, $\mu : [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, avec τ_1 et τ_2 satisfont $0 \leq \tau_1 < \tau_2$. Ils ont établi un résultat de dissipation général et optimal sous certains hypothèses générales sur μ_0 et μ avec h satisfait la condition : $h'(t) \leq -G(h(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, où G est une fonction convexe. Pour des résultats de dissipation plus généraux en présence de retard, voir [9, 50, 15, 41] et les références y figurant.

Dans le troisième chapitre, nous considérons le système suivant :

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^t h(t-s)Au(s)ds + \mu_1 Q(u_t(t)) + \mu_2 P(u_t(t-\tau)) = F(u(t)), \tag{8}$$

où $\mu_1 > 0$, μ_2 sont des constantes réelles et les fonctions $G, P : H \to H$ et $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ satisfaisant certaines conditions à spécifier ultérieurement avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & t \in (0,\tau), \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{cases}$$

où (u_0, u_1, f_0) sont données. Ce dernier problème généralise les problèmes viscoélastiques qui existent sans retard à ceux avec retard dans un terme d'amortissement non linéaire. De plus, notre système abstrait regroupe plusieurs systèmes par exemples : les équations des ondes et les équations de Petrovesky. Les résultats de stabilité obtenus sous la condition (4) améliore les résultats précédents dans le cas des problèmes linéaires et des problèmes sans retard et les hypothèses qu'on a supposé sur les fonctions Q et P sont plus générales que les autres problèmes, voir les exemples dans la section 3.5.

Tandis que le quatrième chapitre est dédié à l'étude d'existence locale et l'explosion en temps fini de la solution de problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(t-s)Au(x,s)ds + \mu_1 G(u_t(t)) & \\ \qquad\qquad + \mu_2 P(u_t(t-\tau(t))) = F(u(t)), & t > 0, \\ u_t(t-\tau(0)) = f_0(t-\tau(0)), & t \in (0,\tau(0)), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{9}$$

En absence du terme mémoire et du retard ($h = 0$ et $\mu_2 = 0$), le problème (9) prend la forme

$$u_{tt}(t) + Au(t) + \mu_1 G(u_t(t)) = F(u(t)).$$

Ce problème a été largement étudié et de nombreux résultats ont été établis concernant l'existence et la non-existence globale où A n'est pas nécessairement un opérateur linéaire. Pour un terme d'amortissement linéaire, Levine dans [46, 47] a montré que la solution avec énergie initiale négative s'explose en temps fini en se basant sur "la méthode de concavité". Les mêmes résultats ont été obtenus pour un terme d'amortissement non linéaire par Georgive et Todorova [32] pour $1 < m < p$ avec $A = -\Delta$, une source de type $u|u|^{p-1}$ et le terme d'amortissement $u_t|u_t|^{m-1}$. Pour $1 < p \leq m$, ils ont montré que la solution existe globalement dans le temps. Plus tard, Vitillaro dans [71] a considéré le problème de Cauchy suivant :

$$[P(u'(t))]' + A(u(t)) + Q(t, u'(t)) = F(u(t)), \quad t \in [0, T),$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0,$$

où A, F, P et Q sont des opérateurs non linéaires sur des espaces de Banach. Il a prouvé que la solution s'explose en temps fini avec l'énergie initiale est positive. Pour des résultats de même axe, voir [48, 53, 12, 13].

Pour viscoélastique problème, Wu dans [72] a étudié une équation d'onde viscoélastique non linéaire avec les conditions aux limites et Dirichlet. Il a utilisé une méthode différente pour prouver que les solutions a énergie initiale négative explosent en un temps fini. Sous certain condition sur la fonction noyau h, Wu et Lin dans [73] ont montré que le résultat d'explosion peut être étendu à une région plus grande pour l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(x,s)ds + Q(x,t,u_t) = f(x,u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0. \end{cases}$$

Pour la même équation viscoélastique semi-linéaire avec $Q(u_t) = u_t|u_t|^{m-2}$ et $f(u) = u|u|^{p-2}$, Messaoudi dans [51] a prouvé que la solution a initiale énergie positive explose en un temps fini pour $p > m$. Dans [67], Song a prouvé l'explosion en un temps fini avec énergie initiale positive pour l'équation d'onde viscoélastique non linéaire suivante :

$$\begin{cases} |u_{tt}|^\rho u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(x,s)ds + u_t|u_t|^{m-2} = u|u|^{p-2}, & \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} 2 < p < \infty, \quad \text{si} \quad n = 1,2, & 2 < p < \frac{2(n-1)}{n-2}, \quad \text{si} \quad n \geq 3, \\ 0 < \rho < \infty, \quad \text{si} \quad n = 1,2, & 2 < \rho < \frac{2}{n-2}, \quad \text{si} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Récemment, Kafini et al dans [38] ont examiné le système d'évolution abstrait avec retard de la forme

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) + G(u_t(t)) + \mu G(u_t(t-\tau)) = F(u(t)), & (0,\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & (0,\tau), \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1, & \end{cases}$$

où μ est une constante réelle, avec $|\mu| < 1$, $\tau > 0$ et G, F sont des fonctions continues. Sous certaines conditions sur les données initiales et les fonctions F et G, les auteurs ont prouvé que les solutions du système explosent en temps fini avec une énergie initiale négative. Un résultat similaire a également été obtenu avec une énergie initiale positive par Kang [40] pour l'équation d'onde viscoélastique avec retard et condition aux limites de Dirichlet, voir aussi [39]. Motivés par ces derniers travaux, nous considérons le problème (9) qui généralise les problèmes cités auparavant. En outre, ce problème n'a pas été étudié par les prédécesseurs comme le terme retard considéré dépend du temps et apparait dans un terme d'amortissement non linéaire. Notre résultat améliore les résultats d'explosion en temps fini de la solution des problèmes précédentes avec une énergie initiale positive ainsi que une énergie initiale négative.

Cette thèse est organisée comme suit :
Le **premier chapitre** est consacré à l'étude d'existence globale et la stabilité de la solution des problèmes d'évolutions abstraits avec retard et une mémoire infinie. Dans la première section, on s'intéresse à établir l'existence globale en utilisant la théorie des semi groupes et la décroissance exponentielle par la méthode de Lyapunov de la solution du problème linéaire où $F_1 = F_2 = 0$. Dans la deuxième section, on montre que la solution du problème (1) existe globalement et décroit exponentiellement sous certaines conditions sur les données intailles. La preuve est basée sur des résultats classiques d'équation d'évolution non linéaire, [19]. A la fin de ce chapitre, nous examinons la stabilité du problème (1) en prenant $F_1 = 0$ sous une décroissance arbitraire de h avec F_2 est globalement lipschitzienne. Pour le résultat d'existence, on utilise la théorie des semi groupes en transformant notre problème en un problème de Cauchy et en se basant sur le théorème de Lumer-Phillips. Ensuite, on établit la stabilité en utilisant la méthode énergétique avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov. Les résultats obtenus dans la dernière section de ce chapitre ont été publiés dans *Proceedings of International Mathematical Sciences* : 2(1) (2020) 7–25. Sous le titre "Stability result for an abstract time delayed evolution equation with arbitrary decay of viscoelasticity", [20, 21, 22]

Le **deuxième chapitre** est consacré à établir un résultat explicite et générale de stabilité de l'énergie pour le système (7) où la fonction noyau h satisfaite la condition (3). Nous rappelons que la condition (3) décrit une classe très large des fonctions noyaux du terme viscoélastique. Pour cela, on a considéré quatre sections. Dans la première, on présente le système considéré et les données avec les hypothèses sur lesquelles on peut avoir les résultats visés. Dans la deuxième section, on établit l'existence globale et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des semi groupes. Puis, en utilisant la méthode énergétique avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov et en utilisant quelques propriétés des fonctions convexes, on démontre la stabilité de la solution dans la troisième section. Enfin, on donne quelques applications. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont été publiés dans *Mathematical Methods in the Applied Sciences* : (2020) 1–25. Sous le titre "Optimal decay for second-order abstract viscoelastic equation in Hilbert spaces with infinite memory and time delay". https ://doi.org/10.1002/mma.6917, [23].

L'objet du **troisième chapitre** est d'étudier un système d'évolution abstrait avec un retard dans un terme d'amortissement non linéaire et une source non linéaire. Pour cela, on introduit le système (7) et les hypothèses dans la première section. Dans la deuxième section, on montre que la solution locale du problème (7) existe globalement en temps sous des hypothèses convenables sur le poids de l'amortissement non linéaire, le poids du retard et le comportement de la fonction de relaxation. La troisième section est consacré à établir quelques lemmes utiles pour obtenir le résultat de la stabilité visé. Par la méthode d'énergie et quelques propriétés des fonctions convexes, on établit deux estimations explicites et optimales de la stabilité d'énergie dans la quatrième section. Dans la dernière section, on donne quelques exemples et applications pour illustrer les résultats obtenus. Ces résultats ont été publiés dans le journal : *Asymptotic Analysis*, intitulé : Optimal decay of an abstract nonlinear viscoelastic equation in Hilbert spaces with delay term in the nonlinear internal damping, [25]

Le **dernier chapitre** contient quatre sections. Dans la première, on présente le système considéré ; le système (9) et les hypothèses sous lesquelles nous obtenons les résultats visés. Le but de la deuxième section est de montrer que la solution du problème (9) existe localement en utilisant des résultats classiques d'équation d'évolution non linéaire et la technique de Kato. Dans la troisième section, on montre que la solution locale obtenue s'explose en temps fini en se basant sur les techniques de Vittilaro E. dans [71] et W.J. Liu dans [49]. A la fin de ce chapitre, nous donnons quelques applications. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans *Applicable Analysis* : (2020) sous le titre "Blow up result for an abstract evolution problem with infinite memory and time-varying delay". http ://dx.doi.org/10.1080/00036811.2020.1863374, [24].

Contributions

Publications internationales

1. H. Chellaoua, Y. Boukhatem, "Stability result for an abstract delayed evolution equation with arbitrary decay in viscoelasticity". *AIP Conference Procedings*, 2183(1) (2019). https ://doi.org/10.1063/1.5136215
2. H. Chellaoua, Y. Boukhatem, "Optimal decay for second-order abstract viscoelastic equation in Hilbert spaces with infinite memory and time delay". *Mathematical*

Methods in the Applied Sciences : (2020) 1–25. https ://doi.org/10.1002/mma.6917

3. H. Chellaoua, Y. Boukhatem, "Stability result for an abstract time delayed evolution equation with arbitrary decay of viscoelasticity". *Proceedings of International Mathematical Sciences* : 2(1) (2020) 7–25.
4. H. Chellaoua, Y. Boukhatem and B. Feng, "Optimal decay of an abstract nonlinear viscoelastic equation in Hilbert spaces with delay term in the nonlinear internal damping". *Asymptotic Analysis*, January (2021). https ://doi.org/10.3233/ASY-201664
5. H. Chellaoua, Y. Boukhatem, "Blow up result for an abstract evolution problem with infinite memory and time-varying delay". *Applicable Analysis*, (2020). http ://dx.doi.org/10.1080/00036811.2020.1863374
6. H. Chellaoua, Y. Boukhatem, "Stability results for second-order abstract viscoelastic equation in Hilbert spaces with time-varying delay". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, January (2020). (Travail acceptée)

Communications internationales

1. 3rd International conference in Operator theory, PDE and Applications "*Well-posedness and exponential stability of a nonlinear abstract evolution equation with past history and time delay*", Université de Echahid Hamma Lakhder, 24-25 Avril 2019, El-oued, Algérie.
2. 3rd International conference of mathematical sciences ICMS 2019, "*Stability Result for an Abstract Delayed Evolution Equation with Arbitrary Decay in Viscoelasticity*", University of Maltepe, 4-8 September 2019, Istanbul, Turquie.

Chapitre 1

Étude des problèmes d'évolutions abstraits avec retard et une mémoire infinie

L'objet de chapitre est d'étudier l'existence globale et la stabilité de quelques problèmes d'évolutions abstraits avec retard et une mémoire infinie. Nous allons commencer d'établir l'existence et la décroissance exponentielle pour un problème linéaire. Ensuite, on prouve la décroissance exponentielle pour un système semi-linéaire avec un terme d'amortissement et une source non linéaires par une méthode directe en utilisant le principe de Duhamel. Enfin, nous allons établir la stabilité pour un problème d'évolution abstrait avec retard et une source non linéaire sous une décroissance arbitraire de h en utilisant la méthode énergétique avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov.

1.1 Position des problèmes

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire et une norme associée notés par $\langle .,. \rangle$ et $\| \, . \, \|$, respectivement. Soient $A : D(A) \longrightarrow H$ et $B : D(B) \longrightarrow H$ deux opérateurs linéaires positifs auto-adjoints tels que $D(A) \subset D(B) \subset H$ avec des injections denses et compactes. $C : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire positif auto-adjoints, $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction noyau du terme mémoire et τ est une constante réelle positive représentant le retard. Soit le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + Cu_t(t-\tau) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + F_1(u_t(t)) = F_2(u(t)), & t \in (0,+\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0,\tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où les fonctions $F_1 : H \to H$ et $F_2 : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ sont des fonctions non linéaires satisfaisant certaines conditions à spécifier ultérieurement et (u_0, u_1, f_0) sont données.

Le but de ce chapitre est d'établir l'existence globale et la stabilité de la solution du :
◇ Problème linéaire $(F_1 = F_2 = 0)$.
◇ Problème (1.1) sous une décroissance exponentielle de h
◇ Problème (1.1) en prenant $F_1 = 0$ sous un décroissance arbitraire de h.

On présente des hypothèses utiles pour obtenir les résultats visés.
(A1) Ils existent deux constantes positives a et b telles que

$$b\|u\|^2 \leq \left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leq a\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2, \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.2}$$

(A2) $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 satisfait

$$h(0) > 0, \quad h_0 = \int_0^{+\infty} h(s)ds < \frac{1}{a}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1. *D'après le théorème .11, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ telle que*

$$\|Cu\| \leq |\mu|\|u\|, \quad \forall u \in H. \tag{1.4}$$

1.2 Étude du problème linéaire

Dans cette section, nous intéressons à étudier l'existence globale et la décroissance exponentielle de la solution du système d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + Cu_t(t-\tau) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0, \tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Nous commençons par introduire des nouvelles fonctions z et η^t, respectivement, de la même façon que [59] et [27], comme suit

$$z(\rho, t) = u_t(t - \rho\tau), \quad \rho \in (0, 1), \ t > 0,$$

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad t, s > 0.$$

On en tire les équations suivantes :

$$\tau z_t(\rho, t) + z_\rho(\rho, t) = 0, \quad \rho \in (0, 1), \ t > 0,$$

$$\eta_t^t(s) = u_t(t) - \eta_s^t(s), \quad t, s > 0.$$

En outre, le problème (1.5) devient

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - h_0 Bu(t) + \int_0^{+\infty} h(s) B\eta^t(s)ds + Cz(1,t) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ \tau z_t(\rho, t) + z_\rho(\rho, t) = 0, & \rho \in (0,1),\ t > 0, \\ \eta_t^t(s) = u_t(t) - \eta_s^t(s), & t, s > 0, \\ z(\rho, 0) = f_0(-\rho\tau), & \rho \in (0,1), \\ z(0,t) = u_t(t) & t > 0, \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \\ \eta^0(s) = u_0(0) - u_0(s), & s > 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2.1 Existence globale

Dans ce paragraphe, nous prouvons l'existence globale et l'unicité de la solution du problème (1.6) en utilisant la théorie des semi groupes. Pour cela, on prend $U = (u, u_t, \eta^t, z)^T$, le système précédent devient

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathscr{A} U(t), \quad \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, \eta^0, f_0(-\tau.))^T, \end{cases} \tag{1.7}$$

où l'opérateur $\mathscr{A}$ et le domaine $D(\mathscr{A})$ sont défini par, respectivement,

$$\mathscr{A} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -(A - h_0 B)\phi_1 - \int_0^{+\infty} h(s) B\phi_3(s)ds - C\phi_4(1) \\ \phi_2 - \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} \\ \dfrac{-1}{\tau}\dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \begin{Bmatrix} (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{H},\ (A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s) B\phi_3(s)ds \in H,\ \phi_2 \in D(A^{\frac{1}{2}}), \\ \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} \in L_h^2(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}})),\ \dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \in L^2(0,1;H),\ \phi_3(0) = 0,\ \phi_4(0) = \phi_2 \end{Bmatrix}$$

où l'espace $\mathscr{H}$ est donné par

$$\mathscr{H} = D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times L_h^2(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}})) \times L^2(0,1;H).$$

Les espaces $L_h^2(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))$ et $L^2(0,1;H)$ sont respectivement définis par

$$L_h^2(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}})) = \left\{ \phi : \mathbb{R}_+ \to D(B^{\frac{1}{2}}), \quad \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \phi(s) \right\|^2 ds < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{L_h^2(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))} = \int_0^{+\infty} h(s) \left\langle B^{\frac{1}{2}} \phi_1(s), B^{\frac{1}{2}} \phi_2(s) \right\rangle ds.$$

Et

$$L^2(0,1;H) = \left\{ \phi \, : (0,1) \to H, \quad \int_0^1 \|\phi(\rho)\|^2 \, d\rho < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2(0,1;H)} = \int_0^1 \langle \phi_1(\rho), \phi_2(\rho) \rangle \, d\rho.$$

L'espace d'énergie $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert équipé du produit scalaire suivant : pour tout $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ et $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ de $\mathscr{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \Phi, W \rangle_{\mathscr{H}} &= \langle \phi_1, w_1 \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})} - h_0 \langle \phi_1, w_1 \rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} + \langle \phi_2, w_2 \rangle + \langle \phi_3, w_3 \rangle_{L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))} \\ &\quad + \tau |\mu| \langle \phi_4, w_4 \rangle_{L^2(0,1;H)}. \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de la solution de notre problème sont assurés par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A2), pour tout $U_0 \in \mathscr{H}$, il existe une unique solution mild $U \in C(\mathbb{R}_+, \mathscr{H})$ du problème (1.5). De plus, si $U_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, alors la solution U est une solution classique, i.e,*

$$U \in C(\mathbb{R}_+, \mathscr{D}(\mathscr{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathscr{H}).$$

Démonstration. La preuve est basée sur la théorie des semi groupes. Ainsi, pour la résolution du problème de Cauchy homogène (1.7), on montre que l'opérateur linéaire $\mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$−semi groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur $\mathscr{H}$.

• D'abord, l'opérateur $\mathscr{A}$ est dissipatif. En effet, soit $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathscr{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -(A - h_0 B)\phi_1 - \int_0^{+\infty} h(s) B \phi_3(s) ds - C\phi_4(1) \\ \phi_2 - \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} \\ \dfrac{-1}{\tau} \dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathscr{H}} \\ &= \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})} - h_0 \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} + \int_0^{+\infty} h(s) \left\langle \phi_2 - \frac{\partial \phi_3}{\partial s}, \phi_3 \right\rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} ds \\ &\quad - \left\langle (A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s) B \phi_3(s) ds + C\phi_4(1), \phi_2 \right\rangle \\ &\quad + \tau |\mu| \int_0^1 \left\langle \frac{-1}{\tau} \frac{\partial \phi_4}{\partial \rho}, \phi_4 \right\rangle d\rho. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Par la définition de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$ et le fait que H est un espace de Hilbert, il résulte

$$\langle A - h_0 B \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle A^{\frac{1}{2}} \phi_2, A^{\frac{1}{2}} \phi_1 \rangle - h_0 \langle B^{\frac{1}{2}} \phi_2, B^{\frac{1}{2}} \phi_1 \rangle, \tag{1.9}$$

$$\left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds, \phi_2 \right\rangle = \int_0^{+\infty} h(s)\langle \phi_2, \phi_3 \rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} ds.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on trouve

$$-\langle C\phi_4(1), \phi_2 \rangle \leq \frac{1}{2|\mu|}\|C\phi_4(1)\|^2 + \frac{|\mu|}{2}\|\phi_2\|^2,$$

De (1.4), il vient

$$-\langle C\phi_4(1), \phi_2 \rangle \leq \frac{|\mu|}{2}\Big(\|\phi_4(1)\|^2 + \|\phi_2\|^2\Big). \tag{1.10}$$

En intégrant par partie et en utilisant la définition de $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ ($\phi_3(0) = 0$), on obtient

$$\int_0^{+\infty} h(s) \left\langle -\frac{\partial \phi_3}{\partial s}, \phi_3 \right\rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} ds \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}}\phi_3(s) \right\|^2 ds. \tag{1.11}$$

En outre, en utilisant le fait que $\phi_4(0) = \phi_2$, il résulte

$$\tau|\mu| \int_0^1 \left\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \phi_4}{\partial \rho}, \phi_4 \right\rangle d\rho = \frac{|\mu|}{2}\left(\|\phi_4(0)\|^2 - \|\phi_4(1)\|^2\right) = \frac{|\mu|}{2}\left(\|\phi_2\|^2 - \|\phi_4(1)\|^2\right). \tag{1.12}$$

Alors, en remplaçant (1.9), (1.10), (1.11) et (1.12) dans (1.8) et en utilisant le fait que h décroissante, on arrive à

$$\left\langle \mathscr{A}\Phi, \Phi \right\rangle_{\mathscr{H}} \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}}\phi_3(s) \right\|^2 ds + |\mu|\|u_t\|^2 \leq |\mu|\|\Phi\|^2, \tag{1.13}$$

On obtient que $\mathscr{A} - |\mu|I$ est un opérateur dissipatif.

• L'opérateur $\lambda I - \mathscr{A}$ est surjectif, pour tout $\lambda > 0$. En effet, soit $(f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathscr{H}$, on doit montrer qu'il existe $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ tels que

$$(\lambda I - \mathscr{A})(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T,$$

ce qu'est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda\phi_1 - \phi_2 = f_1 \\ \lambda\phi_2 + (A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds + C\phi_4(1) = f_2 \\ \lambda\phi_3 - \phi_2 + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} = f_3 \\ \lambda\phi_4 + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} = f_4. \end{cases} \tag{1.14}$$

Supposons qu'on a trouvé ϕ_1 avec une régularité convenable. Alors, on a

$$\phi_2 = \lambda\phi_1 - f_1. \tag{1.15}$$

On remarque que la troisième et la quatrième équations dans (1.14) sont des équations différentielles ordinaires non homogènes de premier ordre. Donc, pour la résolution de ces équations, on commence par la résolution d'équation différentielle homogène. En effet,

$$\lambda\phi_3 + \frac{\partial \phi_3}{\partial s} = 0,$$

alors, la solution de l'équation homogène précédente est de la forme

$$\phi_3(s) = Ce^{-\lambda s}, \quad \forall s \geq 0.$$

Ensuite, on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière, on a

$$C(s) = \int_0^s e^{\lambda y} \left(f_3(y) - f_1 + \lambda\phi_1\right) dy + c,$$

Donc, la solution générale est donnée par

$$\phi_3(s) = e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda y} \left(f_3(y) - f_1 + \lambda\phi_1\right) dy + c\right),$$

en utilisant la défintion de $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ ($\phi_3(0) = 0$), on obtient

$$\phi_3(s) = e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda y} \left(f_3(y) - f_1 + \lambda\phi_1\right) dy. \tag{1.16}$$

De la même façon que ϕ_3 et en utilisant $\phi_4(0) = \phi_2 = \lambda\phi_1 - f_1$, on trouve

$$\phi_4(\rho) = \left(\lambda\phi_1 - f_1 + \tau\int_0^\rho f_4(y)e^{\lambda\tau y}dy\right)e^{-\lambda\tau\rho}, \quad \rho \in (0,1). \tag{1.17}$$

En particulier,

$$\phi_4(1) = \left(\lambda\phi_1 - f_1 + \tau\int_0^1 f_4(y)e^{\lambda\tau y}dy\right)e^{-\lambda\tau}.$$

On détermine ϕ_1, d'abord, en remplaçant (1.15), (1.16) et (1.17) dans la deuxième équation de (1.14), on obtient

$$\left(A - \alpha B + \lambda e^{-\lambda\tau}C + \lambda^2 I\right)\phi_1 = \tilde{f}, \tag{1.18}$$

où

$$\alpha = h_0 - \lambda\int_0^\infty h(s)e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda y}dy\right)ds = \int_0^\infty h(s)e^{-\lambda s}ds,$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{f} \;&=\; f_2 + \lambda f_1 + e^{-\lambda\tau}C\left(f_1 - \tau\int_0^1 f_4(y)e^{\tau y}dy\right) \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-\lambda s}h(s)\int_0^s e^{-\lambda y}B\Big(f_3(y) - f_1\Big)dyds. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que (1.18) a une solution $\phi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ et de la remplacer dans (1.15), (1.16) et (1.17) pour obtenir $\Phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ satisfaisant (1.14). On a $\alpha < h_0$, de (1.3) et (1.2), on en déduit que $A - \alpha B$ est un opérateur défini positif. Ensuite, on prend le crochet de dualité $\langle .,. \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' \times D(A^{\frac{1}{2}})}$ avec $w \in D(A^{\frac{1}{2}})$:

$$\left\langle \left(A - \alpha B + \lambda e^{-\lambda\tau}C + \lambda^2 I\right)\phi_1, w\right\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' \times D(A^{\frac{1}{2}})} = \left\langle \tilde{f}, w\right\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' \times D(A^{\frac{1}{2}})}. \tag{1.19}$$

On déduit que le premier membre de l'estimation de (1.19) est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $D(A^{\frac{1}{2}})$. En effet, de (1.2) et (1.4) il vient

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}w\right\rangle - \alpha\left\langle B^{\frac{1}{2}}\phi_1, B^{\frac{1}{2}}w\right\rangle + e^{-\tau}\left\langle C^{\frac{1}{2}}\phi_1, C^{\frac{1}{2}}w\right\rangle + (1+|\mu|)\left\langle \phi_1, w\right\rangle\right| \\
\leq\ & \left\|A^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\|\left\|A^{\frac{1}{2}}w\right\| + |\alpha|\left\|B^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\|\left\|B^{\frac{1}{2}}w\right\| + e^{-\tau}|\mu|\|\phi_1\|\|w\| + (1+|\mu|)\|\phi_1\|\|w\| \\
\leq\ & C\|\phi_1\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\|w\|_{D(A^{\frac{1}{2}})},
\end{aligned}$$

et pour $w = \phi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\rangle - \alpha\left\langle B^{\frac{1}{2}}\phi_1, B^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\rangle + e^{-\tau}\left\langle C\phi_1, \phi_1\right\rangle + (1+|\mu|)\left\langle \phi_1, \phi_1\right\rangle \\
\geq\ & (1-a\alpha)\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\rangle \geq c\|\phi_1\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous concluons que (1.14) a une solution unique $\phi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ satisfaisant (1.14). En utilisant (1.16), on obtient

$$\left((A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds\right) \in H.$$

En conclusion, on trouve $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, qui vérifie (1.14). D'où, $\lambda I - \mathscr{A}$ est surjective pour tout $\lambda > 0$ et de la même manière, nous obtenons que $\lambda I - (\mathscr{A} - |\mu| I)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Par conséquent, l'opérateur $|\mu| I - \mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe d'après le théorème .15. Ainsi, en appliquant le théorème .17, on obtient que l'opérateur $\mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\mathscr{H}$. En appliquant le théorème .18, nous terminons la preuve du théorème 1.1. □

1.2.2 Décroissance exponentielle

Sous les hypothèses mentionnées ci-dessous, nous prouvons la décroissance exponentielle de la solution du problème linéaire (1.5). Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (1.5).

(A3) Il existe une constante positive d telle que

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leq d\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2, \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.20}$$

(A4) Il existe une constante positive δ telle que

$$h'(s) \leq -\delta h(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \tag{1.21}$$

La fonctionnelle d'énergie associée au problème (1.5) définie par

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\|U(t)\|^2_{\mathscr{H}} = \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds\right) \\
&\quad + \frac{\tau|\mu|}{2}\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 d\rho, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}\tag{1.22}$$

Lemme 1.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A2) et pour $U_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$. Alors, la fonctionnelle d'énergie est définie par (1.22) satisfait*

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + |\mu|\|u_t\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.23}$$

Démonstration. Multipliant la première équation de (1.6) par u_t et en répétant exactement les mêmes arguments pour obtenir (1.8), l'estimation (1.23) est établie. □

Remarque 1.2. *De (1.22), on déduit que la fonction d'énergie n'est pas décroissante en général comme le second terme du deuxième membre de l'estimation (1.23) qui vient du terme retard, n'est pas négatif.*

Pour cela, nous allons considérer les lemmes suivants :

Lemme 1.2. *Soit U solution du problème (1.6). Alors, la fonction*

$$I_1(t) = -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle, \tag{1.24}$$

satisfait, pour $\epsilon > 0$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_1'(t) \quad \leq \quad & -(h_0-\varepsilon)\|u_t\|^2 + \varepsilon\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + c_1\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ & -c_2\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \left\langle Cz(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle, \end{aligned} \tag{1.25}$$

où

$$\begin{cases} c_1 = h_0\left(1 + \dfrac{d}{2\varepsilon} + \dfrac{ah_0^2}{2\varepsilon}\right), \\ c_2 = \dfrac{h(0)}{4b\varepsilon}. \end{cases} \tag{1.26}$$

Démonstration. On dérivons (1.24) par rapport à t et en utilisant la troisième équation de (1.6), on trouve

$$I_1'(t) = -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle + \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t_s(s)ds\right\rangle - h_0\|u_t\|^2.$$

En intégrant par parties par rapport à s le second terme du deuxième membre de l'estimation précédente et utilisant le fait que $\lim_{s\to+\infty} h(s) = 0,\ \eta^t(0) = 0$, il résulte

$$I_1'(t) = -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds\right\rangle - h_0\|u_t\|^2.$$

D'autre part, la première équation de (1.6) donne

$$\begin{aligned} &\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle + \left\langle Au(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle - h_0\left\langle Bu(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle \\ &\quad + \left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle + \left\langle Cz(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle = 0, \end{aligned}$$

en utilisant la définition de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$, on arrive à

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= -h_0\|u_t\|^2 + \left\langle Cz(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad -h_0\left\langle B^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\| \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\|^2. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et en utilisant (1.2), (1.20) et (1.3), on peut estimer les quatre derniers termes du seconde membre de (1.27) comme suit

$$-\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle \leq \varepsilon\|u_t\|^2 - \frac{h(0)}{4b\varepsilon}\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds,$$

$$\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{h_0 d}{2\varepsilon}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds,$$

$$-h_0\left\langle B^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{ah_0^3}{2\varepsilon}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds,$$

et

$$\left\|\int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds\right\|^2 \leq h_0\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds.$$

En insérant ces quatre inégalités dans (1.27), ce qui donne (1.25) où c_1 et c_2 sont définis dans (1.26) (c_1 et c_2 sont des constantes positive qui ne dépend pas de μ). □

Lemme 1.3. *Soit U solution du problème (1.6). Alors, la fonction*

$$I_2(t) = \langle u_t(t), u(t)\rangle, \tag{1.28}$$

satisfait, pour $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_2'(t) &\leq \|u_t\|^2 - (1-\varepsilon-ah_0)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + c_3\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ &\quad -\left\langle Cz(1,t), u\right\rangle, \end{aligned} \tag{1.29}$$

où $c_3 = \dfrac{ah_0}{4\varepsilon}$.

Démonstration. Dérivons (1.28) par rapport à t, on trouve

$$I_2'(t) = \|u_t\|^2 + \langle u_{tt}(t), u(t)\rangle.$$

De la première équation de (1.6), il découle

$$\begin{aligned} &\langle u_{tt}(t), u(t)\rangle + \langle Au(t), u(t)\rangle - h_0\langle Bu(t), u(t)\rangle \\ &+\left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle + \langle Cz(1,t), u(t)\rangle = 0, \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= \|u_t\|^2 - \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle \\ & -\langle Cz(1,t), u(t)\rangle, \end{aligned} \tag{1.30}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et (1.2), on obtient

$$-\left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle \leq \varepsilon\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{ah_0}{4\varepsilon}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds.$$

En remplaçant cette inégalité dans (1.30), l'estimation (1.29) est établie où c_3 positive et ne dépend pas de μ. □

Lemme 1.4. *Soit U solution du problème* (1.6). *Alors, la fonction*

$$I_3(t) = \tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds, \tag{1.31}$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$I_3'(t) \leq -2\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds + e^{2\tau}\|u_t\|^2 - \|z(1,t)\|^2. \tag{1.32}$$

Démonstration. En utilisant la deuxième équation de (1.6), on obtient

$$\begin{aligned} I_3'(t) &= 2\tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\langle z_t(\rho,t), z(\rho,t)\rangle d\rho \\ &= -2e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\langle z_\rho(\rho,t), z(\rho,t)\rangle d\rho \\ &= -2e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\|z(\rho,t)\|^2 d\rho. \end{aligned}$$

Ensuite, en intégrant par parties et en utilisant $z(0,t) = u_t(t)$, on obtient

$$I_3'(t) = -2\tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds + e^{2\tau}\|u_t\|^2 - \|z(1,t)\|^2,$$

ce qui donne (1.32) en utilisant le fait que $e^{-2\tau\rho} \geq e^{-2\tau}$, pour tout $\rho \in]0,1[$. □

Maintenant, nous construisons la fonction de Lyapunov L équivalente à E, avec laquelle nous pouvons montrer la stabilité. Soit

$$L(t) = E(t) + \epsilon\left(I_1(t) + NI_2(t) + I_3(t)\right), \tag{1.33}$$

où ϵ et N sont des constantes positives à choisir ultérieurement.

Lemme 1.5. *Sous les hyothèses (A1)-(A2), ils existent deux constantes positives α et β telles que*

$$\alpha E(t) \leq L(t) \leq \beta E(t). \tag{1.34}$$

Démonstration. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous avons

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &= \left|\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle\right| \leq \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \frac{h_0}{b}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds\right) \\ &\leq \max\left\{1, \frac{h_0}{b}\right\} E(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

et

$$|I_2(t)| = |\langle u_t, u\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \frac{a}{b}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\right) \leq \max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} E(t). \tag{1.36}$$

De (1.31), il découle

$$|I_3(t)| = \tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds \leq \tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds \leq \frac{2e^{2\tau}}{|\mu|}E(t) \tag{1.37}$$

en combinant (1.23), (1.35), (1.36) et (1.37), on trouve

$$|L(t) - E(t)| \leq \epsilon c_4 E(t),$$

où

$$c_4 = \max\left\{1, \frac{h_0}{b}\right\} + N\max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} + \frac{2e^{2\tau}}{|\mu|}. \tag{1.38}$$

qui est constante positive. On choisit $\epsilon < \dfrac{1}{c_4}$, on obtient

$$(1 - \epsilon c_4)E(t) \leq L(t) \leq (1 + \epsilon c_4)E(t),$$

la démonstration du lemme (1.35) est achevée en prenant $\alpha = 1 - \epsilon c_4$ et $\beta = 1 + \epsilon c_4$ qui sont positives. □

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A4). Alors, il existe une constante positive δ_0 indépendante de μ telle que, si*

$$|\mu| < \delta_0, \tag{1.39}$$

alors, pour $U_0 \in \mathscr{H}$, ils existent des constantes positives δ_1 et δ_2 telles que la solution de (1.6) satisfait

$$\|U(t)\|^2_{\mathscr{H}} \leq \delta_2 e^{-\delta_1 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.40}$$

Démonstration. En combinant (1.23), (1.25), (1.29) et (1.32), on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \leq\ & -\epsilon\left[(c_5 - \frac{|\mu|}{\epsilon})\|u_t\|^2 + c_5\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + c_5\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds\right] \\ & + \left(\frac{1}{2} - \epsilon c_2\right)\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \epsilon c_6\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ & - \epsilon\|z(1,t)\|^2 - 2\epsilon\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds \\ & + \epsilon\left\langle Cz(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds - Nu\right\rangle. \end{aligned} \tag{1.41}$$

où $c_5 = \min\left\{h_0 - \varepsilon - N - e^{2\tau}, (1 - ah_0 - \varepsilon)N - \varepsilon\right\}$ et $c_6 = c_1 + Nc_3$. Notons que c_5 et c_6 sont indépendantes de μ. D'autre part, en utilisant (1.21), il résulte

$$\begin{aligned} & \epsilon c_6 \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds + \left(\frac{1}{2} - \epsilon c_2\right) \int_0^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\ \leq & \left(\frac{1}{2} - \epsilon c_7\right) \int_0^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds, \end{aligned} \tag{1.42}$$

où $c_7 = c_2 + \frac{c_6}{\delta}$. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young pour estimer le dernier terme du seconde membre de l'estimation (1.41). Ensuite, par (1.2) et (1.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \epsilon \left\langle Cz(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s) ds - Nu \right\rangle \\ \leq & \frac{\epsilon}{\mu^2} \|Cz(1,t)\|^2 + \frac{\epsilon\mu^2}{4} \left(N\|u\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s) \|\eta^t(s)\|^2 ds \right)^2 \\ \leq & \epsilon \|z(1,t)\|^2 + \frac{\epsilon\mu^2}{4b} \left(N^2 a \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + h_0 \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \right) \\ \leq & \epsilon \|z(1,t)\|^2 + \epsilon\mu^2 c_8 \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \right), \end{aligned}$$

où $c_8 = \frac{1}{2b} \max\{aN^2, h_0\}$. En insérant l'inégalité ci-dessus et (1.42) dans (1.41). En utilisant (1.22), il résulte

$$L'(t) \leq -\epsilon c_9 E(t) + \left(\frac{1}{2} - \epsilon c_7\right) \int_0^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds, \tag{1.43}$$

où $c_9 = 2\min\left\{c_5 - \frac{|\mu|}{\epsilon}, \frac{2}{|\mu|}, c_5 - \mu^2 c_8\right\}$ est une constante.

