

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالاغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique.

Filire : Mathématiques.

Option : Analyse Mathématique.

Par: SAIED Selimane

THEME

Sur l'existence et la stabilité des problèmes de Petrovsky
viscostatiques non linéaires avec un terme de retard variable dans le
temps

Soutenu publiquement devant le jury compos de:

- | | | |
|------------------------|-------|-------------|
| • Mr. YAGOUR Ameur | M.C.A | Prsident |
| • Mr. ABITA Rahmoune | M.C.A | Examinateur |
| • Mr. SAADAOUI Mohamed | M.C.B | Encadreur |

Année Universitaire 2020/2021

Table des Matières

1	Introduction et outils mathématiques	3
1.1	Plane de mémoire	3
1.1.1	Notation	5
1.2	Introduction	6
1.2.1	L'importance de l'étude	6
1.2.2	Types de stabilité :	8
1.2.3	Le problème étudié	9
1.3	Outils mathématiques	10
1.3.1	Espace de Banach	10
1.3.2	Topologie faible et Topologie faible étoile	10
1.3.3	Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	12
1.3.4	Convergence faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$	13
1.3.5	Espaces de fonctions valeurs vectorielles $L^p((0, T), X)$	14
1.3.6	Lemme d'Aubin-Lions	15
1.3.7	Espaces de Sobolev	16
1.3.8	Formules de Green	18
1.3.9	Quelques inégalités utiles.	19
2	Globale existence	20
2.0.10	Le problème équivalent	23

2.0.11 la fonction d'énergie du système	23
2.0.12 Existence globale	28
3 Comportement asymptotique	44

Chapitre 1

Introduction et outils mathématiques

1.1 Plane de mémoire

Le mémoire est composé de trois chapitres :

*Dans le premier chapitre : On rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans notre travail.

*Dans le deuxième chapitre : Nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkine pour prouver que la solution faible du système considéré existe globalement.

*Dans le troisième chapitre : Nous utilisons la méthode de Lyapunov pour prouver que lorsque la fonction h est relaxée, l'énergie associée à la solution de notre système décroît vers zéro à infini, afin d'étudier le comportement asymptotique de la solution. Le procédé comprend l'estimation de l'énergie fonctionnelle équivalente.

On définit l'énergie de notre système viscoélastique par :

$$E(t) = \frac{1}{m+2} \|u_t(t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \\ + \sigma(t) (g \circ \Delta u)(t) + \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H((z(x, k, t))) dk dx$$

pour les résultats de stabilité on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov $L(t)$ équivalente à l'énergie $E(t)$ qui vérifie

$$\lambda_1 E(t) \leq L(t) \leq \lambda_2 E(t) \tag{1.1.2}$$

avec $\lambda_1; \lambda_2$ sont deux constantes positives.

*Et à la fin donne une conclusion générale.

1.1.1 Notation

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées.

Ω : Un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière.

$\eta := (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$: le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω .

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions k fois continûment différentiables sur (k entier ≥ 0).

$C_0^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

$L^p(\Omega)$: Espace de Lebesgue $0 \leq p \leq \infty$.

$D'(\Omega)$: Espace des distributions.

$W^{m,p}(\Omega); H^m(\Omega)$: Espaces de Sobolev, $0 \leq p \leq 1; m \in \mathbb{N}; (H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega))$.

$W_0^{m,p}(\Omega); H_0^m(\Omega)$: L'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement dans $H^m(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$: Espace de Hilbert

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$: le gradient de la fonction u .

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: Le Laplacien.

1.2 Introduction

1.2.1 L'importance de l'étude

Les systèmes dynamiques sont un ensemble de phénomènes qui se développent dans le temps et sont liés les uns aux autres de manière déterministe ou causale. L'étude de la stabilité de ces phénomènes est très importante dans le développement et la découverte des sciences:

Nucléaire : emballement d'un réacteur de fission ou extinction d'un plasma confiné (réacteur de fusion).

Chimie : emballement d'un réacteur homogène (Bhopal) ou hétérogène (torréfaction bois).

Biologie : systèmes proies-prédateurs (ressources-consommateurs).

Prévision des ressources halieutiques : sardine contre thon (risque d'extinction d'une espèce de poisson. La surpêche d'une espèce modifie/rompt l'équilibre sardine-thon).

Systèmes biologiques à évolution rapide : cellule contre virus (plus ou moins de virulent) et antibiotique contre bactérie (plus ou moins de résistante).

Contrôle-commande : stabilité de la trajectoire d'une fusée, un satellite, d'un avion, . . .

Mécanique des fluides: instabilités variées

Mécaniques: vibrations (élasticité)

Nous utilisons certaines techniques qui permettent la modélisation de ces systèmes en équations mathématiques qui peuvent être étudiées et représentées, il est à noter dans les études et recherches récentes que les équations aux dérivées partielles ont été largement utilisées comme modèles mathématiques pour ces phénomènes en étudiant :

- 1- Le comportement limite des solutions .
- 2- La stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales.
- 3- La stabilité des solutions par rapport à des perturbations portant sur l'équation différentielle.

Modéliser l'objet de l'étude dans les problèmes de vibrations des structures élastiques, Le but de la stabilisation est d'amortir les vibrations grâce à la rétroaction. Par conséquent, il comprend le mécanisme de dissipation pour s'assurer que l'énergie de la solution est plus ou moins rapidement réduite à zéro. Plus précisément, le problème de stabilité qui nous intéresse

revient à étudier le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$, on calcule sa limite. Si cette limite est nulle, alors chercher une estimation de sa vitesse décroissante vers zéro.

Les phénomènes de vibration apparaissent dans presque toutes les structures mécaniques. Plusieurs types de vibrations sont indésirables car ils nuisent au fonctionnement et à la durée de vie de ces structures. Ils peuvent provoquer des fractures structurelles, des défaillances, de l'usure et même des dommages. De plus, ils peuvent présenter un danger pour les utilisateurs. Il existe de nombreuses excitations dynamiques qui provoquent ces vibrations. Ils proviennent soit de l'environnement extérieur (sol, atmosphère, eau, contact ou impact avec d'autres ouvrages), soit d'équipements mobiles internes (machines intégrées à l'ouvrage...). L'élimination voire la réduction de ces vibrations est un problème majeur en ingénierie, particulièrement en robotique.

Les systèmes retards :

D'un point de vue pratique, notamment en sciences de l'ingénieur, on observe que le phénomène de retard se produit naturellement dans le processus physique. Parmi les principales sources de retard, on peut citer le temps de réaction des capteurs ou actionneurs, le temps de transmission des informations, le temps de transmission du matériel ou encore le temps de mesure. Par conséquent, afin de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation réside dans la conception d'un "système à retard" dans lequel interviennent des équations différentielles, et son évolution est différente des systèmes ordinaires, et ne dépend pas seulement de la valeur actuelle instantanée de son variables d'état. ; Font également partie de leurs valeurs passées. Dans ce cas, il est nécessaire de se remémorer une partie de "l'histoire" du système pour comprendre son évolution, les chercheurs se sont intéressés aux problèmes de stabilisation avec un terme de retard, les phénomènes de retard (en temps) apparaissent dans de nombreuses applications comme la biologie , mécanique, encore en automatique, un effet de retard peut être la cause d'instabilité: un retard arbitrairement petit peut déstabiliser le système ou améliorer la performance du système (voir [1], [15]).

Ainsi les problèmes de stabilité des systèmes avec des retards sont d'une grande importance. Pour obtenir la stabilité de ces systèmes, nous avons fait des hypothèses que nous définirons plus tard, pour compenser les effets d'instabilité qui peuvent intervenir.

1.2.2 Types de stabilité :

Il existe différents types de stabilité qui peuvent être étudiés :

1. La stabilité asymptotique forte qui signifie la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire (voir [8], [6], [5]) :

$$E(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

2. La stabilité uniforme, c'est à dire (voir [10], [16], [9]) :

$$E(t) \leq Ch(t) \quad ; \text{ pour tout } t \geq 0,$$

:

où C est une constante indépendante de t et qui dépend uniquement des données initiales, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue décroissante qui satisfait

$$h(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

pour des systèmes linéaires ou non linéaires, ils ont utilisé la méthode des multiplicateurs et la construction de fonction de Lyapunov.

On peut distinguer la stabilité uniforme :

I) la décroissance exponentielle de l'énergie est la décroissance la plus rapide,

$$E(t) \leq Ce^{-\zeta t} \quad \text{pour tout } t > 0$$

où C, ζ ; sont des constantes positives; C dépend uniquement des données initiales, est le taux de décroissance de l'énergie.

II) la décroissance polynomiale de l'énergie,

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\beta} \quad \text{pour tout } t > 0$$

où C, β ; sont des constantes positives; C dépend uniquement de t .

III) la décroissance logarithmique,

$$E(t) \leq \frac{C}{\log(1+t)^k} \quad \text{pour tout } t > 0$$

où C, k ; sont des constantes positives; C dépend uniquement de t .

Dans ce travail, les différents résultats précédents de stabilité uniforme ont été significativement améliorés.

1.2.3 Le problème étudié

Dans ce mémoire, on s'intéresse l'étude de l'existence globale d'une solution faible et la stabilité d'une équation non linéaire de type Petrovsky viscoélastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t|^m u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u_{tt} - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta u_s(s) ds \\ + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) = |u|^{p-1} u, \text{ in } \Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, t) = 0, \text{ on } \Gamma_0 \times [0, +\infty[, u(x, 0) = u_0(x), \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ in } \Omega, u_t(x, -t) = f_0(x, t) \text{ on } \Omega \times [0, 1] \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

où Ω est un domaine régulier et borné de IR^n , ($n \geq 1$), $m > 0, \mu_1, \mu_2$ sont des nombres réels positifs, $u = u(x, t), t \geq 0, x \in \Omega$, désigne Δ l'opérateur laplacien par rapport à la variable x ,

- L'équation du problème (1.2.1) décrit les vibrations de la exion d'une plaque mince avec une densité variable, dépendante de la vitesse, donnée par le terme $|u_t|^m > 0$.
- Δu_{tt} est un terme dispersif .
- $\int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds$ est un terme mémoire dissipatif où $h(t)$ est une fonction de relaxation continue et décroissante.
- $\tau(t) \geq \tau_0 > 0$ représente fonction de retard variant dans le temps,

- $\mu_1 h_1(u_t(x, t))$ représente l'amortissement par frottement localisé linéaire
- $\mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t)))$ désigne le terme de retard variable dans le temps
- Les conditions initiales (u_0, u_1, f_0) se voient attribuer des fonctions appartenant à des espaces appropriés.

1.3 Outils mathématiques

1.3.1 Espace de Banach

Le but de chapitre est de rappeler, sans démonstration, les différents outils d'analyse que nous allons utiliser. Pour plus de détails (voir [3], [4]).

Définition 1.3.1 Soit E est un espace de Banach, on note E' son dual, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E .

Notation 1.3.1 Si $f \in E'$ et si $u \in E$ alors l'image $f(u)$ est noté par le crochet de dualité $\langle f, u \rangle_{E' \times E}$:

Définition 1.3.2 L'espace dual de noté E'' s'appelle le bidual de E :

On munit l'espace E' de la norme suivante :

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

et E'' son bidual, de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\xi \in E', \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$$

1.3.2 Topologie faible et Topologie faible étoile

Définition 1.3.3 La topologie faible $\tau(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications

$$\phi_f(x) = \langle f, x \rangle, f \in E'.$$

Proposition 1.3.1 *La topologie faible $\tau(E, E')$ est séparée.*

Définition 1.3.4 *Soit E un espace de Banach. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ converge au sens de la topologie faible vers x dans E si*

$$\phi_f(x) = \langle f, x \rangle, f \in E'.$$

Proposition 1.3.2 *Soit (x_n) une suite de E , on a*

1. $((x_n) \rightarrow x \text{ pour } \tau(E, E')) \iff (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle) \text{ pour } f \in E'$
2. $((x_n) \rightarrow x \text{ pour } \tau(E, E')) \Rightarrow \|x_n\| \text{ est bornée.}$
3. *Si $((x_n) \rightarrow x \text{ pour } \tau(E, E')$ et $f_n \rightarrow f$ dans E') $\Rightarrow (\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle)$.*

Proposition 1.3.3 *Lorsque E est de dimension nie, la topologie faible $\tau(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement. Ceci n'est pas vrai en dimension infinie.*

Nous allons passer maintenant la notion de convergence faible $*$.

Définition 1.3.5 *La topologie faible $*$ sur E' désignée par $\tau(E, E')$ est la topologie la moins ne rendant continues toutes les applications définies sur E' par :*

$$\phi_f(x) = \langle f, x \rangle, f \in E', \text{ pour tout } x \in E$$

On note une suite $(f_n)_n$ qui converge vers f pour la topologie faible $\tau(E, E')$ par $f_n \xrightarrow{*} f$*

Corollaire 1.3.2 *Soit E un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans E' .*

Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $\tau(E, E')$.*

Proposition 1.3.4 *Soit $u \in E$, On considère la forme :*

$$\begin{aligned} f_u & : E' \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \langle f, u \rangle \end{aligned}$$

Alors $f_u \in E''$ et

$$\begin{aligned} J &: E \rightarrow E'' \\ u &\mapsto f_u \end{aligned}$$

est une isométrie.

