

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT Sciences de la Matière



## ***Mémoire de Master***

**Domaine : Sciences de la matière**

**Filière : Physique**

**Option : Physique appliquée**

**Par :**

Arabi Aicha

### **THEME**

---

***Schéma numérique pour l'oscillateur harmonique  
basé sur un principe d'incertitude généralisé***

---

*Soutenu publiquement le 17/09/2020 ; devant le jury composé de :*

Mr Nouri Abdallah

MCB

Président

Mr Bourourou Yahya

MCB

Examineur

Mr Mostefai Mohamed Lamine

MAA

Rapporteur

Mr Seffai Djamel

MAA

Co-Rapporteur

**Année Universitaire 2019- 2020**



# Remerciements

J'ai tenons tout d'abord à remercier Allah, notre créateur de nous avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

J'ai remerciens l'ensemble des enseignants, qui nous ont apporté leur aide et qui ont permis grâce à leur contribution à l'élaboration de ce mémoire.

J'ai remerciens en particulier notre encadreurs

***Mr Mostefai Mohamed Lamine & Mr Seffai Djamel,***  
pour nous avoir honoré de son aide dans la direction de ce travail, pour sa confiance et ses conseils ainsi que ses motivations qui ont été pour nous un précieux encouragement.

Ainsi pour l'inspiration, ***Mr Nouri Abdallah***

***et Mr Bourouro Yahya aux membres de jury***

j'ai plus vifs remerciements s'adressent aussi à tout le cadre administratif Université Amar Telidji , "Département Sciences de la Matière", Ainsi que .....

# اهداء

أولاً وقبل كل شيء الحمد والشكر والثناء لله الذي وفقني لهذا ورحمنا  
بالنبي الكريم محمد صلى الله عليه وسلم.  
أود أن أهدي جهدي المتواضع إلى من ربنتي صغيرة، و نلت من أخلاقها  
و قيمها كثيراً ، و تعلمت من صبرها دروساً طويلاً...أمي الغالية رعاها  
الله .

إلى صاحب القلب الطيب ... أبي الغالي رعاه الله .

إلى اخواني مصدر عزي حفظهم الله ورعاهم.

إلى حبيبات قلبي اخوتي.

إلى كل عائلتي واقاربي

إلى كل من ساهم في دعمي في مشواري الدراسي وخاصة مرحلة  
الماستر لا يسعني ذكر الاسماء لكم مني كل الشكر والتقدير والاحترام .

إلى أعز الصديقات و أروعهن تعاملنا و تعاطفنا

إلى حبيبات قلبي بالإقامة الجامعية

عائشة



## Sommaire

Introduction:.....	1
Chapitre I: L'oscillateur harmonique .....	4
I.1 Hamiltonien de l'oscillateur harmonique:.....	5
I.2 Opérateurs de création et d'annihilation $a + , a -$ .....	6
I.3 Opérateur nombre $N$ .....	6
I.4 Le spectre de $N$ . .....	7
I.5 Propriétés des valeurs propres de l'opérateur $N$ .....	7
I.6 Le spectre de $H$ .....	9
I.7 Systèmes quantiques simple.....	10
I.8 Les solutions dans la configuration $\{x\}$ .....	12
I.9 Les solutions dans la configuration $\{p\}$ .....	14
Chapitre II: L'oscillateur harmonique basé sur un GUP .....	16
II.1 Principe d'incertitude généralisé (GUP).....	17
II.2 Représentation dans l'espace des impulsions .....	19
II.2.1 Produit scalaire et relation de fermeture .....	20
II.2.2 Fonctions propres de l'opérateur de position.....	21
II.2.2 Exemple pertinent : L'oscillateur harmonique .....	22
Chapitre III : Méthode des différences finies .....	27
III.1 Philosophie générale d'approximation : .....	28
III.2 Généralisations de méthode des différences finies: .....	28
III.3 Application :.....	29
Chapitre IV : Schéma numérique pour l'oscillateur harmonique .....	31
IV.1 Schéma numérique pour un problème aux limites .....	32
IV.2 Simulation numérique de 'MDF' utilisant Matlab .....	35
IV.2.1 Organigramme .....	36
IV.2.2 Programme écriture par Matlab.....	37
IV.2.3 Résultat après compilation .....	28
Conclusion : .....	41
Référence : .....	43

## Annexe

# **Introduction**

## ***Introduction***

---

### **Introduction:**

La physique des très hautes énergies nécessite une description cohérente des quatre forces Fondamentales. La géométrie non commutative et l'algèbre déformée représente un cadre mathématique prometteur qui a déjà permis d'unifier la relativité générale et le modèle standard, L'étude des théories quantiques sur des algèbres déformées est une première étape de l'unification. Celles-ci ne sont pas simplement obtenues en réécrivant les théories quantiques sur des algèbres déformés.