Choisissons N suffisamment grand pour que

$$(1 - ah_0)N - 2e^{2\tau} > 0, \quad N + 3e^{2\tau} - h_0 > 0,$$

et ε telle que

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{(1 - ah_0)N - 2e^{2\tau}}{N + 1}, N + 3e^{2\tau} - h_0\right\}. \tag{1.44}$$

En outre, on suppose que μ satisfait (1.39) avec

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{c_5}{c_7}, \sqrt{\frac{c_5}{c_8}}, \frac{c_5 - 2e^{2\tau}}{\max\{1, h_0/b\} + N\max\{1, a/b\}}\right\}, \tag{1.45}$$

puis, en fixant ϵ telle que pour que (1.34) soit valide et

$$\frac{|\mu|}{c_5} < \epsilon < \min\left\{\frac{1}{c_4}, \frac{1}{2c_7}\right\}. \tag{1.46}$$

De (1.44), (1.46) et (1.45), il résulte que (1.43) est négative (notons que h est fonction décroissante) et δ_0 est une constante positive qui ne dépend pas de μ. De plus, en utilisant la condition (1.39), on conclut que c_9 est une constante positive.

Revenons à la preuve du théorème (1.2). En utilisant (1.34) et (1.32), on déduit que

$$L'(t) \leq -\delta_1 L(t), \tag{1.47}$$

où $\delta_1 = c_9/(1 + \epsilon c_4)$ qui est positive. Une simple intégration de l'inégalité (1.47) entre 0 et t conduit à

$$L(t) \leq L(0)e^{-\delta_1 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, de (1.22) et (1.34), on conclut

$$\|U(t)\|^2_{\mathscr{H}} = 2E(t) \leq \frac{2c_9}{1-\epsilon c_4} L(t) \leq \frac{2c_9}{1-\epsilon c_4} L(0)e^{-\delta_1 t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

ce qui donne (1.40) avec $\delta_2 = 2c_9 L(0)/(1 - \epsilon c_4)$. Ce qui achève la preuve du théorème (1.2). □

1.3 Étude de problème (1.1)

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude d'existence globale et la stabilité exponentielle de système (1.1) en deux cas des fonctions F_1 et F_2. En utilisant le fait que la solution de la partie linéaire du problème considéré ; problème (1.5) existe globalement et décroit exponentiellement, on établit l'existence et la stabilité exponentielle de la solution du problème (1.1). Notons que le problème (1.1) regroupe plusieurs problèmes dans la littérature et la décroissance exponentielle de la solution est établie par une méthode directe en basant sur le principe de Duhamel.

De façon similaire à (1.7), pour $U = (u, u_t, \eta^t, z)^T$, le problème (1.1) peut être réécrit

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathscr{A}U(t) + F(U(t)), & \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 = \Big(u_0, u_1, \eta^0, f_0(-\tau.)\Big)^T, \end{cases} \tag{1.48}$$

où d'aprés le théorème (1.1), l'opérateur $\mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et la fonction F est définie par

$$F(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T = (0, F_2(\phi_1) - F_1(\phi_2), 0, 0)^T, \tag{1.49}$$

pour tout $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{H}$.

En utilisant le résultat de stabilité de la solution du problème (1.5) qui est assurée par le théorème (1.2), on en déduit qu'ils existent des constantes positives δ_1 et δ_2 telles que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathscr{H})} \leq \delta_2 e^{-\delta_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.50}$$

L'inégalité (1.50) signifie que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe exponentiellement stable sur $\mathscr{H}$.

Nous étudions l'existence globale, l'unicité et le résultat de stabilité exponentielle de la solution de (1.1) en utilisant le principe de Duhamel dans deux cas où les fonctions non linéaires F_1 et F_2 satisfont certains Lipschitz conditions.

1.3.1 Cas de F_i globalement lipschitzienne

D'abord, nous supposons que les fonctions $F_i, i = 1, 2$ sont globalement lipschitzienne, autrement dit

(A5) Ils existent $\gamma_i > 0,\ i = 1, 2$ telles que

$$\|F_1(u) - F_1(v)\| \leq \gamma_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in H, \tag{1.51}$$

$$\|F_2(u) - F_2(v)\| \leq \gamma_2 \left\|A^{\frac{1}{2}}(u - v)\right\|, \quad \forall u, v \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.52}$$

De plus, $F_1(0) = F_2(0) = 0$.

Les résultats d'existence globale et d'unicité de la solution de (1.48) sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 1.3. *Pour $U_0 \in \mathscr{H}$, il existe une unique solution mild $U \in C([0, +\infty), \mathscr{H})$ du problème (1.48) satisfait*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t - s)F(U(s))ds. \tag{1.53}$$

Démonstration. Le problème (1.48) peut être considéré comme un problème d'évolution non homogène où $\mathscr{A}$ est un générateur d'un C_0-semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\mathscr{H}$. De plus, Il est clair que F est globalement lipschitzienne sur $\mathscr{H}$ avec la constante $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Par conséquent, en appliquant le théorème .19, le système (1.48) admet une unique solution mild $U \in C([0, +\infty), \mathscr{H})$ satisfait

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t - s)F(U(s))ds. \tag{1.54}$$

La formule (1.54) appelée formule de Duhamel. □

Pour le résultat de stabilité exponentielle, nous avons

Théorème 1.4. *Sous les hypothèses (A1)-(A5). Pour $U_0 \in \mathscr{H}$, on suppose que*

$$\gamma < \frac{\delta_1}{\delta_2}, \tag{1.55}$$

alors, la solution $U \in C([0, +\infty), \mathscr{H})$ de problème (1.48) décroit exponentiellement en temps.

Démonstration. L'estimation de la stabilité est établie directement en utilisant le principe de Duhamel de la solution ; formule (1.54), nous avons

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En utilisant le fait que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable sur $\mathscr{H}$, de (1.50), on obtient

$$\|U(t)\|_{\mathscr{H}} \leq \delta_2 e^{-\delta_1 t}\|U_0\|_{\mathscr{H}} + \int_0^t \delta_2 e^{-\delta_1(t-s)}\|F(U(s))\|_{\mathscr{H}} ds,$$

de plus, en utilisant $F(0) = 0$, on trouve

$$\|U(t)\|_{\mathscr{H}} \leq \delta_2 e^{-\delta_1 t}\|U_0\|_{\mathscr{H}} + \int_0^t \delta_2 e^{-\delta_1(t-s)}\gamma\|U(s)\|_{\mathscr{H}} ds,$$

alors

$$\frac{1}{\delta_2}e^{\delta_1 t}\|U(t)\|_{\mathscr{H}} \leq \|U_0\|_{\mathscr{H}} + \int_0^t e^{\delta_1 s}\gamma\|U(s)\|_{\mathscr{H}} ds,$$

En appliquant le lemme de Gronwall ; le lemme .3, on a

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{\mathscr{H}} &\leq \delta_2\|U_0\|_{\mathscr{H}} e^{-\delta_1 t + \int_0^t \delta_2\gamma ds} \\ &\leq \delta_2\|U_0\|_{\mathscr{H}} e^{-(\delta_1 - \delta_2\gamma)t}, \end{aligned}$$

de la condition (1.55), on déduit la décroissance exponentielle de la solution. D'où la démonstration du théorème 1.4. □

1.3.2 Non-linéarités plus générales

Dans ce cas, on suppose que les fonctions F_1 et F_2 satisfont

(A6)-(a) Pour $c > 0$, ils existent des constantes positives $L_i(c)$, pour $i = 1, 2$ telles que

$$\|F_1(u) - F_1(v)\| \leq L_1(c)\|u - v\|,$$

pour tout $u, v \in H$ avec $\|u\| \leq c$, $\|v\| \leq c$.

$$\|F_2(u) - F_2(v)\| \leq L_2(c)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u - v)\right\|,$$

pour tout $u, v \in D(A^{\frac{1}{2}})$ avec $\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\| \leq c$, $\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\| \leq c$.

(A6)-(b) Il existe une fonction différentiable $\mathscr{F}$ de $D(A^{\frac{1}{2}})$ dans $[0, +\infty)$ telle que $D_{\mathscr{F}} = F_2$ et une positive constante m telles que

$$\langle F_1(u), u\rangle \geq m\|u\|^2, \quad \forall u \in H, \tag{1.56}$$

$$\langle F_2(u), u\rangle \geq \frac{a}{b}\mathscr{F}(u), \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.57}$$

(A6)-(c) Pour $i = 1, 2$, ils existent des fonctions continues croissantes $\psi_i : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, avec $\psi_i(0) = 0$ telles que

$$\|F_1(u)\| \leq \psi_1(\|u\|)\|u\|, \quad \forall u \in H. \tag{1.58}$$

$$\|F_2(u)\| \leq \psi_2(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|) \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|, \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.59}$$

On définit la fonctionnelle d'énergie suivante associée au problème (1.1) par

$$\begin{aligned} E_1(t) \;&=\; \frac{1}{2}\bigg(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0 \left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ &\quad -2\mathscr{F}(u) + \tau|\mu| \int_0^1 \|z(\rho, t)\|^2 d\rho \bigg). \end{aligned} \tag{1.60}$$

En utilisant (1.56), on déduit que

$$E_1'(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + (|\mu| - m)\|u_t\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.61}$$

d'une manière similaire au lemme 1.1.

Dans le théorème suivant, nous donnons les résultats d'existence et de stabilité de la solution du problème (1.1).

Théorème 1.5. *Sous les hyothèses (A1)-(A4) et (A6). On suppose que $|\mu|$ suffisamment petit pour que $|\mu| < m$ et ils existent deux constantes positives ρ_0 et C_{ρ_0} telles que*

$$\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| + \|u_1\|^2 + \int_{-\tau}^0 \|f_0(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < \rho_0,$$

et, il existe une solution globale unique $U \in C([0, +\infty), \mathscr{H})$ satisfait (1.48) avec

$$\|U(t)\|_{\mathscr{H}} \leq C_{\varrho_0} < \psi^{-1}\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right), \quad \forall t > 0, \tag{1.62}$$

où $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est une fonction continue croissante. Alors, la solution du problème (1.48) décroit exponentiellement en temps.

Démonstration. D'abord, nous prouvons que la solution existe globalement. D'après des résultats classiques d'équation d'évolution non linéaire ; le théorème .20, le problème admet une unique solution mild U dans un intervalle maximal $[0, T)$. De façon similaire que [2] et en utilisant (1.57), (1.59), on trouve

$$\begin{aligned} E_1(0) \;&\geq\; \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 - \frac{h_0}{2}\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 - \mathscr{F}(u_0) \\ &\geq\; \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{\nu}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

si $\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\right) < \frac{\nu}{2}$ avec $\nu = (1-ah_0)/2$. Nous montrons que si

$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\right) < \frac{\nu}{2} \quad \text{et} \quad \psi_2\left(\left(\frac{2E_1(0)}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \frac{\nu}{2}, \tag{1.63}$$

on a, pour $t \in [0, T)$

$$E_1(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{\nu}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2, \quad \forall t \in [0, T). \tag{1.64}$$

Considérons r la borne supérieure de tout $s \in [0, T)$ tel que (1.64) soit vérifié pour tout $t \in [0, s]$. Supposons que $r < T$. Par continuité de la fonction E_1, on obtient

$$E_1(r) \geq \frac{1}{2}\|u_t(r)\|^2 + \frac{\nu}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\right\|^2 \geq 0. \tag{1.65}$$

Donc, de (1.65), on trouve

$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\right\|\right) \leq \psi_2\left(\left(\frac{2E_1(r)}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \psi_2\left(\left(\frac{2E_1(0)}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \frac{\nu}{2},$$

de plus, en utilisant (1.57) et (1.59), il résulte

$$\begin{aligned} E_1(r) &\geq \frac{1}{2}\|u_t(r)\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\right\|^2 - \frac{h_0}{2}\left\|B^{\frac{1}{2}}u(r)\right\|^2 - \mathscr{F}(u(r)) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t(r)\|^2 + \left(\nu - \frac{\nu}{2}\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\right\|^2 = \frac{1}{2}\|u_t(r)\|^2 + \frac{\nu}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(r)\right\|^2. \end{aligned}$$

Ce qui contredit la maximalité de r. Soit

$$\rho_0 = \min\left\{\sqrt{\frac{\nu}{2}}\psi_2^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{-1}\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\right]\right\} > 0.$$

Alors, $\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\right) < \frac{\nu}{2}$, pour tout $(u_0, u_1, f_0) \in D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times L^2(-\tau, 0; H)$ tels que

$$\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| + \|u_1\|^2 + \int_{-\tau}^{0}\|f_0(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} < \rho_0. \tag{1.66}$$

Cette hypothèse implique que $\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| < \rho_0$, ainsi, on a

$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|\right) < \psi_2(\rho_0) = \psi_2\left(\sqrt{\frac{\nu}{2}}\psi_2^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right).$$

De plus, par l'hypothèse (A6)-(b), on obtient

$$\begin{aligned} E_1(0) &\leq \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| - \frac{h_0}{2}\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0\right\| + \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{0}\|f_0(s)\|^2 ds \\ &\leq \left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| + \|u_1\|^2 + \int_{-\tau}^{0}\|f_0(s)\|^2 ds\right) < \rho_0^2, \end{aligned}$$

et, de la définition de ρ_0, on déduit

$$\psi_2\left(\left(\frac{2E_1(0)}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \psi_2\left(\psi_2^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right) = \frac{\nu}{2}.$$

En outre, sous les conditions (1.66) et (1.63), on trouve

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{\nu}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 \leq E_1(t) \leq E_1(0) \leq \rho_0^2.$$

Par conséquent, la fonction d'énergie E_1 est positive sur $[0, T)$ et bornée. De plus, la solution existe sur $[0, +\infty)$ et

$$\|u_t(t)\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 < 2\rho_0^2 \leq \psi^{-1}\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\right]^2,$$

où ψ est une fonction croissante continue à définir ultérieurement.

D'après les résultats précédents, nous avons

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En utilisant (A6)-(c) et le fait que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable sur $\mathscr{H}$, on obtient

$$\|U(t)\|_{\mathscr{H}} \leq \delta_2 e^{-\delta_1 t}\|U_0\|_{\mathscr{H}} + \int_0^t \delta_2 e^{-\delta_1(t-s)}\psi\left(\|U(s)\|_{\mathscr{H}}\right)\|U(s)\|_{\mathscr{H}}ds,$$

où

$$\psi\left(\|U(t)\|_{\mathscr{H}}\right) = \psi_1(\|u_t(t)\|) + \psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|\right)$$

est une fonction croissante continue. De plus, on trouve

$$\frac{1}{\delta_2}e^{\delta_1 t}\|U(t)\|_{\mathscr{H}} \leq \|U_0\|_{\mathscr{H}} + \int_0^t e^{\delta_1 s}\psi\left(C_{\rho_0}\right)\|U(s)\|_{\mathscr{H}}ds,$$

De la même manière, en appliquant le lemme de Gronwall et en utilisant (1.62), on déduit que la solution décroit exponentiellement, nous terminons la preuve du théorème 1.5. □

1.4 Étude du problème (1.1) avec $F_1 = 0$ sous une décroissance arbitraire de h

Le but est d'établir l'existence globale et la stabilité de la solution de problème sous une décroissance arbitraire de h. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + Cu_t(t-\tau) = F_2(u(t)), & t \in (0, +\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0, \tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{1.67}$$

On suppose toujours que les hypothèses (A1)-(A3) sont vérifiées, en outre, on présente les hypothèses supplémentaire suivantes :

(A7) La fonction $F_2 : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ est globalement lipschitzienne,

$$\exists \gamma > 0, \quad \|F_2(u) - F_2(v)\| \leq \gamma \left\|A^{\frac{1}{2}}(u-v)\right\|, \quad \forall u, v \in H. \tag{1.68}$$

De plus, $F_2(0) = 0$ et il existe une fonction différentiable $\psi : D(A^{\frac{1}{2}}) \to \mathbb{R}$ satisfait

$$D\psi = F_2 \quad \text{et} \quad \langle F_2(u), u\rangle \geq 2\psi(u), \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.69}$$

(A8) La fonction h satisfait (A2) et il existe une fonction positive $\xi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ avec $\lim_{s\to+\infty} \xi(s)$ existe, tels que

$$\begin{cases} h(t-s) \geq \xi(t) \displaystyle\int_t^{+\infty} h(\pi - s)d\pi, & \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall s \in [0,t], \\ h'(s) < 0, & \forall s \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{1.70}$$

Remarque 1.3.

1. *La première inégalité dans (1.70) est introduite dans [69, 68], implique que h converge vers zéro au moins de façon exponentielle mais ne nécessite pas la dérivée de h. Cette classe contient les fonctions de type polynomial ($h(t) = (1+t)^{-a}$, $a > 1$) et de type exponentiel ($h(t) = e^{-at}$, $a > 0$).*
2. *L'hypothèse (A5) est un cas particulier de l'hypothèse (A8).*

1.4.1 Existence globale

L'existence globale et l'unicité de problème (1.67) sont obtenues en basant sur les résultats précédents dans la sous-section 1.2.1. En effet, pour $U = (u, u_t, \eta^t, z)^T$, le problème (1.67) s'écrit comme suit

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathscr{A}U(t) + \mathscr{F}(U(t)), & \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, \eta^0, f_0(-\tau.))^T, \end{cases} \tag{1.71}$$

où $\mathscr{A}$ est un générateur infintésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur l'epsace de Hilbert $\mathscr{H}$ et la fonction $\mathscr{F}$ est définie par

$$\mathscr{F}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T = (0, F_2(\phi_1), 0, 0)^T, \tag{1.72}$$

pour tout $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{H}$. Le problème (1.71) peut être vu comme un problème d'évolution non homogène. Il est clair que $\mathscr{F}$ est globalement Lipschitzienne d'après l'hypothèse (A7). Par conséquent, en utilisant le théorème .19, le problème (1.71) a une unique solution $U \in C([0, +\infty), \mathscr{H})$.

1.4.2 Résultat de la stabilité

Le but de cette section est d'obtenir la stabilité du système (1.67) en supposant que la fonction h satisfait (1.70). La preuve est basée sur la méthode d'énergétique.

On définit la fonction d'énergie E comme suit

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\Bigg(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0 \left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ &\quad -2\psi(u) + \tau|\mu| \int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 d\rho \Bigg). \end{aligned} \tag{1.73}$$

En utilisant (1.69), on trouve que la fonction d'énergie E satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \|\mu\|\|u_t\|^2. \tag{1.74}$$

Similaire à [64], pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble suivant :

$$A_n = \{s \in \mathbb{R}_+, \quad h(s) + nh'(s) \leq 0\},$$

et en prenant $h_n = \int_{A_n^c} h(s)ds$. On a $h_n > 0$, si $A_n^c = \emptyset$, on a la condition (1.21) pour $\delta = \frac{1}{n}$. De plus, en utilisant la deuxième inégalité dans (1.70), on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^c = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c = \emptyset, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} h_n = 0.$$

Afin d'obtenir le résultat de stabilité, on aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.6. *Soit U solution du problème* (1.67)*. Alors, la fonction*

$$I_1(t) = -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle, \tag{1.75}$$

satisfait, pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_1'(t) &\leq -(h_0 - \varepsilon_1)\|u_t\|^2 + \left(\varepsilon_2 + \frac{\sqrt{dh_n}}{2}\right) \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \frac{h_0^2}{2} \left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &\quad + \left(2h_n - \frac{h_0}{2} + \frac{\sqrt{dh_n}}{2}\right) \int_0^{+\infty} h(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ &\quad + \frac{h_0}{2}\int_0^{+\infty} h(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}u(t-s)\right\|^2 ds \\ &\quad - \left(2nh_0 + \frac{dnh_0}{4\varepsilon_2} + \frac{h(0)}{4b\varepsilon_1}\right) \int_0^{+\infty} h'(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ &\quad + \left\langle Cz(1,t) - F_2(u), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle, \end{aligned} \tag{1.76}$$

Démonstration. On dérive (1.75) par rapport à t, on trouve

$$I_1'(t) = -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t_s(s)ds \right\rangle - h_0\|u_t\|^2.$$

En intégrant par parties par rapport à s le deuxième terme du second membre de l'égalité précédente et en utilisant le fait que $\lim_{s\to+\infty} h(s) = 0,\ \eta^t(0) = 0$, on obtient

$$I_1'(t) = -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle - h_0\|u_t\|^2.$$

De la première équation de (1.67) et de la définition de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\begin{aligned} I_1'(t) \;&=\; -h_0\|u_t\|^2 + \left\langle Cz(1,t) - F_2(u), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad \left\| \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\|^2 - h_0\left\langle B^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Nous estimons les trois derniers termes en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et la définition de A_n. Ensuite, en utilisant (1.2), (1.20) et (2.4), on trouve

$$-\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle \le \varepsilon_1\|u_t\|^2 - \frac{h(0)}{4b\varepsilon_1}\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds,$$

$$\begin{aligned} &\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \\ =\;& \left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_{A_n} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_{A_n^c} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle. \\ \le\;& \varepsilon_2\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{dh_0}{4\varepsilon_2}\int_{A_n} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \frac{\sqrt{dh_n}}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &+\frac{\sqrt{dh_n}}{2}\int_{A_n^c} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ \le\;& \varepsilon_2\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \frac{dnh_0}{4\varepsilon_2}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \frac{\sqrt{dh_n}}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ &+\frac{\sqrt{dh_n}}{2}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{+\infty} h(s) B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) ds \right\|^2 \\
= &\left\| \int_{A_n} h(s) B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) ds + \int_{A_n^c} h(s) B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) ds \right\|^2 \\
\leq\ & 2 \left\| \int_{A_n} h(s) B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) ds \right\|^2 + 2 \left\| \int_{A_n^c} h(s) B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) ds \right\|^2 \\
\leq\ & 2h_0 \int_{A_n} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds + 2h_n \int_{A_n^c} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & -2nh_0 \int_0^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds + 2h_n \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Et pour le dernier terme, nous avons

$$\begin{aligned}
&-h_0 \left\langle B^{\frac{1}{2}} u(t), \int_0^{+\infty} h(s) B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) ds \right\rangle \\
= &-h_0^2 \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + h_0 \left\langle B^{\frac{1}{2}} u(t), \int_0^{+\infty} h(s) B^{\frac{1}{2}} u(t-s) ds \right\rangle \\
= &-\frac{h_0^2}{2} \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{h_0}{2} \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t-s) \right\|^2 ds \\
&-\frac{h_0}{2} \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

En insérant ces quatre inégalités dans (1.77), nous obtenons (1.76). □

Lemme 1.7. *Soit U solution du problème (1.67). Alors, la fonction*

$$I_2(t) = \langle u_t(t), u(t) \rangle, \tag{1.79}$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
I_2'(t) = &\ \|u_t\|^2 - \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{h_0}{2} \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t-s) \right\|^2 ds \\
&-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds - \Big\langle Cz(1,t) + F(u), u \Big\rangle.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Démonstration. Dérivons (1.79) par rapport à t, on obtient

$$I_2'(t) = \|u_t\|^2 + \langle u_{tt}(t), u(t) \rangle.$$

En multipliant la première équation de (1.67) par u_t et par la définition de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$, on arrive à

$$I_2'(t) = \|u_t\|^2 - \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + h_0 \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \left\langle \int_0^{+\infty} h(s) B \eta^t(s) ds, u(t) \right\rangle - \langle Cz(1,t), u(t) \rangle,$$

En utilisant l'inégalité (1.78), l'estimation (1.80) est établie. □

De la même manière que 1.2.2, on a le résultat suivant :

Lemme 1.8. *Soit U solution du problème (1.67). Alors, la fonction*

$$I_3(t) = \tau e^{2\tau} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \|z(\rho, t)\|^2 ds, \tag{1.81}$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$I_3'(t) \leq -2\tau \int_0^1 \|z(\rho, t)\|^2 ds + e^{2\tau} \|u_t\|^2 - \|z(1, t)\|^2. \tag{1.82}$$

Nous considérons deux fonctionnelles J_1 et J_2 et nous donnons leurs dérivées dans le lemme suivant :

Lemme 1.9. *Soient*

$$J_1(t) = \int_0^t \left(\int_t^{+\infty} h(\pi - s) d\pi \right) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.83}$$

et

$$J_2(t) = \int_0^t \left(\int_t^{+\infty} h(\pi - s) d\pi \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.84}$$

Alors, pour $\lambda_1 \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} J_1'(t) \leq\ & h_0 \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - (1 - \lambda_1)\xi(t) J_1(t) - \lambda_1 \int_0^t h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t - s) \right\|^2 ds \\ & + \lambda_1 \int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s - t) \right\|^2 ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{1.85}$$

et

$$\begin{aligned} J_2'(t) \leq\ & h_0 \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - (1 - \lambda_1)\xi(t) J_2(t) - \frac{\lambda_1}{a} \int_0^t h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t - s) \right\|^2 ds \\ & + d\lambda_1 \int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s - t) \right\|^2 ds, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Démonstration. La fonction J_1 est bien définie. En effet, en utilisant le fait que $\eta \in L_h^2(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))$ et (1.70), on a

$$J_1(t) \leq \frac{1}{\xi(t)} \int_0^t h(t - s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds \leq \frac{1}{\xi(t)} \int_0^t h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t - s) \right\|^2 ds < +\infty.$$

De (1.20), on déduit que J_2 est bien définie.

D'autre part, on dérive J_1 par rapport à t et en utilisant la définition de u_0 et (1.70), nous obtenons

$$\begin{aligned} J_1'(t) &= \left(\int_t^{+\infty} h(\pi - s) d\pi \right) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 - \int_0^t h(t - s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds \\ &= h_0 \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - (1 - \lambda_1) \int_0^t h(t - s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds \\ &\quad - \lambda_1 \int_{-\infty}^t h(t - s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds + \lambda_1 \int_{-\infty}^0 h(t - s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds \\ &\leq h_0 \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - (1 - \lambda_1)\xi(t) J_1(t) - \lambda_1 \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t - s) \right\|^2 ds \\ &\quad + a\lambda_1 \int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s - t) \right\|^2 ds, \end{aligned}$$

ce qui donne (1.85). De la même façon, on établi l'estimation (1.86). □

Dans ce cas, on définit la fonctionnelle Lyapunov L par

$$L(t) = E(t) + \epsilon\,(N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + I_3(t)) + M_1 J_1(t) + a M_1 J_2(t), \tag{1.87}$$

où ϵ, N_1, N_2 et M_1 sont des constantes positives à choisir ultérieurement.

Pour le résultat de stabilité, on a le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Sous les hypothèses (A1)-(A3), (A7) et (A8). On suppose que h satisfait*

$$\int_0^{+\infty} h(s)ds < \frac{\gamma^2}{b}, \tag{1.88}$$

et il existe une constante positive δ_0 indépendant de μ telle que, si

$$|\mu| < \delta_0, \tag{1.89}$$

Alors, pour $U_0 \in \mathscr{H}$, ils existent des constantes positives δ_1 et δ_2 telles que

$$E(t) \leq \delta_2 e^{-\delta_1 t}\left(1 + \int_0^t e^{\delta_1 s}\int_s^{+\infty} h(\pi)\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0(\pi - s)\right\|^2 d\pi ds\right), \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.90}$$

si $\lim_{t\to+\infty}\xi(t) > 0$, *et*

$$E(t) \leq \delta_2 e^{-\delta_1 \hat{\xi}(t)}\left(1 + \int_0^t e^{\delta_1 \hat{\xi}(s)}\int_s^{+\infty} h(\pi)\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0(\pi - s)\right\|^2 d\pi ds\right), \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.91}$$

si $\lim_{t\to+\infty}\xi(t) = 0$, *où*

$$\hat{\xi}(s) = \int_0^s \xi(\pi)d\pi, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \tag{1.92}$$

Démonstration. Afin de prouver les estimations de stabilité, nous commençons par la dérivée de la fonction L. D'autre part, en utilisant (A7) et (1.2), on a

$$\begin{aligned} -\left\langle F_2(u), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle &\leq \frac{1}{b}\|F_2(u)\|^2 + \frac{b}{4}\left\|\int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\|^2 \\ &\leq \frac{\gamma^2}{b}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{h_0}{4}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

En combinant (1.74), (1.76), (1.80), (1.82), (1.85) et (1.86), on trouve

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq\ & -\epsilon\Bigg[(C_1 - \frac{|\mu|}{\epsilon})\|u_t\|^2 + C_2\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + C_3 h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - 2\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 d\rho \\
& + \int_0^{+\infty} h(s)\Big(C_4\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 + C_5\left\|B^{\frac{1}{2}}u(t-s)\right\|^2\Big)ds - 2N_2\psi(u)\Bigg] \\
& + \frac{\sqrt{dh_n}}{2}\epsilon N_1\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left(2h_n + \frac{\sqrt{dh_n}}{2}\right)\epsilon N_1\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\
& + \left(\frac{1}{2} - \epsilon C_6\right)\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds - C_7\xi(t)(J_1(t) + J_2(t)) \\
& + C_8\int_t^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0(s-t)\right\|^2 ds - \epsilon\|z(1,t)\|^2 \\
& + \epsilon\Big\langle Cz(1,t), N_1\int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds - N_2 u\Big\rangle,
\end{aligned} \tag{1.93}$$

où

$$\begin{aligned}
& C_1 = (h_0 - \varepsilon_1)N_1 - N_2 - e^{2\tau}, && C_2 = N_2 - (\varepsilon_2 + \frac{\gamma_2}{b})N_1 - \frac{ah_0}{\epsilon}M_1, \\
& C_3 = \frac{h_0}{2}N_1 - \frac{N_2}{2} - \frac{M_1}{\epsilon}, && C_4 = \frac{h_0}{4}N_1 + \frac{N_2}{2}, \\
& C_5 = \frac{2\lambda_1}{\epsilon}M_1 - \frac{h_0}{2}N_1 - \frac{N_2}{2}, && C_6 = \left(2nh_0 + \frac{dnh_0}{4\varepsilon_2} + \frac{h(0)}{4b\varepsilon_1}\right)N_1, \\
& C_7 = (1 - \lambda_1)M_1 \min\{1, a\}, && C_8 = M_1\lambda_1(1 + ad).
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Nous choisissons les différentes constantes pour obtenir les résultats visés. D'abord, on choisit $N_2 = (1 + ah_0)e^{2\tau}$ et M_1, N_1 de sorte que

$$\frac{\epsilon N_2}{2(1 + ah_0)} < M_1 < \frac{e^{2\tau}}{2\epsilon}.$$

$$\max\left\{\frac{b}{bh_0 - 2\gamma^2}\left(2(1 + ah_0)\frac{M_1}{\epsilon} - N_2\right), \frac{1}{h_0}(N_2 + e^{2\tau})\right\} < N_1 < \frac{1}{h_0}\left(N_2 + \frac{2M_1}{\epsilon}\right).$$

Notons que M_1 existe suite au choix de N_2 pour une certaine valeur de ϵ à choisir plus tard et d'après le choix de M_1 et N_2, N_1 existe. Puis, nous choisissons ε_1, ε_2 et λ_1 telles que

$$0 < \varepsilon_1 < h_0 - \frac{N_2 + e^{2\tau}}{N_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{h_0}{2} - \frac{\gamma^2}{b} + \frac{1}{2N_1}\left(N_2 - 2(1 + ah_0)\frac{M_1}{\epsilon}\right),$$

et

$$\frac{\epsilon}{4M_1}(N_2 + h_0 N_1) \leq \lambda_1 < 1,$$

Notons que ε_2 et λ_1 existent suite à le choix de N_1 et N_2. Ainsi, il résulte que $C_1 > 0$, $C_2 = -C_3$, $C_3 < 0$ et $C_5 \geq 0$. De plus, $C_4 > 0$, alors, on a

$$\begin{aligned} & -\epsilon\Bigg[C_1\|u_t\|^2 + C_2\bigg(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2\bigg) - 2N_2\psi(u) \\ & + \int_0^{+\infty} h(s)\bigg(C_4\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 + C_5\left\|B^{\frac{1}{2}}u(t-s)\right\|^2\bigg)ds\Bigg] \\ \leq\ & -\epsilon C_9\bigg(\|u_t\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - 2\psi(u) + \int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds\bigg) \end{aligned}$$

où $C_9 = \frac{1}{N_2}\min\left\{C_1, C_2, C_4\right\}$. En observant que C_9 est positive et indépendant de μ. Ensuite, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young pour estimer le dernier terme du second membre de (1.93). Alors, de (1.2) et (1.4), il vient

$$\begin{aligned} & \epsilon\left\langle Cz(1,t), N_1\int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds - N_2u\right\rangle \\ \leq\ & \epsilon\|z(1,t)\|^2 + \epsilon|\mu|C_{10}\bigg(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds\bigg), \end{aligned}$$

où $C_{10} = \frac{1}{2b}\max\{aN_2^2, h_0N_1^2\}$. En insérant l'inégalité ci-dessus et (1.95) dans (1.93), nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) \leq\ & -\epsilon C_{11}E(t) + \left(\frac{4h_n + \sqrt{dh_n}}{2}\right)\epsilon N_1E(t) \\ & + \left(\frac{1}{2} - \epsilon C_6\right)\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds - C_7\xi(t)(J_1(t) + J_2(t)) \\ & + C_8\int_t^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0(s-t)\right\|^2 ds, \end{aligned} \tag{1.95}$$

où $C_{11} = 2\min\left\{C_9 - \frac{|\mu|}{\epsilon}, \frac{2}{|\mu|}, C_9 - \epsilon|\mu|C_{10}\right\}$. Enfin, nous supposons que $|\mu|$ satisfait (1.89) sous le choix suivant de δ_0

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{C_9}{C_6}, \frac{C_9\sqrt{2}}{\sqrt{C_{10}}}\right\}. \tag{1.96}$$

Ainsi, on choisit n assez grand et on fixe ϵ pour que

$$\frac{|\mu|}{2C_9} < \epsilon \leq \frac{1}{2C_6} < \frac{1}{M}, \tag{1.97}$$

où

$$M = N_1\max\left\{1, \frac{h_0}{b}\right\} + N_2\max\left\{1, \frac{a}{b}\right\} + \frac{2e^{2\tau}}{|\mu|}.$$

ce qui implique que E équivaut à $E + \epsilon(N_1I_1 + N_2I_2 + I_3)$. En effet, en utilisant (1.73), (1.35), (1.36), (1.37) et (1.97), nous obtenons

$$E \sim E + \epsilon(N_1I_1 + N_2I_2 + I_3).$$

En outre, le troisième terme du seconde membre de (1.95) est négatif et notons que δ_0 est positive et indépendant de μ. Sous la condition (1.89), on conclut que C_{11} est positive et en utilisant le fait que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, on trouve

$$C_{12} = \epsilon C_{11} + \left(\frac{4h_n + \sqrt{dh_n}}{2}\right)\epsilon N_1 > 0.$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on arrive à

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -C_{12}E(t) - C_7\xi(t)\Big(J_1(t) + J_2(t)\Big) \\ &\quad + C_8 \int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s-t) \right\|^2 ds. \end{aligned} \tag{1.98}$$

Selon à la limite de ξ à l'infini, on distingue deux cas.