Définition 1.3.6 On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$, On identifiera par la suite E avec E'' .

Remarque 1 La convergence faible dans E' entraîne la convergence faible $*$ dans E' . La réciproque est vraie si la espace E est réflexif.

Définition 1.3.7 La topologie faible $*$ $\tau(E, E')$ est séparée.

Proposition 1.3.5 Soit (f_n) une suite dans E' : On a les propriétés suivantes :

1. Si $f_n \rightarrow f$ pour $\tau(E, E')$ $\Rightarrow (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle)$ pour $f \in E'$ alors $\{f_n\}$ est bornée.
2. Si $f_n \rightarrow f$ pour la topologie faible $*$ $\tau(E, E')$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} .

Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E . Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans E .

On dit que E est séparable s'il contient une partie dénombrable dense dans E .

1.3.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.3.8 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et telle que $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω ;

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}, \text{ muni de la norme } \|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

:

Si $p = +\infty$, on note $L^1(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur Ω et essentiellement bornées sur Ω :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \exists c \in \mathbb{R} : |u(x)| < c \text{ sur } \Omega\}$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \{\inf c \text{ tel que } |u(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Proposition 1.3.6 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.3.9 *L'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions f telles que, pour tout compact K de Ω , on a $f|_K \in L^p(\Omega)$:*

Définition 1.3.10 *On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ support compact dans Ω .*

1. Si $p = 2$; alors $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

2. $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif.
3. Si $1 \leq p < +\infty$; alors $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$:
4. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est ni séparable ni réflexif.

Définition 1.3.11 *$L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$ on le note par $L^\infty(\Omega) \subset (L^1(\Omega))'$.*

Par la suite on va donner une caractérisation des convergences faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$ lorsque l'ouvert Ω est borné.

1.3.4 Convergence faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$

Théorème 1.3.3 *Si $f \in L^1(\Omega)$ vérifie*

$$\int_\Omega f(x) \phi(x) dx = 0, \forall \phi \in D(\Omega) \Rightarrow f = 0 \text{ p.p sur } \Omega.$$

Proposition 1.3.7 Soit $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$, on peut extraire de la suite $(f_n)_n$ une sous-suite faiblement convergente i.e

$$\exists f_{n_k} \in L^p(\Omega), \exists f \in L^p(\Omega), \forall \phi \in L^q(\Omega), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{n_k} \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

Si $1 < p < +\infty$; la topologie faible $\tau(E, E')$ et la topologie faible ${}^*\tau(E, E')$ sont équivalentes.

Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^1(\Omega)$, on peut extraire de la suite $(f_n)_n$ une sous-suite qui converge pour la topologie faible etoel.

Ce résultat est faux dans $L^1(\Omega)$ (car cet espace n est pas réflexif), en revanche on a un résultat similaire dans $L^\infty(\Omega)$ condition de considérer la topologie * sur cet espace.

Une propriété importante concernant le produit de deux suites convergentes.

Proposition 1.3.8 Soit $p \in [1; +\infty]$ et q son conjugué. Si f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$; et g_n converge faiblement vers g dans $L^q(\Omega)$; alors $f_n g_n$ converge faiblement vers fg dans $L^1(\Omega)$:

1.3.5 Espaces de fonctions valeurs vectorielles $L^p((0, T), X)$

Soient X un espace de Banach, $T > 0$.

Définition 1.3.12 Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq +\infty$, les espaces de Lebesgue valeurs dans X sont des espaces de fonctions mesurables, définis par :

$$L^p((0, T), X) = \left\{ u :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurables telle que } \int_0^T \|u\|_X^p dt < +\infty, p \neq +\infty \right\}$$

munis des normes

$$\|u\|_{L^p((0, T), X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 \leq p < +\infty$$

et

$$L^\infty([0, T], X) = \left\{ u :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurables telle que } \sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|u\|_X < +\infty \right\}$$

où

$$\sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|u\|_X = \{\inf c \text{ tel que } |u(x)| < c \text{ p.p } t \in]0, T[\}$$

munis des normes

$$\|u\|_{L^\infty((0, T), X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|u\|_X$$

On définit $C([0, T], X)$ comme l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ continues.

$C([0, T], X)$ est dense dans $L^p((0, T), X)$.

On a les propriétés suivantes :

1. si X est de Banach alors $L^p((0, T), X)$ est de Banach pour $1 \leq p < +\infty$;
2. si X est séparable alors $L^p((0, T), X)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$;
3. si X est réflexif alors $L^p((0, T), X)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$;
4. si $X \hookrightarrow Y$ avec injection continue, alors $L^p((0, T), X) \hookrightarrow L^p((0, T), Y)$; avec injection continue.
5. si $X \hookrightarrow Y$ avec injection compacte, on n'a pas forcément $L^p((0, T), X) \hookrightarrow L^p((0, T), Y)$; avec injection compacte:

1.3.6 Lemme d'Aubin-Lions

Le lemme d'Aubin et Lions est un résultat de la théorie des espaces de Banach utilisé pour l'étude des équations d'évolution non linéaires (voir [11]).

Lemme 1.3.1 Soit X_0, X_1 et X trois espaces de Banach où X_0, X_1 sont des espaces réflexifs avec $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. Supposons que l'injection de X_0 dans X est compacte et que l'injection de X dans X_1 est continue. Pour $1 < p, q < +\infty$; soit

$$W = \{u \in L^p((0, T), X_0) / u_t \in L^q((0, T), X_1)\}$$

Alors l'injection de W dans $L^p((0, T), X)$ est compacte.

Lemme 1.3.2 Soient une fonction u et une suite (u^n) de $L^q([0, T[\times \Omega)$; $1 \leq p < +\infty$ telles que

$$\|u^n\|_{L^q([0, T[\times \Omega)} \leq C$$

et

$$u^n \rightarrow u \quad p.p. \text{ dans }]0, T[\times \Omega$$

Alors

$$u^n \rightharpoonup u \text{ dans } L^q (]0, T[\times \Omega)$$

Inégalité de Young : (voir [4])

Pour tout $p > 1; p < \infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, (a, b) > 0$$

et

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{(\varepsilon p)^{\frac{p}{q}} q}, \forall (a, b) \geq 0$$

si $p = q = 2$

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}, \forall (a, b) \geq 0 \tag{1.3.1}$$

1.3.7 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et soit p un nombre réel avec $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.3.13 On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \text{ telque : } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n : \right\}.$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens des distributions, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui en fait un espace de Banach.

Remarque 2 Si $p = 2$; $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soient un entier $m \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre réel avec $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.3.14 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \text{ tel que } : D^k u \in L^p(\Omega), |k| \leq m\}$$

où $D^k u$ est la dérivée d'ordre k de u au sens de distributions, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\left\| \sum_{|k| \leq m} D^k u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < +\infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ pour } p = +\infty.$$

Remarque 3 Si $p = 2$, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|k| \leq m} \int_{\Omega} D^k u D^k v dx, \text{ pour tout } u, v \in H^m(\Omega)$$

:

Proposition 1.3.9 Soit $m \in \mathbb{N}$ et si $1 \leq p \leq +\infty$, on a :

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach;
2. si $1 \leq p < +\infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable et uniformément convexe ;
3. $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Espace de Sobolev

En général $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note alors l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$:

Notation 1.3.4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $m \in \mathbb{N}$; alors on not:

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il désigne l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$; muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ et de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|'_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème d injection de Sobolev

Théorème 1.3.5 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n on a les inclusions suivantes.

1. Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte pour $q \in [1, p']$ et l'injection continue pour $q \in [1, p']$

$$\text{où } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

2. Si $p = n$; $W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte pour $q \in [1, +\infty[$

3. Si $p > n$; $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ avec injection compacte.

L injection compacte permet de passer de la convergence faible et la convergence forte comme suit:

Soit f_n une suite convergente faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$: Alors pour une sous-suite f_{n_k} , on a :

1. si $1 \leq p < n$, alors $f_n \rightarrow f$ fortement dans $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.
2. si $p = n$, alors $f_n \rightarrow f$ fortement dans $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < +\infty$.
3. si $p > n$, alors $f_n \rightarrow f$ fortement dans $L^\infty(\Omega)$.

1.3.8 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n .

1. Si $u \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

:

2. Si $u \in H^2(\Omega)$; on a la formule suivante :

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)$$

3. Si $u, v \in H^4(\Omega)$; on a la formule suivante :

$$\int_{\Omega} (u\Delta^2 v - v\Delta^2 u) dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta v - v \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + \Delta u \frac{\partial}{\partial \eta} - \Delta v \frac{\partial}{\partial \eta} \right) d\sigma$$

où $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ est la normale unitaire orientée vers l'extérieurs de

1.3.9 Quelques inégalités utiles.

Inégalité de Holder

Soit $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$; alors $uv \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$ appelée l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous introduisons d'abord les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \|u\|_2, & \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|\nabla u\|_2, & \|u\|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)} &= \|\Delta u\|_2 \\ \lambda_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{2, H_0^1(\Omega)}^2; & \lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{2, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^2; & \lambda_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^2; \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$, les constantes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda > 0$ représentent les constantes de plongement.

Chapitre 2

Globale existence

Dans ce chapitre, on démontre un résultat d'existence globale d'une solution faible pour une plaque viscoélastique de type Petrovsky §§ avec des conditions aux bords de Dirichlet, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

On utilise les espaces de Sobolev $H^4(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ et l'espace de Hilbert $L^p(\Omega)$ avec leurs produits scalaires et normes habituels. Le premier 0 et l'indice t désigneront la différenciation temporelle et nous désignons par $\langle ; \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La constante $C_i, i \in \mathbb{N}$ désigne une constante positive générale, qui peut être différente selon les différentes estimations.

Pour montrer notre résultat d'existence globale on fait les hypothèses suivantes :

Soient les fonctions de relaxation g et σ on suppose

(H0) $g, \sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions dérivables non croissantes telles que g et dans C^2 et σ est une fonction C^1 satisfaisant

$$\beta' = 1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds > b > 0, \quad b_0 = \int_0^t g(s) ds < +\infty, \quad g(0) > 0 \quad (2.0.1)$$

(H1) Il existe une fonction dérivable non croissante $\zeta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec

$$\zeta(t) > 0, \quad g'(t) \leq -\zeta(t)g(t) \quad ; \quad |\sigma'(t)| \leq \sigma(t) \quad \forall t > 0 \quad (2.0.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma'(t)}{\zeta(t)\sigma(t)} = 0. \quad (2.0.3)$$

Pour le terme de retard $\tau(t) \in C^1(0, T)$, et il existe des constantes positives τ_0, τ_1, d telles que

$$0 < \tau'(t) \leq d < 1, 0 < \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \quad \forall T, t > 0 \quad (2.0.4)$$

(H2) Supposons que m satisfait

$$\begin{cases} 0 < m \leq +\infty, n = 1, 2 \\ 0 < m \leq \frac{2}{n-2}, n \geq 3 \end{cases} \quad (2.0.5)$$

(H3) $h_1, IR \rightarrow IR$ est fonction non décroissante de classe C^1 et $H_1, IR \rightarrow IR$ est convexe, croissante et de classe $C^1(IR_+) \cap C^2(IR_+^*)$ satisfaisant

$H_1(0) = 0$ et H_1 est linéaire sur $[0, \varepsilon]$ ou $H_1'(0) = 0$ et $H_1'' > 0$ sur $]0, \varepsilon]$ tel que

$$\begin{cases} |h_1(s)| \leq c_2 |s| \quad \text{if } |s| \geq \varepsilon \\ h_1^2(s) \leq H_1^{-1}(sh_1(s)) \quad \text{if } |s| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (2.0.6)$$

où H_1^{-1} désigne la fonction inverse de H_1 et $\varepsilon; c_2$ sont des constantes positives.

(H4) $h_2, IR \rightarrow IR$ est une fonction impaire non décroissante de classe $C^1(IR)$ telle qu'il existe $c_3; \alpha_1; \alpha_2 > 0$

$$\begin{cases} |h_2'(s)| \leq c_3 \\ \alpha_1 sh_2(s) \leq H_2(s) \leq \alpha_2 sh_1(s) \end{cases} \quad (2.0.7)$$

où $H_2(s) = \int_0^s h_2(r) dr$.