Ces dernières années, plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de la mécanique quantique en présence d'une longueur minimale : le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène dans l'espace des coordonnées par plusieurs chercheurs [1-5], et dans l'espace des impulsions a été étudié par [1,6]. L'oscillateur harmonique à une et à plusieurs dimensions a été résolu exactement [1,7], et par la méthode perturbations [1, 2,8].

Dans la littérature, il existe plusieurs théories introduisant le concept de longueur minimale, notamment les théories avec un principe d'incertitude généralisé (GUP) de la forme  $(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle)$ , nous allons suivre l'approche de GUP pour introduire le concept de longueur minimale (longueur élémentaire).

L'introduction de cette longueur élémentaire est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position, de sorte que l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle. De ce fait, plusieurs études proposent des petites corrections sur la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion [9, 10, 11]. L'étude des implications de ces déformations de l'algèbre de Heisenberg en mécanique quantique non relativiste, a été un sujet de grande importance ces dernières années. Par conséquent, une mécanique quantique découlant de cette algèbre déformée pourrait constituer une théorie effective à basse énergie des particules non ponctuelles telles que les quasi-particules dans les solides et les hadrons en physique nucléaire [7, 9,1].

Et d'une autre part en physique il existe traditionnellement deux approches.1).

L'approche théorique et l'approche expérimentale. L'approche numérique est généralement considéré comme un complément à l'approche théorique et parfois comme un pont entre l'approche théorique et l'approche expérimentale. Aujourd'hui nous pouvons même considérer l'approche numérique comme une troisième voie en physique indépendante des deux autres approches [12].

## *Introduction*

---

La résolution numérique de l'équation de Schrödinger reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de physique. Cette équation trouve plusieurs méthodes de résolution comme la méthode de la DFT (Density Functional Theory) [13], QMC (Quantum Monte Carlo) [14], DVR (Discret Variable Représentation)[15], la théorie des perturbation [16], la méthode variationnelle de Ritz [17] , la méthode de différence finie, etc. Généralement ces méthodes sont limitées [18].

Dans les deux cas, on trouve là le point de départ de la quantification de ces champs, qui donne naissance au concept de phonon pour les vibrations du solide et de photon dans le cas du champ électromagnétique. L'oscillateur harmonique est une brique essentielle dans la construction de la physique quantique [19].

Dans ce sens, l'usage le plus important des ordinateurs en physique est simulation. Les simulations sont naturellement adaptées pour les problèmes non-linéaires qui ne peuvent pas généralement être résolu par des méthodes analytiques. Le point de départ d'une simulation numérique est un modèle idéalisé d'un système physique d'intérêt. Nous voulons vérifier si le comportement de ce modèle est cohérent avec l'observation expérimentale où la prévision théorique.

Nous spécifions un algorithme pour la réalisation du modèle sur un ordinateur. L'exécution de l'algorithme sur un ordinateur est une simulation. Les simulations sont donc des expériences virtuelles [12].

L'objectif de notre travail est l'utilisation de la méthode de différence finie et comme un exemple d'étude on a choisie l'oscillateur harmonique unidimensionnel et la résolution analytique de l'équation de Schrödinger avec un potentielle harmonique en présence d'une longueur minimale toujours dans le cas des systèmes unidimensionnels. Nous avons utilisé le logiciel matlab pour le traitement numérique.

Ce mémoire est composé de deux parties principales :

La première partie concerne le cas de l'étude analytique, qui contient deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous présenterons l'oscillateur harmonique unidimensionnel. Nous verrons comment en utilisant une méthode analytique pour trouver la fonction d'onde et le spectre d'énergie. Et on a expose aussi d'opérateurs de création et de destruction, adjoints l'un de l'autre. Et vérifiant une relation de commutation.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les notions élémentaires mécaniques quantiques avec un principe d'incertitude généralisé impliquant l'existence d'une

## *Introduction*

---

longueur élémentaire. Nous présenterons le formalisme nécessaire développé essentiellement par Kempff et ses collaborateurs.