► Si $\lim_{t\to+\infty} \xi(t) > 0$, alors, ils existent $t_0 \geq 0$ et $\xi_0 > 0$ tels que $\xi(t) \geq \xi_0$, pour tout $t \geq t_0$. Ainsi, en utilisant (1.87), on déduit

$$L'(t) \leq -\delta_1 L(t) + C_8 \int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s-t) \right\|^2 ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.99}$$

où

$$\delta_1 = \min\left\{ \frac{C_{12}}{1+\epsilon M}, \frac{C_7\xi_0}{M_1}, \frac{C_7\xi_0}{aM_1} \right\}.$$

Ensuite, on intègre l'inégalité différentielle (1.99) sur $[t_0, t]$, nous trouvons

$$L(t) \leq e^{-\delta_1 t}\left(e^{\delta_1 t_0} L(t_0) + C_8 \int_0^t e^{\delta_1 s} \int_s^{+\infty} h(\pi) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(\pi - s) \right\|^2 d\pi ds \right), \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

par (1.87) et (1.99), on établit, pour tout $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{1-\epsilon M} L(t) \\ &\leq \frac{1}{1-\epsilon M} \max\left\{ C_8, e^{\delta_1 t_0} L(t_0) \right\} \times \\ &\quad \times \left(1 + \int_0^t e^{\delta_1 s} \int_s^{+\infty} h(\pi) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(\pi - s) \right\|^2 d\pi ds \right) e^{-\delta_1 t}. \end{aligned} \tag{1.100}$$

Pour $t \in [0, t_0]$, on a

$$E(t) \leq \frac{1}{1-\epsilon M} L(t) e^{\delta_1 t} e^{-\delta_1 t} \leq \frac{1}{1-\epsilon M} \max_{s\in[0,t_0]} L(s) e^{\delta_1 t_0} e^{-\delta_1 t}. \tag{1.101}$$

Les inégalités (1.100) et (1.101) donnent (1.90) avec

$$\delta_2 = \frac{1}{1-\epsilon M} \max\left\{ C_8, e^{\delta_1 t_0} \max_{s\in[0,t_0]} L(s) \right\}.$$

► Si $\lim_{t\to+\infty} \xi(t) = 0$, alors, il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\xi(t) \leq C_{12}$, pour tout $t \geq t_0$. Par conséquent, en utilisant (1.87), on a, pour

$$\delta_1 = \min\left\{\frac{1}{1+\epsilon M}, \frac{C_7}{M_1}, \frac{C_7}{aM_1}\right\},$$

$$L'(t) \leq -\delta_1 \xi(t) L(t) + C_8 \int_t^{+\infty} h(s) \left\|B^{\frac{1}{2}} u_0(s-t)\right\|^2 ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

Une simple intégration de l'inégalité différentielle précédente entre t_0 et t, il vient, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$L(t) \leq e^{-\delta_1 \hat{\xi}(t)} \left(e^{\delta_1 \hat{\xi}(t_0)} L(t_0) + C_8 \int_0^t e^{\delta_1 \hat{\xi}(s)} \int_s^{+\infty} h(\pi) \left\|B^{\frac{1}{2}} u_0(\pi - s)\right\|^2 d\pi ds \right).$$

De (1.87) et (1.4.2), on déduit, pour tout $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} E(t) \quad &\leq \quad \frac{1}{1-\epsilon M} \max\left\{C_8, e^{\delta_1 \hat{\xi}(t_0)} L(t_0)\right\} \times \\ &\times \left(1 + \int_0^t e^{\delta_1 s} \int_s^{+\infty} h(\pi) \left\|B^{\frac{1}{2}} u_0(\pi - s)\right\|^2 d\pi ds\right) e^{-\delta_1 \hat{\xi}(t)}. \end{aligned} \tag{1.102}$$

Pour $t \in [0, t_0]$, nous avons

$$E(t) \leq \frac{1}{1-\epsilon M} L(t) e^{\delta_1 \hat{\xi}(t)} e^{-\delta_1 \hat{\xi}(t)} \leq \frac{1}{1-\epsilon M} \max_{s\in[0,t_0]} \left(L(s) e^{\delta_1 \hat{\xi(s)}}\right) e^{-\delta_1 \hat{\xi}(t)}. \tag{1.103}$$

En utilisant (1.102) et (1.103), l'estimation (1.91) est établie avec

$$\delta_2 = \frac{1}{1-\epsilon M} \max\left\{C_8, \max_{s\in[0,t_0]} \left(L(s) e^{\delta_1 \hat{\xi(s)}}\right)\right\}.$$

La démonstration du théorème 1.6 est obtenue. □

Chapitre 2

Comportement optimale d'un problème d'évolution abstrait avec retard et une mémoire infinie.

Ce chapitre est dédié à établir l'existence globale et la stabilité pour un système d'évolution linéaire avec retard et une mémoire infinie. Sous certaines conditions sur les données initiales et en se basant sur la théorie des semi groupes, nous montrons l'existence globale et l'unicité d'une solution du problème considéré. Ensuite, nous établissons un résultat explicit et optimal de la stabilité d'énergie en utilisant la méthode énergétique et quelques propriétés des fonctions convexes pour une classe très large des fonctions noyaux du terme viscoélastique. Enfin, on termine par quelques applications.

2.1 Position du problème

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire et une norme associée notés par $\langle .,. \rangle$ et $\| \, . \, \|$. Soient $A : D(A) \longrightarrow H$ et $B : D(B) \longrightarrow H$ deux opérateurs linéaires positifs auto-adjoints tels que $D(A) \subset D(B) \subset H$ avec des injections denses et compactes. $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction noyau du terme mémoire et τ est une constante positive représentant le retard.

Le problème considéré dans ce chapitre consiste à étudier l'existence globale et la stabilité du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t-\tau) = 0, & t > 0, \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & t \in (0,\tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où μ_1, μ_2 sont des constantes réelles avec $\mu_1 > 0$ et (u_0, u_1, f_0) sont les conditions initiales.

A fin d'étudier le problème (2.1) et de la même manière que la section 1.2, on définit z et η^t, respectivement, comme suit

$$z(\rho, t) = u_t(t - \rho\tau), \quad \rho \in (0,1),\ t > 0,$$

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad t, s > 0.$$

Par conséquent, le problème (2.1) devient

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - h_0 Bu(t) + \displaystyle\int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds + \mu_1 u_t(t) & \\ \qquad +\mu_2 z(1,t) = 0, & t \in (0, +\infty), \\ \tau z_t(\rho, t) + z_\rho(\rho, t) = 0, & \rho \in (0,1),\ t > 0, \\ \eta_t^t(s) = u_t(t) - \eta_s^t(s), & t, s > 0, \\ z(\rho, 0) = f_0(-\rho\tau), & \rho \in (0,1), \\ z(0,t) = u_t(t), & t \geq 0, \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \\ \eta^0(s) = u_0(0) - u_0(s), & s > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

On présente quelques hypothèses utiles pour obtenir nos résultats.

(A1) Ils existent deux constantes positives a et b telles que

$$b\|u\|^2 \leq \left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leq a\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2, \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{2.3}$$

(A2) La fonction noyau $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 satisfait

$$h(0) > 0, \quad h_0 = \int_0^{+\infty} h(s)ds < \frac{1}{a}. \tag{2.4}$$

(A3) Les coefficients du retard et d'amortissement vérifient

$$|\mu_2| \leq \mu_1. \tag{2.5}$$

2.2 Existence globale de la solution

Dans cette section, nous prouvons l'existence globale et l'unicité de la solution du problème (2.1) en utilisant la théorie des semi groupes. Plus précisément, on transforme le problème (2.1) en un problème de Cauchy homogène et en appliquant sur le théorème de Lumer-Phillips.

Remarquant que, pour $U = (u, u_t, \eta^t, z)^T$, le problème (2.2) peut-être pris la forme :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathscr{A}U(t), \quad \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 = \left(u_0, u_1, \eta^0, f_0(-\tau.)\right)^T, \end{cases} \tag{2.6}$$

tel que l'opérateur $\mathscr{A}$ est défini par

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -(A - h_0 B)\phi_1 - \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds - \mu_1\phi_2 - \mu_2\phi_4(1) \\ \phi_2 - \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} \\ \dfrac{-1}{\tau}\dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \end{pmatrix},$$

avec le domaine $D(\mathscr{A})$ donné par

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \left\{ \begin{array}{c} (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{H},\ (A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds \in H, \\ \phi_2 \in D(A^{\frac{1}{2}}), \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} \in L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}})), \\ \dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \in L^2(0,1;H),\ \phi_3(0) = 0,\ \phi_4(0) = \phi_2 \end{array} \right\},$$

où

$$\mathscr{H} = D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}})) \times L^2(0,1;H).$$

Les espaces $L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))$ et $L^2(0,1;H)$ sont respectivement définis par

$$L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}})) = \left\{ \phi\ : \mathbb{R}_+ \to D(B^{\frac{1}{2}}), \quad \int_0^{+\infty} h(s)\ \left\| B^{\frac{1}{2}}\phi(s) \right\|^2 ds < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))} = \int_0^{+\infty} h(s)\ \left\langle B^{\frac{1}{2}}\phi_1(s), B^{\frac{1}{2}}\phi_2(s) \right\rangle ds.$$

Et

$$L^2(0,1;H) = \left\{ \phi\ : (0,1) \to H, \quad \int_0^1 \|\phi(\rho)\|^2 d\rho < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2(0,1;H)} = \int_0^1 \langle \phi_1(\rho), \phi_2(\rho) \rangle d\rho.$$

L'espace d'énergie $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert équipé du produit scalaire suivant : pour tout $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ et $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ de $\mathscr{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \Phi, W \rangle_{\mathscr{H}} &= \langle \phi_1, w_1 \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})} - h_0 \langle \phi_1, w_1 \rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} + \langle \phi_2, w_2 \rangle + \langle \phi_3, w_3 \rangle_{L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))} \\ &\quad + \tau\xi \langle \phi_4, w_4 \rangle_{L^2(0,1;H)}, \end{aligned}$$

avec ξ une constante positive satisfaisant

$$|\mu_2| \leq \xi \leq 2\mu_1 - |\mu_2|, \tag{2.7}$$

notons que ξ existe selon (2.5).

L'existence globale et l'unicité de la solution du problème (2.6) sont assurés par le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A3), pour tout $U_0 \in \mathscr{H}$, il existe une unique solution mild $U \in C(\mathbb{R}_+, \mathscr{H})$ du problème (2.6). De plus, si $U_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, alors la solution U est une solution classique, i.e,*

$$U \in C(\mathbb{R}_+, \mathscr{D}(\mathscr{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathscr{H}).$$

Démonstration. Afin d'obtenir le résultat cité dans le Théorème (2.1), nous utilisons la théorie des semi groupes (voir les théorèmes .15 et .18). Alors, nous montrons que l'opérateur linéaire $\mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\mathscr{H}$. Premièrement, nous montrons que $\mathscr{A}$ est un opérateur dissipatif. En effet, soit $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathscr{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -(A - h_0 B)\phi_1 - \int_0^{+\infty} h(s) B\phi_3(s) ds - \mu_1\phi_2 - \mu_2\phi_4(1) \\ \phi_2 - \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} \\ \dfrac{-1}{\tau}\dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathscr{H}} \\
&= \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})} - h_0 \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} + \int_0^{+\infty} h(s) \left\langle \phi_2 - \frac{\partial \phi_3}{\partial s}, \phi_3 \right\rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} ds \\
&\quad - \left\langle (A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s) B\phi_3(s) ds + \mu_1\phi_2 + \mu_2\phi_4(1), \phi_2 \right\rangle \\
&\quad + \tau\xi \int_0^1 \left\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \phi_4}{\partial \rho}, \phi_4 \right\rangle d\rho.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant la définition de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$ et le fait que H est un espace de Hilbert, on conclut

$$\langle A - h_0 B\phi_1, \phi_2 \rangle = \left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_2, A^{\frac{1}{2}}\phi_1 \right\rangle - h_0 \left\langle B^{\frac{1}{2}}\phi_2, B^{\frac{1}{2}}\phi_1 \right\rangle \tag{2.9}$$

et

$$-\mu_1 \langle \phi_2, \phi_2 \rangle = -\mu_1 \|\phi_2\|^2. \tag{2.10}$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young donnent

$$-\mu_2 \langle \phi_4(1), \phi_2 \rangle \leq \frac{|\mu_2|}{2} \left(\|\phi_4(1)\|^2 + \|\phi_2\|^2 \right). \tag{2.11}$$

Effectuons une intégration par partie et tenons en compte la définition $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ $(\phi_3(0)=0)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} h(s)\left\langle -\frac{\partial \phi_3}{\partial s}, \phi_3\right\rangle_{D(B^{\frac{1}{2}})} ds \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\phi_3(s)\right\|^2 ds. \tag{2.12}$$

De plus, en utilisant le fait que $\phi_4(0)=\phi_2$, on trouve

$$\tau\xi\int_0^1 \left\langle \frac{-1}{\tau}\frac{\partial \phi_4}{\partial \rho}, \phi_4\right\rangle d\rho = \frac{\xi}{2}\left(\|\phi_4(0)\|^2 - \|\phi_4(1)\|^2\right) = \frac{\xi}{2}\Big(\|\phi_2\|^2 - \|\phi_4(1)\|^2\Big). \tag{2.13}$$

Insérons (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13) en (2.8) et utilisons le fait que h est décroissante, il résulte que

$$\langle \mathscr{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathscr{H}} \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\phi_3(s)\right\|^2 ds + \left(\frac{\xi}{2} - \mu_1 + \frac{|\mu_2|}{2}\right)\|\phi_2\|^2 + \left(\frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2}\right)\|\phi_4(1)\|^2. \tag{2.14}$$

Puis, en combinant le résultat ci-dessus et en utilisant (2.7) avec (2.5), on trouve

$$\langle \mathscr{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0. \tag{2.15}$$

Ainsi, on déduit que $\mathscr{A}$ est un opérateur dissipatif.

Deuxièment, on veut montrer que $\mathscr{A}$ est maximal monotone. Pour cela, il suffit de montrer que l'opérateur $\lambda I - \mathscr{A}$ est surjectif, pour tout $\lambda > 0$. En effet, soit $(f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathscr{H}$, on doit montrer qu'il existe $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ tels que

$$(\lambda I - \mathscr{A})\,(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T,$$

ce qu'est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda\phi_1 - \phi_2 = f_1 \\ \lambda\phi_2 + (A - h_0 B)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds + \mu_1\phi_2 + \mu_2\phi_4(1) = f_2 \\ \lambda\phi_3 - \phi_2 + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial s} = f_3 \\ \lambda\phi_4 + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \phi_4}{\partial \rho} = f_4. \end{cases} \tag{2.16}$$

Supposons qu'on a trouvé ϕ_1 avec une régularité convenable. Alors, on a

$$\phi_2 = \lambda\phi_1 - f_1. \tag{2.17}$$

On remarque que la troisième et la quatrième équation dans (2.16) sont des équations différentielles ordinaires non homogènes du premier ordre. Donc, pour la résolution de ces équations, on commence par la résolution d'équation différentielle homogène. Ensuite, on utilise la méthode de la variation de la constante avec $\phi_3(0) = 0$ et $\phi_4(0) = \phi_2 = \lambda\phi_1 - f_1$. Par conséquent, on trouve

$$\phi_3(s) = e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda y}\Big(f_3(y) - f_1 + \lambda\phi_1\Big)dy, \tag{2.18}$$

$$\phi_4(\rho) = \left(\lambda\phi_1 - f_1 + \tau \int_0^\rho f_4(y)e^{\lambda\tau y}dy\right) e^{-\lambda\tau\rho}, \quad \rho \in (0,1).$$

En particulier,

$$\phi_4(1) = \left(\lambda\phi_1 - f_1 + \tau \int_0^1 f_4(y)e^{\lambda\tau y}dy\right) e^{-\lambda\tau}. \tag{2.19}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer ϕ_1. Ensuite, en combinant (2.17), (2.18) et (2.19) dans la deuxième équation de (2.16), on obtient

$$(A - \beta_1 B + \beta_2 I)\,\phi_1 = \tilde{f}, \tag{2.20}$$

où

$$\beta_1 = h_0 - \lambda \int_0^\infty h(s)e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda y}dy\right)ds = \int_0^\infty h(s)e^{-\lambda s}ds, \quad \beta_2 = \lambda\left(\lambda + \mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda\tau}\right),$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{f} \;\; &= \;\; f_2 + \left(\lambda + \mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda\tau}\right) f_1 - \mu_2 e^{-\lambda\tau}\tau \int_0^1 f_4(y)e^{\tau y}dy \\ &\quad - \int_0^\infty e^{-\lambda s}h(s)\int_0^s e^{-\lambda y}B\Big(f_3(y) - f_1\Big)dyds.\end{aligned}$$

Il suffit de prouver que (2.20) a une solution $\phi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ et de la remplacer dans (2.17), (2.18) et (2.19) pour obtenir $\Phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ satisfaisant (2.16). On a $\beta_1 < h_0$, de (2.4) et (2.3), on en déduit que $A - \beta_1 B$ est un opérateur défini positif. Ensuite, on prend le crochet de dualité $\langle .,. \rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' \times D(A^{\frac{1}{2}})}$ avec $w \in D(A^{\frac{1}{2}})$:

$$\langle (A - \beta_1 B + \beta_2 I)\,\phi_1, w\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' \times D(A^{\frac{1}{2}})} = \left\langle \tilde{f}, w\right\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})' \times D(A^{\frac{1}{2}})}. \tag{2.21}$$

Il est claire que le premier membre de l'estimation de (2.21) est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $D(A^{\frac{1}{2}})$. En effet,

$$\left|\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}w\right\rangle - \beta_1\left\langle B^{\frac{1}{2}}\phi_1, B^{\frac{1}{2}}w\right\rangle + \beta_2\langle\phi_1, w\rangle\right| \le C\|\phi_1\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\|w\|_{D(A^{\frac{1}{2}})},$$

de plus, pour $w = \phi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, on a

$$\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\rangle - \beta_1\left\langle B^{\frac{1}{2}}\phi_1, B^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\rangle + \beta_2\|\phi_1\| \ge (1 - a\beta_1)\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\rangle \ge c\|\phi_1\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}.$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous concluons que (2.16) a une solution unique $\phi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ satisfaisant (2.16). En utilisant (2.18), on obtient

$$\left((A - h_0 B)\phi_1 + \mu_1\phi_2 + \int_0^{+\infty} h(s)B\phi_3(s)ds\right) \in H.$$

En conclusion, on trouve $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, qui vérifie (2.16). D'où, $\lambda I - \mathscr{A}$ est surjective pour tout $\lambda > 0$.

Enfin, le théorème .15 implique que $\mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ sur $\mathscr{H}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.1. □

2.3 Comportement asymptotique de la solution

L'objet de cette section est d'étudier le comportement asymptotique de la solution en basant sur la méthode d'énergie avec un choix convenable de la fonction de Lyapunov L et en utilisant quelques propriétés des fonctions convexes. En outre, on établit un résultat explicite et général du taux de dissipation de l'énergie de la solution pour une classe très large des fonctions noyaux du terme viscoélastique ; l'hypothèse (A5).

2.3.1 Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, on présente et prouve quelques lemmes techniques utiles afin d'analyser le comportement asymptotique de la solution du problème (2.1). D'abord, on cite les hypothèses additionnelles suivantes :

(A4) Il existe une constante positive d telle que

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \leq d\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2, \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{2.22}$$

(A5) Il existe une fonction $G : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ de classe C^1 qui est linéaire ou elle est strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$, $r \leq h(0)$, $G(0) = G'(0) = 0$, avec $\lim_{t\to+\infty} G'(t) = +\infty$ telle que

$$h'(t) \leq -\zeta(t)G(h(t)), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.23}$$

où $\zeta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable décroissante.

Remarque 2.1. *Soit G une fonction strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$ avec $G(0) = G'(0) = 0$, alors G admet un prolongement $\overline{G}$ qui est une fonction strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0,+\infty)$. De plus, on peut définir $\overline{G}$ par*

$$\overline{G}(t) = \frac{c}{2}t^2 + (b - cr)t + \left(a + \frac{c}{2}r^2 - br\right), \quad \textit{pour} \quad t > r, \tag{2.24}$$

où $a = G(r)$, $b = G'(r)$ et $c = G''(r)$.

Lemme 2.1. *Pour δ et t_1 des constantes positives, on a*

$$h'(t) \leq -\delta h(t), \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Démonstration. Suite à [58], à partir de (A2) et (A5), on déduit clairement que $\lim_{t\to+\infty} h(s) = 0$. Par conséquent, il existe $t_1 > 0$ suffisamment grand telle que

$$h(t_1) = r \quad \text{et} \quad h(t) \leq r, \quad \forall t \geq t_1. \tag{2.25}$$

En utilisant le fait que h et ζ sont des fonctions continues positives décroissantes et G est une fonction continue positive, on obtient, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$\begin{cases} 0 < h(t_1) \leq h(t) \leq h(0) \\ 0 < \zeta(t_1) \leq \zeta(t) \leq \zeta(0), \end{cases}$$

ce qui donne, pour deux constantes positives δ_1 et δ_2,

$$\delta_1 \leq \zeta(t)G(h(t)) \leq \delta_2.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, t_1]$,

$$h'(t) \leq -\zeta(t)G(h(t)) \leq -\frac{\delta_1}{h(0)}h(0) \leq -\frac{\delta_1}{h(0)}h(t). \tag{2.26}$$

□

Le lemme suivant est introduit pour présenter l'inégalité de Jensen qui sera utilisée pour établir nos résultats.

Lemme 2.2. *Soit F est une fonction convexe sur $[a, b]$, $f : \Omega \to [a, b]$ et h sont des fonctions intégrables sur Ω, $h(x) \geq 0$, et $\int_\Omega h(x)dx = k > 0$, alors, on a l'inégalité de Jensen*

$$F\left[\frac{1}{k}\int_\Omega f(x)h(x)dx\right] \leq \frac{1}{k}\int_\Omega F[f(x)]h(x)dx.$$

Maintenant, on définit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (2.2) par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|U(t)\|^2_{\mathscr{H}} = \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds\right) \\ &\quad + \frac{\tau}{2}\xi\int_0^1 \|z(\rho, t)\|^2 d\rho, \end{aligned} \tag{2.27}$$

où ξ est une constante positive satisfait (2.7).

Lemme 2.3. *Soit U solution de problème (2.2). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (2.27) satisfait*

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.28}$$

Démonstration. Multipliant la première équation de (2.2) par u_t. Ensuite, en répétant exactement les mêmes arguments pour obtenir (2.14) et en utilisant (2.7), nous obtenons que E est une fonctionnelle décroissante vérifiant (2.28). □

Soit la fonction de Lyapunov L définie comme suit

$$L(t) = ME(t) + N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + I_3(t), \tag{2.29}$$

où M, N_1 et N_2 sont des constantes positives et

$$I_1(t) = \langle u_t(t), u(t)\rangle, \tag{2.30}$$

$$I_2(t) = -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle, \tag{2.31}$$

$$I_3(t) = \tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds. \tag{2.32}$$

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses (A1)-(A5), ils existent deux constantes positives c_1 et c_2 telles que*

$$c_1E(t) \le L(t) \le c_2E(t). \tag{2.33}$$

Démonstration. Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on arrive à

$$\begin{aligned}
|L(t) - ME(t)| &\le N_1|\langle u_t, u\rangle| + N_2\left|\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle\right| \\
&\quad + \tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds \\
&\le \frac{N_1+N_2}{2}\|u_t\|^2 + \frac{aN_1}{2b}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{h_0N_2}{2b}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\
&\quad + \tau e^{2\tau}\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds \\
&\le CE(t),
\end{aligned}$$

Ainsi, on choisit M suffisamment grand de sorte que $L \sim E$. □

Pour des raisons pratiques, nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 2.5. *Soit U solution du problème* (2.2). *Alors, la fonction*

$$I_1(t) = \langle u_t(t), u(t)\rangle,$$

satisfait, pour tout $t \ge 0$,

$$\begin{aligned}
I_1'(t) &\le \left(1 + \frac{\mu_1}{2}\right)\|u_t\|^2 - \left(\frac{l}{2} - \frac{a\mu_1}{2b}\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{aC_\alpha}{2l}\int_0^{+\infty} k(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\
&\quad - \mu_2\langle z(1,t), u(t)\rangle,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

pour $0 < \alpha < 1$, où

$$C_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)} ds \quad et \quad k(t) = \alpha h(t) - h'(t). \tag{2.35}$$

Démonstration. Dérivons (2.30) par rapport à t, on trouve

$$I_1'(t) = \|u_t\|^2 + \langle u_{tt}(t), u(t)\rangle.$$

D'autre part, en multipliant la première équation de (2.2) par $u(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\langle u_{tt}(t), u(t)\rangle + \langle Au(t), u(t)\rangle - h_0\langle Bu(t), u(t)\rangle + \left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle \\ &+\mu_1\langle u_t(t), u(t)\rangle + \mu_2\langle z(1,t), u(t)\rangle = 0,\end{aligned}$$

en utilisant les définitions de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$, on a

$$\begin{aligned}&\langle u_{tt}(t), u(t)\rangle + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle \\ &+\mu_1\langle u_t(t), u(t)\rangle + \mu_2\langle z(1,t), u(t)\rangle = 0.\end{aligned}$$

Par Consequent,

$$\begin{aligned}I_1'(t) &= \|u_t\|^2 - \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle \\ &\quad -\mu_1\langle u_t(t), u(t)\rangle - \mu_2\langle z(1,t), u(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et en utilisant (2.3), on arrive à

$$-\langle u_t(t), u(t)\rangle \leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{a}{2b}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2, \tag{2.37}$$

et

$$-\left\langle \int_0^{+\infty} h(s)B\eta^t(s)ds, u(t)\right\rangle \leq \frac{l}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{a}{2l}\left\|\int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds\right\|^2, \tag{2.38}$$

avec $l = 1 - ah_0$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds\right\|^2 &\leq \left(\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|ds\right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \frac{h(s)}{\sqrt{\alpha h(s) - h'(s)}}\sqrt{\alpha h(s) - h'(s)}\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|ds\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \frac{h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)}ds\right)\int_0^{+\infty}(\alpha h(s) - h'(s))\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ &\leq C_\alpha\int_0^{+\infty} k(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.39}$$

En substituant les inégalités (2.37), (2.38) et (2.39) dans (2.36), nous obtenons (2.34). □

Lemme 2.6. *Soit U solution du problème (2.2). Alors, la fonction*

$$I_2(t) = -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds\right\rangle,$$

satisfait, pour $\epsilon > 0$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_2'(t) &\leq (\varepsilon - h_0)\|u_t\|^2 + \varepsilon \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \mu_2 \left\langle z(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad + \frac{c(C_\alpha+1)}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} k(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \end{aligned} \tag{2.40}$$

avec $c = \max\left\{\frac{\int_0^{+\infty} k(s)ds}{b}, \varepsilon + \frac{d}{2} + \frac{ah_0^2}{2} + \frac{\alpha^2}{b} + \frac{\mu_1^2}{2b}\right\}$.

Démonstration. On dérive (2.31) par rapport à t et on utilise la troisième équation de (2.2), on vient à

$$I_2'(t) = -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta_s^t(s)ds \right\rangle - h_0\|u_t\|^2.$$

Intégrons par parties par rapport à s, le deuxième terme dans le deuxième membre de l'estimation précédente et utilisons le fait que $\lim_{s\to+\infty} h(s) = 0$, $\eta^t(0) = 0$, on obtient que

$$I_2'(t) = -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle - h_0\|u_t\|^2.$$

D'autre part, par la première équation de (2.2) et en utilisant les définitions de $A^{\frac{1}{2}}$ et $B^{\frac{1}{2}}$, il résulte

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= -h_0\|u_t\|^2 + \mu_1 \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle + \mu_2 \left\langle z(1,t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle \\ &\quad - h_0 \left\langle B^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle + \left\| \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\|^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, (2.3), (2.22) et (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \mu_1 \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds \right\|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{\mu_1^2 C_\alpha}{2b\varepsilon} \int_0^{+\infty} k(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \int_0^{+\infty} h(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{dC_\alpha}{2\varepsilon} \int_0^{+\infty} k(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h_0 \left\langle B^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\rangle &\leq \frac{\varepsilon}{2a}\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{ah_0^2}{2\varepsilon} \left\| \int_0^{+\infty} h(s)B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)ds \right\|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{ah_0^2 C_\alpha}{2\varepsilon} \int_0^{+\infty} k(s) \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} h'(s)\eta^t(s)ds \right\rangle &= \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} k(s)\eta^t(s)ds \right\rangle - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} \alpha h(s)\eta^t(s)ds \right\rangle \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} \sqrt{k(t-s)}\sqrt{k(t-s)}\|u(t)-u(s)\|ds\right)^2 \\
&\quad +\frac{\varepsilon}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{\alpha^2}{\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} h(t-s)\|u(t)-u(s)\|ds\right)^2 \\
&\leq \left(\frac{\int_0^{+\infty} k(s)ds}{\varepsilon b} + \frac{\alpha^2 C_\alpha}{\varepsilon b}\right)\int_0^{+\infty} k(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\
&\quad +\frac{\varepsilon}{2}\|u_t(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Insérons ces quatre dernières inégalités et l'inégalité (2.39) dans (2.41), on arrive à (2.40). $\square$

Lemme 2.7. *Soit U solution du problème* (2.2)*. Alors, la fonction*

$$I_3(t) = \tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds,$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$I_3'(t) \leq -2\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds + e^{2\tau}\|u_t\|^2 - \|z(1,t)\|^2. \tag{2.42}$$

Démonstration. En utilisant la deuxième équation de (2.2), on obtient

$$I_3'(t) = 2\tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\langle z_t(\rho,t), z(\rho,t)\rangle d\rho = -2e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\|z(\rho,t)\|^2 d\rho.$$

Ensuite, en intégrant par parties et $z(0,t) = u_t(t)$, on a

$$I_3'(t) = -2\tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\|z(\rho,t)\|^2 ds + e^{2\tau}\|u_t\|^2 - \|z(1,t)\|^2,$$

D'où (2.42) en utilisant le fait que $e^{-2\tau\rho} \geq e^{-2\tau}$, pour $\rho \in]0,1[$. $\square$

Nous devons énoncer et prouver le résultat suivant :

Lemme 2.8. *Il existe une constante positive C_1 telle que*

$$\int_t^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \leq C_1 q_0(t), \tag{2.43}$$

où $q_0(t) = \int_0^{+\infty} h(t+s)\left(1+\left\|B^{\frac{1}{2}}u_0(s)\right\|^2\right)ds$.

Démonstration. Suite à [35], par (2.3) et (2.27), on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & 2 \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 \int_t^{+\infty} h(s) ds + 2 \int_t^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t-s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & 2 \left\| B^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|^2 \int_0^{+\infty} h(t+s) ds + 2 \int_0^{+\infty} h(t+s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(-s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & 2a \sup_{s \geq 0} \left\| A^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 \int_0^{+\infty} h(t+s) ds + 2 \int_0^{+\infty} h(t+s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & \frac{4a \sup_{s \geq 0} E(s)}{l} \int_0^{+\infty} h(t+s) ds + 2 \int_0^{+\infty} h(t+s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & \frac{4aE(0)}{l} \int_0^{+\infty} h(t+s) ds + 2 \int_0^{+\infty} h(t+s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s) \right\|^2 ds \\
\leq\ & C_1 \int_0^{+\infty} h(t+s) \left(1 + \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s) \right\|^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Alors, (2.43) est établi où $C_1 = \max \left\{ 2, \frac{4aE(0)}{l} \right\}$. Notons que q_0 est de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$. En effet, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} h(t+s) \left(1 + \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(s) \right\|^2 \right) ds &\leq h_0 + \int_0^{+\infty} h(t+s) \left(\left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(0) - B^{\frac{1}{2}} \eta^0(s) \right\|^2 \right) ds \\
&\leq h_0 \left(1 + 2 \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0(0) \right\|^2 \right) \\
&\quad + 2 \int_0^{+\infty} h(t+s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^0(s) \right\|^2 ds < +\infty,
\end{aligned}$$

puisque $\eta \in L^2_h(\mathbb{R}_+, D(B^{\frac{1}{2}}))$. □

Lemme 2.9. *Soit U solution du problème (2.2). Alors, la fonction*

$$I_4(t) = \int_0^t f(t-s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds, \tag{2.44}$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$I_4'(t) \leq 3(1-l) \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds + \frac{C_1}{2} q_0(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.45}$$

où $f(t) = \int_t^{+\infty} h(s) ds$.

Démonstration. On dérive (2.44), on obtient

$$I_4'(t) = f(0) \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \int_0^t f'(t-s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds.$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Young et le fait que $f'(t) = -h(t)$

$$\begin{aligned}
I_4'(t) &= f(0) \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \int_0^t h(t-s) \left\| B^{\frac{1}{2}} u(s) \right\|^2 ds \\
&\leq h_0 \left\| B^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \int_0^t h(t-s) \left\| B^{\frac{1}{2}} (u(t) - u(s)) \right\|^2 ds \\
&\quad -2 \left\langle B^{\frac{1}{2}} u, \int_0^t h(t-s) B^{\frac{1}{2}} (u(t) - u(s)) ds \right\rangle.
\end{aligned}$$

Mais

$$-2\left\langle B^{\frac{1}{2}}u, \int_0^t h(t-s)B^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))ds\right\rangle$$
$$\leq \frac{\int_0^t h(s)ds}{2h_0}\int_0^t h(t-s)\left\|B^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))\right\|^2 ds + 2h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2.$$

De plus, comme $\int_0^t h(s)ds \leq f(0) = h_0$ et en utilisant (2.3), on obtient

$$I_4'(t) \leq 3(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\left\|B^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))\right\|^2 ds,$$

ce qui est équivaut à

$$I_4'(t) \leq 3(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds.$$

Ce qui donne (2.45) en utilisant (2.43). □

Lemme 2.10. *La fonction de Lyapunov L définie par (2.29) satisfait*

$$L'(t) \leq -4(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.46}$$

sous un choix convenable des constantes M, N_1 et N_2.

Démonstration. En combinant (2.29), (2.28), (2.34), (2.40) et (2.42), ce qui donne, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} L'(t) \leq\; & -\left[(h_0-\varepsilon)N_2 - (1+\frac{\mu_1}{2})N_1 - e^{2\tau}\right]\|u_t\|^2 - \left(\frac{l}{2}N_1 - \frac{a\mu_1}{2b}N_1 - \varepsilon N_2\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ & +\frac{\alpha M}{2}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \mu_2\left\langle z(1,t), N_2\int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds - N_1 u\right\rangle \\ & -\left[\frac{M}{2} - \frac{aC_\alpha}{2l}N_1 - \frac{c(C_\alpha+1)}{\varepsilon}N_2\right]\int_0^{+\infty} k(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ & -2\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds - \|z(1,t)\|^2. \end{aligned}$$

Grâce aux les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, (2.3) et (2.39), on conclut

$$\begin{aligned} \left\langle \mu_2 z(1,t), N_2\int_0^{+\infty} h(s)\eta^t(s)ds - N_1 u\right\rangle \leq\; & \|z(1,t)\|^2 + \frac{\mu_2^2}{2}N_1^2\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ & +\frac{\mu_2^2 C_\alpha}{2b}N_2^2\int_0^{+\infty} k(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds. \end{aligned}$$

Par consequent, en prenant $\varepsilon = \frac{l}{4N_2}$, on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \leq\; & -\left[h_0 N_2 - \frac{l}{4} - (1+\frac{\mu_1}{2})N_1 - e^{2\tau}\right]\|u_t\|^2 \\ & -\left[\frac{l}{2}N_1 - \frac{a\mu_1}{2b}N_1 - \frac{l}{4} - \frac{\mu_2^2}{2}N_1^2\right]\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\ & -\left[\frac{M}{2} - \frac{aC_\alpha}{2l}N_1 - \frac{c(C_\alpha+1)}{\varepsilon}N_2 - \frac{\mu_2^2 C_\alpha}{2b}N_2^2\right]\int_0^{+\infty} k(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds \\ & +\frac{\alpha M}{2}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds - 2\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds. \end{aligned}$$

À ce stade, en choisissant N_1 assez grand de sorte que

$$\frac{l}{2}N_1 - \varepsilon N_2 = \frac{l}{2}N_1 - \frac{l}{4} > 5(1-l),$$

et μ_1, μ_2 tels que

$$|\mu_2| < \frac{\sqrt{2(1-l)}}{N_1}, \quad \mu_1 < \left(\frac{2(1-l)}{N_1} - \mu_2^2 N_1\right)\frac{b}{a},$$

notons que μ_1 est un nombre positif selon le choix de μ_2. Ensuite, on choisit N_2 assez grand pour que

$$h_0 N_2 - \frac{l}{4} - (1+\frac{\mu_1}{2})N_1 - e^{2\tau} > 1.$$

Grâce à $\frac{\alpha h^2(s)}{\alpha h(s)-h'(s)} < h(s)$ et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\alpha C_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)} ds \to 0 \quad \text{comme} \quad \alpha \to 0.$$

Ainsi, il existe $0 < \alpha_0 < 1$ telle que si $\alpha < \alpha_0$, alors

$$\alpha C_\alpha < \frac{1}{8\left[\frac{a}{2l}N_1 + \left(\frac{4c}{l} + \frac{\mu_2^2}{2b}\right)N_2^2\right]}.$$

Aussi, on choisit M assez grand pour que (2.33) soit satisfaite et

$$\frac{M}{2} - \frac{4c}{l}N_2^2 > 0,$$

alors, pour M fixé, on choisit α de sorte que

$$\alpha = \frac{1}{2M} < \alpha_0,$$

ce qui donne

$$\frac{M}{2} - \frac{4c}{l}N_2^2 - C_\alpha\left[\frac{a}{2l}N_1 + \left(\frac{4c}{l} + \frac{\mu_2^2}{2b}\right)N_2^2\right] > 0.$$

Par conséquent, on arrive à

$$L'(t) \leq -4(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds - 2\tau\int_0^1 \|z(\rho,t)\|^2 ds.$$

qui donne (2.46). □

2.3.2 Résultat de stabilité

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à étudier le comportement asymptotique de la solution du système (2.1) en basant sur les résultats obtenus dans la sous-section 2.3.1.