(H5)

$$\alpha_2 \mu_2 < \frac{(1-d)}{(1-d\alpha_1)} \alpha_1 \mu_1$$

(H6) Notons par la fonction conjuguée de la fonction convexe dérivable H , c'est-à-dire,

$$H^*(s) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (st - h(t))$$

Alors H^* est la transformée de Legendre de ϕ , qui est donnée par

$$H^*(s) = s(h')^{-1}(s) - h\left((h')^{-1}(s)\right) \text{ if } s \in (0, h'(r)] \quad (2.0.8)$$

et satisfait à l'inégalité de Young généralisée

$$vw \leq H^*(s) + h(w) \text{ if } v \in (0, h'(r)], w \in (0, r] \quad (2.0.9)$$

Lemme 2.0.3 ([7]), For $\sigma, g, \phi \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$, $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \sigma(t) \left(\int_0^t g(t-s) \phi(s) ds \right) (t), \phi_t(t) \right\rangle &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (g \diamond \phi)(t) - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\phi(t)\|^2 \right\} - \frac{\sigma(t)}{2} g(t) \|\phi(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma(t)}{2} (g' \diamond \phi)(t) + \frac{\sigma'(t)}{2} (g \diamond \phi)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\phi(t)\|^2 \end{aligned}$$

et,

$$\int_0^t \langle \sigma(s) (g * \Delta u)(s), u_t(s) \rangle_\Omega = \frac{\sigma(t)}{2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 - \int_0^t \frac{\sigma(s)}{2} g(s) \|\Delta u(s)\|_2^2 ds \quad (2.0.11)$$

avec

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left[\frac{\sigma(s)}{2} (g' \circ \Delta u)(s) + \frac{\sigma'(s)}{2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(s)\|_2^2 \right] ds = \frac{\sigma(t)}{2} (g \circ \Delta u)(t) \\ &- \frac{\sigma(0)}{2} (g \circ \Delta u)(0) - \int_0^t \sigma'(s) (g \circ \nabla u)(s) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2} \left(\int_0^r g(s) ds \right) \|\Delta u(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (2.0.12)$$

avec

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (\phi(t) - \phi(s)) ds \right)^2 dx \leq (1-t) C_s^2 (g \circ \phi)(t)$$

$$(g \circ \phi)(t) = \int_0^t g(t-s) \|\phi(t) - \phi(s)\|^2 ds$$

et

$$\|\phi\|_2^2 = \int_{\Omega} |\phi(x, s)|^2 dx.$$

2.0.10 Le problème équivalent

On utilise une technique present par (voir [13]) qui intéresse par l'changement de variable et de fonction :

$$z(x, k, t) = u_t(x, t - k\tau(t))$$

Il est facile de vérifier la relation

$$\tau(t) z_t(x, k, t) + (1 - \tau'(t)) z_k(x, k, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, 1] \times [0, +\infty[$$

Par conséquent, le problème (1.2.1) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t|^m u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u_{tt} - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta u_s(s) ds \\ + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) = |u|^{p-1} u, \quad \text{in } \Omega \times]0, +\infty[\\ \tau(t) z_t(x, k, t) + (1 - \tau'(t)) z_k(x, k, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, 1] \times [0, +\infty[\\ u(x, t) = 0, \quad \text{on } \Gamma_0 \times [0, +\infty[, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{in } \Omega, \\ z(x, 0, t) = u_t(x, t) \quad \text{in } \Omega \times]0, +\infty[, \quad z(x, k, 0) = f_0(x, -k\tau(0)) \quad \text{on } \Omega \times [0, 1] \end{array} \right. \quad (2.0.13)$$

2.0.11 la fonction d'énergie du système

en sous suit, on vérifier que la fonction d'énergie associée au système de viscositélastique (2.0.13) sa donné dans (2.0.14) et aussi décroissante .

Maintenant inspiré par [6], [5], On définit l'énergie associée à la solution du système 2.0.13 par

$$\begin{aligned}
E(t) = & \frac{1}{m+2} \|u_t(t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \\
& + \sigma(t) (g \circ \Delta u)(t) + \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H((z(x, k, t))) dk dx
\end{aligned} \tag{2.0.14}$$

où $\xi(t)$ est positif tel que

$$\frac{(1 - \alpha_1) \mu_2}{(1 - d) \alpha_1} < \xi(t) < \left(\frac{\mu_1}{\alpha_2} - \mu_2 \right) \tag{2.0.15}$$

Cela donne (H5).

Nous avons maintenant l'existence d'une solution globale.

Lemme 2.0.4 Soit $2 \leq p \leq \bar{q}$ et $\max\left(1, \frac{\bar{q}}{\bar{q}-1+p}\right) \leq m \leq \bar{q}$ et (u, z) la solution de (2.0.13), alors la fonctionnelle énergie défini par (2.0.14) satisfait

$$\begin{aligned}
E'(t) \leq & -C_1 \int_{\Omega} u_t(t) h_1(u_t(x, t)) dx + C_2 \int_{\Omega} u_t(t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) dx \\
& - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) \|\Delta u(s)\|_2^2 ds - \frac{\sigma(t)}{2} g(t) \|\Delta u(s)\|_2^2 + \frac{\sigma'(t)}{2} (g \circ \Delta u)(t) \leq \mathbf{0}. \tag{2.0.16}
\end{aligned}$$

où $C_1 \geq (\mu_1 - \mu_2 \alpha_2 - \xi(t) \alpha_2)$ et $C_2 \geq (\xi(t) (1 - d) \alpha_1 - (1 - \alpha_1) \mu_2)$

Preuve. Multiplier la première et la deuxième équation de (2.0.13) par u_t , intégrer la première équation par Ω et la seconde par Ω , $\int_{\partial\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u(x, t) dx$ en utilisant l'intégration par partie et la formule de Green, en appliquant(2.0.10), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{m+2} \|u_t(t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 \right] \\
& + \mu_1 \int_{\Omega} u_t(x,t) h_1(u_t(x,t)) dx + \mu_2 \int_{\Omega} u_t(x,t) h_2(u_t(x,t-\tau)) dx + \sigma(t) (g' \circ \Delta u)(t) \\
& - \sigma'(t) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 - \frac{\sigma(t)}{2} g(t) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\sigma'(t)}{2} (g \circ \Delta u)(t) \\
& - \xi(t) \int_{\Omega} [(1-\tau'(t)) H_2(z(\gamma, 1, t)) - H_2(z(\gamma, 0, t))] d\gamma + \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2(z(\gamma, k, t)) dk d\gamma \quad (2.0.17)
\end{aligned}$$

peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\sigma(t) (g \circ \Delta u)(t) - \frac{\sigma(t)}{2} \int_0^t g(s) ds \|u_t(t)\|_2^2 \right] = \sigma(t) (g' \circ \Delta u)(t) \\
& - \sigma'(t) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 - \frac{\sigma(t)}{2} g(t) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\sigma'(t)}{2} (g \circ \Delta u)(t) \quad (2.0.18)
\end{aligned}$$

Et $z(x, k, t) = u_t(x, t - k\tau(t))$, $z_k(x, k, t)$ ce qui implique que

$$\tau(t) z_t(x, k, t) + (1 - \tau'(t)k) z_k(x, k, t) = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, 1] \times [0, +\infty[\quad (2.0.19)$$

En multipliant cette équation en (2.0.19) par $\xi(t) h_2(z(\gamma, k, t))$ et en intégrant le résultat sur $\Omega \times (0, 1)$, on obtient

$$\xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z_t(x, k, t) h_2(z(\gamma, k, t)) dk d\gamma = -\xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 \left((1 - \tau'(t)k) \frac{\partial}{\partial k} (H_2(z(\gamma, k, s))) \right) dk d\gamma$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2((z(x, k, t))) dk dx \right] &= -\xi(t) \left[\int_{\Omega} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k} (1 - \tau'(t) k) H_2((z(x, k, t))) dk dx \right] \\
&\quad + \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2((z(x, k, t))) dk dx \\
&= -\xi(t) \left[\int_{\Omega} (1 - \tau'(t) k) H_2((z(x, k, t))) \Big|_0^1 dx \right] \\
&\quad + \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2((z(x, k, t))) dk dx \\
&\leq -\xi(t) \left[\int_{\Omega} (1 - \tau'(t)) H_2((z(x, 1, t))) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} H_2((z(x, 0, t))) dx \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2((z(x, k, t))) dk dx \right] \leq -\xi(t) \left[(1-d) \int_{\Omega} H_2(z(\gamma, 1, t)) d\gamma - \int_{\Omega} H_2(z(\gamma, 0, t)) d\gamma \right]$$

En intégrant(2.0.17) sur $(0, t)$ on arrive à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m+2} \|u_t(t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_{2,\Omega}^2 - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla^2 u(t)\|_2^2 \\
&\mu_1 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_1(u_t(x, t)) dt dx + \mu_2 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau)) dt dx \\
&- \xi(t) \int_{\Omega} [(1 - \tau'(t)) H_2(z(\gamma, 1, t)) - H_2(z(\gamma, 0, t))] d\gamma + \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2(z(\gamma, k, t)) dk d\gamma \\
&- \int_0^t \sigma'(s) \left(\int_0^s g(s) ds \right) \|\Delta u(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{2} g(s) \|\Delta u(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2} (g \circ \Delta u)(s) ds \\
&+ \int_0^t \sigma(s) (g' \circ \Delta u)(s) ds \\
&= E(0)
\end{aligned}$$

A partir de la définition de H et en utilisant (2.0.8), on obtient

$$H^*(s) = sh_2^{-1}(s) - H(h_2^{-1}(s)), \forall s \geq 0 \quad (2.0.20)$$

D'où

$$\begin{aligned} H^*(h_2(u_t(x, t - \tau(t)))) &= u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) - H(u_t(x, t - \tau(t))) \\ &\leq (1 - \alpha_1) u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (2.0.21)$$

Par(2.0.9) avec $v = h_2(u_t(x, t - \tau(t)))$ et $w = u_t(x, t)$

$$\begin{aligned} &\mu_2 \int_{\Omega} u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) d\gamma \\ &\leq \mu_2 \int_{\Omega} [u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) - H(u_t(x, t - \tau(t)))] d\gamma + \mu_2 \int_{\Omega} H(u_t(x, t)) d\gamma \\ &\leq (1 - \alpha_1) \mu_2 \int_{\Omega} u_t(x, t) h_1(u_t(x, t)) d\gamma \end{aligned} \quad (2.0.22)$$

En utilisant(2.0.7), on obtient

$$\xi(t) \int_{\Omega} H_2(z(\gamma, 0, t)) d\gamma \leq \xi(t) \alpha_2 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_1(u_t(x, t)) dt d\gamma \quad (2.0.23)$$

et,

$$1 - \tau'(t) k < 1 - d$$

,

$$\begin{aligned} \xi(t) \int_{\Omega} (1 - \tau'(t)) H_2(z(\gamma, 1, t)) d\gamma &\leq \xi(t) (1 - \tau'(t)) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) dt d\gamma \\ &\leq \xi(t) (1 - d) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) dt d\gamma \end{aligned} \quad (2.0.24)$$

we obtain En utilisant (2.0.23, 2.0.24, 2.0.22), on obtient

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_1(u_t(x, t)) dt dx + \mu_2 \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau)) dt dx \\
& - \xi(t) \int_{\Omega} [(1 - \tau'(t)) H_2(z(\gamma, 1, t)) - H_2(z(\gamma, 0, t))] d\gamma + \xi'(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H_2(z(\gamma, k, t)) dk d\gamma \\
\leq & (\mu_1 - \mu_2 \alpha_2 - \xi(t) \alpha_2) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_1(u_t(x, t)) dt dx \\
& + (\xi(t) (1 - d) \alpha_1 - (1 - \alpha_1) \mu_2) \int_{\Omega} \int_0^t u_t(x, t) h_2(u_t(x, t - \tau)) dt dx \tag{2.0.25}
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{(1 - d \alpha_1)}{(1 - d)} \alpha_2 \mu_2 < \alpha_1 \mu_1$$

En combinant (2.0.18), (2.0.19), (2.0.25) et (2.0.15) ensemble, nous obtenons

$$\begin{aligned}
E(t) - E(0) \leq & -C_1 \int_0^t \int_{\Omega} u_t(x, t) h_1(u_t(x, t)) d\gamma dt - C_2 \int_0^t \int_{\Omega} u_t(x, t - \tau(t)) h_2(u_t(x, t - \tau(t))) d\gamma dt \\
& + \int_0^t \sigma(t) (g' \circ \Delta u)(t) dt - \int_0^t \sigma'(t) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \int_0^t \frac{\sigma(t)}{2} g(t) \|\Delta u(t)\|_2^2 \\
& - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) \|\Delta u(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2} (g \circ \Delta u)(s) ds \tag{2.0.26}
\end{aligned}$$

Après avoir dérivé, nous obtenons le résultat souhaité(2.0.16). ■

2.0.12 Existence globale

Dans cette section, nous utilisons l'approximation de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe. Nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin pour construire la

solution approximative (1.2.1), que nous établissons dans cette section, est la suivante :

Théorème 2.0.6 Soit $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$, $f_0 \in H_0^2(\Omega, H^2(0,1))$) satisfaisant la condition de compatibilité $f_0(., 0) = u_1$. Supposons que (H1)-(H6) tiennent. Alors (1.2.1) admet une solution faible

$$u \in L^\infty([0, +\infty); H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), u_t \in L^\infty([0, +\infty); H_0^2(\Omega)), u_{tt} \in L^2([0, +\infty); H_0^1(\Omega))$$

Preuve. Soit $T > 0$, espace $V = V_n$, on définit aussi pour $1 \leq j \leq n$, la suite $\phi_j(x, n)$ comme suit $\phi_j(x, 0) = w_j(x)$, l'espace V_n engendré par l'ensemble $\{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $H^2(\Omega) \cap H^2(\Gamma_0(\Omega))$, on définit aussi pour $1 \leq j \leq n$, la suite $\phi_j(x, n)$ comme suit $\phi_j(x, 0) = w_j(x)$. On peut alors étendre $\phi_j(x, 0)$ par $\phi_j(x, n)$ sur $L^2(\Omega \times [0, 1])$ et noter V_n l'espace engendré par $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$). On construit la suite $(u_n(t), z_n(t))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bornée dans l'espace séparable (ou réflexif), alors admet une faible sous-suite convergente $^* u_k(t), z_k(t)$ (Alors le problème (1.2.1) admet une unique solution faible) donc par le théorème de compacité d'Aubin, admet une forte convergente $(u(t), z(t))$.