La deuxième partie est réservée à la méthode de différence finie. Elle est scindée en deux chapitres. Dans le quatrième chapitre, nous présentons les notions élémentaires de la méthode différence finie et son application à la résolution d'équations différentielles.

Enfin dans le quatrième chapitre, est réservé à l'utilisation de la méthode différence finie avec un programme écrit dans le matlab, nous présentons les résultats numériques et des graphes concerne le spectre et la fonction d'onde de l'oscillateur harmonique dans le cas ordinaire et le cas de L'oscillateur harmonique basée sur un GUP.

# Chapitre I: L'oscillateur harmonique

## Chapitre I: L'oscillateur harmonique

Les oscillations harmoniques sont des phénomènes très importants aussi bien en physique classique qu'en physique quantique ; classiquement, pour un système en équilibre stable de petits déplacements par rapport à cette position d'équilibre vont engendrer des "forces de rappels " qui tendent à rétablir l'équilibre. En première approximation ces forces peuvent être prises comme proportionnelles au déplacement et ceci caractérise un mouvement harmonique [1].

### I.1 Hamiltonien de l'oscillateur harmonique:

Nous allons utiliser ici, une méthode différente de celles relatives à la résolution de l'équation de Schrödinger correspondant au potentiel harmonique, celle-ci est basée sur la notion d'opérateur.

La procédure qui va être décrite est due à Dirac et utilise systématiquement le fait que le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique dont l'expression [1,2] :

$$H = \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.1)$$

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique est quadratique en  $x$  et  $p$  et peut même recevoir une forme plus symétrique en définissant de nouveaux opérateurs hermétiques  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  est quadratique en  $x$  et  $p$  et peut même recevoir une forme plus symétrique en définissant de nouveaux opérateurs hermétiques  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  sans dimension [1,2] :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (1.2)$$

$$\hat{P} = \sqrt{\frac{p}{m\omega\hbar}} \quad (1.3)$$

qui nous permettent d'écrire :

$$\boxed{H = \hbar\omega\hat{H}} \quad (1.4)$$

$$\text{Avec :} \quad \hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2) \quad (1.5)$$

La relation de commutation fondamentale  $[x, p] = i\hbar$  revêt maintenant la forme suivante :

$$[\hat{X} + \hat{P}] = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} [x, p] = \frac{i\hbar}{\hbar} = i$$

Où : 
$$\boxed{[\hat{X}, \hat{P}] = i} \quad (1.6)$$

### I.2 Opérateurs de création et d'annihilation $\hat{a}^+$ , $\hat{a}$

La résolution du problème aux valeurs propres est simplifiée en introduisant les opérateurs non hermétiques suivants [1,2] :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad (1.7)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}) \quad (1.8)$$

Les relations inverses s'écrivent :

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}) \quad (1.9)$$

$$\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}) \quad (1.10)$$

Avec  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  étant hermétiques,  $\hat{a}^+$  est l'adjoint de  $\hat{a}$ , cependant  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  ne sont pas des opérateurs hermétiques à cause du facteur  $i$  devant  $\hat{P}$ .

### I.3 Opérateur nombre $\hat{N}$

On appellera le produit des opérateurs  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$ , opérateur nombre, produit qui est lui-même hermétique, on a :

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \hat{a}^+ \hat{a} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{X} - i\hat{P})(\hat{X} + i\hat{P}) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + i\hat{X}\hat{P} - i\hat{P}\hat{X}) \\ &= \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + i[\hat{X}, \hat{P}]) \end{aligned}$$

D'où : 
$$\boxed{\hat{N} = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2 + 1)} \quad (1.11)$$

En comparant cette expression avec l'équation (2.4), on peut écrire l'hamiltonien

harmonique sous la forme :

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})} \quad (1.12)$$

Ce résultat devrait déjà nous donner une meilleure intuition de la signification de l'opérateur nombre  $\hat{N}$ , comme nous le verrons, il s'agit du nombre d'excitations dans le système.