Tout d'abord, avant de présenter le théorème de stabilité, nous devons introduire les fonctions suivantes :

$$G_1(t) = \int_t^1 \frac{ds}{G_2(s)}, \quad \text{avec} \quad G_2(t) = tG'(r_1 t), \tag{2.47}$$

où $0 < r_1 < r$. En basant sur les propriétés de G, on a G_1 est une fonction strictement décroissante et convexe sur $(0, 1]$ et $\lim_{t\to 0} G_1(t) = +\infty$. En plus, soit S la classe des fonctions $\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ satisfait, pour k_1 et k_2 des constantes positives fixées,

$$\chi \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \chi \leq 1, \quad \chi' \leq 0, \tag{2.48}$$

et

$$k_2 G\left(\frac{c}{p_1} q(t) q_0(t)\right) \leq k_1 \left[G_2\left(\frac{G_3(t)}{\chi(t)}\right) - \frac{G_2\left(G_3(t)\right)}{\chi(t)}\right], \tag{2.49}$$

où $p_1 > 0$, q est une fonction définie comme suit

$$q(t) := \frac{p}{\left(1 + \int_0^t q_0(s)ds\right)}, \tag{2.50}$$

où p est une constante positive telle que $p < 1$ et

$$G_3(t) = G_1^{-1}\left(k_1 \int_0^t \zeta(s)ds\right). \tag{2.51}$$

Remarque 2.2. *L'ensemble S n'est pas vide car il contient $\chi(s) = \varepsilon_0 G_3(s)$ pour tout $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ assez petit. En effet, par (2.47) et (2.51), l'estimation (2.48) est satisfaite. De plus, on a $q(t)q_0(t)$ est une fonction décroissante, $0 < G_3 \leq 1$, G et G' sont des fonctions croissantes, alors, (2.49) est satisfaite si*

$$k_2 G\left(\frac{c}{p_1} p q_0(0)\right) \leq \frac{k_1}{\varepsilon_0}\left[G'\left(\frac{r_1}{\varepsilon_0}\right) - G'(r_1)\right],$$

qui est vérifiée, comme $\lim_{t\to+\infty} G'(t) = +\infty$ et pour $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ assez petit. Mais, (2.53) ne conduit à aucune estimation de stabilité avec le choix $\chi = \varepsilon_0 G_3$. Ainsi, le meilleur comportement possible de E donné par (2.53) est dépend du choix de χ.

Le résultat de stabilité est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A5). Alors, ils existent des constantes positives c_1', c_2' et C telles que, pour χ vérifiée (2.48) et (2.49), pour tout $t \geq 0$, on a*

$$E(t) \leq c_1' e^{-c_2' \int_0^t \zeta(s)ds}, \quad \text{si } G \text{ est linéaire}, \tag{2.52}$$

$$E(t) \leq C \frac{G_3(t)}{\chi(t) q(t)}, \quad \text{si } G \text{ est non linéaire}. \tag{2.53}$$

Démonstration. À partir de là, c et m sont utilisés pour désigner des constantes positives génériques. Nous considérons les deux cas suivants :

1- G est linéaire.

En utilisant (2.26) et (2.28), on conclut, pour tout $t \leq t_1$,

$$\int_0^{t_1} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \leq \frac{-h(0)}{\delta_1} \int_0^{t_1} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \leq -cE'(t). \tag{2.54}$$

En insérant cette estimation dans (2.46) et introduisant la fonction suivante $\mathcal{L}$ qui équivaut à E par

$$\mathcal{L}(t) = L(t) + cE(t).$$

D'autre part, on a pour certaine constante $m > 0$ et pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -3(1-l) \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 - \|u_t\|^2 + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\ &\leq -mE(t) + c \int_0^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\ &\leq -mE(t) + cE'(t) + c \int_{t_1}^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds, \end{aligned}$$

qui donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -mE(t) + c \int_{t_1}^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds. \tag{2.55}$$

Ensuite, en multipliant (2.55) par ζ et en utilisant (A5) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -m\zeta(t)E(t) + c\zeta(t) \int_{t_1}^{+\infty} h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\ &\leq -m\zeta(t)E(t) + c \int_{t_1}^{+\infty} \zeta(s)h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\ &\leq -m\zeta(t)E(t) - c \int_{t_1}^{+\infty} h'(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \leq -m\zeta(t)E(t) - cE'(t), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que ζ est décroissante, on en déduit

$$(\zeta\mathcal{L} + cE)'(t) \leq -m\zeta(t)E(t).$$

Par conséquent, on intègre cette dernière sur $(0, t)$ et on utilise le fait que $\zeta\mathcal{L} + cE \sim E$, il résulte

$$E(t) \leq c_1' e^{-c_2' \int_0^t \zeta(s)ds} \quad \forall t \geq 0,$$

où c_1' et c_2' sont des constants positives.

2- G est non linéaire.

De la même manière que [35], nous commençons à utiliser (2.46) et (2.45) pour déduire que $L_1(t) = L(t) + I_4(t)$ n'est pas négatif en utilisant (2.33) et (2.44). De plus, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$L_1'(t) \leq -(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds + \frac{C_1}{2}q_0(t). \tag{2.56}$$

De (2.27), on a, pour une constante positive m,

$$L_1'(t) \leq -mE(t) + \frac{C_1}{2}q_0(t).$$

D'où

$$m\int_0^t E(s)ds \leq L_1(0) + \frac{C_1}{2}\int_0^t q_0(s)ds.$$

Ceci implique que

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{L_1(0)}{m} + \frac{C_1}{2m}\int_0^t q_0(s)ds \leq C_2\left(1 + \int_0^t q_0(s)ds\right), \tag{2.57}$$

où $C_2 = \max\left\{\frac{L_1(0)}{m}, \frac{C_1}{2m}\right\}$.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds &\leq \int_0^t \left(\left\|B^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 + \left\|B^{\frac{1}{2}}u(t-s)\right\|^2\right) ds \\
&\leq \frac{4a}{l}\int_0^t \left(E(t) + E(t-s)\right) ds \\
&\leq \frac{8a}{l}\int_0^t E(t)ds \leq \frac{8aC_2}{l}\left(1 + \int_0^t q_0(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Notons que la fonction q donnée par (2.50) est une fonction décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, de plus, utilisons (2.57) et pour p satisfait $p < \min\left\{1, \frac{l}{8aC_2}\right\}$, on a, pour tout $t \geq 0$

$$q(t) < 1 \quad \text{et} \quad q(t)\int_0^t \left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds < 1. \tag{2.58}$$

On définit la fonctionnelle λ par

$$\lambda(t) := -\int_0^t h'(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right\|^2 ds, \tag{2.59}$$

en observant que $\lambda(t) \leq -cE'(t)$. Comme G est strictement convexe sur $(0, r]$ et $G(0) = 0$, alors

$$G(\theta x) \leq \theta\, G(x), \quad \text{pour} \quad \theta \in [0,1] \quad \text{et} \quad x \in (0, r]. \tag{2.60}$$

Par l'hypothèse (A5), (2.58) et l'inégalité de Jensen, il résulte

$$
\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{1}{q(t)} \int_0^t q(t)\left(-h'(s)\right) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\
&\geq \frac{1}{q(t)} \int_0^t q(t)\zeta(s) G(h(s)) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\
&\geq \frac{\zeta(t)}{q(t)} \int_0^t q(t) G(h(s)) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \\
&\geq \frac{\zeta(t)}{q(t)} G\left(\int_0^t q(t) h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \right) \\
&= \frac{\zeta(t)}{q(t)} G\left(q(t) \int_0^t h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \right) \\
&= \frac{\zeta(t)}{q(t)} \overline{G}\left(q(t) \int_0^t h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \right)
\end{aligned}
$$

où $\overline{G}$ est une prolongement de G, qui est strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, +\infty)$, voir Remarque (2.1). Par conséquent, nous obtenons

$$
\int_0^t h(s) \left\| B^{\frac{1}{2}} \eta^t(s) \right\|^2 ds \leq \frac{1}{q(t)} \left(\overline{G}\right)^{-1} \left(\frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)} \right). \tag{2.61}
$$

Nous combinons (2.28), (2.43), (2.46) et (2.61), alors, pour une constante positive m et pour tout $t \geq 0$, on trouve

$$
L'(t) \leq -mE(t) + \frac{c}{q(t)} \left(\overline{G}\right)^{-1} \left(\frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)} \right) + cq_0(t). \tag{2.62}
$$

Soit $0 < r_1 < r$, on définit la fonctionnelle F par

$$
F(t) = \overline{G}' \left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)} \right) L(t), \tag{2.63}
$$

en utilisant (2.62), le fait que $E' \leq 0$, $q' \leq 0$ et $G'' > 0$, nous concluons que F équivaut à E et

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= r_1 \frac{(qE)'(t)}{E(0)} \overline{G}'' \left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)} \right) L(t) + \overline{G}' \left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)} \right) L'(t), \\
&\leq -mE(t)\overline{G}' \left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)} \right) + \frac{c}{q(t)} \left(\overline{G}\right)^{-1} \left(\frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)} \right) \overline{G}' \left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)} \right) \\
&\quad + cq_0(t)\overline{G}' \left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)} \right),
\end{aligned} \tag{2.64}
$$

Soit $\overline{G}^*$ le conjugué de G au sens de Young (voir [6] pp. 61-64), qui est donné par

$$
\overline{G}^*(s) = s \left(\overline{G}'\right)^{-1}(s) - \overline{G}\left[\left(\overline{G}'\right)^{-1}(s) \right] \tag{2.65}
$$

et il satisfait l'inégalité de Young suivante :

$$AB \leq \overline{G}^*(A) + \overline{G}(B). \tag{2.66}$$

En prenant

$$A = \overline{G}'\left(r_1 \frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)}\right),$$

ainsi par (2.66), on trouve

$$\begin{aligned}
\overline{G}'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right)\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)}\right) &\leq \overline{G}^*\left(\overline{G}'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right)\right) + \frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)} \\
&\leq r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \\
&\quad -\overline{G}\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + \frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)},
\end{aligned}$$

puis, en utilisant le fait que $\overline{G}$ n'est pas négative, on obtient

$$\overline{G}'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right)\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)}\right) \leq r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + \frac{q(t)\lambda(t)}{\zeta(t)}. \tag{2.67}$$

En insérant (2.67) dans (2.64), on arrive à

$$\begin{aligned}
F'(t) &\leq -mE(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + \frac{cr_1E(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \\
&\quad +c\frac{\lambda(t)}{\zeta(t)} + cq_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right),
\end{aligned} \tag{2.68}$$

en multipliant (2.68) par $\zeta(t)$, en utilisant (2.59) et le fait que, comme $r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)} < r$, $\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) = G'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right)$, il résulte

$$\begin{aligned}
\zeta(t)F'(t) &\leq -m\,\zeta(t)E(t)G'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + c\,r_1\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \\
&\quad -cE'(t) + c\zeta(t)q_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \\
&\leq -\left(mE(0) - r_1c\right)\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) - cE'(t) \\
&\quad +c\zeta(t)q_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonctionnelle $F_1 = \zeta F + cE$ est équivalente à E, basée sur (2.33), (2.63) et le fait que $0 \leq G'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \leq G'(r)$ et $0 \leq \zeta(t) \leq \zeta(0)$. Ainsi, pour certains γ_1 et γ_2 deux nombres positives, nous avons

$$\gamma_1 F_1(t) \leq E(t) \leq \gamma_2 F_1(t), \tag{2.69}$$

et sous un choix convenable de r_1 et pour une constante positive $k = (mE(0) - r_1 c) > 0$, on trouve, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -k\,\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + cq_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \\ &= -k\,\frac{\zeta(t)}{q(t)}G_2\left(\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + c\zeta(t)q_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Comme $G_2'(t) = G'(r_1 t) + r_1 t G''(r_1 t)$, et utilisant la convexité stricte de G sur $(0, r]$, on trouve que $G_2(t),\ G_2'(t) > 0$ sur $(0, 1]$.
Soit p_1 une constante positive, alors, en prenant

$$A = \overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right),$$

l'estimation (2.66) et $\overline{G} > 0$ donne

$$\begin{aligned} cq_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) &= \frac{p_1}{q(t)}\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right)\left(\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right)\right) \\ &\leq \frac{p_1}{q(t)}\left[r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(r_1\,\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + \overline{G}\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right)\right], \end{aligned}$$

En tant que $r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)} < r$, et pour $\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t) < r$, $\overline{G}\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right) = G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right)$, on obtient

$$cq_0(t)\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \leq \frac{p_1}{q(t)}\left[r_1 G_2\left(\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right)\right]. \tag{2.71}$$

En remplaçant (2.71) dans (2.70), on trouve

$$F_1'(t) \leq (-k + p_1 r_1)\,\frac{\zeta(t)}{q(t)}G_2\left(\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + \frac{\zeta(t)}{q(t)}G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right). \tag{2.72}$$

Ensuite, en choisissant p_1 assez petit pour que $k_0 = (k - p_1 r_1) > 0$, nous arrivons à

$$F_1'(t) \leq -k_0\frac{\zeta(t)}{q(t)}G_2\left(\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + \frac{\zeta(t)}{q(t)}G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right). \tag{2.73}$$

De plus, en utilisant (2.69) et le fait que G_2 est décroissante, on obtient, pour $p_2 = \frac{\gamma_1}{E(0)} > 0$,

$$G_2\left(\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) \geq G_2\left(p_2 F_1(t) q(t)\right). \tag{2.74}$$

Avec $F_2(t) = p_2 F_1(t) q(t)$ et $q' \leq 0$, on trouve

$$F_2'(t) \leq p_2 q(t)\left[-k_0\frac{\zeta(t)}{q(t)}G_2\left(\frac{E(t)q(t)}{E(0)}\right) + p_1\frac{\zeta(t)}{q(t)}G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right)\right]. \tag{2.75}$$

Pour $k_1 = p_2 k_0 > 0$, $k_2 = p_2 p_1 > 0$, alors, de (2.74), il résulte

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -k_1\zeta(t)G_2\left(p_2F_1(t)q(t)\right) + k_2\zeta(t)G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right) \\ &\leq -k_1\zeta(t)G_2\left(F_2(t)\right) + k_2\zeta(t)G\left(\frac{c}{p_1}q(t)q_0(t)\right). \end{aligned} \tag{2.76}$$

En utilisant le fait que F_1 est équivalent à E, il existe donc $k_3 > 0$ tel que $F_2(t) \geq k_3E(t)q(t)$. Soit $\chi(t)$ satisfaisant (2.48) et (2.49), pour tout $t \geq 0$. De plus, on a, si

$$k_3q(t)E(t) \leq 2\frac{G_3(t)}{\chi(t)}, \tag{2.77}$$

qui conduit à

$$E(t) \leq \frac{2}{k_3}\frac{G_3(t)}{q(t)\chi(t)}. \tag{2.78}$$

Encore, si

$$k_3q(t)E(t) > 2\frac{G_3(t)}{\chi(t)}, \tag{2.79}$$

par conséquent, puisque $t \mapsto q(t)E(t)$ est une fonction décroissante, on obtient, pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$F_2(s) = k_3q(s)E(s) > 2\frac{G_3(t)}{\chi(t)}. \tag{2.80}$$

En utilisant le fait que G_2 est convexe, $G_2(0) = 0$, G_2 satisfait (2.60) et en utilisant $0 \leq \chi \leq 1$, on en déduit, pour tout $0 < \varepsilon_1 \leq 1$,

$$\begin{aligned} G_2\left(\varepsilon_1\chi(s)F_2(s) - \varepsilon_1G_3(s)\right) &= G_2\left(\varepsilon_1\chi(s)F_2(s) - \varepsilon_1\frac{\chi(s)G_3(s)}{\chi(s)}\right) \\ &\leq \varepsilon_1\chi(s)G_2\left(F_2(s) - \frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right), \end{aligned}$$

Alors, par la définition de G_2, on trouve

$$\begin{aligned} G_2\left(\varepsilon_1\chi(s)F_2(s) - \varepsilon_1G_3(s)\right) &\leq \varepsilon_1\chi(s)\left(F_2(s) - \frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right)G'\left(r_1F_2(s) - r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right) \\ &\leq \varepsilon_1\chi(s)F_2(s)G'\left(r_1F_2(s) - r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right) \\ &\quad -\varepsilon_1\chi(s)\frac{G_3(s)}{\chi(s)}G'\left(r_1F_2(s) - r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right). \end{aligned} \tag{2.81}$$

Donc, de (2.80) et le fait que G' est croissante, il résulte, pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$G'\left(r_1F_2(s) - r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right) < G'\left(r_1F_2(s)\right), \quad G'\left(r_1F_2(s) - r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right) > G'\left(r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right).$$

L'estimation (2.81) devient

$$G_2\left(\varepsilon_1\chi(s)F_2(s)-\varepsilon_1 G_3(s)\right)\leq \varepsilon_1\chi(s)F_2(s)G'\left(r_1F_2(s)\right)-\varepsilon_1\chi(s)\frac{G_3(s)}{\chi(s)}G'\left(r_1\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right).$$

Considérons la fonction suivante :

$$F_3(s)=\varepsilon_1\chi(s)F_2(s)-\varepsilon_1 G_3(s), \tag{2.82}$$

sous un choix convenable de ε_1 de sorte que $F_3(0)\leq 1$. Puis, en utilisant (2.82) et rappelant la définition de G_2, on trouve, pour tout $0\leq s\leq t$,

$$G_2\left(F_3(s)\right)\leq \varepsilon_1\chi(s)G_2\left(F_2(s)\right)-\varepsilon_1\chi(s)G_2\left(\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right). \tag{2.83}$$

par ailleurs, comme $\chi'\leq 0$, on a

$$F_3'(s)\leq \varepsilon_1\chi(s)F_2'(s)-\varepsilon_1 G_3'(s). \tag{2.84}$$

À partir de (2.76), (2.84) et (2.83), on en déduit, pour tout $0\leq s\leq t$,

$$\begin{aligned} F_3'(s) \quad &\leq \quad -k_1\zeta(s)G_2(F_3(s))-\varepsilon_1 k_1\chi(s)\zeta(s)G_2\left(\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right)\\ &\quad +\varepsilon_1 k_2\chi(s)\zeta(s)G\left(\frac{c}{p_1}q(s)q_0(s)\right)-\varepsilon_1 G_3'(s). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Les définitions de G_1 et G_3 donnent

$$G_1(G_3(s))=k_1\int_0^s \zeta(\varrho)d\varrho,$$

alors, pour tout $0\leq s\leq t$,

$$G_3'(s)=-k_1\zeta(s)G_2(G_3(s)). \tag{2.86}$$

En utilisant (2.86), on obtient

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 k_2\chi(s)\zeta(s)G\left(\frac{c}{p_1}q(s)q_0(s)\right)-\varepsilon_1 k_1\chi(s)\zeta(s)G_2\left(\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right)-\varepsilon_1 G_3'(s)\\ =\ &\varepsilon_1 k_2\chi(s)\zeta(s)G\left(\frac{c}{p_1}q(s)q_0(s)\right)-\varepsilon_1 k_1\chi(s)\zeta(s)G_2\left(\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right)+\varepsilon_1 k_1\zeta(s)G_2(G_3(s))\\ =\ &\varepsilon_1\chi(s)\zeta(s)\left[k_2 G\left(\frac{c}{p_1}q(s)q_0(s)\right)-k_1G_2\left(\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right)+k_1\frac{G_2(G_3(s))}{\chi(s)}\right]. \end{aligned}$$

Donc, par (2.49), nous avons

$$\varepsilon_1\chi(s)\zeta(s)\left[k_2 G\left(\frac{c}{p_1}q(s)q_0(s)\right)-k_1G_2\left(\frac{G_3(s)}{\chi(s)}\right)+k_1\frac{G_2(G_3(s))}{\chi(s)}\right]\leq 0.$$

Par conséquent, (2.85) conduit à

$$F_3'(s) \leq -k_1\zeta(s)G_2(F_3(s)).$$

Ensuite, par les définitions de G_1 et G_2, on obtient

$$[G_1(F_3(s))]' \geq k_1\zeta(s). \tag{2.87}$$

Intégrons l'inégalité différentielle précédente entre 0 et t, on trouve l'estimation suivante :

$$G_1(F_3(t)) \geq k_1 \int_0^t \zeta(s)ds + G_1(F_3(0)),$$

puisque G_1 est décroissante, $F_3(0) \leq 1$ et $G_1(1) = 0$, donc

$$F_3(t) \leq G_1^{-1}\left(k_1 \int_0^t \zeta(s)ds\right) = G_3(t).$$

La définition de F_2 et F_3 donne

$$F_3(t) \leq \frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\frac{G_3(t)}{\chi(t)} \quad \text{et} \quad F_2(t) \leq \frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1 p_2}\frac{G_3(t)}{\chi(t)q(t)}.$$

Encore, comme $F_1 \sim E$, il existe une constante $k_4 > 0$ telle que $E(t) \leq k_4 F_1$. Alors, il résulte

$$E(t) \leq \frac{k_4(1+\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 p_2}\frac{G_3(t)}{\chi(t)q(t)}.$$

À partir de cette dernière estimation et (2.78), l'estimation de stabilité (2.53) est établie avec $C = \max\left\{\frac{2}{k_3}, \frac{k_4(1+\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 p_2}\right\}$. Ainsi, la preuve du théorème 2.2 est achevée. □

Exemple 2.1. [35, 5] Soit $h(t) = \frac{a}{(1+t)^b}$, avec $b > 0$ et $0 < a < b-1$ pour que (A5) est satisfaite, on prend $\zeta(s) = ba^{\frac{-1}{b}}$ et $G(s) = s^{\frac{1+b}{b}}$, pour tout $s \geq 0$. Ainsi,

$$G_2(s) = c_1 s^{\frac{1+b}{b}}, \quad G_1(s) = c_2(s^{\frac{-1}{b}} - 1), \quad G_3(s) = (c_3 s + 1)^{-b},$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives. Nous considérons deux cas :
Si

$$\alpha_1(1+s)^\beta \leq 1 + \left\|B^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 \leq \alpha_2(1+s)^\beta, \tag{2.88}$$

où $0 < \beta < b-1$ et $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Par conséquent, en utilisant la définition des fonctions q_0 et q, on trouve

$$c_4(1+t)^{1+\beta-b} \leq q_0(t) \leq c_5(1+t)^{1+\beta-b}, \tag{2.89}$$

$$c_6\psi(t) \leq \frac{p}{q(t)} \leq c_7\psi(t), \tag{2.90}$$

avec c_i, pour $i = 4, ..., 7$, sont des constantes positives et la fonction ψ donnée par

$$\psi(t) = \begin{cases} (1+t)^{2+\beta-b}, & 1 < b-\beta < 2, \\ 1 + \ln(1+t), & b-\beta = 2, \\ 2, & b-\beta > 2. \end{cases} \tag{2.91}$$

Remarquons que la condition (2.49) est satisfaite si

$$(1+t)^b q(t) q_0(t)\chi(t) \leq c_8 \left(1-\chi^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{b}{b+1}}, \tag{2.92}$$

où c_8 est une constante positive. En choisissant la fonction χ comme suit

$$\chi(t) = \gamma \begin{cases} (1+t)^{1-b}, & 1 < b-\beta < 2, \\ (1+t)^{-\beta-1}, & b-\beta \geq 2, \end{cases}$$

avec $0 < \gamma \leq 1$, alors, on obtient que (2.48) est vérifiée. De plus, l'inégalité (2.92) est satisfaite en utilisant (2.89) et (2.90) pour γ suffisament petit, ce qui donne (2.49). Par conséquent, de (2.53), (2.90) et (2.91), pour tout $t \geq 0$, on obtient

$$E(t) \leq c_9 \begin{cases} (1+t)^{-(1-b-\beta)}, & 1 < b-\beta < 2, \\ (1+\ln(1+t))\,(1+t)^{-(1-b-\beta)}, & b-\beta = 2, \\ (1+t)^{-(1-b-\beta)}, & b-\beta > 2. \end{cases}$$

Le deuxième cas si $\alpha_1 \leq 1 + \left\| B^{\frac{1}{2}} u_0 \right\|^2 \leq \alpha_2$, ce qui signifie $\beta = 0$ dans (2.88), alors, pour tout $t \geq 0$, on a

$$E(t) \leq c_9 \begin{cases} (1+t)^{-(1-b)}, & 1 < b < 2, \\ (1+\ln(1+t))\,(1+t), & b = 2, \\ (1+t)^{-(1-b)}, & b > 2. \end{cases}$$

2.4 Applications

Cette section est consacré à présenter quelques applications. Pour cela, on donne que trois applications où on peut illustrer les résultats obtenues.

2.4.1 Modèle général

Les résultats obtenus sont valables pour la forme plus générale suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds + C_1C_1^* u_t(t) + C_2C_2^* u_t(t-\tau) = 0, & t > 0, \\ C_2^* u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0,\tau), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.93}$$

avec A et B satisfont les même hypothèses (A1) et (A4). La fonction noyau h satisfait les hypothèses (A2) et (A5). $C_i : W_i \to H$, $i = 1, 2.$ sont des opérateurs linéaires bornés avec W_i un espace de Hilbert réel muni de norme $\|.\|_{W_i}$. De plus, on suppose que

$$\exists\, 0 < \mu < 1, \quad \|C_2^* u\|_{W_2} \leq \mu \|C_1^* u\|_{W_1}, \quad \forall u \in H. \tag{2.94}$$

On peut étendre notre résultat de stabilité au problème (2.93). Dans ce cadre, la fonctionnelle d'énergie est donnée par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - h_0\left\|B^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\left\|B^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(t-s))\right\|^2 ds\right) \\ &+ \frac{\tau\xi}{2}\int_{t-\tau}^{t} \|C_2^* u(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

où ξ est une constante positive. La condition (2.94) garantie la dissipation de la fonctionnelle d'énergie. Sans supposer (2.94), la fonctionnelle d'énergie associée au système (2.93) ne décroit plus en temps. Ainsi, le fait que $E' \leq 0$ est utilisé dans de nombreux sites dans la preuve du théorème 2.2, par exemple, l'inégalité (2.54) (inégalité (2.59)) dans le cas linéaire (non linéaire) de G, respectivement. Cela rend le problème besoin des autres manipulations pour montrer les résultats de stabilité. En outre, en passant la condition (2.94), on peut considérer une classe large des modèles et des problèmes concrets comme l'équation d'onde, le système de Petrovsky, voir [62].

2.4.2 Problème abstrait sans retard

On considère

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(s)Bu(t-s)ds = 0, & t \in (0,+\infty), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.95}$$

avec A et B satisfont les même hypothèses (A1) et (A4). La fonction noyau h satisfait les hypothèses (A2) et (A5). Le résultat de stabilité obtenu reste aussi valable dans le cas d'une mémoire infinie avec $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Les problèmes liés à le système précédent dans le cas où $A = B$ ont été considérés par de nombreux auteurs sans supposer la dissipation des fonctions viscoélastique qui n'est pas nécessairement de décroissance exponentielle ou polynomiale ; la condition (2.4) ou se suffire par mémoire finie. Pour un système d'onde ($A = B = -\Delta$) avec la fonction noyau satisfait la condition (2.4), voir [35]. Le même résultat de stabilité a été obtenu pour un problème de Petrovsky ($A = \Delta^2$), voir [5].

2.4.3 Équation des ondes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$ à frontière régulière. Nous considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) + \int_0^{+\infty} h(s)\Delta u(t-s)ds + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t-\tau) = 0, & t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega,\ t \geq 0, \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{2.96}$$

avec les données initiales $(u_0, u_1, f_0) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times H^1(-\tau, 0; L^2(\Omega))$. Le problème (2.96) est un cas particulier de notre problème considéré ; le système (2.1), si nous prenons $H = L^2(\Omega)$ et les opérateurs A, B sont données par

$$A : D(A) \longrightarrow H \ : u \mapsto -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$B : D(B) \longrightarrow H \ : u \mapsto -\Delta u,$$

avec $D(A) = D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Les fonctions $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$ sont symétriques, de plus

$$\exists a_0 > 0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_j\zeta_i \geq a_0|\zeta|^2, \quad x \in \overline{\Omega},\ \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Les opérateurs A et B sont des opérateurs linéaires positifs auto-adjoints tels que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|_V = a(u,u)^{1/2}$ où la forme bilinéaire $a(.,.) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est définie par

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Il est clair que les hypothèses (A1) et (A4) sont vérifiées, voir remarque 1.2.1 dans [11]. On définit la fonctionnelle d'énergie dans ce cas par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(a(u,u) - h_0\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\nabla(u(t) - u(t-s))\|^2 ds\right) \\ &\quad + \frac{\tau}{2}\xi \int_0^1 \|z(\rho, t)\|^2 d\rho, \end{aligned}$$

où ξ est une constante positive. En appliquant le théorème 2.2, on établit un résultat explicite et général du taux de dissipation de l'énergie ; les estimations (2.52) et (2.53) pour le système (2.96) où la fonction noyau h satisfait la condition (2.23) ce qui couvre une classe très générale des fonctions.

Chapitre 3

Problème d'évolution abstrait avec un retard dans un terme d'amortissement non linéaire et une source non linéaire.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence globale et le comportement asymptotique d'une solution de système viscoélastique abstrait avec un retard dans un terme d'amortissement non linéaire et une source non linéaire. Sous des hypothèses convenables sur le poids de l'amortissement non linéaire, le poids du retard et le comportement de la fonction de relaxation, nous établissons deux estimations explicites et optimales de la stabilité d'énergie en utilisant la méthode énergétique et quelques propriétés des fonctions convexes. A la fin de ce chapitre, on présente quelques exemples illustratifs.

3.1 Position du problème

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire et une norme associée notés par $\langle .,. \rangle$ et $\| . \|$, respectivement. Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire positif auto-adjoint tel que $D(A) \subset H$ avec une injection dense et compacte. $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction noyau du terme viscoélastique et τ est une constante réelle positive représentant le retard.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^t h(t-s)Au(s)ds + \mu_1 Q(u_t(t)) \\ \qquad\qquad\qquad + \mu_2 P(u_t(t-\tau)) = F(u(t)), \qquad t > 0, \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), \qquad\qquad t \in (0,\tau), \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

où μ_1 est une constante positive et μ_2 est un nombre réel. $G, P : H \to H$ et $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ sont des fonctions satisfaisant certaines conditions à spécifier ultérieurement et (u_0, u_1, f_0) sont les données initiales . Dans ce chapitre, on suppose les hypothèses suivantes :

(A1) Il existe une constante positive a telle que

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \geq a \left\| u \right\|^2, \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{3.2}$$

(A2) La fonction noyau $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 satisfait

$$h(0) > 0, \quad h_0 = \int_0^{+\infty} h(s)ds < 1. \tag{3.3}$$

De plus, il existe une fonction $G : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ de classe C^1 qui est linéaire ou elle est strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0, r]$, $r \leq h(0)$, $G(0) = G'(0) = 0$ telle que

$$h'(t) \leq -\zeta(t) G(h(t)), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.4}$$

où $\zeta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable décroissante.

(A3) Supposons que les fonctions $Q, P : H \to H$, $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ sont localement lipschitzienne. De plus, ils existent des fonctions différentiables et continues $\mathscr{P} : H \to [0, +\infty)$ et $\mathscr{F} : D(A^{\frac{1}{2}}) \to [0, +\infty)$ satisfaisant

$$D_{\mathscr{F}} = F, \qquad D_{\mathscr{P}} = P$$

et, pour α_1, α_3 et $\alpha_2 > 1$ des constantes positives, on a

$$\langle F(u), u \rangle \geq \mathscr{F}(u), \quad \forall u \in D(A^{\frac{1}{2}}), \tag{3.5}$$

$$\langle Q(u), u \rangle \geq \alpha_1 \, \mathscr{P}(u), \quad \forall u \in H, \tag{3.6}$$

$$|\langle P(u), v \rangle| \leq (\alpha_2 - 1)\mathscr{P}(u) + \mathscr{P}(v) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(u) \leq \alpha_3 \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2. \tag{3.7}$$

En outre, pour $i = 1, 2$, ils existent des fonctions continues croissantes $\psi_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\psi_i(0) = 0$ telles que

$$\langle Q(u), v \rangle \leq \psi_1(\langle u, v \rangle), \quad \forall u, v \in H, \tag{3.8}$$

$$|\langle F(u), v\rangle| \leq \psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|, \quad \forall u, v \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{3.9}$$

(A4) Les coefficients de retard et de dissipation satisfont

$$|\mu_2| \leq \frac{\mu_1\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{3.10}$$

3.2 Existence globale

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence globale de la solution locale du problème considéré.

Pour l'étude du problème (3.1), on commence par introduire la fonction z ainsi que suit

$$z(\rho, t) = u_t(t - \rho\tau), \quad \rho \in (0, 1),\ t > 0,$$

alors, le problème (3.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^t h(t-s)Au(s)ds + \mu_1 Q(u_t(t)) & \\ \qquad\qquad + \mu_2 P(z(1,t)) = F(u(t)), & t > 0, \\ \tau z_t(\rho, t) + z_\rho(\rho, t) = 0, & \rho \in (0,1),\ t > 0, \\ z(1, t) = f_0(t - \tau), & t \in (0, \tau), \\ z(0, t) = u_t(t) & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. & \end{cases} \tag{3.11}$$

Ensuite, soit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.11) définie par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)\right) \\ &\quad -2\mathscr{F}(u) + \frac{\xi\tau}{2}\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho, t))d\rho, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec l'énergie initiale donnée par

$$E(0) = \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 - 2\mathscr{F}(u_0) + \xi\int_{-\tau}^0 \mathscr{P}(f_0(s))d\rho\right), \tag{3.13}$$

où

$$(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) = \int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t) - A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2 ds \tag{3.14}$$

et ξ est une constante positive telle que

$$|\mu_2|(\alpha_2 - 1) \leq \xi \leq \mu_1\alpha_1 - |\mu_2|, \tag{3.15}$$

notons que ξ existe selon (3.10)

Lemme 3.1. *On suppose que les hypothèses (A1)-(A4) sont vérifiées. Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par* (3.12) *satisfait*

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - c_1\langle Q(u_t), u_t\rangle \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.16}$$

avec c_1 est une constante positive.

Démonstration. La première équation de (3.11) donne

$$\langle u_{tt}, u_t\rangle + \langle Au, u_t\rangle - \left\langle \int_0^t h(t-s)Au(s)ds, u_t \right\rangle + \mu_1\langle Q(u_t), u_t\rangle + \mu_2\langle P(z(1,t)), u_t\rangle = \langle F(u), u_t\rangle.$$

alors, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - 2\mathscr{F}(u)\right) + \mu_1\langle Q(u_t), u_t\rangle + \mu_2\langle P(z(1,t)), u_t\rangle \\ = &\int_0^t h(t-s)\,\langle Au(s), u_t\rangle\, ds \end{aligned} \tag{3.17}$$

D'autre part, on peut facilement vérifier que

$$\begin{aligned} 2\int_0^t h(t-s)\,\langle Au(s), u_t\rangle\, ds &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(s)ds\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - (h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)\right] \\ &\quad + (h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - h(t)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)\right) - \mathscr{F}(u)\right\} \\ -&\frac{1}{2}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + \frac{1}{2}h(t)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \mu_1\langle Q(u_t), u_t\rangle + \mu_2\langle P(z(1,t)), u_t\rangle = 0, \end{aligned}$$

en utilisant (3.7), nous arrivons à

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + (h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)\right) - \mathscr{F}(u)\right\} \\ \leq\ & |\mu_2|\left[(\alpha_2 - 1)\mathscr{P}(z(1,t)) + \mathscr{P}(u_t)\right] - \mu_1\langle Q(u_t), u_t\rangle \\ &+\frac{1}{2}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - \frac{1}{2}h(t)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

De même, par la deuxième équation de (3.11), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\xi\tau\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho\right) &= \xi\tau\int_0^1 \langle z_t, P(z(\rho,t))\rangle\, d\rho = -\xi\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\ &= \xi\left[\mathscr{P}(u_t) - \mathscr{P}(z(1,t))\right]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

En remplaçant (3.20) dans (3.19) et en utilisant (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) \ &\leq\ \frac{1}{2}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - \frac{1}{2}h(t)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left(\frac{|\mu_2|}{\alpha_1} - \mu_1 + \frac{\xi}{\alpha_1}\right)\langle Q(u_t), u_t\rangle \\ &\quad + \left(|\mu_2|(\alpha_2 - 1) - \xi\right)\mathscr{P}(z(1,t)). \end{aligned}$$

De (3.15), il résulte
$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(h' \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - c_1\langle Q(u_t), u_t\rangle,$$
où
$$c_1 = \min\left\{\frac{|\mu_2|}{\alpha_1} - \mu_1 + \frac{\xi}{\alpha_1}, |\mu_2|(\alpha_2 - 1) - \xi\right\},$$
ce qui est positif par (3.15). Ceci complète la preuve du lemme. □

Dans le résultat suivant, nous énonçons, sans preuve, l'existence locale du problème (3.11), voir [9, 16].