On construit des solutions approchées $(v_n(t), z_n(t))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sous la forme

$$u^n(t) = \sum_{j=1}^n c^{n,j}(t) w_j, z^n(t) = \sum_{j=1}^n d^{n,j}(t) \phi_j(x, n)$$

où $(u^n(t), z^n(t))$ est la solution du problème approché suivant correspondant à (1.2.1). En utilisant la formule de Green, on en déduit que $(u^n(t), z^n(t))$ vérifie le système d'EDO suivant :

$$\begin{aligned} & \langle |u_t^n|^m u_{tt}^n, w_j \rangle_\Omega + \langle \Delta u, \Delta w_j \rangle_\Omega - \langle \Delta u_{tt}^n(x, t), \Delta w_j \rangle_\Omega - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \langle \Delta u^n(s), \Delta w_j \rangle_\Omega ds \\ & + \mu_1 \langle h_1(u_t^n(x, t)), w_j \rangle_\Omega + \mu_2 \langle h_2(u_t^n(x, t - \tau(t))), w_j \rangle_\Omega \\ = & \left\langle |u^n(t)|^{p-1} u^n(t), w_j \right\rangle_\Omega \end{aligned} \quad (2.0.27)$$

pour $j = 1, \dots, n$. Plus précisément

$$u^n(0) = \sum_{j=1}^n c^{n,j}(0) w_j, z^n(0) = \sum_{j=1}^n z^{n,j}(0) \phi_j(x, n) \quad (2.0.28)$$

où $u^n(0) = \langle u^0, w_j \rangle, u_t^n(0) = \langle u^1, w_j \rangle, j = 1, \dots, n.$

évidemment,

$$u^n(0) \rightarrow u^0 \text{ dans } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), u_t^n(0) \rightarrow u^1 \text{ dans } H_0^2(\Omega) \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (2.0.29)$$

$$(\tau(t) z_t^n(x, k, t) + (1 - \tau'(t)) z_k^n(x, k, t)) \varphi_j = 0 \quad (2.0.30)$$

$$z^n(0) \rightarrow f_0 \text{ dans } H_0^2(\Omega; H^2[0, 1]); \quad (2.0.31)$$

En vertu de la théorie des équations différentielles ordinaires, le système(2.0.27 – 2.0.31) a une unique solution locale qui est étendue à un intervalle maximal $[0, T_n[$ (avec $T_n \leq T$) par le lemme de Zorn puisque les termes non linéaires dans (2.0.27) sont localement continus de Lipschitz. Notons que $u^n(t)$ est de classe C^2 .

Dans l'étape suivante, nous obtenons des estimations a priori pour la solution du système(2.0.27 – 2.0.31), afin qu'il puisse être étendu au-delà de $[0, T_n[$ à obtenir une solution définie pour tout $t > 0$, en utilisant un argument de compacité standard pour la procédure de limitation.

Première estimation : Comme les suites $u_0^k; u_1^k$ et z_0^k convergent et d'après (2.0.16) , on obtient facilement

En savoir plus sur ce texte sourceVous devez indiquer le texte source pour obtenir des informations supplémentaires

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{m+2} \|u_t^k(t)\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|\Delta u^n(t)\|_2^2 + \sigma(t) (g \circ \Delta u^n)(t) \right] \\ & \mu_1 \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1(u_t^k(x, t)) d\gamma + \mu_2 \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2(u_t^k(x, t - \tau(t))) d\gamma + \frac{\sigma(t)}{2} (g' \circ \Delta u^n)(t) \\ & - \sigma'(t) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u^n(t)\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{2} g(t) \|\Delta u^n(t)\|_2^2 + \frac{\sigma'(t)}{2} (g \circ \Delta u^n)(t) + \frac{1}{2} \|\Delta u_{tt}^n(t)\|_2^2 \\ = & \left\langle |u^n(t)|^{p-1} u^n(t), u_t^n \right\rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (2.0.32)$$

En intégrant(2.0.32) sur $(0, t)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m+2} \left\| u_t^k(t) \right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \left\| \Delta u^n(t) \right\|_2^2 + \sigma(t) (g \circ \Delta u^n)(t) - \int_0^t \left\langle |u^n(t)|^{p-1} u^n(t), u_t^n \right\rangle_{\Omega} dt \\
& + \mu_1 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1 \left(u_t^k(x, t) \right) d\gamma ds + \sigma(t) (g' \circ \nabla u^n)(t) + \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2 \left(u_t^k(x, t - \tau(t)) \right) d\gamma dt \\
& \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \Delta u_{ss}^n(s) \right\|_2^2 ds - \int_0^t \sigma'(s) \left(\int_0^s g(s) ds \right) \left\| \Delta u^n(s) \right\|_2^2 ds - \int_0^t \frac{\sigma(s)}{2} g(s) \left\| \Delta u^n(s) \right\|_2^2 ds \\
& + \int_0^t \frac{\sigma'(t)}{2} (g \circ \Delta u^n)(t) dt \\
= & \frac{1}{m+2} \left\| u_t^k(0) \right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \left\| \Delta u^n(0) \right\|_2^2
\end{aligned}$$

on peut trouver une constante positive C_5 indépendante de k telle que $E^k(t) - E^k(0)$

$$\begin{aligned}
E^k(t) - E^k(0) & \leq -C_3 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1 \left(u_t^k(x, t) \right) d\gamma dt - C_4 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2 \left(u_t^k(x, t - \tau(t)) \right) d\gamma dt \\
& - \int_0^t \sigma'(t) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left\| \Delta u^k(t) \right\|_2^2 dt + \int_0^t \frac{\sigma'(s)}{2} (g \circ \Delta u)(s) ds - \\
& \leq -C_3 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1 \left(u_t^k(x, t) \right) d\gamma dt - C_4 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2 \left(u_t^k(x, t - \tau(t)) \right) \\
& - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) \left\| \Delta u^k(s) \right\|_2^2 ds + \int_0^t \sigma(t) (g' \circ \Delta u^k)(t) dt \tag{2.0.33}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
E^k(t) & = \frac{1}{m+2} \left\| u_t^k(t) \right\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \left\| \Delta u^k(t) \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \left\| u_t^k(t) \right\|_2^2 - \frac{1}{p} \left\| u_t^k(t) \right\|_p^p \\
& + \sigma(t) (g \circ \Delta u^k)(t) + \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H \left(\left(z^k(x, k, t) \right) \right) dk dx \tag{2.0.34}
\end{aligned}$$

Soit $f(u^n(t)) = |u^n(t)|^{p-1}u^n(t)$, en appliquant les inégalités de Young, pour obtenir, for all $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_0^t \langle f(u^n(s)), u^n(s) \rangle_{\Omega} ds \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|f(u^n(t))\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^t \|u_s^n(t)\|_2^2 ds \quad (2.0.35)$$

Après avoir dérivé(2.0.34), inséré(2.0.35) dans (2.0.33) et pris ε suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned} & E^k(t) + C_3 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1(u_t^k(x, t)) d\gamma dt + C_4 \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2(u_t^k(x, t - \tau(t))) d\gamma dt \\ & \leq E^k(0) \leq C_5 \end{aligned}$$

C_5 est une constante positive ne dépendant que de $\|u_0(t)\|_{H_0^2}, \|u_1(t)\|_{H_0^1}$,

we obtain the first estimate:

$$\begin{aligned} & E^k(t) + \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1(u_t^k(x, t)) d\gamma dt + \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2(u_t^k(x, t - \tau(t))) d\gamma dt \\ & \leq \|u_t^k(t)\|_{m+2}^{m+2} + \|\nabla^2 u^k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|u_t^k(t)\|_2^2 - \|u_t^k(t)\|_p^p \\ & \quad + \sigma(t) (g \circ \nabla^2 u^k)(t) + \xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H(z^k(x, k, t)) dk dx \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t) h_1(u_t^k(x, t)) d\gamma dt + \int_0^t \int_{\Omega} u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2(u_t^k(x, t - \tau(t))) d\gamma dt \\ & \leq C_2 \end{aligned} \quad (2.0.36)$$

C_2 est une constante positive ne dépendant que de $\|u_0(t)\|_{H_0^2}, \|u_1(t)\|_{H_0^1}$,

Ces estimations impliquent que la solution (u^k, z^k) existe globalement dans $[0; +\infty)$.

Estimer(2.0.36) donne que

$$\begin{aligned}
u^k & \text{ is bounded in } L_{loc}^\infty((0, +\infty); H_0^2) \\
u_t^k & \text{ is bounded in } L_{loc}^\infty((0, +\infty); H_0^1) \\
H\left(\left(z^k(x, k, t)\right)\right) & \text{ is bounded in } L_{loc}^\infty((0, +\infty); L^1(\Omega \times (0, 1))) \\
u_t^k(x, t) h_1\left(u_t^k(x, t)\right) & \text{ is bounded in } L^1(\Omega \times (0, T)) \\
u_t^k(x, t - \tau(t)) h_2\left(u_t^k(x, t - \tau(t))\right) & \text{ is bounded in } L^1(\Omega \times (0, T)) \\
|u^n(t)|^{p-1} u^n(t) & \text{ is bounded in } |u(t)|^{p-1} u(t)
\end{aligned}$$

Second estimate. Comme ([8], [6], [5]). Remplacer w_j par $-\Delta_x w_j$ dans(2.0.27), multiplier le résultat par $c^{n,j}(t)$, additionner sur j de 1 à n , implique

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |u^n(t)|^{p-1} u^n(t) \Delta_x u_t^n dx - \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx \\
= & \int_{\Omega} \nabla u^n \Delta_x u_t^n dx + \int_{\Omega} \nabla u_t^n(x, t) \Delta_x u_t^n dx + \int_{\Omega} \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u^n(s) ds \Delta_x u_t^n dx \\
& + \mu_1 \int_{\Omega} h_1(u_t^n(x, t)) \Delta_x u_t^n dx + \mu_2 \int_{\Omega} h_2(u_t^n(x, t - \tau(t))) \Delta_x u_t^n dx \tag{2.0.37}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\Delta \nabla u^n(t)\|_2^2 + \|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2 - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \right] - \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx \\
& - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta \nabla u^n(s) \Delta \nabla u_t^n(s) dx ds - \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x, t)) \nabla_x u_t^n dx \\
& - \mu_2 (1 - \tau'(t)) \int_{\Omega} \nabla_x u_t^n u_t^n(x, t - \tau(t)) h_2'(u_t^n(x, t - \tau(t))) dx \\
= & 0 \tag{2.0.38}
\end{aligned}$$

mène à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\tau(t) \|\nabla z^n(t)\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} \|\nabla z^n(t)\|_2^2 = 0 \tag{2.0.39}$$

En combinant (2.0.37) et (2.0.38) ensemble, les rendements

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\Delta_x u_t(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\Delta \nabla u(t)\|_2^2 - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) ds \int_{\Omega} \Delta \nabla u^n(s) \Delta \nabla u_t^n(s) dx ds \right] \\
+ & \int_{\Omega} |u^n(t)|^{p-1} u^n(t) \Delta_x u_t^n dx - \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx \\
& + \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x,t)) \nabla_x u_t^n dx + \mu_2 (1 - \tau'(t)) \int_{\Omega} \nabla_x u_t^n u_t^n(x,t - \tau(t)) h_2'(u_t^n(x,t - \tau(t))) dx \\
= & 0 \tag{2.0.40}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t^n|^m |\nabla_x u_t^n|^2 dx = (m+1) \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n \nabla_x u_t^n dx - \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx$$