#### I.4 Le spectre de $\hat{N}$ .

Comme  $\hat{H}$  est hermétique,  $\hat{N}$  l'est aussi. De plus, les vecteurs propres de  $\hat{H}$  sont aussi vecteurs propres de  $\hat{N}$  et inversement, en fait, nous chercherons par la suite non pas les vecteurs propres et valeurs propres de  $\hat{H}$ , mais ceux de  $\hat{N}$ .

En utilisant l'identité suivante [1,2] :

$$[AB, C] = A [B, C] + [A, C] B \quad (1.13)$$

On obtient :

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

$$\Rightarrow \hat{a}\hat{a}^+ = \hat{a}^+\hat{a} + 1 = \hat{N} + 1 \quad (1.14)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^+] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+[\hat{a}, \hat{a}^+] + [\hat{a}^+, \hat{a}^+]\hat{a} = \hat{a}^+ \quad (1.15)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^+[\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^+, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a} \quad (1.16)$$

En résumé :

$$\hat{a}^+\hat{a} = \hat{N} \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$$

$$\hat{a}\hat{a}^+ = \hat{N} + 1 \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad (1.17)$$

#### I.5 Propriétés des valeurs propres de l'opérateur $\hat{N}$

1. soit  $|\nu\rangle$  un vecteur propre de  $\hat{N}$ , supposé de norme finie [1,2]:

$$\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle \quad (1.18)$$

En utilisant (1.17) il vient :

$$\hat{N}\hat{a}|\nu\rangle \equiv ([\hat{N}, \hat{a}] + \hat{a}\hat{N})|\nu\rangle = (\nu - 1)\hat{a}|\nu\rangle$$

Ce qui se lit :  $\boxed{\hat{N}\hat{a}|\nu\rangle = (\nu - 1)\hat{a}|\nu\rangle}$  (1.19)

Et montre que le vecteur  $\hat{a}|\nu\rangle$  est aussi vecteur propre de  $N$  mais cette fois avec la valeur propre  $(\nu - 1)$ , à condition bien sur que ce vecteur ne soit pas le vecteur nul. La norme carrée de ce vecteur est :

$$(a|\nu\rangle, a|\nu\rangle) = \langle\nu|a^+a|\nu\rangle \equiv \langle\nu|N|\nu\rangle = \nu\langle\nu|\nu\rangle \quad (1.20)$$

Comme la norme carrée de tout vecteur est positive ou nulle, on en déduit que  $\nu \geq 0$ .

Toutes les valeurs propres de l'opérateur  $\hat{N}$  sont donc des nombres réels positifs ou nuls.

2. maintenant, on peut recommencer ces opérations et considérer :

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{a}^+|\nu\rangle &= ([\hat{N}, \hat{a}^2] + \hat{a}^2\hat{N})|\nu\rangle = ([\hat{N}, \hat{a}]\hat{a} + \hat{a}[\hat{N}, \hat{a}])|\nu\rangle + \hat{a}^2\hat{N}|\nu\rangle \\ &= (-\hat{a}^2 - \hat{a}^2)|\nu\rangle + \hat{a}^2\hat{N}|\nu\rangle = (\nu - 2)\hat{a}^+|\nu\rangle \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ce qui montre que le vecteur  $\hat{a}^2|\nu\rangle$  est propre de  $\hat{N}$  avec la valeur propre  $(\nu - 2)$  ; par application répétée de  $\hat{a}$  , on peut ainsi mettre en évidence une suite de vecteurs propres de  $\hat{N}$  ayant les valeurs propres  $\nu, \nu - 1, \nu - 2, \dots$ , cette suite ne peut être infinie , puisque l'on vient de montrer que les valeurs propres de  $N$  sont toutes positives ou nulles, si  $\nu$  n'était pas un entier, on finirait par construire un état propre de  $N$  avec une valeur propre strictement négative ;il faut donc que ,tôt ou tard , la différence  $(\nu - \text{un entier})$  soit nulle, ce qui montre que  $\nu$  est lui-même un entier positif ou nul, alors la séquence de vecteurs se termine avec :

$$N\hat{a}|\nu\rangle + (\nu - \nu)a^\nu|\nu\rangle = 0 \quad (1.22)$$

3. Revenant à (2.19) pour la plus petite valeur propre  $\nu = 0$ (état fondamental), on a :

$$N\hat{a}|\nu = 0\rangle = (0 - 1)\hat{a}|\nu\rangle \Leftrightarrow N(\hat{a}|0\rangle) = -(\hat{a}|0\rangle) \quad (1.23)$$