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et pour* $(u_0, u_1, f_0) \in D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times L^2(-\tau, 0; H)$*. Alors, le système* (3.1) *une unique solution mild locale.*

Par le lemme (3.1) et sous des conditions initiales, on prouve l'existence globale de la solution.

Théorème 3.1. *Supposons que (A1) - (A4) sont vérifiées et qu'il existe une constante positive* ρ_0 *telle que pour tout* $(u_0, u_1, f_0) \in D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times L^2(-\tau, 0; H)$ *satisfaisant*
$$\left(\|A^{\frac{1}{2}}u_0\| + \|u_1\|^2 + \int_{-\tau}^{0} \tilde{f}_0(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} < \rho_0,$$
avec $\tilde{f}_0(s) = \mathscr{P}(f_0(s))$*. Alors, le problème* (3.11) *admet une unique solution mild* u *sur* $[0, +\infty)$*.*

Démonstration. À partir de la proposition 3.1, le problème admet une unique solution locale u dans un intervalle maximal $[0, T)$. De la même manière que [2] et en utilisant (3.5), (3.9) et (3.13), on trouve
$$E(0) \geq \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 - \mathscr{F}(u_0) \geq \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{l}{4}\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 \geq 0,$$
si $\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\right) < \frac{l}{4}$ avec $l = (1 - h_0)$. De plus, on montre que si
$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|\right) < \frac{l}{4} \quad \text{et} \quad \psi_2\left(2\left(\frac{E(0)}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \frac{l}{4}, \tag{3.21}$$
on a
$$E(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{l}{4}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 \quad \forall t \in [0, T).$$
Considérons ν la borne supérieure de tout $s \in [0, T)$ tel que (3.22) soit vérfié pour tout $t \in [0, s]$. Supposons que $\nu < T$. Par continuité de la fonction E, on obtient
$$E(\nu) \geq \frac{1}{2}\|u_t(\nu)\|^2 + \frac{l}{4}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(\nu)\right\|^2 \geq 0. \tag{3.22}$$

Donc, de (3.22), on trouve

$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(\nu)\right\|\right) \leq \psi_2\left(2\left(\frac{E(\nu)}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \psi_2\left(2\left(\frac{E(0)}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \frac{l}{4},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} E(\nu) &\geq \frac{1}{2}\|u_t(\nu)\|^2 + \frac{1-\int_0^\nu h(s)ds}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(\nu)\right\|^2 - \mathscr{F}(u(\nu)) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t(\nu)\|^2 + \left(\frac{l}{2}-\frac{l}{4}\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(\nu)\right\|^2 = \frac{1}{2}\|u_t(\nu)\|^2 + \frac{l}{4}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(\nu)\right\|^2. \end{aligned}$$

Cela contredit la maximalité de ν. Soit

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{l}}{2}\psi_2^{-1}\left(\frac{l}{4}\right) > 0.$$

alors $\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|\right) < \frac{l}{4}$. Pour tout $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $u_1 \in H$ et $f_0 \in L^2(-\tau, 0; H)$ tels que

$$\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|^2 + \|u_1\|^2 + \int_{-\tau}^0 \tilde{f}_0(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} < \rho_0, \tag{3.23}$$

où $\tilde{f}_0(s) = \mathscr{P}(f_0(s))$. Cette hypothèse implique que $\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| < \rho_0$, donc, on a

$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\|\right) < \psi_2(\rho_0) = \psi_2\left(\frac{\sqrt{l}}{2}\psi_2^{-1}\left(\frac{l}{4}\right)\right).$$

En outre, on utilise (3.5) et (3.9), on trouve

$$\begin{aligned} E(0) &\leq \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| + \frac{1}{2}\int_{-\tau}^0 \tilde{f}_0(s)ds \\ &\leq \left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u_0\right\| + \|u_1\|^2 + \int_{-\tau}^0 \tilde{f}_0(s)ds\right) < \rho_0^2, \end{aligned}$$

par la definition de ρ_0, on déduit que

$$\psi_2\left(2\left(\frac{E(0)}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \psi_2\left(\psi_2^{-1}\left(\frac{l}{4}\right)\right) = \frac{l}{4}.$$

De plus, sous les conditions (3.23) et (3.21), on obtient

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{l}{4}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|^2 \leq E(t) \leq E(0) \leq \rho_0^2. \tag{3.24}$$

Ainsi, il résulte que la fonction d'énergie est positive sur $[0, T)$ et bornée, de plus, la solution existe sur $[0, +\infty)$. De (3.24), on a

$$\psi_2\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|\right) \leq \psi_2\left(2\left(\frac{E(t)}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \psi_2\left(2\left(\frac{E(0)}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \frac{l}{4}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.25}$$

Ceci complète la preuve du théorème 3.1. □

3.3 Lemmes techniques

L'objet de cette section est d'établir quelques lemmes utiles pour obtenir le résultat du stabilité.

Lemme 3.2. *Soit u solution de problème (3.11). Alors, la fonction*

$$I_1(t) = \langle u_t(t), u(t) \rangle, \tag{3.26}$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_1'(t) &\leq \|u_t\|^2 - \left[\frac{l}{2} - \alpha_3\left(|\mu_2| + \frac{\mu_1}{a}\right)\right]\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + |\mu_2|(\alpha_2 - 1)\mathscr{P}(z(1,t)) \quad (3.27) \\ &+ \frac{\mu_1}{4\alpha_3}\|Q(u_t)\|^2 + \frac{C_\alpha}{l}(k \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \quad (3.28) \end{aligned}$$

pour $0 < \alpha < 1$, où

$$C_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)} ds \quad et \quad k(t) = \alpha h(t) - h'(t). \tag{3.29}$$

Démonstration. On dérive (3.26) par rapport à t, on trouve

$$I_1'(t) = \|u_t\|^2 + \langle u_{tt}(t), u(t) \rangle.$$

La première équation de (3.11) donne

$$\begin{aligned} &\langle u_{tt}(t), u(t) \rangle + \langle Au(t), u(t) \rangle - \left\langle \int_0^t h(t-s)Au(s)ds, u(t) \right\rangle + \mu_1 \langle Q(u_t(t)), u(t) \rangle \\ &+ \mu_2 \langle P(z(1,t)), u(t) \rangle = \langle F(u(t)), u(t) \rangle, \end{aligned}$$

De la définition de $A^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \|u_t\|^2 - \left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\langle \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}\left(u(s) - u(t)\right)ds, A^{\frac{1}{2}}u(t) \right\rangle \\ &- \mu_1 \langle Q(u_t(t)), u(t) \rangle - \mu_2 \langle P(z(1,t)), u(t) \rangle + \langle F(u(t)), u(t) \rangle. \quad (3.30) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on trouve

$$\left\langle \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(s) - u(t))ds, A^{\frac{1}{2}}u(t) \right\rangle \leq \frac{l}{4}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{1}{l}\left\|\int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(s) - u(t))ds\right\|^2 \tag{3.31}$$

En outre, on a

$$
\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t h(t-s) A^{\frac{1}{2}}(u(s)-u(t)) ds \right\|^2 \\
\leq \; & \left(\int_0^t h(t-s) \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(s)-u(t)) \right\| ds \right)^2 \\
\leq \; & \left(\int_0^t \frac{h(t-s)}{\sqrt{\alpha h(t-s) - h'(t-s)}} \sqrt{\alpha h(t-s) - h'(t-s)} \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(s)-u(t)) \right\| ds \right)^2 \\
\leq \; & \left(\int_0^t \frac{h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)} ds \right) \int_0^t (\alpha h(t-s) - h'(t-s)) \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(s)-u(t)) \right\|^2 ds \\
\leq \; & C_\alpha (k \diamond A^{\frac{1}{2}} u)(t).
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

En utilisant (2.3), les inégalités de Cauchy Schwarz et de Young, il résulte, pour $\alpha_3 > 0$,

$$
-\mu_1 \langle Q(u_t(t)), u(t) \rangle \leq \frac{\mu_1}{4\alpha_3} \| Q(u_t) \|^2 + \frac{\alpha_3 \mu_1}{a} \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2. \tag{3.33}
$$

Ensuite, par (3.7), on a

$$
-\mu_2 \langle P(z(1,t)), u(t) \rangle \leq |\mu_2| \left((\alpha_2 - 1) \mathscr{P}(z(1,t)) + \alpha_3 \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right). \tag{3.34}
$$

De (3.9) et (3.25), on a, pour $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$

$$
\langle F(u(t)), u(t) \rangle \leq \psi_2 \left(\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\| \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \leq \frac{l}{4} \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2. \tag{3.35}
$$

En remplaçant les inégalités (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35) dans (3.30), nous obtenons (3.27). □

Lemme 3.3. *Soit u solution du problème (3.11). Alors, la fonction*

$$
I_2(t) = -\left\langle u_t(t), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right\rangle, \tag{3.36}
$$

satisfait, pour $\epsilon > 0$ et pour tout $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
I_2'(t) \quad \leq \quad & -\left(\int_0^t h(s) ds - \varepsilon \right) \| u_t \|^2 + \varepsilon \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{c_3(1 + C_\alpha)}{\varepsilon} (k \diamond A^{\frac{1}{2}} u)(t) \\
& + |\mu_2| (\alpha_2 - 1) \mathscr{P}(z(1,t)) + \varepsilon \| Q(u_t) \|^2,
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

où $c = \max \left\{ \frac{c_2}{2a}, \varepsilon(|\mu_2| \alpha_3 + 1) + \frac{\mu_1^2}{4a} + \frac{17 l^2}{32} + \frac{\alpha^2}{2a} \right\}$

Démonstration. Dérivons (3.36) par rapport à t, on trouve

$$
\begin{aligned}
I_2'(t) \quad = \quad & -\left\langle u_{tt}(t), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right\rangle \\
& -\left\langle u_t(t), \int_0^t h'(t-s)(u(t)-u(s)) ds \right\rangle - \int_0^t h(s) ds \| u_t \|^2.
\end{aligned}
$$

Ensuite, en utilisant la première équation de (3.11) et la définition de $A^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= -\int_0^t h(s)ds\|u_t\|^2 + \left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &\quad +\mu_2\left\langle P(z(1,t)), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &\quad -\left\langle F(u(t)), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &\quad -\left\langle u_t(t), \int_0^t h'(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &\quad +\mu_1\left\langle Q(u_t(t)), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &\quad +\left\|\int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(s)-u(t))ds\right\|^2. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young et en utilisant (3.32), il résulte, pour $\varepsilon > 0$,

$$\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))ds\right\rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{l^2C_\alpha}{2\varepsilon}(k\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t)$$

et

$$\mu_1\left\langle Q(u_t(t)), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \leq \varepsilon\|Q(u_t)\|^2 + \frac{\mu_1^2C_\alpha}{4a\varepsilon}(k\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t).$$

En outre, (3.7) et (3.32) donnent

$$\left\langle P(z(1,t)), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \leq (\alpha_2-1)\mathscr{P}(z(1,t)) + \alpha_3C_\alpha(k\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t).$$

En utilisant (3.9), (3.25), (3.32) et l'inégalité de Young, on trouve

$$\left\langle F(u(t)), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{l^2C_\alpha}{32\varepsilon}(k\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t). \tag{3.39}$$

D'autre part et par (2.35), on a

$$\begin{aligned} &-\left\langle u_t(t), \int_0^t h'(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &= \left\langle u_t(t), \int_0^t k(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle - \left\langle u_t(t), \int_0^t \alpha h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle \\ &\leq \varepsilon\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\int_0^t \sqrt{k(t-s)}\sqrt{k(t-s)}\|u(t)-u(s)\|ds\right)^2 \\ &\quad +\frac{\alpha^2}{2\varepsilon}\left(\int_0^t h(t-s)\|u(t)-u(s)\|ds\right)^2 \\ &\leq \varepsilon\|u_t(t)\|^2 + \left(\frac{\int_0^t k(s)ds}{2\varepsilon a} + \frac{\alpha^2C_\alpha}{2\varepsilon a}\right)(k\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \\ &\leq \varepsilon\|u_t(t)\|^2 + \left(\frac{c_2}{2\varepsilon a} + \frac{\alpha^2C_\alpha}{2\varepsilon a}\right)(k\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t). \end{aligned}$$

avec $c_2 = \alpha h_0 + h(0)$. Ainsi, en insérant ces cinq inégalités et l'inégalité (3.32) dans (3.38), on trouve (3.37). □

Lemme 3.4. *Soit u solution du problème (3.11). Alors, la fonction*

$$I_3(t) = \tau e^{2\tau} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho, \tag{3.40}$$

satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$I_3'(t) \leq -2\tau \int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho + e^{2\tau}\|u_t\|^2 + \frac{e^{2\tau}}{4\alpha_1^2}\|Q(u_t)\|^2 - \mathscr{P}(z(1,t)). \tag{3.41}$$

Démonstration. En utilisant la deuxième équation de (3.11), on a

$$\begin{aligned} I_3'(t) &= -e^{2\tau} \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \left\langle z_\rho(\rho,t), P(z(\rho,t))\right\rangle d\rho \\ &= e^{2\tau}\left(-2\tau \int_0^1 e^{-2\tau\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho} e^{-2\tau\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho\right). \end{aligned}$$

Ensuite, par intégration par parties et $z(0,t) = u_t(t)$, on trouve

$$I_3'(t) = -2\tau e^{2\tau} \int_0^1 e^{-2\tau\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho + e^{2\tau}\mathscr{P}(u_t) - \mathscr{P}(z(1,t)).$$

On utilise (3.6), les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on obtient

$$\mathscr{P}(u_t) \leq \|u_t\|^2 + \frac{1}{4\alpha_1^2}\|Q(u_t)\|^2,$$

Puis, on utilise le fait que $e^{-2\tau\rho} \geq e^{-2\tau}$, pour tout $\rho \in (0,1)$, on obtient (3.41). □

Lemme 3.5. *Soit u solution du problème (3.11). Alors, la fonction*

$$I_4(t) = \int_0^t f(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2 ds, \tag{3.42}$$

avec $f(t) = \int_t^{+\infty} h(s)ds$, satisfait

$$I_4'(t) \leq -\frac{1}{2}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + 3(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2, \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.43}$$

Démonstration. On dérive (3.42) par rapport t, on trouve

$$I_4'(t) = f(0)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \int_0^t f'(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2 ds.$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Young et le fait que $f'(t) = -h(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_4'(t) &= f(0)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\right\|^2 ds \\ &\leq h_0\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))\right\|^2 ds \\ &\quad -2\left\langle A^{\frac{1}{2}}u, \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))ds\right\rangle. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} -2\left\langle A^{\frac{1}{2}}u, \int_0^t h(t-s)A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))ds \right\rangle &\leq \frac{\int_0^t h(s)ds}{2h_0} \int_0^t h(t-s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(s))\right\|^2 ds \\ &+2h_0\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2. \end{aligned}$$

De plus, comme $\int_0^t h(s)ds \leq f(0) = h_0$ et en utilisant (3.2), on arrive à (3.43) où $h_0 = 1-l$. □

3.4 Résultat de stabilité de la solution

Cette section est dédiée à l'étude du comportement asymptotique de la solution en établissant un résultat explicite et général du taux de dissipation de la fonctionnelle d'énergie E. La preuve est basée sur la méthode d'énergie et quelques propriétés des fonctions convexes. Dans la première sous-section, on donne le théorème de la dissipation générale de E sous l'hypothèse (3.8) dans le cas de ψ_1 est une fonction linéaire et dans la deuxième, on s'intéresse à la décroissance asymptotique dans le cas où la fonction ψ_1 est non linéaire. Pour cela, on introduit une fonctionnelle de Lyapunov L équivalente à E, avec laquelle nous pouvons montrer les résultats souhaités. Dans la suite de cette section, m et c sont utilisé pour désigner des constantes positives génériques.

Soit

$$L(t) = ME(t) + \sum_{i=1}^{3} N_i I_i(t), \tag{3.44}$$

où M, N_1, N_2 et N_3 sont des constantes positives.

Lemme 3.6. *Sous les hypothèses (A1)-(A4), ils existent deux constantes positives β_1 et β_2 telles que*

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t). \tag{3.45}$$

Démonstration. Les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young donnent

$$\begin{aligned} |L(t)-ME(t)| &\leq N_1|\langle u_t, u\rangle| + N_2\left|\left\langle u_t(t), \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))ds\right\rangle\right| \\ &+N_3\tau e^{2\tau}\int_0^1 e^{-2\tau\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\ &\leq \frac{N_1+N_2}{2}\|u_t\|^2 + \frac{N_1}{2a}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{h_0 N_2}{2a}(h\diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \\ &+N_3\tau e^{2\tau}\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\ &\leq CE(t), \end{aligned}$$

En choisissant M suffisamment grand, on obtient que L est équivalent à E. □

Lemme 3.7. *Sous un choix convenable des constantes M, N_1, N_2 et N_3, La fonction de Lyapunov L définie par (3.44) satisfait*

$$L'(t) \leq -3(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 + \frac{1}{4}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + c_4\|Q(u_t)\|^2, \quad \forall t \geq t_1, \tag{3.46}$$

avec $c_4 = \left(\varepsilon N_2 + \frac{\mu_1}{4\alpha_3}N_1 + \frac{e^{2\tau}}{4\alpha_1^2}N_3\right)$ *et t_1 est introduit dans (2.25).*

Démonstration. En combinant (3.44), (3.16), (3.27), (3.37) et (3.41). Ensuite, on utilise (3.29) et pour $h_1 = \int_0^{t_1} h(s)ds > 0$, on obtient, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
L'(t) \quad \leq \quad & -\left[(h_1-\varepsilon)N_2 - N_1 - e^{2\tau}N_3\right]\|u_t\|^2 + \left(\varepsilon N_2 + \frac{\mu_1}{4\alpha_3}N_1 + \frac{e^{2\tau}}{4\alpha_1^2}N_3\right)\|Q(u_t)\|^2 \\
& -\left[\frac{l}{2}N_1 - \alpha_3\left(|\mu_2| + \frac{\mu_1}{a}\right)N_1 - \varepsilon N_2\right]\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \frac{\alpha M}{2}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \\
& -\left[\frac{M}{2} - \frac{C_\alpha}{l}N_1 - \frac{c(C_\alpha+1)}{\varepsilon}N_2\right](k \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - 2N_3\tau\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\
& -(N_3 - |\mu_2|(\alpha_2-1)(N_1+N_2))\mathscr{P}(z(1,t)).
\end{aligned}$$

Alors, en prenant $\varepsilon = \frac{l}{4N_2}$, il résulte

$$\begin{aligned}
L'(t) \quad \leq \quad & -\left[h_1N_2 - \frac{l}{4} - N_1 - e^{2\tau}N_3\right]\|u_t\|^2 - \left[\frac{l}{2}N_1 - \alpha_3\left(|\mu_2| + \frac{\mu_1}{a}\right)N_1 - \frac{l}{4}\right]\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 \\
& -\left[\frac{M}{2} - \frac{4c}{l}N_2^2 - C_\alpha\left(\frac{1}{l}N_1 + \frac{4c}{l}N_2^2\right)\right](k \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + \frac{\alpha M}{2}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) \\
& +\left(\varepsilon N_2 + \frac{\mu_1}{4\alpha_3}N_1 + \frac{e^{2\tau}}{4\alpha_1^2}N_3\right)\|Q(u_t)\|^2 - 2N_3\tau\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\
& -\left[N_3 - |\mu_2|(\alpha_2-1)(N_1+N_2)\right]\mathscr{P}(z(1,t)).
\end{aligned}$$

En posant $\alpha_3 = \frac{al}{4(\mu_1 + a|\mu_2|)}$ et choisissant N_1 assez grand de sorte que

$$\frac{l}{4}N_1 - \frac{l}{4} > 4(1-l).$$

Ensuite, nous prenons N_3 et N_2 suffisamment grand pour que

$$N_3 - |\mu_2|(\alpha_2-1)(N_1+N_2) > 0,$$

$$h_1N_2 - \frac{l}{4} - N_1 - e^{2\tau}N_3 > 1.$$

Puisque $\frac{\alpha h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)} < h(s)$ et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\alpha C_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha h^2(s)}{\alpha h(s) - h'(s)}ds \to 0 \quad \text{comme} \quad \alpha \to 0.$$

Par conséquent, il existe $0 < \alpha_0 < 1$ telle que si $\alpha < \alpha_0$, il vient

$$\alpha C_\alpha < \frac{1}{8\left[\frac{1}{l}N_1 + \frac{4c}{l}N_2^2\right]}.$$

Aussi, nous choisissons M assez grand tel que (3.45) reste valable et

$$\frac{M}{2} - \frac{4c}{l}N_2^2 > 0,$$

lorsque M est fixé, on choisit α pour que

$$\alpha = \frac{1}{2M} < \alpha_0,$$

ce qui conduit à

$$\frac{M}{2} - \frac{4c}{l}N_2^2 - C_\alpha\left(\frac{1}{l}N_1 + \frac{4c}{l}N_2^2\right) > 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} L'(t) \quad &\leq \quad -4(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 + \frac{1}{4}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) - 2N_3\tau\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\ &\quad + \left(\varepsilon N_2 + \frac{\mu_1}{4\alpha_3}N_1 + \frac{e^{2\tau}}{4\alpha_1^2}N_3\right)\|Q(u_t)\|^2, \end{aligned}$$

Ainsi, l'estimation (3.46) est établie. □

3.4.1 Premier théorème

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et si ψ_1 est* ***linéaire****. Alors, ils existent des constantes positives k_1, k_2, k_3 et k_4 telles que la solution de (3.1) satisfait, pour tout $t \geq t_1$,*

$$E(t) \leq k_1 e^{-k_2\int_{t_1}^t \zeta(s)ds}, \quad \text{si } G \text{ linéaire} \tag{3.47}$$

$$E(t) \leq k_4 G_1^{-1}\left(k_3\int_{t_1}^t \zeta(s)ds\right), \quad \text{si } G \text{ non linéaire,} \tag{3.48}$$

où $G_1(t) = \int_t^r \frac{ds}{sG'(s)}$, qui est strictement décroissante et strictement convexe sur $(0, r]$, avec $\lim_{t\to 0} G_1(t) = +\infty$.

Démonstration. De (2.26) et (3.16), on tire, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(t-s))\right\|^2 ds \quad &\leq \quad \frac{-h(0)}{\delta_1}\int_0^{t_1} h'(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(t-s))\right\|^2 ds \\ &\leq \quad -cE'(t). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Alors, l'estimation (3.46) devient

$$\begin{aligned} L'(t) \quad &\leq \quad -3(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 + \frac{1}{4}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + c_4\|Q(u_t)\|^2 \\ &\leq \quad -mE(t) + c(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + c_4\|Q(u_t)\|^2 \\ &\leq \quad -mE(t) - cE'(t) + c\int_{t_1}^t h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(t-s))\right\|^2 ds + c_4\|Q(u_t)\|^2. \end{aligned}$$

D'autre part, dans le cas où ψ_1 est linéaire et en utilisant (3.16) et (3.8), on conclut que

$$\|Q(u_t)\|^2 \leq c'\langle Q(u_t), u_t\rangle \leq -cE'(t), \tag{3.50}$$

Ensuite, on introduit la fonction F qui équivaut à E comme suit

$$F(t) = L(t) + cE(t),$$

où c désigne une constante positive. Alors, on a

$$F'(t) \leq -mE(t) + c\int_{t_1}^{t} h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s))\right\|^2 ds - cE'(t). \tag{3.51}$$

Considérons deux cas :

Cas 1 : G linéaire.

En multipliant (3.51) par ζ et en utilisant (A2) et (3.16), il découle

$$\begin{aligned}
\zeta(t)F'(t) &\leq -m\zeta(t)E(t) + c\zeta(t)\int_{t_1}^{t} h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s))\right\|^2 ds - c\zeta(t)E'(t)\\
&\leq -m\zeta(t)E(t) + c\int_{t_1}^{t} \zeta(t)h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s))\right\|^2 ds - c\zeta(t)E'(t)\\
&\leq -m\zeta(t)E(t) - c\int_{t_1}^{t} h'(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s))\right\|^2 ds - c\zeta(t)E'(t),
\end{aligned}$$

Puisque la fonction ζ est décroissante, on déduit que

$$\zeta(t)F'(t) \leq -m\zeta(t)E(t) - 2cE'(t),$$

ce qui donne

$$(\zeta F + 2cE)'(t) \leq -m\zeta(t)E(t).$$

Par intégration de l'inégalité précédente entre t_1 et t et comme $\zeta F + 2cE \sim E$, on obtient

$$E(t) \leq k_1 e^{-k_2\int_{t_1}^{t}\zeta(s)ds} \quad \forall t \geq t_1,$$

où k_1 et k_2 sont des constantes positives.

Cas 2 : G non linéaire.

D'abord, nous introduisons la fonction suivante :

$$L_1(t) = L(t) + I_4(t),$$

en remarquant que L_1 est positive d'après les lemmes 3.5 et 3.7, de plus, elle satisfait

$$\begin{aligned}
L_1'(t) &\leq -(1-l)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 - \|u_t\|^2 - \frac{1}{4}(h \diamond A^{\frac{1}{2}}u)(t) + c_4\|Q(u_t)\|^2\\
&\leq -\beta E(t) + c\langle Q(u_t), u_t\rangle,
\end{aligned}$$

où β est une constante positive. Ainsi, en utilisant (3.16) et (3.8), on trouve

$$\begin{aligned} L_1'(t) &\leq -\beta E(t) + c\langle Q(u_t), u_t\rangle \\ &\leq -\beta E(t) - cE'(t), \end{aligned}$$

alors,

$$\beta \int_{t_1}^{t} E(s)ds \leq L_1(t_1) - L_1(t) \leq L_1(t_1),$$

ce qui implique que

$$\int_0^{+\infty} E(s)ds < +\infty. \tag{3.52}$$

Nous définissons la fonction I par

$$I(t) = p \int_{t_1}^{t} \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds, \quad \forall t \geq t_1,$$

où p est une constante positive, donc $I(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$, sinon (3.51) conduit à la décroissance exponentielle. De plus, nous choisissons p pour que

$$I(t) < 1. \tag{3.53}$$

On définit aussi la fonction λ par

$$\lambda(t) = -\int_{t_1}^{t} h'(s) \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds, \quad \forall t \geq t_1,$$

pour t_1 suffisamment petit et par (3.16), nous observons que

$$\lambda(t) \leq -cE'(t). \tag{3.54}$$

Puisque G est strictement convexe sur $(0, r]$ et $G(0) = 0$, alors

$$G(\theta x) \leq \theta\, G(x), \quad \text{pour} \quad \theta \in [0,1] \quad \text{et} \quad x \in (0, r]. \tag{3.55}$$

En utilisant l'hypothèse (A2), (3.53) et grâce à l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{1}{p\, I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t)\,(-h'(s))\, p\, \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \\ &\geq \frac{1}{p\, I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t)\zeta(s)G(h(s))p\, \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \\ &\geq \frac{\zeta(t)}{p\, I(t)} \int_{t_1}^{t} G(I(t)h(s))p\, \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \\ &\geq \frac{\zeta(t)}{p} G\left(\frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^{t} I(t)h(s)p\, \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \right) \\ &= \frac{\zeta(t)}{p} G\left(p \int_{t_1}^{t} h(s) \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \right) \\ &= \frac{\zeta(t)}{p} \overline{G}\left(p \int_{t_1}^{t} h(s) \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \right), \end{aligned}$$

où $\overline{G}$ est un prolongement de G, qui est strictement croissante et strictement convexe de classe C^2 sur $(0,+\infty)$, voir remarque 2.1. En utilisant le fait que ζ est une fonction positive décroissante, la dernière estimation donne

$$\int_{t_1}^{t} h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t)-u(t-s))\right\|^2 ds \leq \frac{1}{p}\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}\right), \tag{3.56}$$

donc, l'inégalité (3.51) devient

$$F'(t) \leq -m\; E(t) + c\;\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}\right), \quad \forall t \geq t_1. \tag{3.57}$$

Soit $0 < r_1 < r$, on définit la fonctionnelle F_1 par

$$F_1(t) = \overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)F(t) + E(t),$$

en utilisant (3.57), le fait que $E' \leq 0$, $G' > 0$ et $G'' > 0$, nous concluons que F_1 équivaut à E et

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= r_1\;\frac{E'(t)}{E(0)}\overline{G}''\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right)F(t) + \overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)F'(t) + E'(t),\\ &\leq -m\;E(t)\overline{G}'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\;\overline{G}'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right)\left(\overline{G}\right)^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}\right) + E'(t). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Soit $\overline{G}^*$ le conjugué de G au sens de Young (voir [6] pp. 61-64), qui est donné par

$$\overline{G}^*(s) = s(\overline{G}')^{-1}(s) - \overline{G}[(\overline{G}')^{-1}(s)] \tag{3.59}$$

et il satisfait l'inégalité de Young suivante :

$$AB \leq \overline{G}^*(A) + \overline{G}(B). \tag{3.60}$$

En posant

$$A = \overline{G}'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right) \quad \text{et} \quad B = \overline{G}^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}\right),$$

De (3.60) il vient

$$\begin{aligned} \overline{G}'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right)\overline{G}^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}\right) &\leq \overline{G}^*\left(\overline{G}'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right)\right) + \frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}\\ &\leq r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\overline{G}'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right) - \overline{G}\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right) + \frac{p\,\lambda(t)}{\zeta(t)}, \end{aligned}$$

Alors, en multipliant par $\zeta(t)$, en utilisant (3.54) et le fait que, $r_1\frac{E(t)}{E(0)} < r$, $\overline{G}'\left(r_1\frac{E(t)}{E(0)}\right) = G'\left(r_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)$ pour obtenir

$$\zeta(t)F_1'(t) \leq -m\;\zeta(t)E(t)G'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\;r_1\;\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(r_1\;\frac{E(t)}{E(0)}\right) - c\;E'(t).$$

D'autre part, on prend $F_2 = \zeta F_1 + cE$ équivaut à E ce qui signifie que pour γ_1 et γ_2 deux nombres positives, on a

$$\gamma_1 F_2(t) \leq E(t) \leq \gamma_2 F_2(t), \tag{3.61}$$

Sous un choix convenable de r_1 et pour une constante positive k, on trouve

$$F_2'(t) \leq -k\ \zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(r_1\ \frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\ \zeta(t)G_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{3.62}$$

où $G_2(t) = tG'(r_1 t)$. Comme $G_2'(t) = G'(r_1 t) + r_1 t G''(r_1 t)$, et en utilisant la convexité stricte de G sur $(0, r]$, on déduit que $G_2(t),\ G_2'(t) > 0$ sur $(0, 1]$. Enfin, nous prenons

$$R(t) = \gamma_1 \frac{F_2(t)}{E(0)},$$

alors, de (3.61) et (3.62), on conclut que $R \sim E$ et pour une constante positive k_3, (3.62) donne

$$R'(t) \leq -k_3\ \zeta(t)G_2(R(t)), \quad \forall t \geq t_1.$$

Une simple intégration de l'inégalité différentielle précédente entre t_1 et t conduit à

$$\int_{t_1}^{t} \frac{-R'(s)}{G_2\left(R(s)\right)} ds \geq k_3 \int_{t_1}^{t} \zeta(s)ds.$$

puisque $r_1 R(t_1) < r$, il résulte

$$G_1(r_1 R(t)) = \int_{r_1 R(t)}^{r_1 R(t_1)} \frac{ds}{s\ G'(s)} \geq k_3 \int_{t_1}^{t} \zeta(s)ds.$$

En utilisant le fait que G_1 est une fonction strictement décroissante sur $(0, r]$ et $\lim_{t \to 0} G_1(t) = +\infty$. Alors,

$$R(t) \leq \frac{1}{r_1} G_1^{-1}\left(k_3 \int_{t_1}^{t} \zeta(s)ds\right),$$

En utilisant le fait que R est équivalent à E, l'estimation de stabilité (3.48) est établie. Par conséquent, la preuve du théorème (3.2) est terminée. $\square$

Exemple 3.1. Sous l'hypothèse (A2) avec $G(s) = s^p$, où $1 \leq p < 2$. Alors, la décroissance de E est donnée par

$$E(t) \leq \begin{cases} k_1 e^{-k_2 \int_0^t \zeta(s)ds}, & \text{si} \quad p = 1 \\ k_3\left(1 + \int_0^t \zeta(s)ds\right)^{\frac{-1}{p-1}}, & \text{si} \quad 1 < p < 2, \end{cases} \tag{3.63}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes positives. En effet, la première inégalité de (3.63) est clairement obtenue si $p = 1$, le cas où G est linéaire. Pour $1 < p < 2$, on a

$$G'(s) = ps^{p-1}, \quad G_1(s) = (c+t)^{\frac{-1}{p-1}}, \quad \forall s \geq 0.$$

Alors, de (3.48), on trouve la deuxième inégalité de (3.63).

Dans cet exemple, on peut déduit le résultat suivant : si la fonction noyau h n'est pas nécessairement de décroissance exponentielle ou polynomiale et elle vérifie la condition (3.4) alors, la stabilité uniforme du système (3.1) est établie avec une formule explicite des taux de décroissance de l'énergie.

Remarque 3.1. *le taux de décroissance donné par l'estimation* (3.48) *est optimal car il est conforme au taux de décroissance de h donné par l'inégalité* (3.4). *En effet, on pose*

$$G_0(t) = \int_t^r \frac{1}{G(s)} ds,$$

alors, on a

$$h((t) \leq G_0^{-1} \left(\int_{h^{-1}(r)}^t \zeta(s) ds \right), \quad \forall t \geq h^{-1}(r).$$

En utilisant les propriétés de G, G_0 et G_1, on trouve

$$G_1(t) = \int_t^r \frac{1}{sG'(s)} ds \leq \int_t^r \frac{1}{G(s)} ds = G_0(t).$$

Aussi, en utilisant le fait que G_1 est décroissante, on obtient

$$G_1^{-1} \left(G_1(t) \right) \geq G_1^{-1} \left(G_0(t) \right).$$

En posant $\nu = G_0(t)$, on arrive à

$$t = G_0^{-1}(\nu) = G_1^{-1} \left(G_1(t) \right) \geq G_1^{-1} \left(\nu \right).$$

Ainsi,

$$G_1^{-1}(\nu) \leq G_0^{-1}(\nu).$$

Cela montre que (3.48) *fournit des meilleurs taux de décroissance attendus sous l'hypothèse très générale* (3.4).

3.4.2 Deuxième théorème

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses (A1)-(A4) et si ψ_1 est* ***non linéaire****. Alors, ils existent des constantes positives k_5, k_6, k_7, k_8 et $\tilde{r}_2$ telles que la solution de* (3.1) *satisfait, pour tout $t \geq t_1$,*

$$E(t) \leq K_1^{-1} \left(k_5 \int_{t_1}^t \zeta(s) ds + k_6 \right), \quad \text{si } G \text{ linéaire} \tag{3.64}$$

où $K_1(t) = \int_t^1 \frac{ds}{K_2(s)}$ et, pour tout $t \geq t_2$,

$$E(t) \leq k_8 (t - t_1) W_1^{-1} \left(\frac{k_7}{(t - t_1) \int_{t_2}^t \zeta(s) ds} \right), \quad \text{si } G \text{ non linéaire}, \tag{3.65}$$

où $W_1(t) = tW'(\tilde{r}_2 t)$, $W = \left(\overline{G}^{-1} + \overline{K}^{-1} \right)^{-1}$.

Démonstration. Dans cette sous-section, nous supposons que la fonction non linéaire ψ_1 est donnée par

$$\psi_1(s) = K^{-1}(s), \quad \forall s \geq 0,$$

avec $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction strictement convexe et croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$ satisfait $K(0) = 0$, et K est linéaire sur $[0, \tilde{r}]$ (ou $K'(0) = 0$ et $K'' > 0$ sur $[0, \tilde{r}]$).