En différenciant(2.0.30) par rapport à t , on obtient

$$\xi(t) \tau(t) \int_{\Omega} \int_0^1 z_t z(\gamma, k, t) dk d\gamma + \frac{\xi(t)}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 (1 - \tau'(t) k) \left(\frac{\partial}{\partial k} (z^2(\gamma, k, s)) ds \right) dk d\gamma = 0$$

et

$$\left\langle \tau(t) z_{tt}^n(x, k, t) + \tau'(t) z_t^n(x, k, t) + \frac{\partial}{\partial k} z_t^n(x, k, t), \varphi_j \right\rangle_{\Omega} = 0 \tag{2.0.41}$$

en multipliant(2.0.41) par $d_t^{n,j}(x, k, t)$, en sommant sur j de 1 à n , il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\tau(t) \|z_t^n(t)\|_2^2 \right] + \frac{\tau'(t)}{2} \|z_t^n(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dk} \|z_t^n(t)\|_2^2 = 0 \\
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\tau(t) \int_0^1 \|z_t^n(t)\|_2^2 dk \right] + \frac{\tau'(t)}{2} \int_0^1 \|z_t^n(t)\|_2^2 dk + \frac{1}{2} \|z_t^n(\gamma, 1, t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_{tt}^n(t)\|_2^2 = 0 \tag{2.0.42}
\end{aligned}$$

On intègre sur $(0; 1)$ pour trouver que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\tau(t) \int_0^1 \|\nabla z^n(t)\|_2^2 d\rho \right) = \frac{1}{2} \left(\|\nabla_x u_t^n((\gamma, 0, t))\|_2^2 - \|\nabla_x z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 \right) \quad (2.0.43)$$

nous devons calculer $\frac{d}{dt} \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u^n(s) ds$, qui peut être dérivé comme

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u^n(s) ds = \sigma'(t) \int_0^t g(t-s) \nabla u^n(s) ds + \sigma(t) \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-s) \nabla u^n(s) ds \right) \quad (2.0.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla^2 u(t)\|_2^2 + \sigma(t) (g \circ \nabla^2 u)(t) - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \right. \\ & \quad \left. + \tau(t) \int_0^1 \|\nabla z^n(t)\|_2^2 d\rho + 2 \int_{\Omega} |u_t^n|^m |\nabla_x u_t^n|^2 dx \right] \\ & - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) ds \int_{\Omega} \Delta \nabla u^n(s) \Delta \nabla u_t^n(s) dx ds + \frac{1}{2} \|\nabla_x z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 \\ & = (m+1) \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n \Delta_x u_t^n dx - \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x, t)) \nabla_x u_t^n dx - \|\Delta u_t^n(t)\|_2^2 \frac{1}{2} \|\Delta \nabla u(t)\|_2^2 \\ & - \mu_2 (1 - \tau'(t)) \int_{\Omega} \nabla_x u_t^n u_t^n(x, t - \tau(t)) h_2'(u_t^n(x, t - \tau(t))) dx + \frac{\sigma(t)}{2} (g' \circ \Delta u^n)(t) \\ & - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) ds \|\Delta u^n(t)\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.0.45)$$

Nous fixons $f(u^n(t))$, en appliquant les inégalités de Young, pour obtenir

$$\left| \left\langle \frac{d}{dt} f(u^n(t)), u_t^n \right\rangle_{\Omega} \right| \leq \frac{1}{4\lambda} \left\| \frac{d}{dt} f(u^n(t)) \right\|_2^2 + \lambda \|u_t^n(t)\|_2^2 \quad (2.0.46)$$

Considérons $f(u^n(t)) = |u^n(t)|^{p-1} u^n(t)$ and $\phi(z^n(t)) = h_2(z^n(t))$. évidemment, en utilisant l'inégalité de Young,

les derniers termes de(2.0.45) peuvent être estimés comme suit

$$\int_0^t \left\langle |u^n(t)|^{p-1} u^n(t), \Delta u_s^n \right\rangle_{\Omega} ds \leq \frac{1}{4\beta} \int_0^t \left\| \nabla |u^n(t)|^{p-1} u^n(t) \right\|_2^2 ds + \beta \int_0^t \|\Delta \nabla u_s^n(s)\|_2^2 ds$$

et,

$$\int_0^t \int_{\Omega} |u(s)|^{p-1} u(s) u_t(s) dx ds \leq \int_0^t \|u(s)\|_{\frac{2M}{M-2}}^p \|u_t(s)\|_{\frac{2M}{3M-Mp+2(p-1)}} ds$$

et

$$\int_0^t \langle h_2(z^n(t)), \Delta u_s^n \rangle_{\Omega} ds \leq \frac{1}{4\epsilon} \int_0^t \|\nabla h_2(z^n(t))\|_2^2 ds + \epsilon \int_0^t \|\Delta \nabla u_s^n(s)\|_2^2 ds \quad (2.0.47)$$

$$\begin{aligned} & \mu_2 (1 - \tau'(t)) \int_{\Omega} \nabla_x u_t^n \nabla_x u_t^n(x, t - \tau(t)) h_2'(u_t^n(x, t - \tau(t))) \\ & \leq \eta \|\nabla_x u_t^n(x, t - \tau(t))\|_2^2 + \frac{(\mu_2 C_6 (1-d))^2}{4\eta} \|\nabla_x u_t^n(t)\|_2^2 \\ & \leq \eta \|\nabla_x u_t^n(x, t - \tau(t))\|_2^2 + \frac{(\mu_2 C_6 (1-d))^2 C_7}{4\eta}, \forall \eta > 0 \end{aligned} \quad (2.0.48)$$

Aussi (voir [12]), nous avons

$$\begin{aligned} (m+1) \int_{\Omega} |u_t^n|^m \nabla u_{tt}^n(t), \nabla_x u_t^n(t) dx & \leq (m+1) C_2^{\frac{m}{m+2} + \frac{1}{2}} \|\nabla u_{tt}^n\|_2 \\ & \leq \eta \|\nabla u_{tt}^n\|_2^2 + \frac{(m+1)^2 C_7^{\frac{2m}{m+2} + 1}}{4\eta}, \forall \eta > 0 \end{aligned} \quad (2.0.49)$$

En tenant compte de (2.0.49, 2.0.48) dans(2.0.45) on a,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \sigma(t) (g \circ \Delta u)(t) - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \right. \\
& \quad \left. + \tau(t) \int_0^1 \|\nabla z^n(t)\|_2^2 d\rho + 2 \int_{\Omega} |u_t^n|^m |\nabla_x u_t^n|^2 dx \right. \\
& \quad - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) ds \int_{\Omega} \Delta \nabla u^n(s) \Delta \nabla u_t^n(s) dx ds + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \|\nabla_x z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 \\
& \quad \left. + \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x, t)) \nabla_x u_t^n dx \right. \\
& \leq \eta \|\nabla u_{tt}^n\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{2} (g' \circ \Delta u^n)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) ds \|\Delta u^n(t)\|_2^2 + C(\eta) \tag{2.0.50}
\end{aligned}$$

Multiplier le résultat 2.0.27 par $c_{tt}^{n,j}$, en sommant sur j de 1 à n , implique

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n u_{tt}^n dx + \|\nabla u_{tt}(t)\|_2^2 \\
= & - \int_{\Omega} \nabla^2 u^2 u_{tt}^n dx + \int_{\Omega} \nabla u_t^n(x, t) u_{tt}^n dx + \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u^n(s) \Delta u_{tt}^n dx ds \\
& - \mu_1 \int_{\Omega} h_1(u_t^n(x, t)) u_{tt}^n dx - \mu_2 \int_{\Omega} h_2(u_t^n(x, t - \tau(t))) u_{tt}^n dx + \int_{\Omega} |u^n(t)|^{p-1} u^n(t) \nabla u_{tt}^n dx
\end{aligned}$$

en multipliant 2.0.41 par $d_t^{n,j}(x, k, t)$, en sommant sur j de 1 à n , il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\tau(t) \|z_t^n(t)\|_2^2 \right] + \frac{\tau'(t)}{2} \|z_t^n(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dk} \|z_t^n(t)\|_2^2 = 0$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\tau(t) \int_0^1 \|z_t^n(t)\|_2^2 dk \right] + \frac{\tau'(t)}{2} \int_0^1 \|z_t^n(t)\|_2^2 dk + \frac{1}{2} \|z_t^n(\gamma, 1, t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_{tt}^n(t)\|_2^2 = 0 \tag{2.0.52}$$

On intègre sur $(0; 1)$ à et que

$$\frac{1}{2} \left(\tau(t) \int_0^1 \|z^n(t)\|_2^2 d\rho \right) + \frac{1}{2} \|z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\nabla_x u_t^n((\gamma, 0, t))\|_2^2 \quad (2.0.53)$$

Somme 2.0.51 et 2.0.53, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u_t^n|^m u_{tt}^n u_{tt}^n dx + \|\nabla u_{tt}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(\tau(t) \int_0^1 \|z^n(t)\|_2^2 d\rho \right) + \frac{1}{2} \|z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 \\ = & - \int_{\Omega} \Delta u^n u_{tt}^n dx + \int_{\Omega} \nabla u_t^n(x, t) u_{tt}^n dx + \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u^n(s) \Delta u_{tt}^n dx ds \\ & - \mu_1 \int_{\Omega} h_1(u_t^n(x, t)) u_{tt}^n dx - \mu_2 \int_{\Omega} h_2(u_t^n(x, t - \tau(t))) u_{tt}^n dx + \int_{\Omega} |u^n(t)|^{p-1} u^n(t) u_{tt}^n dx \end{aligned} \quad (2.0.54)$$

En utilisant l'inégalité de Young, le membre de droite de 2.0.54 peut être estimé comme suit :

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u^n u_{tt}^n dx \leq \eta \|\nabla u_{tt}^n\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\nabla \Delta u^n\|_2^2$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \langle \nabla u^n(t), \nabla u_{tt}^n(t) \rangle_{\Omega} ds \right| & \leq c' \|\nabla u_{tt}^n(t)\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{4\eta} \int_0^t g(t-s) \langle \nabla u^n(t), \nabla u_{tt}^n(t) \rangle_{\Omega} ds \\ & \leq \frac{c'}{4\epsilon} \|\nabla u_t^n(t)\|_2^2 + c'\epsilon \|g''\|_{L^1} \int_0^t g''(t-s) \|\nabla u^n(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (2.0.55)$$

$$\begin{aligned} \left| \sigma'(t) \int_0^t g(t-s) \langle \Delta u^n(t), \nabla u_t^n(t) \rangle_{\Omega} ds \right| & \leq |\sigma(t)| \|\nabla u_{tt}^n(t)\|_2 \int_0^t g''(t-s) \|\nabla u^n(s)\|_2^2 ds \\ & \leq \frac{c'}{4\epsilon} \|\nabla u_{tt}^n(t)\|_2^2 + c'\epsilon \|g''\|_{L^1} \int_0^t g''(t-s) \|\nabla u^n(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (2.0.56)$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \mu_1 \int_{\Omega} u_{tt}^n h_1(u_t^n(x, t)) dx &\leq \eta \int_{\Omega} |u_{tt}^n|^2 dx + \frac{\mu_1^2}{4\eta} \int_{\Omega} |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx \\ &\leq \eta C_s^2 \|u_{tt}^n\|_2^2 + \frac{\mu_1^2}{4\eta} \int_{\Omega} |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx \end{aligned}$$

$$\mu_2 \int_{\Omega} u_{tt}^n h_2(z_t^n(x, 1, t)) dx \leq \eta C_s^2 \|u_{tt}^n\|_2^2 + \frac{\mu_2^2}{4\eta} \int_{\Omega} |h_2(z_t^n(x, 1, t))|^2 dx$$

Ainsi, à partir de 2.0.50 et 2.0.56, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla^2 u(t)\|_2^2 + \sigma(t) (g \circ \nabla^2 u)(t) - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \right. \\ &\quad \left. + \tau(t) \int_0^1 \|\nabla z^n(t)\|_2^2 d\rho + 2 \int_{\Omega} |u_t^n|^m |\nabla_x u_t^n|^2 dx \right] \\ &- \sigma(t) \int_0^t g(t-s) ds \int_{\Omega} \Delta \nabla u^n(s) \Delta \nabla u_t^n(s) dx ds + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \|\nabla_x z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 \\ &+ \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x, t)) \nabla_x u_t^n dx \\ &\leq \beta^2 \frac{(1+\eta)}{4\eta} \|\nabla \Delta u^n\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{2} (g' \circ \nabla \Delta u^n)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) ds \|\Delta u^n(t)\|_2^2 + C_2(\eta) \\ &+ \frac{\mu_1^2}{4\eta} \int_{\Omega} |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx + \frac{\mu_2^2}{4\eta} \int_{\Omega} |h_2(z_t^n(x, 1, t))|^2 dx \end{aligned} \tag{2.0.57}$$