Mais comme  $\hat{N}$  ne peut avoir de valeur propre négative, ceci n'est possible que si  $a|0\rangle$  est vecteur nul  $a|0\rangle = 0$  (souvent appeler dans ce contexte : état vide, ou plus simplement *vide*). D'une façon générale, l'opérateur  $a$  engendré, à partir de  $|\nu\rangle$  , le vecteur propre de  $\hat{N}$  ayant le valeur propre  $(\nu - 1)$  réduite d'une unité par rapport à la première : en quelque sorte,  $\hat{a}$  annihile une excitation et passe d'un état à l'état immédiatement inférieur en énergie.

Comme on ne peut pas détruire ce qui n'existe pas,  $\hat{a}$  agissant sur l'état  $|v\rangle$  (le fondamentale) donne zéro.

### I.6 Le spectre de $\hat{H}$

Le spectre de  $\hat{N}$  est constitué des entiers non négatives, on en conclut que les valeurs propres de H sont données par [1,2]:

$$\boxed{E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega} \quad (1.24)$$

Remarque :

$$H|v\rangle = E_n|v\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega|v\rangle \quad (1.25)$$

Alors :

$$H(\hat{a}|v\rangle) = (n - \frac{1}{2})\hbar\omega(\hat{a}|v\rangle) \quad (1.26)$$

$$H(\hat{a}^+|v\rangle) = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega(\hat{a}^+|v\rangle) \quad (1.27)$$

Par action de  $\hat{a}$ , on passe à un vecteur propre associé à la valeur propre immédiatement inférieure, et inversement en ce qui concerne  $\hat{a}^+$  un opérateur de création. La même procédure peut être effectuée à partir de l'autre relation (2.15) on a ainsi :

$$N\hat{a}^+|v\rangle \equiv ([N, \hat{a}^+] + \hat{a}^+N)|v\rangle = \hat{a}^+|v\rangle + \hat{a}^+v = (v + 1)\hat{a}^+|v\rangle \quad (1.28)$$

Le vecteur  $\hat{a}^+|v\rangle$  est donc propre de N avec la valeur propre  $(v + 1)$ , sa norme est :

$$\begin{aligned} (a^+|v\rangle, a^+|v\rangle) &= \langle v|\hat{a}\hat{a}^+|v\rangle = \langle v|\hat{a}^+\hat{a} + 1|v\rangle = \langle v|N + 1|v\rangle \\ &= (v + 1) = \langle v|v\rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cette égalité n'est jamais nulle puisque  $V \geq 0$ . Par application répétée de  $\hat{a}^+$ , on peut ainsi engendrer une suite infinie de vecteurs propres de  $\hat{N}$  correspondant aux valeurs propres  $v + 1; v + 2; \text{etc} \dots$ ; l'opérateur  $\hat{a}^+$  fait passer d'un état  $|v\rangle$  à l'état immédiatement supérieur  $|v + 1\rangle$ ; il crée une excitation supplémentaire, par ailleurs, il est clair que le spectre de  $\hat{N}$  n'est pas limité vers le haut.

Au total, le spectre de N est constitué de tous les entiers positifs ou nuls, on notera

désormais  $v = 0$  pour appeler ce fait et on désignera par  $|v\rangle$  un vecteur propre normalisé de  $\hat{N}$ .

Les deux opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$  respectivement, annihile et crée une excitation ; pour cette raison, ils sont respectivement appelés **opérateur d'annihilation** et **opérateur de création**, l'un crée, l'autre annihile un quantum d'excitation : on peut imaginer que, dans un contexte à préciser, ces opérateurs créent ou annihilent des particules, la notion de particule étant alors identifiée avec celle de quantum élémentaire (d'un champ).

L'opérateur  $\hat{N}$  lui, compte le nombre d'excitation (nombre de quanta, i.e., nombre de particule) il est pour cette raison naturellement appelé opérateur 'nombre de particule', compte tenu l'expression de  $\hat{H}$ , il résulte que  $\hat{H}$  a bien pour les valeurs propres d'énergies  $\hbar\omega = (n + \frac{1}{2})$ .