Par conséquent, la condition (3.8) peut être réécrit comme suit

$$\|Q(u_t)\|^2 \leq K^{-1}(\langle Q(u_t), u_t\rangle) \leq K^{-1}(J(t)), \tag{3.66}$$

où J est donnée par

$$J(t) = \langle Q(u_t), u_t\rangle, \quad \forall u \in H, \tag{3.67}$$

Considérons les deux cas suivants :

Cas 1 : G linéaire

En multipliant l'inégalité (3.46) par ζ et en utilisant (3.66), on obtient, pour tout $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
\zeta(t)L'(t) &\leq -m\zeta(t)E(t) + c\int_{t_1}^{t} \zeta(t)h(s)\left\|A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s))\right\|^2 ds \\
&\quad + C_1\zeta(t)\|Q(u_t)\|^2 \\
&\leq -m\zeta(t)E(t) - cE'(t) + C_1\zeta(t)K^{-1}(J(t)),
\end{aligned}$$

de plus, comme ζ est une fonction décroissante, on a

$$\tilde{F}'(t) \leq -m\zeta(t)E(t) + c\zeta(t)K^{-1}(J(t)), \quad \forall t \geq t_1 \tag{3.68}$$

où $\tilde{F} := \zeta L + cE$, qui équivaut à E. Puis, pour $0 < \tilde{r}_1 < \tilde{r}$ et $\tilde{c} > 0$, on définit la fonction $\tilde{F}_1$ par

$$\tilde{F}_1(t) := K'\left(\tilde{r}_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\tilde{F}(t) + \tilde{c}E(t),$$

ensuite, en utilisant (3.57) et le fait que $E' \leq 0$, $K' > 0$ et $K'' > 0$, on déduit que $\tilde{F}_1$ est équivalente à E. Alors, pour des constantes positives γ_3 et γ_4, on a

$$\gamma_3\tilde{F}_1(t) \leq E(t) \leq \gamma_4\tilde{F}_1(t), \tag{3.69}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1'(t) &= \tilde{r}_1\frac{E'(t)}{E(0)}K''\left(\tilde{r}_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)\tilde{F}(t) + K'\left(\tilde{r}_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)\tilde{F}'(t) + \tilde{c}E'(t), \\
&\leq -m\zeta(t)E(t)K'\left(\tilde{r}_1\frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\zeta(t)K'\left(\tilde{r}_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)K^{-1}(J(t)) \\
&\quad + \tilde{c}E'(t).
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Soit K^* le conjugué de K au sens de Young. Suite aux (3.59) et (3.60), avec $A = K'\left(r_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$ et $B = K^{-1}(J(t))$, par (3.16) et (3.67), on arrive à

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_1'(t) &\leq -m\zeta(t)E(t)K'\left(\tilde{r}_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\,\tilde{r}_1\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}K'\left(\tilde{r}_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\\
&\quad + c\zeta(t)J(t) + \tilde{c}E'(t)\\
&\leq -m\zeta(t)E(t)K'\left(\tilde{r}_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\,\tilde{r}_1\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}K'\left(\tilde{r}_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right)\\
&\quad - c\,E'(t) + \tilde{c}E'(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, sous un choix convenable de $\tilde{r}_1$, $\tilde{c}$ et pour une constante positive k, on trouve

$$\tilde{F}_1'(t) \leq -k\,\zeta(t)\frac{E(t)}{E(0)}K'\left(\tilde{r}_1 \frac{E(t)}{E(0)}\right) = -k\,\zeta(t)K_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{3.71}$$

où $K_2(t) = tK'(\tilde{r}_1 t)$. Puisque $K_2'(t) = K'(\tilde{r}_1 t) + \tilde{r}_1 t K''(\tilde{r}_1 t)$, et en utilisant le fait que K est strictement convexe sur $(0, \tilde{r}]$, on conclut $K_2,\ K_2' > 0$ sur $(0, 1]$. Ensuite, en prenant

$$\tilde{R}(t) = \gamma_3 \frac{\tilde{F}_1(t)}{E(0)},$$

en utilisant (3.69) et (3.71), on a $\tilde{R} \sim E$ et pour k_5 une constante positive, de (3.71), il vient

$$\tilde{R}'(t) \leq -k_5\,\zeta(t)K_2(\tilde{R}(t)).$$

On intègre l'inégalité précédente sur (t_1, t), on obtient

$$\tilde{R}(t) \leq K_1^{-1}\left(k_5 \int_{t_1}^{t} \zeta(s)ds + k_6\right),$$

pour $k_6 > 0$ avec $K_1(t) = \int_t^1 \frac{ds}{K_2(s)}$. Ainsi, grâce à l'équivalence entre $\tilde{R}$ et E, l'estimation (3.64) est obtenue.

Cas 2 : G non linéaire.

Pour p une constante positive, on définit la fonction $\tilde{I}$ par

$$\tilde{I}(t) = \frac{p}{(t-t_1)} \int_{t_1}^{t} \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds,$$

alors, $\tilde{I}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$. En outre, on choisit p soigneusement de sorte que $\tilde{I}(t) < 1$ et de façon similaire que (3.56), on a

$$\int_{t_1}^{t} h(s) \left\| A^{\frac{1}{2}}(u(t) - u(t-s)) \right\|^2 ds \leq \frac{(t-t_1)}{p}\overline{G}^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{(t-t_1)\zeta(t)}\right). \tag{3.72}$$

D'autre part, par combinaison de (2.46), (3.49), (3.66) et (3.72), on arrive à, pour tout $t \geq t_1$,

$$L'(t) \leq -m\,E(t) - c\,E'(t) + c(t-t_1)\overline{G}^{-1}\left(\frac{p\,\lambda(t)}{(t-t_1)\zeta(t)}\right) + c\,K^{-1}(J(t)). \tag{3.73}$$

Soit $\overline{K}$ est une prolongement de K, qui est strictement croissante et strictement convexe. Puisque $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t-t_1}=0$, alors, il existe $t_2>t_1$ tel que $\frac{1}{t-t_1}<1$, for $t>t_2$. Ainsi, en utilisant (3.55) avec $\theta=\frac{1}{t-t_1}<1$, on trouve

$$\overline{K}^{-1}(J(t))\leq (t-t_1)\overline{K}^{-1}\left(\frac{J(t)}{(t-t_1)}\right),\quad \forall t\geq t_2.$$

Par conséquent,

$$\tilde{L}'(t)\leq -m\ E(t)+c(t-t_1)\overline{G}^{-1}\left(\frac{p\ \lambda(t)}{(t-t_1)\zeta(t)}\right)+(t-t_1)\overline{K}^{-1}\left(\frac{J(t)}{(t-t_1)}\right),\tag{3.74}$$

où $\tilde{L}:=L+cE$, qui est équivalente à E. Soient

$$r_2=\min\{r,\tilde{r}\},\quad \chi(t)=\max\left\{\frac{p\ \lambda(t)}{(t-t_1)\zeta(t)},\frac{J(t)}{(t-t_1)}\right\}\quad \text{et}\quad W=\left(\overline{G}^{-1}+\overline{K}^{-1}\right)^{-1}.$$

Ainsi, (3.74) réduit à

$$\tilde{L}'(t)\leq -m\ E(t)+c(t-t_1)W^{-1}\left(\chi(t)\right),\quad \forall t\geq t_2.\tag{3.75}$$

Pour $0<\tilde{r}_2<r_2$, on définit la fonction F_3 par

$$F_3(t):=W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}\right)\tilde{L}(t),\quad \forall t\geq t_2.$$

En utilisant (3.73) et le fait que $E'\leq 0$, $W'>0$ et $W''>0$ sur $(0,r_2]$, on conclut que F_3 est équivalent à E, alors, pour $\gamma_5,\gamma_6>0$, on a

$$\gamma_5F_3(t)\leq E(t)\leq \gamma_6F_3(t),\tag{3.76}$$

et F_3' peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned}F_3'(t)\ &=\ \left(\frac{-\tilde{r}_2}{(t-t_1)^2}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}+\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E'(t)}{E(0)}\right)W''\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}\right)\tilde{L}(t)\\ &\quad +W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}\right)\tilde{L}'(t),\\ &\leq\ -mE(t)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}\right)\\ &\quad +c(t-t_1)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}\right)W^{-1}\left(\chi(t)\right).\end{aligned}\tag{3.77}$$

De la même manière, soit W^* le conjugué de W au sens de Young, de (3.59) et (3.60), avec

$$A=W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)}\cdot\frac{E(t)}{E(0)}\right)\quad \text{et}\quad B=W^{-1}\left(\chi(t)\right),$$

et en utilisant (3.16), il vient

$$F_3'(t) \leq -mE(t)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\,\tilde{r}_2\frac{E(t)}{E(0)}W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right) - c(t-t_1)\chi(t). \tag{3.78}$$

D'autre part, on combine (3.16), (3.54) et (3.67), on trouve

$$\begin{aligned}(t-t_1)\zeta(t)\chi(t) &\leq p\lambda(t) + \zeta(t)J(t) \leq p\lambda(t) + \zeta(0)J(t)\\ &\leq -cE'(t).\end{aligned}$$

En outre, en multipliant (3.78) par $\zeta(t)$ et en utilisant le fait que $\tilde{r}_2\frac{E(t)}{E(0)} < r_2$, on découle

$$\begin{aligned}\zeta(t)F_3'(t) \leq\ & -mE(t)\zeta(t)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\,\tilde{r}_2\zeta(t)\cdot\frac{E(t)}{E(0)}W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right)\\ & -cE'(t).\end{aligned}$$

Comme ζ est une fonction décroissante, pour tout $t \leq t_2$, on arrive à

$$\begin{aligned}F_4'(t) \leq\ & -mE(t)\zeta(t)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c\,\tilde{r}_2\zeta(t)\cdot\frac{E(t)}{E(0)}W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right)\\ & -cE'(t).\end{aligned}$$

où $F_4 := \zeta F_3 + c\,E$ équivaut à E. Ainsi, sous un choix convenablement de $\tilde{r}_2$ et pour k une constante positive, il résulte

$$k\zeta(t)\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right) \leq -F_4'(t), \quad \forall t \geq t_2.$$

Une simple intégration de la dernière inégalité conduit à

$$\int_{t_2}^{t} k\zeta(s)\left(\frac{E(s)}{E(0)}\right)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(s-t_1)} \cdot \frac{E(s)}{E(0)}\right)ds \leq -\int_{t_2}^{t} F_4'(s)ds \leq F_4(t_2).$$

De plus, en utilisant le fait que $E' \leq 0$, $W', W'' > 0$, on déduit que l'application $t \mapsto E(t)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right)$ est décroissante . Par conséquent, on obtient

$$k\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_{t_2}^{t}\zeta(s)ds \leq F_4(t_2). \tag{3.79}$$

On multiplie chaque membre de (3.79) par $\frac{1}{t-t_1}$, on trouve

$$k\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right)W'\left(\frac{\tilde{r}_2}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_{t_2}^{t}\zeta(s)ds \leq \frac{k_7}{(t-t_1)}. \tag{3.80}$$

Ensuite, on pose $W_1(t) = t\,W'(\tilde{r}_2 t)$ qui est strictement croissante, alors,

$$kW_1\left(\frac{1}{(t-t_1)} \cdot \frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_{t_2}^{t}\zeta(s)ds \leq \frac{k_7}{(t-t_1)}. \tag{3.81}$$

Enfin, pour k_7 et k_8 des constantes positives, on a

$$E(t) \leq k_8(t-t_1)W_1^{-1}\left(\frac{k_7}{(t-t_1)\int_{t_2}^{t}\zeta(s)ds}\right).$$

D'où la démonstration du théorème 3.3. □

Exemple 3.2. En prenant les exemples suivants :

1. G linéaire.
   Soit $h(t) = ae^{-b(1+t)}$, où $a, b > 0$ suffisamment petit pour que (2.23) est satisfaite, alors
   $$h'(t) = -bG(h(t)), \quad \text{avec} \quad G(t) = t, \quad \text{et} \quad \zeta(t) = b.$$
   De plus, on prend $\psi_1(t) = ct^{\frac{1}{q}}$, avec $q > 1$. Ainsi, $K(t) = ct^q$, on applique (3.64) avec
   $$K_1^{-1}(t) = (c_1 t + c_2)^{\frac{1}{1-q}},$$
   Par conséquent, il résulte
   $$E(t) \leq \frac{1}{(c_3 t + c_4)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

2. G non linéaire.
   Soit $h(t) = \frac{a}{(1+t)^2}$, avec a est choisi de sorte que (2.23) est satisfaite. Ainsi, pour b est une constante fixé, on a
   $$h'(t) = -bG(h(t)), \quad \text{avec} \quad G(t) = t^{\frac{3}{2}}.$$
   En prenant $\psi_1(t) = ct^{\frac{1}{3}}$, alors, $K(t) = ct^3$, de (3.65), il vient
   $$W(t) = (G^{-1} + H^{-1})^{-1}(t) = \left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^3$$
   et
   $$W_2(t) = \frac{3t}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2}\right)^3 \leq ct^{\frac{3}{2}},$$
   Par conséquent, on obtient
   $$E(t) \leq \frac{c}{(t-t_1)^{\frac{1}{3}}}.$$

3.5 Applications

Dans cette section, nous donnons que deux applications qui illustre les résultats obtenus.

3.5.1 Équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + \mu_1 |u_t(t)|^{m-2}u_t(t) & \\ \qquad\qquad +\mu_2 |u_t(t-\tau)|^{m-2}u_t(t-\tau) = b|u(t)|^{p-2}u(t), & x \in \Omega \; t \in (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{3.82}$$

où $(u_0, u_1, f_0) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times H^1(-\tau, 0; L^2(\Omega))$. m, b et P sont des constantes positives $2 \leq m < p \leq \frac{2n}{n-2}$, si $n \geq 3$ et $2 \leq m < p \leq +\infty$, si $n = 1, 2$.

Le système (3.82) est un cas particulier du problème considéré ; (3.1), si en prenant

$$H = L^2(\Omega), \quad \text{et} \quad Au = -\Delta u, \; \forall u \in D(A),$$

où $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Il est bien connu que A est un opérateur positive auto-adjoint avec $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ et $\|u\|_{D(A^{\frac{1}{2}})} = \|\nabla u\|_2$.

En outre, l'hypothèse (A3) est vérifiée, pour

$$Q(u) = P(u) = |u|^{m-2}u, \quad F(u) = b|u|^{p-2}u, \quad \mathscr{P}(u) = \frac{1}{m}\int_\Omega |u|^m dx \;\text{ et }\; \mathscr{F}(u) = \frac{b}{p}\int_\Omega |u|^p dx.$$

3.5.2 Équation de Petrovsky

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + \Delta^2 u(t) - \int_0^t h(t-s)\Delta^2 u(s)ds + \mu_1 Q(u_t(t)) & \\ \qquad +\mu_2 P(u_t(t-\tau)) = \left(\int_\Omega K(x,y)u(y,t)^2 dy\right) u(x,t), & t \in (0,+\infty), \\ u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau) & t \in (0,\tau), \end{cases}$$

avec les données initiales $(u_0, u_1, f_0) \in [H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)] \times H_0^2(\Omega) \times H^1(-\tau, 0; L^2(\Omega))$, la fonction $K : \Omega \times \Omega \to (0, +\infty)$ est une fonction bornée telle que $K(x,y) = K(y,x)$ et

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha \leq K(x,y) \leq \beta, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

La fonction $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante continue, de plus, il existe une fonction strictement croissante $q_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ avec $q_0(0) = 0$ telle que

$$\begin{cases} q_0(|s|) \leq |Q(s)| \leq q_0^{-1}(|s|), & \forall\ |s| \leq \varepsilon, \\ c_1|s| \leq |Q(s)| \leq c_2|s|, & \forall\ |s| \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{3.83}$$

où c_1, c_2 des constantes positives. Dans le cas de q_0 est non linéaire, on défini la fonction $K(s) = \sqrt{s}q_0(\sqrt{s})$, qui est strictement convexe de classe C^2 sur $[0, r)$. La fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire croissante de classe C^1 telle que il existe $a_1, a_2, a_3 > 0$

$$a_1 sP(s) \leq \mathscr{P}(s) \leq a_2 sQ(s), \quad |P'(s)| \leq a_3.$$

avec $\mathscr{P}(s) = \int_0^s P(r)dr$. En outre, on prend

$$F(u) = \left(\int_\Omega K(x,y)u(y)^2 dy\right) u(x), \quad \mathscr{F}(u) = \frac{1}{4}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)u(x)^2u(y)^2 dxdy,$$

On a l'opérateur A défini sur $D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ par

$$Au = \Delta^2 u, \quad \forall u \in D(A).$$

est un opérateur linéaire positif auto-adjoint sur $H = L^2(\Omega)$ avec $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^2(\Omega)$ et $\|A^{\frac{1}{2}}u\| = \|\Delta u\|_2$. De plus, l'hypothèse (A3) est vérifiée sous le choix des fonctions précédentes. Pour plus de détails, voir [4, 9]

Remarque 3.2. *Ces deux applications généralisent les problèmes considérés dans [55, 37, 8, 30] qui sont soit des équation d'onde linéaires ou des systèmes sans retard. Par contre dans ce travail, on a considéré un cadre abstrait avec un terme de retard apparaît dans un terme d'amortissement non linéaire et un terme source non linéaire sous une classe très large des fonctions noyaux du terme viscoélastique ; l'hypothèse (A2).*

Chapitre 4

Explosion en temps fini pour un problème d'évolution semi-linéaire avec retard dépend du temps et une mémoire infinie.

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème d'évolution semi-linéaire avec retard dépend du temps dans un terme d'amortissement non linéaire et une mémoire infinie. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, nous montrons l'existence locale et l'unicité de la solution du problème considéré. La preuve est basée sur des résultats classiques d'équation d'évolution non linéaire en utilisant la théorie des semi groupes. Ensuite, nous allons montrer que la solution locale obtenue s'explose en temps fini en se basant sur les techniques de Vittilaro E. Vitillaro dans [71] et W.J. Liu dans [49]. Enfin, nous allons donner quelques applications pour illustrer les résultats obtenus.

4.1 Position du problème

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire et une norme associée notés par $\langle .,. \rangle$ et $\| \,.\, \|$, respectivement. Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire positif auto-adjoint tel que $D(A) \subset H$ avec une injection dense et compacte. On dénote par V le domaine de $A^{\frac{1}{2}}$ tels que $V \subset H \subset V'$, avec des injections continues.

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence locale et l'explosion en temps fini de la solution du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} h(t-s)Au(s)ds + \mu_1 G(u_t(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \mu_2 P(u_t(t-\tau(t))) = F(u(t)), & t > 0, \\ u_t(t-\tau(0)) = f_0(t-\tau(0)), & t \in (0, \tau(0)), \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où μ_1 est une constante positive, μ_2 est un nombre réel, h est le noyau du terme mémoire et $t \mapsto \tau$ représente la fonction retard avec $\tau(t) > 0$. $G, P : H \to V'$ et $F : V \to V'$ sont des fonctions satisfaisant certaines conditions à spécifier ultérieurement et (u_0, u_1, f_0) sont les données initiales .

Dans l'étude du problème (4.1), nous aurons besoin de supposer les hypothèses suivantes :

(A1) La fonction noyau $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante de classe C^1 satisfait

$$h(0) > 0, \qquad 1 - \int_0^{+\infty} h(s)ds = 1 - h_0 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.2}$$

(A2)On suppose que la fonction τ vérifie

$$\tau \in W^{2,\infty}([0, T]), \quad \forall T > 0, \tag{4.3}$$

$$0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \quad \forall t > 0, \tag{4.4}$$

$$\tau'(t) \leq d < 1, \text{ p.p } \quad \forall t > 0, \tag{4.5}$$

où τ_0 et τ_1 sont des constantes positives (voir [60]).

(A3) Supposons que les fonctions $Q, P : H \to V'$, $F : V \to V'$ sont localement lipschitzienne. De plus, ils existent des fonctions différentiables et continues $\mathscr{P}, \mathscr{F} : V \to [0, +\infty)$ satisfaisant

$$D_{\mathscr{F}} = F, \qquad D_{\mathscr{P}} = P$$

et, pour $p \geq 2$

$$\langle F(u), u \rangle_{V' \times V} \geq p\, \mathscr{F}(u), \quad \forall u \in V, \tag{4.6}$$

$$\langle G(u), u \rangle_{V' \times V} \geq l\, \mathscr{P}(u), \quad \forall u \in V, \tag{4.7}$$

où l est une constante positive.

(A4) Pour tout $\delta > 0$ et $m \geq 2$, on suppose que

$$\left| \langle P(u), v \rangle_{V' \times V} \right| \leq \delta^m \mathscr{P}(v) + (m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}} \mathscr{P}(u), \qquad \forall u, v \in V, \tag{4.8}$$

qui est équivalent au

$$\left| \langle P(u), v \rangle_{V' \times V} \right| \leq m\, \epsilon \mathscr{P}(u) + \left(\frac{\epsilon\, m}{m-1} \right)^{1-m} \mathscr{P}(v), \qquad \forall u, v \in V, \tag{4.9}$$

pour $\epsilon > 0$.

(A5) Les coefficients du retard et d'amortissement vérifient

$$|\mu_2| < \frac{(1-d)l}{(m-d)}\mu_1. \tag{4.10}$$

(A6) Ils existent deux constantes positives c et C_* telles que

$$\mathscr{P}(u) \leq c\,(\mathscr{F}(u))^{\frac{m}{p}}, \qquad \forall u \in V,$$
$$\mathscr{F}(u) \leq C_*\,\|u\|_V^p, \qquad \forall u \in V. \tag{4.11}$$

De plus, pour $\varepsilon_0 > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\alpha > 0$, il existe une positive constante $c = c(\varepsilon_0, \alpha)$ telle que

$$c\|u\|_V^p \leq \langle F(u), u\rangle_{V'\times V} - (p-\varepsilon)\mathscr{F}(u), \tag{4.12}$$

pour tout $u \in V$ et $\|u\|_V \geq \alpha$.

Remarque 4.1. *La condition (4.6) peut obtenue à partir de (4.11) et (4.12).*

4.2 Existence locale

Dans cette section, nous prouvons l'existence locale et l'unicité de la solution du problème (4.1) en utilisant la théorie des semi groupes par appliquer la définition du système d'évolution et la technique du Kato. D'abord, on introduit des nouvelles fonctions z et η^t, respectivement, comme suit

$$z(\rho, t) = u_t(t - \rho\tau(t)), \quad \rho \in (0,1),\ t > 0,$$
$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad t, s > 0.$$

Alors, on a

$$\tau(t)z_t(\rho, t) + (1 - \rho\tau'(t))z_\rho(\rho, t) = 0, \quad \rho \in (0,1),\ t > 0,$$
$$\eta_t^t(s) = u_t(t) - \eta_s^t(s), \quad t, s > 0.$$

Le problème (4.1) peux réécrire comme suit

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + (1-h_0)Au(t) + \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds + \mu_1 G(u_t(t)) & \\ \qquad\qquad + \mu_2 P(z(1,t)) = F(u(t)), & t \in (0, +\infty), \\ \tau(t)z_t(\rho, t) + (1 - \rho\tau'(t))z_\rho(\rho, t) = 0, & \rho \in (0,1),\ t > 0, \\ \eta_t^t(s) = u_t(t) - \eta_s^t(s), & t, s > 0, \\ z(\rho, 0) = f_0(-\rho\tau(0)), & \rho \in (0,1), \\ z(0,t) = u_t(t), & t > 0, \\ u(-t) = u_0(t), \quad u_t(0) = u_1, & t \geq 0, \\ \eta^0(s) = u_0(0) - u_0(s), & s > 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

En notant $U=(u,u_t,\eta^t,z)^T$, le problème (4.13) prend la forme

$$\begin{cases} U_t(t)=\mathscr{A}(t)U(t)+\Psi(U(t)), \quad \forall t>0,\\ U(0)=U_0=(u_0,u_1,\eta^0,f_0(-\tau(0).))^T, \end{cases} \tag{4.14}$$

où Ψ est donnée par

$$\Psi(\Phi)=\left(0,\frac{q}{2}\phi_2-\mu_1 G(\phi_2)-\mu_2 P(\phi_4(1))+F(\phi_1),0,0\right)^T,$$

pour $\Phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)^T$ de $\mathscr{H}$ et l'opérateur $\mathscr{A}$ est défini par

$$\mathscr{A}(t)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_2\\ -(1-h_0)A\phi_1-\int_0^{+\infty}h(s)A\phi_3(s)ds-\frac{q}{2}\phi_2\\ \phi_2-\frac{\partial\phi_3}{\partial s}\\ \frac{\tau'(t)\rho-1}{\tau(t)}\frac{\partial\phi_4}{\partial\rho}\end{pmatrix}$$

et

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}(t))=\left\{\begin{matrix}(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)^T\in\mathscr{H},\ (1-h_0)\phi_1+\int_0^{+\infty}h(s)\phi_3(s)ds\in D(A),\ \phi_2\in V,\\ \frac{\partial\phi_3}{\partial s}\in L_h^2(\mathbb{R}_+,V),\ \frac{\partial\phi_4}{\partial\rho}\in L^2(0,1;H),\ \phi_3(0)=0,\ \phi_4(0)=\phi_2\end{matrix}\right\}$$

où

$$\mathscr{H}=V\times H\times L_h^2(\mathbb{R}_+,V)\times L^2(0,1;H).$$

Les espaces $L_h^2(\mathbb{R}_+,V)$ et $L^2(0,1;H)$ sont respectivement définis par

$$L_h^2(\mathbb{R}_+,V)=\left\{\phi\ :\mathbb{R}_+\to V,\quad \int_0^{+\infty}h(s)\,\|\phi(s)\|_V^2ds<+\infty\right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{L_h^2(\mathbb{R}_+,V)}=\int_0^{+\infty}h(s)\,\left\langle A^{\frac12}\phi_1(s),A^{\frac12}\phi_2(s)\right\rangle ds.$$

Et

$$L^2(0,1;H)=\left\{\phi\ :(0,1)\to H,\quad \int_0^1\|\phi(\rho)\|^2d\rho<+\infty\right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{L^2(0,1;H)}=\int_0^1\langle\phi_1(\rho),\phi_2(\rho)\rangle\,d\rho.$$

L'espace $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert équipé du produit scalaire suivant : pour tout $\Phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)^T$ et $W=(w_1,w_2,w_3,w_4)^T$ de $\mathscr{H}$, on a

$$\langle\Phi,W\rangle_{\mathscr{H}}=(1-h_0)\langle\phi_1,w_1\rangle_V+\langle\phi_2,w_2\rangle+\langle\phi_3,w_3\rangle_{L_h^2(\mathbb{R}_+,V)}+\langle\phi_4,w_4\rangle_{L^2(0,1;H)}.$$

Remarque 4.2. *On observe que le domaine de $\mathscr{A}(t)$ est indépendant du temps t, donc*

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}(t)) = \mathscr{D}(\mathscr{A}(0)), \qquad \forall t > 0. \tag{4.15}$$

La résolution des équations de type (4.14) a été développé en utilisant la théorie des semi groupes. Pour prouver l'existence locale et l'unicité, il suffit de montrer que le triplet $\{\mathscr{A}, \mathscr{H}, Y\}$, avec $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(t) : t \in [0, T]\}$ pour $T > 0$ fixé et $Y = D(\mathscr{A}(0))$, forme un système de domaine constant ; voir [42, 43, 65].

L'existence locale, l'unicité et la régularité de la solution pour (4.1) sont obtenues par le théorème suivant :

Théorème 4.1. *On suppose que*

(i) *Pour tout $t \in [0, T]$, $\mathscr{A}(t)$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe sur $\mathscr{H}$, et la famille $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(t) : t \in [0, T]\}$ est stable avec les constantes de stabilité C et m indépendantes de t.*

(ii) *L'estimation (4.15) est vérifiée.*

(iii) *$\partial_t \mathscr{A}$ est un élément de $L^\infty_*([0, T], B(Y, \mathscr{H}))$ l'espace des classes équivalentes de fonctions essentiellement bornées et fortement mesurables de $[0, T]$ dans $B(Y, \mathscr{H})$ (l'espace des opérateurs bornés de Y dans $\mathscr{H}$).*

Sous les hypothèses (A1)-(A3), pour tout $U_0 \in \mathscr{H}$, il existe une unique solution mild $U \in C([0, T], \mathscr{H})$ du problème (4.14). De plus, si $U_0 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$ et $\Psi \in C^1(\mathscr{H})$, alors le problème (4.14) admet une unique solution classique, i.e,

$$U \in C([0, T], \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))) \cap C^1([0, T], \mathscr{H}).$$

Démonstration. La preuve du théorème 4.1 est basée sur la technique de norme variable de Kato [42] et la théorie des semi groupes (voir le théorème .22). Ensuite, comme conséquence du résultat classique d'équations d'évolution non linéaires ; le théorème .20, on doit montrer que $\mathscr{A}(t)$ un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe sur $\mathscr{H}$ en utilisant la technique de norme variable de Kato.

Par conséquent, nous vérifierons les hypothèses du théorème 4.1 pour le problème (4.14). Pour cela, on introduit un produit scalaire dépendant du temps sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$.
Pour $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ et $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ de $\mathscr{H}$, on a

$$\langle \Phi, W \rangle_t := (1 - h_0)\langle \phi_1, w_1 \rangle_V + \langle \phi_2, w_2 \rangle + \langle \phi_3, w_3 \rangle_{L^2_h(\mathbb{R}_+, V)} + q\tau(t)\langle \phi_4, w_4 \rangle_{L^2(0,1;H)},$$

où q est un nombre réel positif.

- Nous remarquons que

$$\frac{\|\Phi\|_t}{\|\Phi\|_s} \leq e^{\frac{c}{2\tau_0}|t-s|}, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.16}$$

avec $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ de $\mathscr{H}$ et c est une constante positive. En effet, pour tout $s, t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_t^2 - \|\Phi\|_s^2 e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} &= \Big((1-h_0)\|\phi_1\|_V^2 + \|\phi_2\|^2 + \|\phi_3\|^2_{L^2_h(\mathbb{R}_+,V)}\Big)\Big(1 - e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|}\Big) \\ &\quad + q\Big(\tau(t) - \tau(s)e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|}\Big)\int_0^1 \|\phi_4(\rho)\|^2 d\rho. \end{aligned}$$

On note que $1 - e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \leq 0$. De plus, $\tau(t) - \tau(s)e^{\frac{c}{\tau_0}|t-s|} \leq 0$, pour certains $c > 0$. En effet,

$$\tau(t) = \tau(s) + \tau'(a)(t-s), \quad a \in (s,t),$$

ainsi

$$\frac{\tau(t)}{\tau(s)} \leq 1 + \frac{|\tau'(a)|}{\tau(s)}|t-s|.$$

De (4.3), τ' est borné, donc, il existe $c > 0$ telle que

$$\frac{\tau(t)}{\tau(s)} \leq 1 + \frac{c}{\tau(s)}|t-s|,$$

comme (4.4), ce qui donne (4.16).

- On prouve que $\mathscr{A}(t)$ est un opérateur dissipatif, pour un $t > 0$ fixé. Prenons $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$, alors

$$\begin{aligned} \Big\langle \mathscr{A}(t)\Phi, \Phi \Big\rangle_t &= \left\langle \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -(1-h_0)A\phi_1 - \int_0^{+\infty} h(s)A\phi_3(s)ds - \frac{q}{2}\phi_2 \\ \phi_2 - \frac{\partial \phi_3}{\partial s} \\ \frac{\tau'(t)\rho - 1}{\tau(t)}\frac{\partial \phi_4}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \right\rangle_t \\ &= (1-h_0)\langle \phi_2, \phi_1 \rangle_V - \Big\langle (1-h_0)A\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)A\phi_3(s)ds + \frac{q}{2}\phi_2, \phi_2 \Big\rangle \\ &\quad + \int_0^{+\infty} h(s)\Big\langle \phi_2 - \frac{\partial \phi_3}{\partial s}, \phi_3 \Big\rangle_V ds + q\int_0^1 \Big(\rho\tau'(t) - 1\Big)\Big\langle \frac{\partial \phi_4}{\partial \rho}, \phi_4 \Big\rangle d\rho. \end{aligned}$$

Il est clair que, de la définition de $A^{\frac{1}{2}}$ et le fait que H est un espace de Hilbert, on trouve

$$\langle (1-h_0)A\phi_1, \phi_2 \rangle = (1-h_0)\langle \phi_2, \phi_1 \rangle_V,$$

$$\Big\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\phi_3(s)ds, \phi_2 \Big\rangle = \int_0^{+\infty} h(s)\langle \phi_2, \phi_3 \rangle_V ds.$$

En intégrant par parties et en utilisant le fait que $\phi_3(0)=0$ (définition de $\mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$), on obtient
$$\int_0^{+\infty} h(s)\Big\langle -\frac{\partial \phi_3}{\partial s}, \phi_3\Big\rangle_V ds \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\|\phi_3(s)\|_V^2 ds.$$
En rappelant aussi que $\phi_4(0)=\phi_2$ et en intégrant par parties par rapport à ρ, on obtient
$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(1-\rho\tau'(t)\Big)\langle\frac{\partial \phi_4}{\partial \rho}, \phi_4\rangle d\rho &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\|\phi_4\|^2\Big)\Big(1-\rho\tau'(t)\Big)d\rho \\ &= \frac{\tau'(t)}{2}\int_0^1 \|\phi_4\|^2 d\rho + \frac{1}{2}\|\phi_4(1)\|^2\Big(1-\tau'(t)\Big) - \frac{1}{2}\|\phi_2\|^2.\end{aligned}$$
Alors
$$\Big\langle \mathscr{A}(t)\Phi, \Phi\Big\rangle_t \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\|\phi_3(s)\|_V^2 ds - \frac{q\tau'(t)}{2}\int_0^1 \|\phi_4\|^2 d\rho - \frac{q}{2}\|\phi_4(1)\|^2\Big(1-\tau'(t)\Big),$$
de (4.5), on trouve
$$\Big\langle \mathscr{A}(t)\Phi, \Phi\Big\rangle_t \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\|\phi_3(s)\|_V^2 ds - \frac{q}{2}\|\phi_4(1)\|^2(1-d) + k(t)\langle\Phi,\Phi\rangle_t,$$
avec
$$k(t) = \frac{(\tau'(t)^2+1)^{1/2}}{2\tau(t)}.$$
en utilisant (4.2), il résulte
$$\Big\langle \mathscr{A}(t)\Phi, \Phi\Big\rangle_t - k(t)\langle\Phi,\Phi\rangle_t \leq 0,$$
ce qui donne que $\tilde{\mathscr{A}}(t) = \mathscr{A}(t) - k(t)I$ est un opérateur dissipatif.

• On doit montrer que l'opérateur $\lambda I - \mathscr{A}(t)$ est surjectif, pour un $t>0$ fixé et pour tout $\lambda>0$. En effet, soit $(f_1,f_2,f_3,f_4)^T \in \mathscr{H}$, on doit montre qu'il existe $\Phi = (\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)^T \in\in \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$ tels que
$$(\lambda I - \mathscr{A}(t))\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{pmatrix},$$
ce qu'est équivalent à
$$\begin{cases}\lambda\phi_1 - \phi_2 = f_1\\ \lambda\phi_2 + (1-h_0)A\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)A\phi_3(s)ds + \frac{q}{2}\phi_2 = f_2\\ \lambda\phi_3 - \phi_2 + \frac{\partial\phi_3}{\partial s} = f_3\\ \lambda\phi_4 + \frac{1-\tau'(t)\rho}{\tau(t)}\frac{\partial\phi_4}{\partial\rho} = f_4.\end{cases} \tag{4.17}$$

Supposons qu'on a trouvé ϕ_1 avec une régularité convenable. Alors, on a

$$\phi_2 = \lambda\phi_1 - f_1 \tag{4.18}$$

On note que la troisième équation dans (4.17) avec $\phi_3(0) = 0$ a une solution unique s'écrit comme suit

$$\phi_3(s) = e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda y}\Big(f_3(y) - f_1 + \lambda\phi_1\Big)dy. \tag{4.19}$$

Encore, la quatrième équations dans (4.17) avec $\phi_4(0) = 0$ a une solution unique donnée par

$$\phi_4(\rho) = (\lambda\phi_1 - f_1)\, e^{-\lambda\tau(t)\rho} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)\rho}\int_0^\rho f_4(y)e^{\lambda\tau(t)y}dy,$$

si $\tau'(t) = 0$. Et

$$\begin{array}{rcl}\phi_4(\rho) & = & (\lambda\phi_1 - f_1)\, e^{\frac{\tau(t)}{\tau'(t)}\lambda\ln(1-\tau'(t)\rho)} + \tau(t)e^{\frac{\tau(t)}{\tau'(t)}\lambda\ln(1-\tau'(t)\rho)} \\ & & \times\displaystyle\int_0^\rho \frac{f_4(y)}{1-\tau'(t)y}e^{\frac{\tau(t)}{\tau'(t)}\lambda\ln(1-\tau'(t)y)}dy,\end{array}$$

si $\tau'(t) \neq 0$. Ensuite, en combinant (4.18) et (4.19) dans la deuxième équation de (4.17), on obtient

$$\Big(\beta A + (\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda)I\Big)\phi_1 = \tilde{f}, \tag{4.20}$$

avec

$$\beta = 1 - h_0 - \lambda\int_0^\infty h(s)e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda y}dy\right)ds = 1 - \int_0^\infty h(s)e^{-\lambda s}ds,$$

et

$$\tilde{f} = (\lambda - \frac{q}{2})f_1 + f_2 + \int_0^\infty e^{-\lambda s}h(s)\int_0^s e^{-\lambda y}A\left(f_3(y) - f_1\right)dyds.$$

Il suffit de prouver que (4.20) a une solution $\phi_1 \in V$ et la remplacer dans (4.18), (4.19) et dans l'estimation de ϕ_4 pour obtenir $\Phi \in \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$ satisfaisant (4.17).
On prend la crochets de dualité $\langle ., .\rangle_{V'\times V}$ avec $w \in V$

$$\left\langle \beta A\phi_1 + (\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda)\phi_1, w\right\rangle_{V'\times V} = \left\langle \tilde{f}, w\right\rangle_{V'\times V},$$

comme $w \in V \subset H$. Par conséquent, on arrive au problème suivant :

$$\beta\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}w\right\rangle + (\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda)\left\langle \phi_1, w\right\rangle = \left\langle \tilde{f}, w\right\rangle_{V'\times V}, \qquad \forall w \in V. \tag{4.21}$$

En choisissant q assez petit de sorte que $\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda > 0$ et comme (4.2), le premier membre de l'estimation de (4.21) une forme bilinéaire, continue et coercive sur V. En effet,

$$\begin{array}{rcl}\left|\beta\left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}w\right\rangle + (\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda)\left\langle\phi_1, w\right\rangle\right| & \leq & \beta\left\|A^{\frac{1}{2}}\phi_1\right\|\left\|A^{\frac{1}{2}}w\right\| + \left(\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda\right)\|\phi_1\|\|w\| \\ & \leq & \beta\|\phi_1\|_V\|w\|_V + C\left(\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda\right)\|\phi_1\|_V\|w\| \\ & \leq & C\|\phi_1\|_V\|w\|_V,\end{array}$$

et pour $w = \phi_1 \in V$,

$$\beta \left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi_1, A^{\frac{1}{2}}\phi_1 \right\rangle + (\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda)\|\phi_1\|^2 \geq \beta\|\phi_1\|_V.$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous concluons que (4.17) a une solution unique $\phi_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$ satisfaisant (4.17). En utilisant (4.19), on obtient

$$\left((1-h_0)\phi_1 + \int_0^{+\infty} h(s)\phi_3(s)ds\right) \in D(A).$$

En conclusion, on trouve $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A}(t))$, qui vérifie (4.17). D'où, $\lambda I - \mathscr{A}(t)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et $t > 0$. Encore une fois, comme $k(t) > 0$, il résulte

$$\lambda I - \tilde{\mathscr{A}}(t) = \big(\lambda + k(t)\big)I - \mathscr{A}(t)$$

est surjectif pour $\lambda > 0$ et $t > 0$.