En choisissant suffisamment petit tel que $1 > 0$, en intégrant sur $(0; t)$ et en utilisant (2.0.2), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Delta_x u_t^n(t)\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \sigma(t) (g \circ \Delta u)(t) - \frac{1}{p} \|u_t(t)\|_p^p \\
& + \tau(t) \int_0^1 \|\nabla z^n(t)\|_2^2 d\rho + 2 \int_\Omega |u_t^n|^m |\nabla_x u_t^n|^2 dx - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) ds \int_\Omega \Delta \nabla u^n(s) \Delta \nabla u_t^n(s) dx ds \\
& + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \int_0^t \|\nabla_x z^n((\gamma, 1, t))\|_2^2 + \mu_1 \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x u_t^n|^2 h_1'(u_t^n(x, t)) \nabla_x u_t^n dx \\
\leq & \beta^2 \frac{(1+\eta)}{4\eta} \int_0^t \|\nabla \Delta u^n\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{2} (g' \circ \nabla \Delta u^n)(t) - \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) ds \|\Delta u^n(t)\|_2^2 + C_2(\eta) \\
& + \frac{\mu_1^2}{4\eta} \int_0^t \int_\Omega |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx + \frac{\mu_2^2}{4\eta} \int_0^t \int_\Omega |h_2(z_t^n(x, 1, t))|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.0.58}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx & \leq \int_{u_t^n \geq \varepsilon} |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx + \int_{u_t^n < \varepsilon} |h_1(u_t^n(x, t))|^2 dx \\
& \leq \int_{u_t^n \geq \varepsilon} u_t^n h_1(u_t^n(x, t)) dx + \int_\Omega H^{-1}(u_t^n h_1(u_t^n(x, t))) dx \\
& \leq \int_{u_t^n \geq \varepsilon} u_t^n h_1(u_t^n(x, t)) dx + cH^{-1}\left(\int_\Omega u_t^n h_1(u_t^n(x, t)) dx\right) \\
& \leq \int_{u_t^n \geq \varepsilon} u_t^n h_1(u_t^n(x, t)) dx + c'H^{-1}(1) + c'' \int_\Omega u_t^n h_1(u_t^n(x, t)) dx \\
& \leq C_8 H^{-1}(1) + C_9 \int_\Omega u_t^n h_1(u_t^n(x, t)) dx \\
& \leq C_8 H^{-1}(1) + c(-E')
\end{aligned} \tag{2.0.59}$$

et

$$\int_\Omega |h_2(z_t^n(x, 1, t))|^2 dx \leq c' \int_\Omega z_t^n h_2(z_t^n(x, 1, t)) dx \leq c(-E') \tag{2.0.60}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|\Delta_x u_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\Delta \nabla u^n(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_{tt}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \sigma(t)(g \circ \Delta u)(t) \\
& + \int_0^1 \|z^n(x, \rho, t)\|_2^2 d\rho + \int_0^1 \|\nabla_x z^n(x, \rho, t)\|_2^2 d\rho \\
\leq & C_{10}
\end{aligned} \tag{2.0.61}$$

On observe que l'estimation(2.0.59) et (2.0.61) qu'il existe une sous-suite $\{u^k\}$ de $\{u^n\}$ et une fonction u et passe à la limite lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$u^k \rightarrow u \text{ faiblement étoilée dans } L^\infty((0, T); H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \tag{2.0.62}$$

$$u_t^k \rightarrow u \text{ faiblement étoilée dans } L^\infty((0, T); H_0^2(\Omega)) \tag{2.0.63}$$

$$u_{tt}^k \rightarrow u_{tt} \text{ faiblement étoilée dans } L^2((0, T); H_0^1(\Omega)) \tag{2.0.64}$$

$$z^k \rightarrow z \text{ faiblement étoilée dans } L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega \times L^2(0, 1))) \tag{2.0.65}$$

$$z_t^k \rightarrow z_t \text{ faiblement étoilée dans } L^\infty((0, T); L^2(\Omega \times (0, 1))) \tag{2.0.66}$$

De la première estimation(2.0.59) et du lemme 2.1, on déduit

$$\begin{aligned}
\| |u_t^n|^m u_{tt}^n \|_{L^2(\Omega \times (0, T), L^2(\Omega))}^2 & \leq \int_0^T \| |u_t^n|^m u_{tt}^n \|_{2(m+1)}^{2(m+1)} dt \leq \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda}} \right)^{2(m+1)} \int_0^T \|\Delta u_t^n\|_2^{2(m+1)} dt \\
& \leq \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda}} \right)^{2(m+1)} C_3^{2(m+1)} T
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'encastrement

$$L^\infty((0, T); X) \hookrightarrow L^2((0, T); X)$$

du théorème d'Aubin-Lions, (voir), on déduit qu'il existe une sous-suite $\{u^k\}$ de $\{u^n\}$ telle que

$$u_t^k \rightarrow u_t \text{ fortement dans } L^2((0, T); L^2(\Omega)) \quad (2.0.67)$$

ce qui implique

$$u_t^k \rightarrow u_t \text{ fortement presque partout dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.0.68)$$

D'où

$$\left| u_t^k \right|^m u_t^k \rightarrow |u_t|^m u_t \text{ fortement presque partout dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.0.69)$$

en utilisant (2.0.67, 2.0.69) et Lions Lemma, nous dérivons

$$\left| u_t^k \right|^m u_t^k \rightarrow |u_t|^m u_t \text{ faiblement dans } L^2((0, T); L^2(\Omega)) \quad (2.0.70)$$

et

$$z^k \rightarrow z \text{ fortement dans } L^2((0, T); L^2(\Omega)) \quad (2.0.71)$$

ce qui implique

$$z^k \rightarrow z \text{ fortement presque partout dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.0.72)$$

Lemme 2.0.5 (voir [6]) *Pour tout $T > 0$,*

$$h_1(u_t); h_2(z(x; 1; t)) \in L^1(\Omega \times (0, T))$$

et,

$$\|h_1(u_t)\|_{L^1(\Omega \times (0, T))} \leq K, \|h_2(z(x; 1; t))\|_{L^1(\Omega \times (0, T))} \leq K,$$

où K est une constante indépendante de t .

$$h_1(u_t^n) \rightarrow h_1(u_t) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0, T)), h_2(z^n(x; 1; t)) \rightarrow h_2(z(x; 1; t)) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0, T))$$

De même, nous avons

$$h_1(u_t^n) \rightarrow h_1(u_t) \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega \times (0, T)), \quad (2.0.73)$$

$$h_2(z^n(x; 1; t)) \rightarrow h_2(z(x; 1; t)) \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega \times (0, T)) \quad (2.0.74)$$

D'où

$$h_1(u_t^n) \rightarrow h_1(u_t) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega \times (0, T)),$$

$$h_2(z^n(x; 1; t)) \rightarrow h_2(z(x; 1; t)) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega \times (0, T))$$

Ceci termine la preuve. ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité des vibrations de la flexion et élastique d'une plaque mince.

Notre problème est d'étudier le comportement asymptotique de la solution (déterminer sa limite). Si la limite de l'énergie est nulle, donner une estimation de la vitesse de sa décroissance vers zéro. Tout dépend des hypothèses sur le terme d'amortissement.

Il y a divers types de stabilité uniforme. Dans notre cas, on s'intéresse la stabilité, c'est dire

$$E(t) \leq Ch(t) \quad ; \text{ pour tout } t \geq 0,$$

où C ; sont des constantes strictement positives dépendant uniquement des données.

On démontre dans cette mémoire que le système (2.0.13) est uniformément stable sous des hypothèses convenables sur les données. Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance de l'énergie vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.

Pour prouver les taux de décroissance de l'énergie au problème correspondant, nous définissons la fonction perturbée suivante :

$$L(t) = M'E(t) + \chi(t) \tag{3.0.1}$$

où

$$\chi(t) = \sigma(t) J(t) = \sigma(t) (\varepsilon_1 \psi(t) + \varepsilon_2 \phi(t) + \varepsilon_3 \varphi(t)) \tag{3.0.2}$$

et

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) d\rho dx \\
\phi(t) &= \frac{1}{m+1} \int_{\Omega} |u_t|^m u_t u dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t d\gamma \\
\varphi(t) &= \int_{\Omega} \left(\Delta u_t - \frac{1}{m+1} |u_t|^m u_t \right) \int_0^t g(t-s) (u(t) - u(s)) ds dx \quad (3.0.3)
\end{aligned}$$

où M , ε_1 and ε_2 are suitable positive constants to be determined later.

Théorème 3.0.7 *Soit $(u^0, u^1, f_0) \in H_{\Omega}^0(\Omega) \times L^2(\Omega) \cap L^4(\Omega) \times L^2(\Omega \times (0, 1))$ Supposons que (H1) - (H1), et (2.0.15) soient vérifiés. Alors il existe des constantes strictement positives C_0 , θ et t_1 telles que la solution de(1.2.1) satisfait*

$$E(t) \leq C_0 H^{-1}(w_0 + w_1 t) \quad (3.0.4)$$

Lemme 3.0.6 *Soit (u, z) être une solution du problème (2.0.13) , alors il existe deux constantes positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que*

$$\lambda_1 E(t) \leq L(t) \leq \lambda_2 E(t) \quad (3.0.5)$$

pour M' suffisamment grand

Lemme 3.0.7 *Soit J la fonctionnelle définie dans(3.0.3), alors J vérifie*

$$|\chi(t)| \leq C_{10} E(t)$$

où C_{10} sont des constantes positives.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
|\psi(t)| &\leq \left| e^{-2\rho\tau(t)} \int_{\Omega} \int_0^1 H(z(x, \rho, t)) \, d\rho dx \right| \\
&\leq c\xi(t) \int_{\Omega} \int_0^1 H(z(x, \rho, t)) \, d\rho dx \\
&\leq cE(t)
\end{aligned}$$

$$|\psi(t)| \leq cE(t) \quad (3.0.6)$$

Grâce aux inégalités de Cauchy–Schwarz, Young et Sobolev–Poincaré utilisant le fait que $\|\nabla u\|_{2,\Omega} \leq B \|\nabla u\|_2$, on a

$$\begin{aligned}
|\phi(t)| &\leq \frac{1}{m+1} \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{(m+1)^{-1}}{m+2} \|u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{m+1} \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{(m+1)^{-1}}{m+2} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{m+2} \|\Delta u\|_2^{m+2} + \frac{1}{2\lambda_1} \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{m+1} \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \left(\frac{(m+1)^{-1}}{m+2} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{m+2} \left(\frac{2E(0)}{1-\beta} \right)^{m/2} + \frac{1}{2\lambda_1} \right) \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\leq \delta_0 \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \delta_1 \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2
\end{aligned}$$

$$|\phi(t)| \leq \delta_0 \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \delta_1 \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \quad (3.0.7)$$

et

$$|\varphi(t)| \leq \delta'_0 \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \delta'_1 (g \circ \Delta u)(t) + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \quad (3.0.8)$$

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)| &\leq \frac{1}{m+2} \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\quad + \left(\frac{(m+1)^{-1}}{m+2} \beta^{m+1} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{m+2} \left(\frac{4E(0)}{1-\beta} \right)^{m/2} + \frac{\beta}{2\lambda_1} \right) \|\Delta u\|_2^2 \\
&\leq \delta'_0 \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \delta'_1 (g \circ \Delta u)(t) + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2
\end{aligned}$$

Cela donne, en utilisant le fait que $\sigma(t) \leq \sigma(0)$

$$\begin{aligned}
|L(t) - M'E(t)| &= |\sigma(t)J(t)| \leq \sigma(0)|J(t)| \leq \varepsilon_1\sigma(t)|\psi(t)| + \varepsilon_2\sigma(t)|\phi(t)| + |\varphi(t)| \\
&\leq \frac{\varepsilon_1\sigma(0)}{\xi}E(t) + (\varepsilon_1\sigma(t)\delta_0 + \delta'_0)\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_1\sigma(t))\|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\quad + \delta_1\|\Delta u\|_2^2 + \delta'_1(g \circ \Delta u)(t) + \|\nabla u_t\|_2^2 \\
&\leq C_{11}E(t) + C_{12}E(t) \leq C_{13}E(t)
\end{aligned}$$

et

$$(M' - C_{10})E(t) \leq L(t) \leq (M' + C_{10})E(t) \quad (3.0.9)$$

où, $C_{10} = \max(C_{11}, C_{12}, C_{13})$ et $C_{12} = \varepsilon \frac{\sigma(0)}{\omega}$, $C_{13} = \varepsilon \frac{\sigma(0)}{4\omega}$. Ainsi, à partir de la définition de $E(t)$ et en choisissant M' suffisamment grand, on peut facilement trouver (3.0.5).

où $\lambda_1 = M' - C_{10}$, $\lambda_2 = M' + C_{10}$.