### I.7 Systèmes quantiques simple

Un modèle très satisfaisant pour un système quantique constitué de deux particules près de leur position d'équilibre caractérisé par une distance mutuelle  $x_m$  [3] (voir le potentiel en traits pointillés de la figure 1.7(b)).

La figure 1.7(a) représente schématiquement la forme du potentiel harmonique à une Dimension

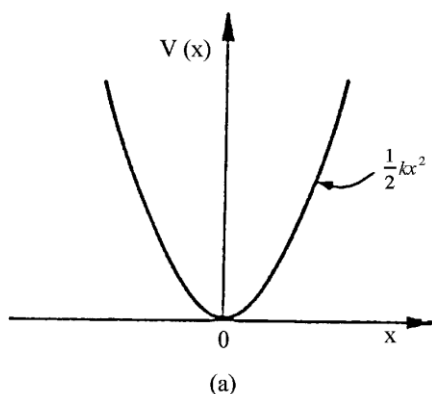


Figure 1.7 (a)

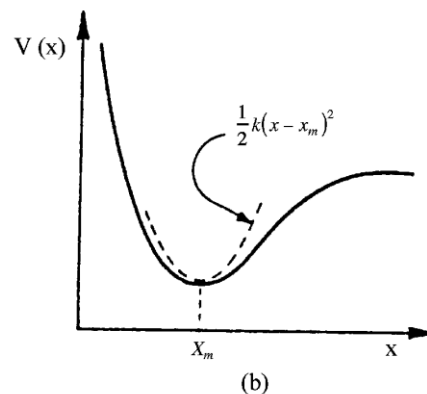


Figure 1.7 (b)

Figure 1.7 : (a) Potentiel d'un oscillateur harmonique à une dimension :  $x$  peut prendre des valeurs dans l'intervalle  $-\infty < x < +\infty$ .

(b) Un potentiel quelconque possédant un minimum en  $x = x_m$  peut être approché par un simple potentiel harmonique près de ce minimum.

Pour  $x = x_m$ , l'énergie potentielle est minimum si

$$\left. \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{x=x_m} = 0 \quad (1.30)$$

Et

$$\left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_m} = k > 0 \quad (1.31)$$

correspondant au développement en série de Taylor autour de  $x = x_m$ , c'est-à-dire :

$$V(x) = V(x_m) + \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_m} (x - x_m) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right|_{x=x_m} (x - x_m)^2 +$$

Classiquement une particule dans un potentiel harmonique est toujours liée i.e. confinée dans une région limitée de l'espace, ainsi pour une énergie  $E$  (arbitraire mais fixée) la particule est confinée dans la région de l'espace où  $E$ . En mécanique quantique une particule dont l'amplitude de probabilité est solution de l'équation de Schrödinger sera également dans un état lié [1,2].

**I.8 Les solutions dans la configuration {x}**

Dans la représentation des coordonnées, l'équation de Schrödinger prend alors la forme simplifiée [3,4]

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 \right\} \varphi_n(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon_n \varphi_n(x) \quad (1.32)$$

Où  $\varphi_n(x)$  et  $\varepsilon_n$  sont respectivement les fonctions propres et valeurs propres de cette équation

Les solutions de cette équation est faite dans deux configurations : la configuration {x} et la configuration {p}.

Or, l'opérateur différentiel du premier membre a comme dimension l'inverse du carré d'une longueur. Il doit évidemment en être de même du second opérateur ; par suite,

$$x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

est une longueur fondamentale de ce système quantique dont l'interprétation physique apparaîtra ultérieurement.

L'introduction de la variable sans dimension

$$q = \frac{x}{x_0} \quad (1.34)$$

La solution de l'oscillateur harmonique permettra ultérieurement d'aborder l'étude du mouvement interne de systèmes matériels réels : molécules, cristaux, noyaux atomiques. Le cas le plus simple est sans doute celui d'une molécule diatomique : x sera alors la distance de deux atomes et m leur masse réduite.