Par conséquent, d'après le théorème .15, pour tout $t > 0$, $\tilde{\mathscr{A}}(t)$ est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contraction sur $\mathscr{H}$ (par rapport au produit scalaire $\langle ., . \rangle_t$). Donc, par (4.16), la famille $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\mathscr{A}}(t) : t \in [0, T]\}$ est une famille stable des générateurs dans $\mathscr{H}$ avec des constantes de stabilité indépendantes de t (voir aussi Proposition 1.1 dans [42]).

- On vérifie l'hypothèse (iii) du théorème 4.1. Comme

$$k'(t) = \frac{\tau''(t)\tau'(t)}{2\tau(t)\left(\tau'(t)^2+1\right)^{1/2}} - \frac{\tau'(t)\left(\tau'(t)^2+1\right)^{1/2}}{2\tau(t)^2}$$

est borné sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$ (par (4.3) et (4.4)), on a

$$\frac{d}{dt}\mathscr{A}(t)\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\tau''(t)\tau(t)\rho - \tau'(t)\Big(\tau'(t)\rho - 1\Big)}{\tau(t)^2}\dfrac{\partial\phi_4}{\partial\rho} \end{pmatrix}$$

avec $\frac{\tau''(t)\tau(t)\rho - \tau'(t)(\tau'(t)\rho - 1)}{\tau(t)^2}$ est borné sur $[0, T]$ par (4.3) et (4.4). alors

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathscr{A}}(t) \in L_*^\infty([0, T], B(\mathscr{D}(\mathscr{A}(0)), \mathscr{H})),$$

l'espace des classes d'équivalence des fonctions essentiellement bornées et fortement mesurables de $[0, T]$ dans $B(\mathscr{D}(\mathscr{A}(0)), \mathscr{H})$.

En conclusion, les hypothèses (i)-(iii) du théorème 4.1 sont vérifiées pour tout $T > 0$.

• Il reste à prouve que Ψ est localement Lipschitzienne sur $\mathscr{H}$. Pour $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T$ et $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ de $\mathscr{H}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Psi(\Phi) - \Psi(W)\|_{\mathscr{H}} &\leq \frac{q}{2}\|\phi_2 - w_2\| + \mu_1 \|G(\phi_2) - G(w_2)\| + \|F(\phi_1) - F(w_1)\| \\
&\quad + |\mu_2| \|P(\phi_4(1)) - P(w_4(1))\| \\
&\leq \left(\frac{q}{2} + \mu_1 L_G(\|\phi_2\|, \|w_2\|)\right)\|\phi_2 - w_2\| + L_F(\|\phi_1\|_V, \|w_1\|_V) \times \\
&\quad \times \|\phi_1 - w_1\|_V + |\mu_2| L_P(\|\phi_4\|, \|w_4\|)\|\phi_4(1) - w_4(1)\| \\
&\leq L(\|\Phi\|_{\mathscr{H}}, \|W\|_{\mathscr{H}})\|\Phi - W\|_{\mathscr{H}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, Ψ est localement Lipschitzienne. Ainsi, à partir des résultats classiques de l'équation d'évolution non linéaire ; la remarque .9, le problème (4.14) admet une unique locale solution U dans l'intervalle $[0, T]$, ce qui complète la preuve du théorème 4.1. $\square$

4.3 Explosion de la solution en temps fini

Dans cette section, on s'intéresse à étudier l'explosion en temps fini de la solution du problème (4.1) pour une énergie initiale positive.

4.3.1 Résultat préliminaire

Pour analyser l'explosion de la solution, nous aurons besoins de quelques lemmes utiles. Nous commençons par introduire la fonctionnelle d'énergie associée au problème (4.13) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + (1 - h_0)\|u\|_V^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds\right) - \mathscr{F}(u) + \xi\tau(t)\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho, t))d\rho \tag{4.22}$$

où ξ est une constante positive (notons que ξ existe selon (4.10)) telle que

$$\frac{|\mu_2|(m-1)}{1-d} < \xi < \mu_1 l - |\mu_2|, \tag{4.23}$$

avec l'énergie initiale donnée par

$$\begin{aligned}
E(0) &= \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + (1 - h_0)\|u_0\|_V^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^0(s)\|_V^2 ds\right) - \mathscr{F}(u_0) \\
&\quad + \xi\int_{-\tau(0)}^0 \mathscr{P}(f_0(s))ds.
\end{aligned}$$

Lemme 4.1. *Soit U solution de problème (4.13). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (4.22) satisfait*

$$E'(t) \leq -C\left(\mathscr{P}(u_t(t)) + \mathscr{P}(z(1, t))\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds \leq 0,$$

où C à choisir ultérieurement.

Démonstration. En utilisant la première équation dans (4.13), on a

$$\begin{aligned}\langle u_{tt}(t), u_t(t)\rangle_{V'\times V} + (1-h_0)\langle Au(t), u_t(t)\rangle_{V'\times V} + \left\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds, u_t(t)\right\rangle_{V'\times V} \\ +\mu_1\langle G(u_t(t)), u_t(t)\rangle_{V'\times V} + \mu_2\langle P(z(1,t)), u_t(t)\rangle_{V'\times V} = \langle F(u(t)), u_t(t)\rangle_{V'\times V}.\end{aligned}$$

La troisième équation de (4.13) donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + (1-h_0)\|u\|_V^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds\right) - \mathscr{F}(u)\right\} \\ + \int_0^{+\infty} h(s)\langle A\eta^t(s), \eta_s^t\rangle_{V'\times V} ds + \mu_1\langle G(u_t(t)), u_t(t)\rangle_{V'\times V} \\ +\mu_2\langle P(z(1,t)), u_t(t)\rangle_{V'\times V} = 0,\end{aligned}$$

en utilisant (4.7) et (4.9), avec $\epsilon = (m-1)/m$, on arrive à

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + (1-h_0)\|u\|_V^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds\right) - \mathscr{F}(u)\right\} \\ \leq\ & |\mu_2|\Big((m-1)\mathscr{P}(z(1,t)) + \mathscr{P}(u_t(t))\Big) - \mu_1 l\mathscr{P}(u_t(t)) \\ & - \int_0^{+\infty} h(s)\Big\langle A\eta^t(s), \eta_s^t\Big\rangle_{V'\times V} ds. \end{aligned} \tag{4.24}$$

D'autre part, il résulte de la deuxième équation dans (4.13) que

$$\Big\langle \xi\tau(t)z_t, P(z(\rho,t))\Big\rangle_{V'\times V} + \Big\langle \xi\Big(1-\rho\tau'(t)\Big)z_\rho, P(z(\rho,t))\Big\rangle_{V'\times V} = 0,$$

ce qui donne

$$\xi\tau(t)\frac{d}{dt}\mathscr{P}(z(\rho,t)) + \xi\Big(1-\rho\tau'(t)\Big)\frac{\partial}{\partial\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho = 0.$$

En intégrant de 0 à 1, par rapport à ρ, on obtient

$$\xi\tau(t)\int_0^1 \frac{d}{dt}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho = -\xi\Big(1-\rho\tau'(t)\Big)\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(\xi\tau(t)\int_0^1 (\mathscr{P}(z(\rho,t)))d\rho\right) \\ =\ & \xi\tau(t)\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho - \xi\Big(1-\rho\tau'(t)\Big)\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\ =\ & \xi\tau(t)\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho - \xi\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\Big(1-\rho\tau'(t)\Big)\mathscr{P}(z(\rho,t))\Big)d\rho \\ & +\xi(-\tau'(t))\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \\ =\ & \xi\Big(\mathscr{P}(z(0,t)) - \Big(1-\tau'(t)\Big)\mathscr{P}(z(1,t))\Big). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Combinons (4.24) et (4.25), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|^2+(1-h_0)\|u\|_V^2+\int_0^{+\infty}h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds\right\}\\
&+\frac{d}{dt}\left\{-\mathscr{F}(u)+\xi\tau(t)\int_0^1(\mathscr{P}(z(\rho,t)))d\rho\right\}\\
\leq\ &(|\mu_2|-\mu_1 l+\xi)\mathscr{P}(u_t(t))+\Big(|\mu_2|(m-1)-\xi\Big(1-\tau'(t)\Big)\Big)\mathscr{P}(z(1,t))\\
&-\int_0^{+\infty}h(s)\Big\langle A\eta^t(s),\eta_s^t\Big\rangle_{V'\times V}ds. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

On intégre par partie le dernier terme et on utilise le fait que $\eta^t(0)=0$ donne

$$-\int_0^{+\infty}h(s)\Big\langle A\eta^t(s),\eta_s^t\Big\rangle_{V'\times V}ds\leq\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}h'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds.$$

En outre, par (4.5), on déduit de (4.26) que

$$\begin{aligned}
E'(t)\ \leq\ &-(\mu_1 l-|\mu_2|-\xi)\mathscr{P}(u_t(t))-\Big(\xi(1-d)-|\mu_2|(m-1)\Big)\mathscr{P}(z(1,t))\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}h'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds\\
\leq\ &-C\Big(\mathscr{P}(u_t(t))+\mathscr{P}(z(1,t))\Big)+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}h'(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds,
\end{aligned}$$

avec

$$C=\min\Big\{\ \mu_1 l-|\mu_2|-\xi\ ,\ \xi(1-d)-|\mu_2|(m-1)\ \Big\},$$

qui est positive par (4.23). Ainsi, la preuve est achevée. □

Ensuite, on introduit les constantes suivantes :

$$\lambda_0=\Big((1-h_0)p^{-1}C_*^{-1}\Big)^{\frac{1}{p-2}},\quad E_0=\left(\frac{1-h_0}{2}-C_*\right)\lambda_0^2, \qquad (4.27)$$

où C_* est la constante donnée dans (4.11).

Lemme 4.2. *Soit U solution du problème (4.13), on suppose que les données initiales vérifient*

$$0<E(0)<E_0,\quad \|u_0\|_V>\lambda_0. \qquad (4.28)$$

Alors, il existe une constante $\lambda_1>\lambda_0$ telle que

$$\|u(t)\|_V>\lambda_1,\quad \mathscr{F}(u(t))>C_*\lambda_1^p,\quad \forall t\in[0,T]. \qquad (4.29)$$

Démonstration. De la définition de la fonctionnelle d'énergie (4.22) et (4.11), on déduit que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}(1-h_0)\|u(t)\|_V^2 - \mathscr{F}(u(t)) \\ &\geq \frac{1}{2}(1-h_0)\|u(t)\|_V^2 - C_*\|u(t)\|_V^p \\ &= \frac{1}{2}(1-h_0)\lambda^2 - C_*\lambda^p = Q(\lambda) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Il est facile de vérifier que Q est croissante pour $0 < \lambda < \lambda_0$, décroissante pour $\lambda > \lambda_0$, et $Q(\lambda) \longrightarrow -\infty$ lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$, de plus

$$Q(\lambda_0) = \left(\frac{1-h_0}{2} - C_*\right)\lambda_0^2 = E_0$$

où λ_0 est donné par (4.27).

Par conséquent, comme $E(0) < E_0$, il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $Q(\lambda_1) = E(0)$. On choisit $\lambda_2 = \|u_0\|_V$ alors, par (4.30), on a $Q(\lambda_2) \leq E(0) = Q(\lambda_1)$. ce qui donne, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Pour établir $\|u(t)\|_V > \lambda_1$, on raisonne par absurde en supposant que $\|u(t_0)\|_V < \lambda_1$ pour un certain $t_0 > 0$. De la continuité de $\|u(t)\|_V$, on peut choisir t_0 tel que $\|u(t_0)\|_V > \lambda_0$. Encore une fois, on utilise (4.22), il résulte

$$E(t_0) \geq Q(\|u(t_0)\|_V) > Q(\lambda_1) = E(0).$$

Ceci est impossible puisque $E(t) \leq E(0)$, pour tout $t \geq 0$.

Reste à montrer que $\mathscr{F}(u(t)) > C_*\lambda_1^p$, exploitons (4.22) et que E est décroissante, on obtient

$$\frac{1}{2}(1-h_0)\|u(t)\|_V^2 - \mathscr{F}(u(t)) \leq E(t) \leq E(0).$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(u(t)) &\geq \frac{1}{2}(1-h_0)B^{-2}\|u(t)\|_V^2 - E(0) \\ &\geq \frac{1}{2}(1-h_0)B^{-2}\lambda_1^2 - Q(\lambda_1) = C_*\lambda_1^p. \end{aligned}$$

La preuve est complète. □

4.3.2 Explosion en temps fini

Le résultat d'explosion de la solution est assuré par le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit $p > m$ et les hypothèses (A1)-(A6) sont vérifiées. On suppose que h satisfait*

$$h_0 < \frac{p-2}{p-1/(2\gamma)}, \tag{4.31}$$

où γ est une positive constante à choisir ultérieurement. Supposons en outre que les conditions (4.28) vérifiées, alors la solution du (2.2) explose en temps fini.

Démonstration. Par absurde, on suppose que la solution du problème (4.13) est globale, alors, pour tout $T > 0$ fixé, il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2 + \|u\|_V^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds\\ &+\mathscr{F}(u) + H(t) + \xi\tau(t)\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \leq C, \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned} \tag{4.32}$$

On définit la fonction suivante :

$$H(t) = E_0 - E(t). \tag{4.33}$$

Ensuite, d'après le lemme 4.1, on déduit que $H'(t) \geq 0$. De plus, par (4.28), on trouve

$$H(t) \geq H(0) = E_0 - E(0) > 0,$$

en utilisant (4.22) et (4.33), on arrive à

$$H(t) \leq E_0 - \frac{1}{2}(1-h_0)\|u(t)\|_V^2 + \mathscr{F}(u(t)).$$

Ainsi, selon le lemme 4.2, il s'ensuit

$$H(t) \leq E_0 - \frac{1}{2}(1-h_0)\lambda_0^2 + \mathscr{F}(u).$$

Par conséquent

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \mathscr{F}(u). \tag{4.34}$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit à choisir ultérieurement, on définit la fonction auxiliaire L comme suit

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\langle u_t, u\rangle, \quad t \geq 0,$$

où

$$0 < \alpha \leq \min\left\{\frac{p-2}{2p}, \frac{p-m}{p(m-1)}\right\}. \tag{4.35}$$

On Dérive la fonction L par rapport à t et on utilise la première equation dans (4.13), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 - \varepsilon(1-h_0)\|u\|_V^2 \\ &\quad -\varepsilon\left\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds, u\right\rangle_{V'\times V} - \varepsilon\mu_1\langle G(u_t), u\rangle_{V'\times V} \\ &\quad -\varepsilon\mu_2\langle P(z(1,t)), u\rangle_{V'\times V} + \varepsilon\langle F(u), u\rangle_{V'\times V}. \end{aligned}$$

On utilise (A4) et (4.6) pour estimer les deux derniers termes, on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 - \varepsilon(1-h_0)\|u\|_V^2 \\ &\quad -\varepsilon\left\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds, u\right\rangle_{V'\times V} - \varepsilon\mu_1\langle G(u_t), u\rangle_{V'\times V} \\ &\quad -\varepsilon|\mu_2|\left(\delta^m\mathscr{P}(u) + (m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}\mathscr{P}(z(1,t))\right) + \varepsilon p\mathscr{F}(u), \end{aligned} \tag{4.36}$$

D'autre part, l'utilisation des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young donne, pour $\delta_1, \delta_2 > 0$,

$$\langle G(u_t), u\rangle_{V'\times V} \leq \delta_1 \|G(u_t)\|^2_{V'} + \frac{1}{4\delta_1}\|u\|^2_V, \tag{4.37}$$

$$\langle G(u_t), u_t\rangle_{V'\times V} \leq \delta_2 \|G(u_t)\|^2_{V'} + \frac{1}{4\delta_2}\|u\|^2,$$

Ensuite, de (4.7), on a

$$l\mathscr{P}((u_t(t)) \leq \delta_2 \|G(u_t)\|^2_{V'} + \frac{1}{4\delta_2}\|u_t\|^2, \tag{4.38}$$

En combinant (4.37) et (4.38), on obtient

$$\langle G(u_t), u\rangle_{V'\times V} \leq \frac{1}{4\delta_1}\|u\|^2_V + \frac{\delta_1 l}{\delta_2}\mathscr{P}((u_t(t)) - \frac{\delta_1}{4\delta_2^2}\|u_t\|^2,$$

alors,

$$\langle G(u_t), u\rangle_{V'\times V} \leq \frac{1}{4\delta_1}\|u\|^2 + \frac{\delta_1 l}{\delta_2}\mathscr{P}((u_t(t)).$$

On choisit $\delta_2 = \frac{\delta_1 l}{(m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}}$ de sorte que

$$\langle G(u_t), u\rangle_{V'\times V} \leq \frac{1}{4\delta_1}\|u\|^2 + (m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}\mathscr{P}((u_t(t)). \tag{4.39}$$

Donc, par (4.39), l'estimation (4.36) devient

$$\begin{aligned} L'(t) \quad \geq \quad & (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 - \varepsilon(1 + \frac{\mu_1}{4\delta_1} - h_0)\|u\|^2_V \\ & -\varepsilon\Big\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds, u\Big\rangle_{V'\times V} - \varepsilon\mu_1(m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}\mathscr{P}(u_t(t)) \\ & -\varepsilon|\mu_2|\left(\delta^m\mathscr{P}(u) + (m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}\mathscr{P}(z(1,t))\right) + \varepsilon p\mathscr{F}(u). \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young pour le quatrième terme dans l'estimation précédente, on trouve, pour une constante positive γ telle que $\gamma > \frac{1}{4}$ que

$$\Big\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds, u\Big\rangle_{V'\times V} \leq \frac{h_0}{4\gamma}\|u\|^2_V + \gamma\int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|^2_V ds.$$

En prenant $\delta_1 = \frac{\gamma\mu_1}{2h_0(2\gamma-1)}$, on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \quad \geq \quad & (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 - \varepsilon(1 - \frac{h_0}{4\gamma})\|u\|^2_V \\ & -\varepsilon\Big\langle \int_0^{+\infty} h(s)A\eta^t(s)ds, u\Big\rangle_{V'\times V} - \varepsilon\mu_1(m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}\mathscr{P}(u_t(t)) \\ & -\varepsilon|\mu_2|\left(\delta^m\mathscr{P}(u) + (m-1)\delta^{\frac{-m}{m-1}}\mathscr{P}(z(1,t))\right) + \varepsilon p\mathscr{F}(u). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Par (4.33) et en utilisant le lemme 4.1, on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t) - \varepsilon(\mu_1 + |\mu_2|)\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}}\right]H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 + \varepsilon p \mathscr{F}(u) \\ & -\varepsilon\left(1 - \frac{h_0}{4\gamma}\right)\|u\|_V^2 - \varepsilon\gamma\int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds - \varepsilon\mu_2\delta^m \mathscr{P}(u). \end{aligned} \tag{4.41}$$

L'estimation (4.41) reste valide même si δ dépend du temps. Par conséquent, en prenant

$$\delta^{\frac{-m}{m-1}} = \tilde{k}H^{-\alpha}(t),$$

où $\tilde{k}$ est une constante assez grande et à déterminer ultérieurement. Par substitution dans la dernière inégalité, il vient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1-\alpha) - \varepsilon(\mu_1 + |\mu_2)|\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}}\right]H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 \\ & +\varepsilon p \mathscr{F}(u) - \varepsilon\left(1 - \frac{h_0}{4\gamma}\right)\|u\|_V^2 - \varepsilon\gamma\int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds \\ & -\varepsilon\mu_2\tilde{k}^{1-m}H^{\alpha(m-1)}\mathscr{P}(u). \end{aligned} \tag{4.42}$$

En utilisant (4.34), nous trouvons $H^\alpha(t) \leq (\mathscr{F}(u))^\alpha$. Ainsi, en exploitant (A6), on obtient

$$H^{\alpha(m-1)}\mathscr{P}(u) \leq c(\mathscr{F}(u))^{\alpha(m-1)+\frac{m}{p}}, \tag{4.43}$$

où c est une constante positive. On insère (4.43) dans (4.42), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1-\alpha) - \varepsilon(\mu_1 + |\mu_2|)\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}}\right]H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\|u_t\|^2 \\ & +\varepsilon p \mathscr{F}(u) - \varepsilon\left(1 - \frac{h_0}{4\gamma}\right)\|u\|_V^2 - \varepsilon\gamma\int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds \\ & -\varepsilon\mu_2\tilde{k}^{1-m}C(\mathscr{F}(u))^{\alpha(m-1)+\frac{m}{p}}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

En ajoutant et en soustrayant le terme $\varepsilon p H(t)$, (4.44) devient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1-\alpha) - \varepsilon(\mu_1 + |\mu_2|)\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}}\right]H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\frac{p}{2}+1\right)\|u_t\|^2 + \varepsilon p H(t) \\ & +\varepsilon\left(\frac{p}{2}(1-h_0) - \left(1 - \frac{h_0}{4\gamma}\right)\right)\|u\|_V^2 + \varepsilon\left(\frac{p}{2} - \gamma\right)\int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds - \varepsilon p E_0 \\ & +\varepsilon\xi\tau(t)\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho - \varepsilon\mu_2\tilde{k}^{1-m}C(\mathscr{F}(u))^{\alpha(m-1)+\frac{m}{p}}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Observons que

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{2}(1-h_0) - (1 - \frac{h_0}{4\gamma})\right)\|u\|_V^2 - pE_0 \geq & \left(\frac{p}{2}(1-h_0) - (1 - \frac{h_0}{4\gamma})\right)\frac{\lambda_1^2 - \lambda_0^2}{\lambda_1^2}\|u\|_V^2 \\ & + \left(\frac{p}{2}(1-h_0) - (1 - \frac{h_0}{4\gamma})\right)\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\|u\|_V^2 - pE_0, \end{aligned}$$

où λ_1 est défini dans le lemme 4.2. De (4.29), il s'ensuit que

$$\left(\frac{p}{2}(1-h_0)-(1-\frac{h_0}{4\gamma})\right)\|u\|_V^2-pE_0\geq\left(\frac{p}{2}(1-h_0)-(1-\frac{h_0}{4\gamma})\right)C_1\|u\|_V^2+C_2,$$

où $C_1=\dfrac{\lambda_1^2-\lambda_0^2}{\lambda_1^2}$, en utilisant le lemme 4.2, on a $C_1>0$. De plus, en utilisant (4.27) et le fait que $\gamma>\frac{1}{4}$, on trouve

$$\left(\frac{p}{2}(1-h_0)-(1-\frac{h_0}{4\gamma})\right)\lambda_0^2-pE_0>0.$$

D'autre part, pour estimer le dernier terme dans le second membre de l'estimation (4.45), on exploite l'inégalité algébrique suivante :

$$a^\theta\leq a+1\leq\Big(1+\frac{1}{b}\Big)(a+b),\quad\forall a\geq 0,\quad 0<\theta\leq 1,\quad b\geq 0,\tag{4.46}$$

avec $a=\mathscr{F}(u)$, $C=1+\dfrac{1}{H(0)}$, $b=H(0)$ et $\theta=\alpha(m-1)+\frac{m}{p}$, alors la condition (4.35) implique que $0<\theta\leq 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(u))^\theta &\leq C\left(\mathscr{F}(u)+H(0)\right)\\ &\leq C\left(\mathscr{F}(u)+H(t)\right).\end{aligned}$$

Insérant la dernière estimation dans (4.45), on arrive à

$$\begin{aligned}L'(t)\ \geq\ & \Big[(1-\alpha)-\varepsilon(\mu_1+|\mu_2|)\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}}\Big]H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\Big(\frac{p}{2}+1\Big)\|u_t\|^2\\ &+\varepsilon\Big(\frac{p}{2}(1-h_0)-\Big(1-\frac{h_0}{4\gamma}\Big)\Big)C_1(\lambda)\|u\|_V^2+\varepsilon\Big(\frac{p}{2}-\gamma\Big)\int_0^{+\infty}h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds\\ &+\varepsilon\xi\tau(t)\int_0^1\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho+\varepsilon\Big[pH(t)-\mu_2\tilde{k}^{1-m}C_2\Big(\mathscr{F}(u)+H(t)\Big)\Big].\end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty}h(s)ds<\frac{p-2}{p-1/(2\gamma)}\quad\text{et}\quad\gamma>\frac{1}{4},$$

de plus, pour p satisfait $p>\min\{2,2\gamma\}$, on a

$$\frac{p}{2}(1-h_0)-\Big(1-\frac{h_0}{4\gamma}\Big)>0,\qquad\frac{p}{2}-\gamma>0.$$

À ce point, on choisit $\tilde{k}>\left(\dfrac{2\mu_2C_3}{p}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ suffisamment grand de sorte que

$$\begin{aligned}L'(t)\ \geq\ & \Big[(1-\alpha)-\varepsilon(\mu_1+|\mu_2|)\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}}\Big]H^{-\alpha}(t)H'(t)+K_1\|u_t\|^2+K_2\|u\|_V^2\\ &+K_3\int_0^{+\infty}h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds+K_4\xi\tau(t)\int_0^1\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho\\ &+K_5\left(\mathscr{F}(u)+H(t)\right).\end{aligned}\tag{4.47}$$

Encore, on choisit ε assez petit de sorte que

$$\begin{aligned}(1-\alpha)-\varepsilon(\mu_1+|\mu_2|)\frac{m-1}{C}\delta^{\frac{-m}{m-1}} &> 0,\\ H^{-\alpha}(0)+\varepsilon\langle u_1,u_0\rangle &> 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour certain $K>0$, l'estimation (4.47) devient

$$\begin{aligned}L'(t) \geq\ & K\Bigg(\|u_t\|^2+\|u\|_V^2+\int_0^{+\infty}h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2ds+\mathscr{F}(u)\\ &+H(t)+\xi\tau(t)\int_0^1\mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho\Bigg).\end{aligned}\tag{4.48}$$

D'où

$$L(t)\geq L(0)>0.$$

En outre, l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle u_t,u\rangle\leq\|u_t\|\,\|u\|_V,$$

L'inégalité de Young découle

$$|\langle u_t,u\rangle|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq C\Big(\|u_t\|^{\frac{\beta_1}{1-\alpha}}+\|u\|_V^{\frac{\beta_2}{1-\alpha}}\Big),$$

pour $1/\beta_1+1/\beta_2=1$. En prenant $\beta_1=2(1-\alpha)$ ce qui donne $\beta_2/(1-\alpha)=2/(1-2\alpha)\leq p$. Encore une fois, en utilisant (4.35) et (4.46), il résulte

$$(\|u\|_V^p)^{\frac{2}{p(1-2\alpha)}}\leq e\left(\|u\|_V^p+H(t)\right),$$

par (4.12), on obtient

$$|\langle u_t,u\rangle|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq C\left(H(t)+\|u_t\|^2+\mathscr{F}(u)\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= \left(H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon\langle u_t,u\rangle\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\\ &\leq C\left[H(t)+|\langle u_t,u\rangle|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]\\ &\leq C\left[H(t)+\|u_t\|^2+\mathscr{F}(u)\right].\end{aligned}\tag{4.49}$$

De (4.48) et (4.49), on a

$$L'(t)\geq\Lambda L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t),\quad\forall t\in[0.T]\tag{4.50}$$

avec Λ est une constante positive ne dépendant que de C et λ. Une intégration simple de (4.49) sur $(0,t)$ donne

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t)\geq\frac{1}{L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)-\Lambda\alpha t/(1-\alpha)},\quad\forall t\in[0.T].\tag{4.51}$$

Par conséquent L s'explose en temps fini

$$T \leq T^* = \frac{1-\alpha}{\Lambda \alpha L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}.$$

L'estimation (4.51) est valide sur $[0,T]$ pour tout $T>0$ fixé, on peut choisir T tel que $T^* < T$. En outre, on obtient de (4.48) que

$$\lim_{t\to T^{*-}} \Bigg[\|u_t\|^2 + \|u\|_V^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\eta^t(s)\|_V^2 ds \\ + \mathscr{F}(u) + H(t) + \xi\tau(t)\int_0^1 \mathscr{P}(z(\rho,t))d\rho \Bigg] = +\infty,$$

ce qui est en contradiction avec (4.32). Ainsi, la solution du problème (4.1) s'explose en temps fini. □

Remarque 4.3. *Dans le cas où $E(0)<0$, on prend $H(t)=-E(t)$, au lieu de (4.33) et on utilise les mêmes arguments à ceux utilisés dans la preuve du théorème 4.2 pour en déduire que la solution a énergie initiale négative explose en un temps fini.*

4.4 Applications

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$ à frontière régulière.

4.4.1 Équation des ondes

On considère l'équation d'onde à retard variable avec une mémoire infinie suivante :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} h(t-s)\Delta u(x,s)ds + \mu_1|u_t(x,t)|^{m-2}u_t(x,t) & \\ \quad +\mu_2|u_t(x,t-\tau(t))|^{m-2}u_t(x,t-\tau(t)) = b|u(x,t)|^{p-2}u(x,t), & \Omega\times(0,+\infty), \\ u(x,t)=0, & \partial\Omega\times(0,+\infty), \\ u_t(t-\tau(0)) = f_0(t-\tau(0)), & (0,\tau(0)), \\ u(x,-t)=u_0(x,t), \quad u_t(x,0)=u_1(x), & \Omega\times[0,+\infty), \end{cases} \tag{4.52}$$

où $p>m\geq 2$, b, μ_1 sont des constantes positives et $\tau \to \tau(t)$ est une fonction représentant le retard telle que (A2) soit vérifiée. μ_2 est un nombre réel satisfait $|\mu_2| < \frac{(1-d)m}{(m-d)}\mu_1$ et la fonction noyau h satisfait (A1). Pour ce système, on a le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Soient $(u_0,u_1) \in [H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]\times H_0^1(\Omega)$ et $f_0 \in H^1(-\tau(0),0;L^2(\Omega))$. On suppose que $2\leq m<p\leq \frac{2n}{n-2}$, si $n\geq 3$ et $2\leq m<p\leq+\infty$ si $n=1,2$. De plus,*

$$\int_0^{+\infty} h(s)ds < \frac{p-2}{p-1/(2\gamma)},$$

où γ est une constante positive telle que $\gamma > \frac{1}{4}$ et

$$
\begin{aligned}
E(0) &= \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_2^2 + (1-h_0)\|\nabla u_0\|_2^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\nabla\eta^0(s)\|_2^2 ds\right) \\
&\quad -\frac{b}{p}\|u_0\|_p^p + \frac{\xi}{m}\int_\Omega\int_{-\tau(0)}^0 |f_0(x,s)|^m d\rho dx > 0,
\end{aligned}
$$

avec

$$\frac{|\mu_2|(m-1)}{1-d} < \xi < \mu_1 m - |\mu_2|.$$

Alors, la solution de problème (4.52) explose en temps fini.

Démonstration. Ce problème entre dans notre cadre abstrait, si on prend $H = L^2(\Omega)$ et l'opérateur A donné par

$$A : D(A) \longrightarrow H \ : u \longrightarrow -\Delta u,$$

avec $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. L'opérateur A un opérateur linéaire positif auto-adjoint sur H tel que $V = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ avec $\|u\|_V = \|\nabla u\|_2$. De plus, les fonctions G, P et F sont définies par

$$G(u) = P(u) = |u|^{m-2}u, \quad F(u) = b|u|^{p-2}u.$$

Ainsi, on a

$$\mathscr{P}(u) = \frac{1}{m}\|u\|_m^m, \quad \mathscr{F}(u) = \frac{b}{p}\|u\|_p^p.$$

En effet, l'hypothèse (A3) est triviale en prenant $l = m$, (A4) peut être obtenu en utilisant l'inégalité de Young. Enfin, l'hypothèse (A6) est un résultat direct des injections de Lebesgue. Le résultat souhaité est établi en appliquant le théorème 4.2. □

4.4.2 Système de Petrovsky

On considère le système de Petrovsky suivant avec les conditions de Dirichlet-Neumann

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) - \int_0^{+\infty} h(t-s)\Delta^2 u(x,s)ds + \mu_1 u_t(x,t) & \\
\qquad +\mu_2 a(x) u_t(x, t-\tau(t)) = b|u(x,t)|^{p-2}u(x,t), & \Omega \times (0,+\infty), \\
u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \times (0,+\infty), \\
u_t(t-\tau(0)) = f_0(t-\tau(0)), & (0,\tau(0)), \\
u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \times [0,+\infty),
\end{cases}
\tag{4.53}
$$

où b et μ_1 sont des constantes positives. Les fonctions τ et h vérifient les hypothèses (A2) et (A1), respectivement. La fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$a(x) \geq 0 \quad \text{a. e. in} \quad \Omega.$$

De plus, le réel μ_2 satisfait $|\mu_2| < \frac{2(1-d)}{\|a\|_\infty(2-d)}\mu_1$.

Théorème 4.4. *Soient* $(u_0, u_1) \in [H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)] \times H_0^2(\Omega)$ *et* $f_0 \in H^1(-\tau(0), 0; L^2(\Omega))$. *On suppose que* $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-4}$, *si* $n \geq 5$ *et* $2 \leq p \leq +\infty$ *si* $n \leq 4$. *De plus*

$$\int_0^{+\infty} h(s)ds < \frac{p-2}{p-1/(2\gamma)},$$

où γ *est une constante positive telle que* $\gamma > \frac{1}{4}$ *et*

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_2^2 + (1-h_0)\|\Delta u_0\|_2^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\Delta\eta^0(s)\|_2^2 ds\right) \\ &\quad -\frac{b}{p}\|u_0\|_p^p + \frac{\xi}{2}\int_\Omega a(x)\int_{-\tau(0)}^0 f_0^2(x,s)d\rho dx > 0, \end{aligned}$$

avec

$$\frac{|\mu_2|}{d-1} < \xi < \frac{2\mu_1}{\|a\|_\infty} - |\mu_2|.$$

Alors, la solution de problème (4.53) *explose en temps fini.*

Démonstration. L'opérateur A défini sur $D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ par

$$Au = \Delta^2 u, \quad \forall u \in D(A).$$

est un opérateur linéaire positif auto-adjoint sur $H = L^2(\Omega)$ avec $V = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^2(\Omega)$ et $\|u\|_V = \|\Delta u\|_2$. La fonction F est la même que celle de la section. 4.4.1, donc, il reste à vérifier les hypothèses (A3)-(A6), pour

$$G(u) = u, \quad P(u) = a(x)u, \quad \mathscr{P}(u) = \int_\Omega a(x)u^2 dx.$$

La deuxième estimation de (A3) est établie en utilisant le fait que $a \in L^\infty(\Omega)$, l'hypothèse (A4) peut être obtenue par l'inégalité de Young et (A6) est un résultat direct de l'injection de Lebesgue. □

4.4.3 Équation d'onde avec non-linéarité compacte

Soit le système d'onde suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} h(t-s)\Delta u(x,s)ds + \mu_1 u_t(x,t) & \\ \quad +\mu_2 a(x)u_t(x,t-\tau(t)) = \left(\int_\Omega K(x,t)u(y,t)^2 dy\right)u(x,t), & \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u_t(t-\tau(0)) = f_0(t-\tau(0)), & (0,\tau(0)), \\ u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \times [0,+\infty), \end{cases} \tag{4.54}$$

où $p > 2$, b, μ_1 sont des constantes positives, la fonction $\tau \to \tau(t)$ vérifie l'hypothèse (A2) et h vérifie (A1). De la même façon que (4.53), la fonction $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que

$$a(x) \geq 0 \quad \text{a. e. in} \quad \Omega.$$

et, μ_2 satisfait $|\mu_2| < \frac{2(1-d)}{\|a\|_\infty(2-d)}\mu_1$. $K : \Omega \times \Omega \to (0, +\infty)$ est une fonction bornée telle que $K(x,y) = K(y,x)$ et

$$\alpha \leq K(x,y) \leq \beta, \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{4.55}$$

pour α et β des nombres réels positifs.