Ces termine la preuve. ■

Lemme 3.0.8 Soit $L(t)$ être les fonctions définies dans (3.0.1), alors $L(t)$ satisfait

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -C_1E(t) + C_2\|h_1(u_t)\|_2^2; \forall t \geq 0 \quad (3.0.10)$$

Preuve. En prenant la dérivée de (3.0.1), on a

$$\frac{d}{dt}L(t) = M' \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon\sigma'(t)(\psi(t) + \phi(t) + \varphi(t)) + \varepsilon\sigma(t) \frac{d}{dt}(\psi(t) + \phi(t) + \varphi(t)) \quad (3.0.11)$$

Lemme 3.0.9 Soit ψ, ϕ, φ être les fonctions définies dans (3.0.3), satisfait

$$\frac{d}{dt}\psi(t) \leq -2\psi(t) - \theta_1 \int_{\Omega} z(x, 1, t) h_2(z(x, 1, t)) dx + \theta_2 \int_{\Omega} u(x, t) h_1(u(x, t)) dx \quad (3.0.12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t) &\leq \frac{1}{m+1}\|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \eta_1\|\nabla u_t\|_2^2 - \|\Delta u\|_2^2 + \eta_2(g \circ \Delta u)(t) \\
&\quad + \frac{\mu_1}{4\eta} \int_{\Omega} |u(\gamma, t)|^2 d\gamma + \frac{\mu_2}{4\eta} \int_{\Omega} |z(\gamma, 1, t)|^2 d\gamma + \|u_t\|_p^p
\end{aligned} \quad (3.0.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t) &\leq \|u_t\|_2^2 - \|\nabla u\|_2^2 + \|u_t\|_p^p + \sigma(t)(g * \Delta u, \Delta u)(t) \\
&\quad - \mu_1 \int_{\Omega} u_t u d\gamma - \mu_2 \int_{\Omega} z(\gamma, 1, t) u d\gamma
\end{aligned} \quad (3.0.14)$$

où $\theta_1 = \frac{1-d}{\tau_1} e^{-2\tau_1}$, $\theta_2 = \frac{1}{\tau_0}$, $\eta_1 = \left(1 - \beta - \eta - \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1} (\mu_1 + \mu_2)\right)$, $\eta_2 = \frac{\sigma(0)\beta}{4}$ sont des constantes positives.

Preuve. Utiliser les problèmes(2.0.10) et (2.0.13) , on a

$$z_t(x, k, t) = -\frac{(1-\tau'(t))}{\tau(t)} z_k(x, k, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) d\rho dx \right) \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 (-2\rho\tau'(t)) e^{-2\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) d\rho dx + \int_{\Omega} \int_0^1 e^{-2\rho\tau(t)} \frac{d}{dt} H(z(x, \rho, t)) d\rho dx \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 (-2\rho\tau'(t)) e^{-2\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) d\rho dx \\ &\quad - \frac{1}{\tau(t)} \int_{\Omega} \int_0^1 ((1 - \tau'(t)) \rho) \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho} + 2\tau(t) \right) \left(e^{-2\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) \right) + \right] d\rho dx \\ &= - (2\rho\tau'(t)) \psi(t) - \frac{1}{\tau(t)} \int_{\Omega} \left[\begin{array}{l} e^{-2\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) (1 - \tau'(t) \rho) dx \Big|_0^1 \\ + \tau'(t) \int_0^1 e^{-\rho\tau(t)} H(z(x, \rho, t)) d\rho \end{array} \right] dx - 2(1 - \tau'(t) \rho) \psi(t) \\ &= \left[- (2\rho\tau'(t)) - \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} - 2(1 - \tau'(t) \rho) \right] \psi(t) - \frac{(1 - \tau'(t))}{\tau(t)} e^{-2\tau(t)} \int_{\Omega} z(x, 1, t) h_2(z(x, 1, t)) dx \\ &\quad + \frac{1}{\tau(t)} \int_{\Omega} u(x, t) h_1(u(x, t)) dx \\ &= - \left[\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} + 2 \right] \psi(t) - \frac{(1 - \tau'(t))}{\tau(t)} e^{-2\tau(t)} \int_{\Omega} z(x, 1, t) h_2(z(x, 1, t)) dx \\ &\quad + \frac{1}{\tau(t)} \int_{\Omega} u(x, t) h_1(u(x, t)) dx \\ &\leq -2\psi(t) - \theta_1 \int_{\Omega} z(x, 1, t) h_2(z(x, 1, t)) dx + \theta_2 \int_{\Omega} u(x, t) h_1(u(x, t)) dx \end{aligned}$$

■

L'inégalité de Young produit

$$\int_{\Omega} u h_1(u_t) d\gamma \leq \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1} \|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} |h_1(u_t)|^2 d\gamma \quad (3.0.15)$$

et

$$\int_{\Omega} zh_2(z_t) d\gamma \leq \frac{\eta C_s^2}{\lambda_1} \|\Delta u_t\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} |h_2(z_t)|^2 d\gamma \quad (3.0.16)$$

$$\left| \int_{\Omega} u_t u d\gamma \right| \leq \frac{C^{-2}}{2} \|u_t\|_2^2 \quad (3.0.17)$$

et

$$\left| \int_{\Omega} z(\gamma, 1, t) u d\gamma \right| \leq \frac{C^{-2}}{2} \|u_t\|_2^2 \quad (3.0.18)$$

où C est une constante positive, exploitant et l'inégalité de trace implique que, $\forall \epsilon > 0$ et $c > 0$

$$\|u\|_2^2 \leq c\epsilon \|\nabla u\|_2^2 \leq c \|\nabla u\|_2^2 \quad (3.0.19)$$

Utilisant(3.0.15 – 3.0.19) ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(t) &= \frac{1}{m+1} \left(\int_{\Omega} (|u_t|^m u_t)' u(t) dx \right) + \frac{1}{m+1} \int_{\Omega} |u_t|^{m+2} dx + \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx \\
&= \int_{\Omega} |u_t|^m u_{tt} u(t) dx + \frac{1}{m+1} \|u_t\|^{m+2} - \int_{\Omega} \Delta u_{tt} u dx + \|\nabla u\|_2^2 \\
&= \int_{\Omega} (|u_t|^m u_{tt} - \Delta u_{tt} u(t)) dx + \frac{1}{m+1} \|u_t\|^{m+2} + \|\nabla u\|_2^2 \\
&= \frac{1}{m+1} \|u_t\|^{m+2} + \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\Omega} \left(-|u|^{p-1} u_t + \Delta^2 u(x, t) - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) \right) dx \\
&= \frac{1}{m+1} \|u_t\|^{m+2} + \|\nabla u\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u\|_2^2 + \|u_t\|_p^p \\
&\quad + \int_{\Omega} \sigma(t) \int_0^t g(t-s) |\Delta u(t)| |\Delta u(s) - \Delta u(t)| ds + \mu_1 \int_{\Omega} u h_1(u_t(x, t)) dx \\
&\quad + \mu_2 \int_{\Omega} u h_2(u_t(x, t - \tau(t))) dx \\
&\leq \frac{1}{m+1} \|u_t\|^{m+2} + \|\nabla u\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u\|_2^2 + \|u_t\|_p^p \\
&\leq \frac{1}{m+1} \|u_t\|_{m+2}^{m+2} + \eta_1 \|\nabla u_t\|_2^2 - \|\Delta u\|_2^2 + \eta_2 (g \circ \Delta u)(t) \\
&\quad + \frac{\mu_1}{4\eta} \int_{\Omega} |u(\gamma, t)|^2 d\gamma + \frac{\mu_2}{4\eta} \int_{\Omega} |z(\gamma, 1, t)|^2 d\gamma + \|u_t\|_p^p
\end{aligned} \tag{3.0.20}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\Delta u_t - \frac{1}{m+1} |u_t|^m u_t \right) \int_0^t g(t-s) (u(t) - u(s)) ds dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\Delta u_t - \frac{1}{m+1} |u_t|^m u_t \right) \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-s) (u(t) - u(s)) ds \right) dx \\
&= - \int_{\Omega} (|u_t|^m u_{tt} - \Delta u_{tt}) \int_0^t g(t-s) (u(t) - u(s)) ds dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \left(\Delta u_t - \frac{1}{m+1} |u_t|^m u_t \right) \left(\int_0^t g'(t-s) [(u(t) - u(s)) + (\nabla u(t) - \nabla u(s))] ds \right) dx \\
&= - \int_{\Omega} \left(-|u|^{p-1} u_t + \Delta^2 u(x, t) - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) \right) \int_0^t g(t-s) (u(t) - u(s)) ds dx \\
&\leq C_{12} \|\nabla u\|_2^2 + \left(1 - \sigma(t) \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u\|_2^2 + \|u_t\|_p^p + (g \circ \Delta u)(t) + (g' \circ \Delta u)(t) \\
&\quad + \mu_1 \|h_1(z(x, 0, t))\|_2^2 + \mu_2 \|h_2(z(x, 1, t))\|_2^2 \tag{3.0.21}
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}J(t) = \varepsilon_1 \frac{d}{dt}\psi(t) + \varepsilon_2 \frac{d}{dt}\phi(t) + \varepsilon_3 \frac{d}{dt}\varphi(t)$$

ce qui achève la preuve ■

Lemme 3.0.10 *Soit $L(t)$ être les fonctions définies dans (3.0.1), alors $L(t)$ satisfait*

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -C_1 E(t) + C_2 \|h_1(u_t)\|_2^2; \forall t \geq 0 \tag{3.0.22}$$

Preuve. En prenant la dérivée de (3.0.1), on obtient

$$\frac{d}{dt}L(t) = M' \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon \sigma'(t) (\psi(t) + \phi(t) + \varphi(t)) + \varepsilon \sigma(t) \frac{d}{dt}(\psi(t) + \phi(t) + \varphi(t)) \tag{3.0.23}$$

en utilisant les inégalités

$$\sigma'(t) \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right| \leq \frac{C_s^2}{\alpha_1} \sigma'(t) \|\nabla u\|_2^2 + \sigma'(t) \alpha_1^2 \|u_t\|_2^2 \quad (3.0.24)$$

$$\sigma'(t) \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right| \leq \frac{C_s^2 B^2}{\alpha_1} \sigma'(t) \|\nabla u\|_2^2 + \sigma'(t) \alpha_1^2 \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \quad (3.0.25)$$

En combinant (3.0.19), (3.0.24), (3.0.25) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &= -c_1 M' \|u_t\|_{2,\Omega}^2 - c_2 M' \|z(\gamma, 1, t)\|_{2,\Omega}^2 + M' \frac{\sigma(t)}{2} (g' \circ \nabla u)(t) + \epsilon \sigma'(t) \alpha_1^2 \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \\ &\quad \left[\epsilon \sigma(t) \left[\alpha_1^2 \left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \right) - (1 - 2n - \eta_1) \|\nabla u\|_2^2 + \frac{\sigma(t)}{4} (g \circ \nabla u)(t) + \|u\|_p^p \right] \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \sigma(t) \left[\eta_2 \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \eta_3 \|z(\gamma, 1, t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_t\|_p^p \right] - M' \frac{\sigma'(t)}{2} \int_0^t g(s) ds \|\nabla u\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \sigma'(t) \left[\frac{C_s^2}{\alpha_1} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{C_s^2 B^2}{\alpha_1} \|\nabla u\|_2^2 + \alpha_1^2 \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \right] - \delta \|\nabla u_t\|_2^2 \right] \quad (3.0.26) \end{aligned}$$

nous concluons que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &\leq \epsilon \sigma(t) \left[\frac{\sigma(t)}{4} (g \circ \nabla u)(t) + \left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_3 \right) \|z(\gamma, 1, t)\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_p^p \right] \\ &\quad \left[\alpha_1^2 \left(1 + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) \left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \right) \right] \\ &\quad - \epsilon \sigma(t) \left[\left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_2 \right) \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \left((1 - 2n - \eta_1) - \left(\frac{C_s^2}{\alpha_1} (1 + B^2) - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) \|\nabla u\|_2^2 \right] \\ &\quad - \delta \|\nabla u_t\|_2^2 \quad (3.0.27) \end{aligned}$$

Consequently, using the definition of the energy (2.0.26), for any positive constant M' , we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &\leq -\sigma(t) \left[\left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_2 \right) \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \left(\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_3 \right) \int_{\Omega} u(x, t - \tau) dx + \right] \\ &\quad - \epsilon \sigma(t) \left[\left((1 - 2n - \eta_1) - \left(\frac{C_s^2}{\alpha_1} (1 + B^2) - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) \|\nabla u\|_2^2 \right] \\ &\quad - \epsilon \sigma(t) \left[\frac{M' \sigma(t)}{4} (g \circ \nabla u)(t) + \left(\frac{M'}{2} - \alpha_1^2 \left(1 + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) \right) \left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \right) \right] \\ &\quad \epsilon \sigma(t) \left[\frac{M'}{2} \left(\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{2,\Omega}^2 \right) + \|u\|_p^p + \frac{M' \sigma(t)}{4} (g \circ \nabla u)(t) \right] - \delta \|\nabla u_t\|_2^2 \quad (3.0.28) \end{aligned}$$

On fixe d'abord $n - \eta_1 > 0$ tel que $1 - 2n - \eta_1 > 0$ puis on prend $M' > 0$ tel que $\frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_2 > 0, \frac{c_1 M'}{\sigma(0)} - \eta_3 > 0$. Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = 0$, on peut choisir $t_0 > 0$ suffisamment grand pour que

$$\left(\frac{M'}{2} - \alpha_1^2 \left(1 + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) \right) > 0, \left((1 - 2n - \eta_1) - \left(\frac{C_s^2}{\alpha_1} (1 + B^2) - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right) > 0$$