Conduit alors à la forme réduite de l'équation

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi_n(q)}{\partial q^2} + (\lambda_n - q^2) \varphi_n(q) = 0} \quad (1.35)$$

Avec

$$\lambda_n = \frac{2\varepsilon_n}{\hbar\omega} \quad (1.36)$$

Afin d'obtenir une solution acceptable de cette équation différentielle, nous allons procéder comme suite : nous chercherons d'abord une solution asymptotique  $\varphi_a(q)$  valable pour  $q \rightarrow \pm\infty$ . Or, pour des valeurs de  $q^2$  suffisamment grandes, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 \varphi_a(q)}{\partial q^2} - q^2 \varphi_a(q) = 0 \quad (1.37)$$

Dont la solution vaut

$$\varphi_a(q) = A e^{\frac{q^2}{2}} + B e^{-\frac{q^2}{2}}$$

La théorie quantique impose  $A=0$  pour que la solution soit à carré intégrable.

Il est donc naturel de chercher une solution de la forme

$$\varphi_n(q) = C e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q) \quad (1.38)$$

Où  $H_n(q)$  est une fonction de  $q$ . En substituant (1.38) dans l'équation (1.35) nous voyons que cette nouvelle fonction doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 H_n(q)}{\partial q^2} - 2q \frac{\partial H_n(q)}{\partial q} + (\lambda_n - 1) H_n(q) = 0 \quad (1.39)$$

Cette équation est celle des polynômes d'Hermite si

$$\lambda_n - 1 = 2n. \quad (1.40)$$

Montrons maintenant que  $\lambda_n = 2n + 1$  correspond effectivement au spectre des énergies discrètes de l'oscillateur harmonique.

La relation (1.40) conduit donc directement à la condition de quantification de l'énergie de l'oscillateur

$$\lambda_n = \frac{2\varepsilon_n}{\hbar\omega} = 2n + 1$$

Ou encore

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (1.41)$$

et les fonctions d'onde associées

$$\varphi_n(q) = e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q) \quad (1.42)$$

Ici  $H_n(q)$  sont les polynômes dits d'Hermite, d'ordre  $n$  ( $n : 0, 1, 2, \dots$ ), qui obéissent à l'équation différentielle

$$H_n''(q) - 2q \cdot H_n'(q) + 2nH_n(q) = 0 \quad (1.43)$$

Ces polynômes peuvent également être obtenus à l'aide de la relation

$$G(s, q) = e^{q^2 - (s-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(q) \frac{s^n}{n!} \quad (1.44)$$

Ou  $G(s, q)$  est la fonction génératrice des polynômes d'Hermite. En effet, nous vérifions sans difficulté que le développement de Taylor autour de  $s = 0$  fournit

$$H_n(q) = \left. \frac{\partial^n}{\partial s^n} [G(s, q)] \right|_{s=0}$$

$$H_n(q) = (-1)^n e^{q^2} \frac{\partial^n}{\partial q^n} e^{-q^2} \quad (1.45)$$

En se servant de la fonction génératrice  $G(s, q)$  des polynômes d'Hermite, on peut montrer que

$$\langle \varphi_n(q) | \varphi_{\dot{n}}(q) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^*(q) \varphi_{\dot{n}}(q) dq = \delta_{n, \dot{n}} \quad (1.46)$$

Avec

$$\varphi_n(q) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q) \quad (1.47)$$

et dans l'espace des coordonnées

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi} x_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad (1.48)$$

### I.9 Les solutions dans la configuration $\{p\}$

Pour la configuration  $\{x\}$ , on a utilisé le principe de correspondance suivant[4] :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, x \rightarrow \hat{x} \text{ enfin et } p_x \rightarrow -\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.49)$$

Dans la phase  $\{p\}$ , le principe de correspondance exige que

$$p \mapsto p, \quad x \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

Dans la représentation des phases  $\{p\}$ , l'équation de Schrödinger prend alors la forme simplifiée

$$\left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right\} \psi(p) = E_n \psi(p)$$

Soit

$$\left\{ \frac{-\hbar^2 m\omega^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{p^2}{2m} \right\} \psi(p) = E_n \psi(p)$$

Posons que

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}} p, \quad \zeta_n = \frac{E_n}{\hbar\omega} \quad \text{et} \quad \psi(p) = \chi(\theta)$$

Alors

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \zeta_n - \frac{\theta^2}{4} \right\} \chi(\theta) = 0$$