Théorème 4.5. *Soient $(u_0, u_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$ et $f_0 \in H^1(-\tau(0), 0; L^2(\Omega))$. Supposons que*

$$\int_0^{+\infty} h(s)ds < \frac{p-2}{p-1/(2\gamma)},$$

où γ est une constante positive satisfait $\gamma > \frac{1}{4}$ avec l'énergie initiale donnée comme suit

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\Big(\|u_1\|_2^2 + (1-h_0)\|\nabla u_0\|_2^2 + \int_0^{+\infty} h(s)\|\nabla\eta^0(s)\|_V^2 ds\Big) \\ &\quad -\frac{1}{4}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,t)u_0(x)^2u_0(y)^2dxdy \\ &\quad +\frac{\xi}{2}\int_\Omega a(x)\int_{-\tau(0)}^0 f_0^2(x,s)d\rho dx > 0, \end{aligned}$$

où

$$\frac{|\mu_2|}{d-1} < \xi < \frac{2\mu_1}{\|a\|_\infty} - |\mu_2|.$$

Alors, la solution du système (4.54) explose en temps fini.

Démonstration. Suite à l'application 4.4.1, l'opérateur $A = -\Delta$ est un opérateur linéaire positif auto-adjoint sur $H = L^2(\Omega)$ avec $V = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ et $\|u\|_V = \|\nabla u\|_2$. Les fonctions G et P sont définies similaire à celles dans l'application (4.4.2).
Maintenant, on vérifie les hypothèses (A3) et (A6) pour

$$F(u)(x) = \Big(\int_\Omega K(x,t)u(y)^2dy\Big)u(x), \qquad \forall x \in \Omega,$$

pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$. Le potentiel $\mathcal{F}$ est donnée par

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{4}\int_{\Omega\times\Omega} K(x,t)u(x)^2u(y)^2dxdy.$$

Ainsi, (A3) est vérifiée avec $p = 4$. Pour consulter (A6), on utilise l'hypothèse (4.55), il résulte

$$\frac{\alpha}{4}\Big(\int_\Omega u(x)^2dx\Big)^2 \leq \mathscr{F}(u) \leq \frac{\beta}{4}\Big(\int_\Omega u(x)^2dx\Big)^2,$$

ce qui donne (A6). □

4.4.4 Quelques autres applicatons

Nos résultats sont valables aussi pour les applications dans [38] sans terme mémoire et la fonction τ soit indépendante du temps. Dans la suite, μ_1 est un nombre positive et μ_2 est un nombre réel telles que $\mu_1 > |\mu_2|$. Par conséquent, nous avons

1-Système d'onde avec un terme d'amortissement non linéaire

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \mu_1 |u_t(x,t)|^{m-2} u_t(x,t) & \\ \quad + \mu_2 |u_t(x,t-\tau(t))|^{m-2} u_t(x,t-\tau) = b|u(x,t)|^{p-2}u(x,t), & \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & (0,\tau), \\ u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \times [0,+\infty), \end{cases} \tag{4.56}$$

où $p > m \geq 2$, b sont des constantes positives.

2-Système de Petrovsky

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \mu_1 |u_t(x,t)|^{m-2} u_t(x,t) & \\ \quad + \mu_2 |u_t(x,t-\tau(t))|^{m-2} u_t(x,t-\tau) = b|u(x,t)|^{p-2}u(x,t), & \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & (0,\tau), \\ u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \times [0,+\infty), \end{cases} \tag{4.57}$$

où $p > m \geq 2$, b sont des constantes positives.

3-Système d'onde avec non-linéarité compacte

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) & \\ \qquad\qquad = \left(\int_\Omega K(x,t) u(y,t)^2 dy\right) u(x,t), & \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u_t(t-\tau) = f_0(t-\tau), & (0,\tau), \\ u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \times [0,+\infty), \end{cases} \tag{4.58}$$

où $K : \Omega \times \Omega \to (0,+\infty)$ est une fonction bornée telle que $K(x,y) = K(y,x)$ et

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha \leq K(x,y) \leq \beta, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence, la stabilité et l'explosion en temps fini de la solution de certains problèmes d'évolution viscoélastiques abstraites du second ordre dans des espaces de Hilbert avec un terme retard. Premièrement, on a étudié des équations d'évolution abstraites linéaires et semi linéaires avec retard et une mémoire infinie et on a établi la stabilité sous une décroissance exponentielle et arbitraire de la fonction noyau. Ensuite, pour une classe très large des fonctions noyaux du terme viscoélastique, nous avons établi un résultat de stabilité explicite et générale de la solution par la méthode énergétique et quelques propriétés des fonctions convexes pour un système d'évolution abstrait linéaire avec un retard constant et une mémoire infinie et un système viscoélastique abstraite avec un retard dans un terme interne non linéaire d'amortissement et un terme source non linéaire. Sous certaines hypothèses sur les données initiales et en supposant que le poids de l'amortissement linéaire/non linéaire est plus grand que le poids du retard, nous avons prouvé l'existence globale, l'unicité et la stabilité de la solution qui cité ci-dessus pour les deux problèmes cités auparavant. Ensuite, nous avons intéressé à présenter des exemples et des applications illustratifs.

Enfin, nous avons étudié l'existence locale et l'explosion en temps fini d'un problème d'évolution viscoélastique non linéaire à retard variable avec une mémoire infinie. Sous des conditions appropriées, nous avons prouvé l'existence locale en se basant à la théorie des semi groupes. Puis, nous avons établi l'explosion en temps fini de la solution et nous avons terminé par exhiber des applications.

Après la réalisation de ce travail, comme perspective de recherche, il serait intéressant de réaliser les objectifs suivants :

◇ Avoir des mêmes résultats de stabilité obtenus lorsque le terme retard constant est remplacé par un terme du retard distribué $\int_0^\infty f(s)u_t(t-s)ds$, où f est de classe $C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

◇ Avoir les mêmes résultats obtenus en éliminant le terme linéaire/non linéaire d'amortissement et garder le retard apparaît dans le terme d'amortissement, autrement dit, en affaiblissant les conditions sur le poids de l'amortissement et le poids du retard.

◇ Considérer d'autres problèmes d'évolution abstraits et faire une étude sur l'existence et le comportement asymptotique de la fonctionnelle d'énergie de la solution en utilisant d'autre méthode que la méthode énergétique ou dans une variété Riemannienne.

Appendice

Les prinipaux ouvrages utilisés sont [65], [66], [31], [70] et [76].

Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition .1. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_X$, complet pour la distance associée à sa norme.

Définition .2. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance associée à sa norme.

Définition .3. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$). On dit qu'un opérateur A est linéaire si et seulement si

$$\forall x, y \in X, \quad A(x+y) = A(x) + A(y),$$

$$\forall x \in X, \, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y est noté par $L(X,Y)$.

Remarque .4. *Lorsque $Y = \mathbb{K}\,(\mathbb{R}\text{ où}\,\mathbb{C})$, $L(X,\mathbb{K})$ est l'ensemble des* ***forme linéaire*** *sur X.*

Définition .4. Soient X et Y deux espaces normés sur $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}\text{ où}\,\mathbb{C})$. Un opérateur linéaire A défini de X dans Y est dit **continu** en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta > 0 : \quad \|x - x_0\|_X \leq \delta \Rightarrow \|A(x) - A(x_0)\|_Y \leq \varepsilon.$$

ou par la définition équivalente : l'opérateur A est continu en x_0 si

$$Ax_n \to Ax_0 \text{ (dans } Y) \text{ dés que } x_n \to x_0 \text{ (dans } X) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

L'opérateur A est continu sur G tel que $G \subseteq X$, s'il est continu en chaque point de G. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y est noté par $\mathcal{L}(X,Y)$.

Théorème .6. *Soient X et Y deux espaces normés sur $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}\text{ ou}\,\mathbb{C})$ et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire. Si A est continu en x_0, alors A est continu partout.*

Remarque .5. *Soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, A continu en point 0 si et seulement si A est continu partout.*

Définition .5. Un opérateur linéaire $A : X \to Y$ est dit **borné** s'il existe une constante positive M, telle que
$$\forall x \in X, \quad \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Proposition .1. *La plus petite constante des M est la norme de A.*
$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|\leq 1\ x\neq 0} \|A(x)\|_Y.$$

Définition .6. Le graphe d'un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow X$ est le sous-espace de $X \times Y$ donné par
$$G(A) = \Big\{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\Big\} \subset X \times Y.$$

Définition .7. On dit que l'opérateur $A : X \longrightarrow Y$ est **fermé** si son graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times Y$.

On donne une caractérisation des opérateurs fermés par la suite dans la définition suivante :

Définition .8. On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(A)$ converge vers x telle que la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y et on a :
$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et} \quad y = Ax$$

Théorème .7. *Soit X un espace normé et Y un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace de Banach.*

Théorème .8. *Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement s'il est borné.*

Théorème .9 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient X et Y deux espaces de Banach, soit $(A_j)_{j\in J}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateur linéaire continue de X dans Y. On suppose que*
$$\sup_{j\in J} ||A_j x||_Y < \infty, \quad \forall x \in X,$$
alors
$$\sup_{j\in J} ||A_j||_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$
Autrement dit, il existe une constante C telle que
$$||A_j x||_Y \leq C||x||_X \quad \forall x \in X, \quad \forall j \in J.$$

Définition .9. Soit X un espace normé sur $\mathbb{K}$, on appel **dual topologique** de X l'espace vectoriel des formes linéaires continues de X dans $\mathbb{K}$. Cet espace est noté par X'.

Théorème .10. *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire borné, alors il existe un opérateur linéaire borné unique noté $A^* : Y^* \to X^*$ tel que*
$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y \quad \langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle.$$

Définition .10. L'opérateur A^* s'appelle **l'adjoint** de A.

Définition .11. Un opérateur A dans un espace de Hilbert est dit **symétrique** si $A \subset A^*$, c'est-à-dire,
$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^*), \quad Au = A^*u \quad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}(A).$$
Il est claire que A est symétrique si et seulement si
$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \quad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

Définition .12. Si $A^* = A$, l'opérateur A est dit **auto-adjoint**.

Définition .13 (Opérateur positif)**.** Soient X un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert X dans lui même, on dit que A est un opérateur positif, et on le note par $A \geq 0$, si pour tout $\varphi \in X$ on a
$$\langle A\varphi, \varphi\rangle_X \geq 0.$$

Définition .14 (Racine carrée d'un opérateur)**.** Soit A un opérateur linéaire positif sur un espace de Hilbert X dans lui même alors, l'opérateur positif R est dit racine carrée de l'opérateur A si
$$A = R^2, \quad \text{ou encore} \quad R = \sqrt{A}.$$

Définition .15. On définie l'espace de Hilbert $X_{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ muni de la norme $\|u\|_{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}u\|$ qui donnée par
$$\langle u, v\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle, \quad \forall u,\ v \in X^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Remarque .6. *Si $u \in \mathcal{D}(A)$, alors (59) s'écrit par*
$$\langle u, v\rangle_{\frac{1}{2}} = \langle Au, v\rangle.$$

Théorème .11 (Hellinger–Toeplitz)**.** *Un opérateur symétrique dans un espace de Hilbert est un opérateur borné.*

Les espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, infiniment dérivables sur Ω et à support compact contenu dans Ω et $L^p(\Omega)$ l'espaces de Lebesgue, pour $1 \leq p \leq +\infty$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace vectoriel des distributions dans Ω avec $H^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev, pour $m \in \mathbb{N}$.

Définition .16. Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On définit l'espace $C(0,T;X)$ par

$$C(0,T;X) = \{f \ : (0,T) \to X \ ; \quad \text{avec } f \text{ continue } \},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Définition .17. On dit qu'une fonction $f : (0,T) \to X$ est fortement dérivable en $t_0 \in (0,T)$ s'il existe un élément

$$\frac{df}{dt}(t_0) \in X \quad \text{telle que} \quad \lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h} \left(f(t_0+h) - f(t_0) - \frac{df}{dt}(t_0) \right) \right\|_X = 0.$$

$\dfrac{df}{dt}(t_0)$ est appelé la dérivée forte de f en t_0.

Définition .18. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. On note par $D(0,T;X)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0,T)$ à valeurs dans X.

Définition .19. Une fonction $f : (0,T) \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $D(0,T;X)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_X \, ds = 0.$$

Théorème .12. ***(Bochner)***
Une fonction $f : (0,T) \to X$ mesurable est intégrable si et seulement si l'application $t \in (0,T) \to \|f(t)\|_X \in \mathbb{R}^+$, est intégrable, dans ce cas

$$\left\| \int_0^T f(s)\, ds \right\|_X \leq \int_0^T \|f(s)\|_X \, ds.$$

Définition .20. Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0,T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(X)$. l'espace $L^p(0,T;X)$ est un espace normé muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Pour $p=\infty$,

$$L^{\infty}(0,T;X)=\{f\ :(0,T)\to X;\ \text{mesurable et}\quad \exists\, C>0\ :\ \|f\,(t)\|_X\leq C\ \ \text{p.p}\,\}\,,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^{\infty}(0,T;X)}=\inf\{C>0\,;\quad \|f(t)\|_X\leq C\quad \text{p.p}\quad t\in(0,T)\}\,.$$

Proposition .2.

1. *$L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach, pour $(1\leq p\leq\infty)$.*
2. *Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{L^2(0,T;X)}=\int_0^T\langle u(t),v(t)\rangle_X dt.$$

3. *Pour $1\leq q\leq r\leq\infty$, on a $L^r(0,T;X)\hookrightarrow L^q(0,T;X)$ avec injection continue.*

Définition .21. Soit $u,\ w\in L^1(0,T;X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si

$$\int_0^T\varphi^{(n)}\,(t)\,u\,(t)\,dt=(-1)^n\int_0^T\varphi\,(t)\,w\,(t)\,dt\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}\,(0,t;X)\,.$$

Définition .22. L'espace de Sobolev $H^1\,(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u:(0,T)\to X$ telles que

$$u\in L^2(0,T;X)\quad \text{et}\quad u'\in L^2(0,T;X).$$

L'espace $H^1\,(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(0,T;X)}=\Big(\|u\|_{\ L^2(0,T;X)}+\|u'\|_{\ L^2(0,T;X)}\Big)^{1/2}.$$

Étant donnés un entier $m\geq 2$, on définit par récurrence l'espace

$$H^m\,(0,T;X)=\Big\{u\in H^{m-1}\,(0,T;X)\,;\ u'\in H^{m-1}\,(0,T;X)\Big\}\,,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(0,T;X)}=\|u\|_{L^2(0,T;X)}+\sum_{\alpha=1}^{m}\Big\|u^{(\alpha)}\Big\|_{L^2(0,T;X)}.$$

Proposition .3. *Si $f\in L^p(0,T;X)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t}\in L^p(0,T;X)$ avec $(1\leq p\leq\infty)$, alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0,T)$ continue de $[0,T]\to X$.*

Lemme .3 (Gronwall). *Soit $g \in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^T g(s)\Psi(s)ds, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq a \exp(\int_0^T g(s)ds), \quad \forall t \in [0,T].$$

Semi groupes uniformément continus

Définition .23. Soit X un espace de Banach et soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés de X dans X. On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

1. $T(0) = Id$, $\qquad$ (Id est l'opérateur d'identité dans X)
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$

Définition .24. On dit qu'un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est uniformément continu sur X, s'il vérifie

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - Id\| = 0.$$

Définition .25. On appelle générateur infinitésimal d'un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ défini par

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in X, \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{existe dans } X\right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}\bigg|_{t=0}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Corollaire .1. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés, alors*

1. *Il existe une constante $\omega \geq 0$ telle que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.*
2. *Il existe un unique opérateur linéaire borné A telle que $T(t) = e^{tA}$.*
3. *L'opérateur A définie dans le point 2 est un générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*
4. *L'application $t \to T(t)$ est différentiable, et on a*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Semi groupes fortement continus

Dans la suite, on suppose que A est un opérateur linéaire borné de X dans X.

Définition .26. Un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit fortement continu si

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

Un semi groupe fortement continu sur X est appelé semi groupe de classe $\mathcal{C}_0$ ou $\mathcal{C}_0-$semi groupe.

Définition .27. La borne de croissance d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est le nombre $\omega_0(T)$ défini par

$$\omega_0(T) = \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

Remarquons que $\omega_0(T) \in [-\infty, \infty)$.

Proposition .4. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe sur X, telle que $\omega_0(T) < 0$. Alors*

1. $\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \log \|T(t)\|$.
2. *Pour tout $\omega > \omega_0(T)$, il existe $M_\omega \in [1, +\infty)$ tel que*

$$\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad \forall t \in [1, \infty)$$

3. *L'application $t \longmapsto T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X.*

Définition .28. On dit qu'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe est exponentiellement stable, si

$$\omega_0(T) < 0.$$

On donne quelques propriétés sur les $\mathcal{C}_0-$semi groupes.

Théorème .13. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe et A son générateur infinitésimal, alors*

1. *Pour $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

2. *Pour $x \in X$, alors $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$, et on a*

$$A \int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \quad \forall t \geq 0.$$

3. *Pour $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

4. Pour $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Théorème .14. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe et A son générateur infinitésimal, alors*

1. *$\overline{\mathcal{D}(A)} = X$,*
2. *A est un opérateur fermé.*

Théorème de Lumer Phillips

Dans ce paragraphe, on présente une caractérisation concernant les $\mathcal{C}_0-$semi groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Lumer Phillips. On commence par donner quelques préliminaires.

Définition .29. On dit qu'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est de contraction si

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition .30. Soit X un espace de Banach muni de le norme $\|.\|$, et soit X' l'espace dual du X, posons

$$F(x) = \left\{x^* \in X', \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}.$$

Définition .31. On dit que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ est dissipatif si pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, il existe $x^* \in F(x)$, tel que

$$Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0.$$

Proposition .5. *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\|(\lambda Id - A)x\|_X \geq \lambda\|x\|_X, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème .15 (Lumer-Phillips)**.** *Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X.*

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 Id - A) = X$, alors, A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe de contraction sur X.*
2. *Si A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe de contraction sur X, alors, $Im(\lambda_0 Id - A) = X$, pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $x^* \in F(x)$, on a $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Théorème .16. *Soit A un opérateur dissipatif avec $Im(\lambda_0 Id - A) = X$. Si X est un espace réflexif, alors $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Le théorème suivant, donne la perturbation d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe par un opérateur linéaire continu.

Théorème .17. *Soient X un espace de Banach et A un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ qui satisfait, pour tout $t \geq 0$, $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, où M et w sont des constantes positives. Si B est un opérateur linéaire continu dans X, alors, $A + B$ est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dans X et il satisfait $\|S(t)\| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}$.*

Équation d'évolution non linéaire

Soient X un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire qui engendre un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Problème de Cauchy homogène

Définition .32 (Problème homogène abstrait de Cauchy)**.** Le problème à valeur initiale

$$(P_1) : \begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad \forall t \geq 0. \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

est dit un problème homogène abstrait de Cauchy associé à A où t est la variable de temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach X, avec $u_0 \in X$ est la valeur initiale.

Définition .33. Une fonction $u : [0, T[\to X$ est dite solution "classique" du problème (P_1) si

1. u est continue pour $t \geq 0$,
2. u est continûment différentiable,
3. $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t \geq 0$, et u vérifie (P_1) sur $[0, T]$

L'existence et l'unicité du problème de Cauchy homogène est donné par le théorème suivant.

Théorème .18. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0-$semi groupe dans X et A son générateur infinitésimal, alors, pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Le problème (P_1) à une solution unique u vérifiée*

$$u \in C(0, +\infty; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(0, +\infty; X),$$

donnée par

$$u(t) = T(t)u_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Équation d'évolution non linéaire

On considère le problème d'évolution non linéaire suivant

$$(P_2)\begin{cases} u'(t) &= Au(t)+f(t,u(t)), \quad t>t_0. \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, et $f:[t_0,T]\times X\to X$ est continu en t et Lipschitzienne en u.

Remarque .7. *Le problème (P_2) n'admet pas nécessairement une solution, s'il existe une solution, alors cette solution u est de la forme*

$$u(t)=T(t-t_0)u_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))ds. \tag{60}$$

Définition .34. Une fonction continue u est dite solution "mild" du problème (P_2) si elle vérifiée (60).

L'existence et l'unicité de la solution mild du problème (P_2) est donnée par le théorème suivant :

Théorème .19. *Soit $f:[t_0,T]\times X\to X$ est continu en t dans $[t_0,T]$ et uniformément Lipschitzienne sur X. Si A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans X, alors pour tout $u_0\in X$, le problème (P_2) admet une unique solution mild $u\in C(t_0,T;X)$. De plus, l'application $u_0\to u$ est Lipschitzienne de X dans $C(t_0,T;X)$.*

Remarque .8. *La condition de Lipschitz uniforme de la fonction f du théorème .19 assure l'existence d'une solution mild globale du problème (P_2).*

Le théorème suivant donne la version locale du théorème .19.

Théorème .20. *Soit $f:[0,\infty[\times X\to X$ une fonction continu en t pour $t\geq 0$, et localement Lipschitzienne en u uniformément en t dans des intervalles bornés. Si A est un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans X, alors pour tout $u_0\in X$, il existe $t_{max}\leq\infty$ tel que le problème*

$$(P_2)\begin{cases} u'(t) &= Au(t)+f(t,u(t)), \quad t>t_0. \\ u(t_0) &= u_0. \end{cases}$$

Admet une unique solution mild u dans $[0,t_{max}[$, de plus si $t_{max}<\infty$ alors

$$\lim_{t\to t_{max}}\|u(t)\|=\infty.$$

Théorème .21 (Régularité)**.** *Soit A un générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Si $f : [t_0, T] \times X \to X$ est continûment différentiable de $[t_0, T] \times X$ dans X, alors la solution mild du problème (P_2) avec $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ est une solution classique de problème (P_2).*

Remarque .9. *La plupart des résultats de paragraphe précédent, dans lesquelles A est supposé indépendant de t, peuvent être facilement étendus au cas où A dépend de t d'une manière qui assure l'existence d'un système d'évolution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, pour la famille $\{A(t)\}$.*

Définition .35. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Y est $A-$admissible, si Y est un sous-espace invariant de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et la restriction $\{\tilde{S}(t)\}_{t\geq 0}$ de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ à Y, est un C_0-semi groupe sur X. Dans ce cas, $\tilde{A}$ la partie de A dans Y est le générateur infinitésimal de $\{\tilde{S}(t)\}_{t\geq 0}$ sur X.

Soit $A(t)$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ sur X. On considère les hypothèses suivantes :

(H1) $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ est une famille stable avec les constantes de stabilité C et m.

(H2) Y est $A(t)-$admissible pour $t \in [0, T]$ et la famille $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ des parties $\tilde{A}(t)$ de $A(t)$ dans Y, est une famille stable en Y avec les constantes de stabilité $\tilde{C}$ et $\tilde{m}$.

(H3) Pour $t \in [0, T]$, $D(A(t)) \supset Y$, $A(t)$ est un opérateur borné de Y dans X et $t \mapsto A(t)$ est continue dans la norme de $B(Y, X)$.

Théorème .22. *Soit $A(t)$, pour $t \in [0, T]$, le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ sur X. Si la famille $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ satisfait les conditions (H1)-(H3), alors il existe un unique système d'évolution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ dans X.*

Remarque .10. *On peut remplacer l'hypothèse (H3) par la condition plus faible suivante : pour $t \in [0, T]$, $D(A(t)) \supset Y$ et $A(t) \in L^1(0, T; B(Y, X))$, où on peut encore contruire un unique système d'évolution $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ dans X.*

Bibliographie

[1] M. Aili, A. Khemmoudj. General decay of energy for a viscoelastic wave equation with a distributed delay term in the nonlinear internal dambing. Rend. Circo. Mate. Palermo Series 2, 2 (2019) 1-21.

[2] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa and D. Sforza. Decay estimates for second order evolution equations with memory, J. Funct. Anal., 254 (2008) 1342-1372.

[3] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa. A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations. C. R. Math., 347(15-16) (2009) 867-872.

[4] A. M. Al-Mahdi, M. M. Al-Gharabli and M. Kafini. A new general decay result for abstract evolution equation with time-dependent nonlinear dissipation. Ann. Univ. Ferrara, (2019) 1-30.

[5] A. M. Al-Mahdi. General stability result for a viscoelastic plate equation with past history and general kernel. J. Math. Anal. Appl., (2020) 124216.

[6] V. Arnold. Mathematical methods of classical mechanics. New York : Springer, 1989.

[7] A. Bàtkai, S. Piazzera. Semigroups for delay equations. Research Notes in Mathematics, 10. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA, (2005).

[8] F. Belhannache, M. M. Algharabli and S.A. Messaoudi. Asymptotic Stability for a Viscoelastic Equation with Nonlinear Damping and Very General Type of Relaxation Functions. J. Dyn. Control Syst., (2019) 1-23.

[9] A. Benaissa, A. K. Benaissa and S. A. Messaoudi. Global existence and energy decay of solutions for the wave equation with a time varying delay term in the weakly nonlinear internal feedbacks. J. Math. Phys., 53 (2012) 1-19.

[10] S. Berrimi, S. A. Messaoudi. Existence and decay of solution of a viscoelastic equation with a nonlinear viscoelastic source. Nonl. Anal., 64 (2006) 2314–2331.

[11] Y. Boukhatem. Etude de quelques problèmes aux limites hyperboliques semi linéaires : Existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini des solutions. Thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas de Sétif (2014).

[12] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne. Blow up of solutions for a semilinear hyperbolic equation. Electron J. Qual. Theory Differ. Equa., 40 (2012) 1-12.

[13] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne. Polynomial Decay and Blow Up of Solutions for Variable Coefficients Viscoelastic Wave Equation with Acoustic Boundary Conditions. Acta Math. Sin., 32(2) (2016) 153-174.

[14] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne. General Decay for a Viscoelastic Equation of Variable Coefficients in the Presence of Past History with Delay Term in the Boundary Feedback and Acoustic Boundary Conditions. Acta Appl. Math., 37(5) (2017) 1453-1471.

[15] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmanne. Asymptotic behavior for a past history viscoelastic problem with acoustic boundary conditions. Appl. Anal., 99(2) (2020) 249-269.

[16] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmane. Existence and exponential decay of solutions for the variable coefficients wave equations. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica, Tom XXIII, Issue No. 2 (2016) 93-108.

[17] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and J. A. Soriano. Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. E. J. Differ. Equ., 44 (2002) 1-14.

[18] M.M. Cavalcanti, A.D. Cavalcanti, I. Lasiecka and X. Wang. Existence and sharp decay rate estimates for a von Karman system with long memory. NA : Real World Appl., 22 (2015) 289-306.

[19] H. Chellaoua, Y. Boukhatem. Well-posedness and exponential stability of a nonlinear abstract evolution equation with past history and time delay. 3rd International Conference in Operator Theory, PDE and Applications. Université de Echahid Hamma Lakhder, 24-25 Avril 2019, El-oued, Algérie.

[20] H. Chellaoua, Y. Boukhatem. Stability Result for an Abstract Delayed Evolution Equation with Arbitrary Decay in Viscoelasticity. 3rd International Conference of Mathematical Sciences ICMS 2019. University of Maltepe, 4-8 September 2019, Istanbul, Turquie.

[21] H. Chellaoua, Y. Boukhatem. Stability result for an abstract delayed evolution equation with arbitrary decay in viscoelasticity. AIP Conf. Proc., 2183(1)(2019). https ://doi.org/10.1063/1.5136215.

[22] H. Chellaoua, Y. Boukhatem. Stability result for an abstract delayed evolution equation with arbitrary decay of viscoelasticity. Proc. Inter. Math. Sci., 2(1) (2020) 7-25.

[23] H. Chellaoua, Y. Boukhatem. Optimal decay for second-order abstract viscoelastic equation in Hilbert spaces with infinite memory and time delay. Math. Meth. Appl. sci., (2020) https ://doi.org/10.1002/mma.6917.

[24] H. Chellaoua, Y. Boukhatem. Blow up result for an abstract evolution problem with infinite memory and time-varying delay. Appl. Anal., (2020). http ://dx.doi.org/10.1080/00036811.2020.1863374.

[25] H. Chellaoua, Y. Boukhatem and B. Feng. Optimal decay of an abstract nonlinear viscoelastic equation in Hilbert spaces with delay term in the nonlinear internal damping. Asymptotic Anal., (2021). https ://doi.org/10.3233/ASY-201664.

[26] Q. Dai, Y. Zhifeng. Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay." Z. Angew. Math. Phys., 65(5) (2014) 885-903.

[27] C. M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 37(4) (1970) 297-308.

[28] R. Datko, J. Lagnese and M. P. Polis. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. SIAM J. Control Optim. 24 (1986) 152-156.

[29] M. Fabrizio, B. Lazzari. On the existence and asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids. Arch. Rational Mech. Anal.. 116 (1991) 139-152.

[30] B. Feng, A. Soufyane. Optimal decay rates of a nonlinear time-delayed viscoelastic wave equation. Differ. Integ. Equa., 33(1/2) (2020) 43-65.

[31] D. Françoise, G. Demengel. Espaces fonctionnels. Paris : EDP Sciences ; 2007.

[32] V. Georgiev, G. Todorova. Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Differ. Equ., 109 (1994) 295-308.

[33] A. Guesmia. Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory. J. Math. Anal. Appl., 382 (2011) 748-760.

[34] A. Guesmia. Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay, IMA J. Math. Control I., 30 (2013) 507-526.

[35] A. Guesmia. New general decay rates of solutions for two viscoelastic wave equations with infinite memory. Math. Model. Anal.,25(3) (2020) 351–373.

[36] A. Guesmia, S. A. Messaoudi. A general decay result for a viscoelastic equation in the presence of past and finite history memories. Nonl. Anal., 13 (2012) 476-485.

[37] J. H. Hassan, S. A. Messaoudi. General decay rate for a class of weakly dissipative second-order systems with memory. Math. Meth. Appl. Sci., 42(8) (2019) 2842-2853.

[38] M. Kafini, S. A. Messaoudi and S. Nicaise. A blow-up result in a nonlinear abstract evolution system with delay. Nonlinear Differ. Equ. Appl., 23(2) (2016) 13.

[39] M. Kafini, S. A. Messaoudi. Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay. Appl. Anal., 99(3) (2020) 530-547.

[40] J. R. Kang. Global nonexistence of solutions for viscoelastic wave equation with delay. Math. Meth. Appl. Sci., 41(16) (2018) 6834-6841.

[41] J. R. Kang. General decay for viscoelastic plate equation with p-Laplacian and time-varying delay. Bound. Value Probl., 2018(1) (2018) 29.

[42] T. Kato. Linear and quasilinear equations of evolution of hyperbolic type, in Hyperbolicity : Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Cortona (Arezzo), Italy. Vol.2, G. da Prato and G. Geymonat, eds : Liguori Editore ; (1977) 125-191.

[43] T. Kato. Abstract Differential Equations and Nonlinear Mixed Problems, Lezioni Fermiane [Fermi Lectures]. Scuola Normale Superiore : Pisa ; 1985.

[44] M. Kirane, B. Said-Houari. Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay, Z. Angew. Math. Phys., 62 (2011) 1065-1082.

[45] I. Lasiecka, S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa. Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory. J. Math. Phys., 54(3) (2013) 031504.

[46] H. A. Levine. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. SIAM J. Math. Anal., 5 (1974) 138-146.

[47] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$. Trans. Amer. Math. Soc., 192 (1974) 1-21.

[48] H. A. Levine, S. R. Park and J. Serrin. Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation. J. Math. Anal. Appl., 228 (1998) 181-205.

[49] W. J. Liu, General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source, Nonl. Anal., 73(6) (2010) 1890–1904.

[50] Z. Liu, C.Gao and Z. B. Fang. A general decay estimate for the nonlinear transmission problem of weak viscoelastic equations with time-varying delay. J. Math. Phys., 60(10) (2019) 101507.

[51] S. A. Messaoudi. Blow up of solutions with positive initial energy in a nonlinear viscoelastic equation. J. Math. Anal. Appl., 320 (2006) 902-915.

[52] S. A. Messaoudi. General stability in viscoelasticity, viscoelastic and viscoplastic materials, Mohamed El-Amin, IntechOpen (2016). https ://doi.org/10.5772/64217.

[53] S. A. Messaoudi, B. Said-Houari. Blow up of solutions of a class of wave equations with nonlinear damping and source terms. Math. Meth. Appl. Sci., 27 (2004) 1687-1696.

[54] M. I. Mustafa. On the control of the wave equation by memory-type boundary condition. Discrete Conti. Dyn-A, 35(3) (2014) 1179.

[55] M. I. Mustafa. Memory-type plate system with nonlinear delay. Adv. Pure. Appl. Math., 8(4) (2017) 227-240.

[56] M. I. Mustafa. Asymptotic stability for the second order evolution equation with memory. J. Dyn. Control Syst., 25(2) (2018) 263-273.

[57] M. I. Mustafa. Optimal decay rates for the abstract viscoelastic equation. J. Evol. Equa., (2019) 1-17.

[58] M. I. Mustafa. Optimal decay rates for the viscoelastic wave equation. Math. Meth. Appl. Sci., (2017) 1-13.

[59] S. Nicaise, C. Pignotti. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks, SIAM J. Control Optim. 45(5) (2006) 1561-1585.

[60] S. Nicaise, C. Pignotti. Interior feedback stabilization of wave equations with time dependence delay. Electron J. Differ. Equ., 2011(41) (2011) 1-20.

[61] S. Nicaise, J. Valein and E. Fridman. Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays. Disc. Cont. Dyna. Syst. Series 5., 2(3) (2009) 559-581.

[62] S. Nicaise, C. Pignotti. Stabilization of second-order evolution equations with time delay. Math. Control Sign. Syst., 26(4) (2014) 563-588.

[63] S. Nicaise, C. Pignotti. Exponential stability of abstract evolution equations with time delay. J. Evol. Equ., 15 (2015) 107-129.

[64] V. Pata. Exponential stability in linear viscoelasticity. Q. Appl. Math., 64(3) (2006) 499-513.

[65] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York : Springer ; 1983.

[66] F. Riesz, S. Nagy. Functional analysis. New York : Dover Publications ; 1955.

[67] H. Song. Global nonexistence of positive initial energy solutions for a viscoelastic wave equation. Nonl. Anal., 125 (2015) 260-269.

[68] N. E. Tatar. A new class of kernels leading to an arbitrary decay in viscoelasticity. Mediterr. J. Math., 10(1) (2013) 213-226.

[69] N. E. Tatar. Uniform decay in viscoelasticity for kernels with small non-decreasingness zones. Appl. Math. Comp., 218 (2012) 7939-7946.

[70] M. Tucsnak, G. Weiss. Observation and control for operator semigroups. Springer Science & Business Media ; 2009.

[71] E. Vitillaro. Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. Arch. Rational Mech. Anal., 149 (1999) 155-182.

[72] S. T. Wu. Blow-up of solutions for an integro-differential equation with a nonlinear source. Electron J. Differ. Equa., 45 (2006) 1-9.

[73] S. T. Wu, C. Y. Lin. Global nonexistence for an integro-differential equation. Math. Meth. Appl. Sci., 35(1) (2011) 72-83.

[74] T. J. Xiao, J. Liang. Coupled second order semilinear evolution equations indirectly damped via memory effects. J. Differ. Equa., 254(5)(2013) 2128-2157.

[75] C. Q. Xu, S. P. Yung and L. K. Li. Stabilization of the wave system with input delay in the boundary control. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 12 (2006) 770-785.

[76] K. Yoshida. Functional analysis. New York : Springer ; 1980.