En utilisant le Sobolev–Poincaré et tracer des inégalités

$$\|u\|_2^2 \leq C \|\nabla u\|_2^2, \|u\|_{2,\Omega}^2 \leq C \|\nabla u\|_2^2$$

Alors (3.0.28) prend la forme

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -M' \sigma(t) c \epsilon E(t) - (M' \delta - \epsilon M' \sigma(0) C) \|\nabla u_t\|_2^2 \quad (3.0.29)$$

$$+ \epsilon \frac{M' \sigma(0)}{2} \sigma(t) (g \circ \nabla u)(t) \quad (3.0.30)$$

puis, en choisissant ϵ assez petit pour que $M' \delta - \epsilon M' \sigma(0) C > 0$

on obtient

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -M' \sigma(t) c \epsilon E(t) + \epsilon \frac{M' \sigma(0)}{2} \sigma(t) (g \circ \nabla u)(t) \quad (3.0.31)$$

réglage $\theta = \frac{M' \epsilon}{\lambda_2}$, $C_1 = C \theta$, $C_2 = \epsilon \frac{M' \sigma(0)}{2}$ la dernière inégalité devient

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -\sigma(t) C_1 E(t) + C_2 \sigma(t) (g \circ \nabla u)(t), \forall t \geq 0 \quad (3.0.32)$$

Multiplier (3.0.32) par $\eta(t)$ et en utilisant le lemme , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &\leq -\sigma(t) C_1 E(t) + C_2 \sigma(t) (g \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -\sigma(t) C_1 E(t) - C_2 \sigma(t) (g' \circ \nabla u)(t) \\ &\leq -\sigma(t) C_1 E(t) + C_2 \left(-2 \frac{d}{dt} E(t) - \sigma'(t) \int_0^t g(s) ds \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) \end{aligned} \quad (3.0.33)$$

Puisque η est non croissant, d'après la définition de $E(t)$ et l'hypothèse(2.0.2), on a

$$\frac{d}{dt} [L(t) + 2C_2E(t)] \leq -\sigma(t) C_3E(t), \quad \text{for } t > t_0$$

comme on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2C_2l_0\sigma'(t)}{\lambda\eta(t)\sigma(t)} = 0$, on peut choisir $t_1 > t_0$ tel que $C_3 = C_1 + \frac{2C_2l_0\sigma'(t)}{\lambda\eta(t)\sigma(t)}$ pour $t > t_1$

$$\text{Maintenant, soit } \chi(t) = \begin{cases} L(t) + 2C_2E(t) & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \varepsilon] \\ H'(\varepsilon_0E(t)) [L(t) + cE(t)] + cE(t) & \text{si } H'(0) > 0, H'' > 0 \text{ sur }]0, \varepsilon] \end{cases}$$

On peut alors vérifier que

$$\theta_1E(t) \leq \chi(t) \leq \theta_2E(t) \quad (3.0.34)$$

où θ_1, θ_2 sont deux constantes positives, nous arrivons donc à

$$\int_{|u_t| > \varepsilon} |h_1(u_t)|^2 dx \leq c_1 \int_{|u_t| > \varepsilon} h_1(u_t) u_t dx \leq cE'(t)$$

$$\int_{|u_t| \leq \varepsilon} |h_1(u_t)|^2 dx \leq c_1 \int_{|u_t| \leq \varepsilon} h_1(u_t) u_t dx \leq cE'(t)$$

En rappelant que $H'(0) > 0, H'' > 0, E' \leq 0$ sur $]0, \varepsilon]$ et en utilisant (3.0.34), on obtient

$$\chi(t) = \begin{cases} L(t) + 2C_2E(t) & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \varepsilon] \\ H'(\varepsilon_0E(t)) [L(t) + cE(t)] + cE(t) & \text{si } H'(0) > 0, H'' > 0 \text{ sur } [0, \varepsilon] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\chi(t) &= \frac{d}{dt} (H'(\varepsilon_0E(t)) [L(t) + cE(t)] + cE(t)) \\ &= \varepsilon_0E'(t) H'(\varepsilon_0E(t)) [L(t) + cE(t)] + H'(\varepsilon_0E(t)) [L'(t) + cE'(t)] + cE'(t) \\ &\leq -\eta_1\zeta(t) E(t) H'(\varepsilon_0E(t)) + c_3H'(\varepsilon_0E(t)) H^{-1}(-c'_2E'(t)) + c_3c_2E(t) \\ &\leq -\eta_1\zeta(t) E(t) H'(\varepsilon_0E(t)) + c_3\zeta(t) E(t) H'(\varepsilon_0E(t)) - c'_2\zeta(t) E'(t) + c_3c_2E(t) \\ &\leq -c\zeta(t) E(t) H'(\varepsilon_0E(t)) + c_3c_2E(t) \\ &\leq -c\zeta(t) L(t) H_2(L(t)) + c_3c_2E(t) \\ &\leq -c\zeta(t) H_2(\chi(t)) \\ &\geq c\zeta(t) H_2(\chi(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\chi(t) \leq -c\zeta(t) H_2(E(t)) \quad \text{pour } t > 0 \quad (3.0.35)$$

$\chi(t)$ est équivalent à $E(t)$. Par le fait que $H_2^{-1} = -H'$ est croissant on obtient

$$\left(\frac{d}{dt}\chi(t)\right) H'(\chi(t)) = \frac{d}{dt}(H(\chi(t))) \geq c\zeta(t) \quad \text{pour } t > 0 \quad (3.0.36)$$

Une simple intégration sur $(0, t)$ donne

$$H(\chi(t)) \geq c \int_0^t \zeta(t) + H(\chi(0)) \quad \text{pour } t > 0 \quad (3.0.37)$$

en exploitant le fait que H^{-1} est décroissant, on en déduit

$$\chi(t) \leq H^{-1} \left(c \int_0^t \zeta(t) + H(\chi(0)) \right) \quad \text{pour } t > 0 \quad (3.0.38)$$

Par conséquent, en utilisant (3.0.34), nous concluons

$$E(t) \leq cH^{-1} \left(c \int_0^t \zeta(t) + H(\chi(0)) \right) \quad \forall t > t_1$$

La preuve est complète. ■

Conclusion ■

Dans cette mémoire nous avons étudié la stabilité exponentielle de modèle non linéaire de plaques minces viscoélastiques en présence d'un terme source avec un retard distribué et un amortissement structural. Sous des hypothèses raisonnables sur les données initiales (déplacement u_0 et vitesse u_1 ; l'historique de la vitesse f_0), sur les fonctions de relaxation $h_1; h_2$, sur la fonction de retard distribué μ_2 et sur le coefficient d'amortissement μ_2 :

Nous avons démontré :

1- l'existence globale d'une solution faible du système considéré dans des espaces fonctionnels convenables.

2- la stabilité exponentielle, en utilisant la méthode des multiplicateurs, c'est dire nous avons démontré l'existence de deux constantes positives C et k , dépendantes uniquement des données $(u_0, u_1, f_0, h_1, h_2)$ telle que l'énergie du système vérifie l'estimation

Bibliographie

- [1] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In ACC 1993, 3106-3107, (1993).
- [2] R. A. Adams, Fournier, J.F. John : Sobolev Spaces, 2nd edition. Elsevier, Singapore (2009).
- [3] R. A. Adams, , J.F. Fournier, : Sobolev Spaces, of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2140 (2003).
- [4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Dunod, Paris (1999).
- [5] F. Conrad and M. Pierre, Stabilization of second order evolution equation by unbounded nonlinear feedbacks, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 11, 485-515, (1994).
- [6] C. M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions equations, in non linear Evolution Equations, M. G. Crandall Ed., Academic press, New York, 103-123, (1978).
- [7] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Volume 19, American Mathematical Society, (1997).
- [8] A. Haraux, Comportement à l'infini pour une équation des ondes non linéaires dissipative. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 287, 507-509, (1978).
- [9] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping; International Series of Numerical Mathematics, vol, 118, 253-266, (1994).
- [10] J. E. Lagnese, uniforme asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary. Nonlinear, Anal. 16, 35-54, (1991).

- [11] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod, (1969).
- [12] N.Mezouar, M.Abdelli, A.Rachah : Existence of global solution and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with a delay term in the non-linear internal feedback. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 , No. 58, pp. 1–2,(2017)
- [13] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Differential Integral Equations 21 (9-10), 935-958, (2008).
- [14] J. Y. Park, J. R. Kang; Global Existence and Uniform Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Damping, Acta Appl Math 110, 1393-1406, (2010).
- [15] I. H. Suh and Z. Bien. Use of time delay action in the controller design, 25 : 600 603, (1980).
- [16] M. Tucsnak, Boundary stabilization for the stretched string equation, Differential Internal Equations 6, 925-935, (1993).

END

Remerciement

Tout d'abord je tiens à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme ma étude et pourvoir réaliser ce travail de recherche.

Je tiens à remercier les membres du jury : Mr **YAGOUB Aneur** , Mr **ABITA Rahmoune**, Mr **TAHMI Nabil**, pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.

En guise de reconnaissance, je tiens à remercier, Mr **SAADAOIUI Mohamed**, l'encadreur qui a guidé ce mémoire de Master , j'ai eu l'honneur et la chance de bénéficier de ses connaissances et compétences, de ses précieux conseils et de son suivi tout au long de notre parcours académique.

Mes remerciements en très particulé vont également aux **RAHMOUNE Abdlaziz** et **BELACEL Amar**, pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté pour mener à bien mon parcours académique et faire de cette thèse une réussite

J'adresse également des remerciement à tous les enseignants de la departement de mathematique – université des Amar telidji Lagouat en général, et qui ont déployé leurs efforts pour assurer une formation de Master .

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ce parcours universitaire.

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma mère, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices

A mon père, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé

A la mémoire de ma chère grand-mère

A tous les membres de ma famille et grande Famille

A tous mes amis

Et tous ceux qui m'aiment

....

Saied Salimane

Résumé

Dans cet article, nous considérons une équation de Petrovsky viscoélastique non linéaire dans un terme de retard variable dans le temps non linéaire à domaine borné dans la rétroaction interne faiblement non linéaire :

$$\begin{aligned} |u_t|^m u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt} - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u_{ss}(s) ds \\ + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) = |u|^{p-1} u \end{aligned}$$

Nous prouvons l'existence de solutions globales dans des espaces de Sobolev adaptés en utilisant la méthode énergétique combinée à la méthode Faedo-Galarkin sous condition du poids du terme retard dans la rétroaction et du poids du terme sans délai. De plus, nous étudions les estimations générales de stabilité en utilisant certaines propriétés des fonctions convexes. Dans des conditions appropriées sur m et M_2 , nous prouvons le comportement asymptotique en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov appropriée.

Mots clés : équation de plaque; Terme viscoélastique; Décroissance d'énergie, retard variable non linéaire dans le temps.

Abstract

In this paper, we consider a nonlinear viscoelastic Petrovsky equation in a bounded domain nonlinear time varying delay term in the weakly nonlinear internal feedback :

$$\begin{aligned} |u_t|^m u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt} - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u_{ss}(s) ds \\ + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) = |u|^{p-1} u \end{aligned}$$

We prove the existence of global solutions in adapted Sobolev spaces using the energetic method combined with the Faedo-Galarkin method under condition of the weight of the delay term in the feedback and the weight of the term without delay. In addition, we study general estimates of stability using some properties of convex functions. Under appropriate conditions on m and M_2 , we prove the asymptotic behavior using an appropriate Lyapunov functional.

Keywords : plate equation ; Viscoelastic term ; Decrease in energy, variable delay not linear in time.

ملخص

في هذه المذكرة، نعتبر معادلة بتروفسكي غير الخطية اللزجة المطاطية في مجال محدد زمنياً متغيراً مدة التأخير في التعليقات الداخلية غير الخطية الضعيفة :

$$|u_t|^m u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt} - \sigma(t) \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u_{ss}(s) ds \\ + \mu_1 h_1(u_t(x, t)) + \mu_2 h_2(u_t(x, t - \tau(t))) = |u|^{p-1} u$$

لقد أثبتنا وجود حلول عالمية في مساحات *Sobolev* المعدلة باستخدام الطريقة النشطة جنباً إلى جنب مع طريقة *Faedo - Galarkin* بشرط وزن مصطلح التأخير في التعليقات ووزن المصطلح دون تأخير. بالإضافة إلى ذلك ، قمنا بدراسة التقديرات العامة للثبات باستخدام بعض خواص الدوال المحدبة. في ظل الظروف المناسبة على M_2 و m_i ، تثبت السلوك المقارب باستخدام وظيفية *Lyapunov* المناسبة.

الكلمات المفتاحية : معادلة الصفائح. مصطلح لزج مطاطي انخفاض في الطاقة ، تأخير متغير غير خطي في الوقت المناسب.