Cette équation est semblable à celle de la configuration  $\{x\}$ . Donc, **La solution de cette équation s'écrit** par:

$$\psi(p) = C_p e^{-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}} H_n \left( \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} p \right)$$

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

La condition de normalisation est donnée par

$$C_p^2 = \frac{\sqrt{\lambda_p}}{2^n n! \sqrt{\pi}}, \quad \text{avec} \quad \lambda_p = \frac{1}{m\omega\hbar}$$

# Chapitre II : L'oscillateur harmonique basé sur un GUP

## Chapitre II : L'oscillateur harmonique basé sur un GUP

### II.1 Principe d'incertitude généralisé (GUP)

Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur minimale  $l_m$  en mécanique quantique, nous allons suivre l'approche du principe d'incertitude généralisé. Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion  $p$  de la particule, le vecteur d'onde  $k$  ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de  $\frac{1}{l_m}$ : En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, ( $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ) lorsque  $p$  approche l'échelle  $\frac{\hbar}{l_m}$ .

Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde arbitrairement petites et que des échelles de distances arbitrairement petites ne peuvent plus être explorées.

On suppose une relation  $p = f(k)$  entre  $p$  et  $k$ . Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre  $\frac{1}{l_m}$  lorsque  $p$  tend vers l'infini. Plusieurs formes de la fonction  $f$  peuvent être trouvées par exemple on prend le choix

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan(l_m k) \quad (2.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tan(y) = y + \frac{y^3}{3} + \dots$$

au deuxième ordre en  $l_m$ ,  $p$  s'écrit :

$$p = \hbar \left( k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots \right) \quad (2.2)$$

Supposant que le commutateur entre  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  garde la forme standard, c'est-à-dire  $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ , et utilisant la relation générale :

$$[\hat{X}, A(\hat{K})] = i \frac{\partial A}{\partial K} \quad (2.3)$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée :

$$[\hat{X}, \hat{P}(K)] = i \frac{\partial P}{\partial K} \quad (2.4)$$

La relation (2.2) donne :

$$i \frac{\partial \hat{P}}{\partial K} = i\hbar(1 + l_m^2 \hat{k}^2 + \dots) \quad (2.5)$$

et puisque on a :

$$l_m^2 \hat{k}^2 \sim \frac{l_m^2 \hat{P}^2}{\hbar^2} + o(l_m^4) \quad (2.6)$$

On trouve :

$$[\hat{X}, \hat{P}(K)] = i\hbar(1 + (\frac{l_m}{\hbar})^2 \hat{P}^2 + \dots) \quad (2.7)$$

En introduisant un paramètre  $\beta$ , relié à la longueur minimale par :

$$(\frac{l_m}{\hbar})^2 \text{ avec } l_m = \hbar\sqrt{\beta} \quad (2.8)$$

On aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta \hat{P}^2 + \dots) \quad (2.9)$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule :

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \quad (2.10)$$

Ce qui donne :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \langle \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} \rangle \right| \quad (2.11)$$

Au premier ordre du paramètre  $\beta$ , la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle) \quad (2.12)$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen  $(\Delta P)^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$  on peut écrire :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \{1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma\} \quad (2.13)$$

Avec

$$\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2 \quad (2.14)$$

La relation d'incertitude (1.13) implique une incertitude minimale non nulle sur la position; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs. Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement, pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

## II.2 Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  satisfaisant à la relation de commutation (1.9). Comme on a vu, la relation d'incertitude correspondante est (1.13). Pour un  $(\Delta X)$  fixe, l'inégalité (1.13) est satisfaite dans l'intervalle  $[\Delta P_-, \Delta P_+]$ , telle que :

$$\frac{2(\Delta X)(\Delta P)_\pm}{\hbar\beta} - \frac{1+\gamma}{\beta} = (\Delta P)_\pm^2 \quad (2.15)$$

Ce qui donne

$$\frac{\Delta X}{\beta\hbar} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\beta\hbar}\right)^2 - \frac{1+\gamma}{\beta}} \quad (2.16)$$

La plus petite valeur de  $\Delta X$  est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d.,  $\Delta P_- = \Delta P_+$ , soit :

$$(\Delta X)_0 = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1+\gamma} \quad (2.17)$$

La valeur minimale  $(\Delta X)_{min}$ , correspond à  $\gamma = 0$

$$(\Delta X)_{min} = \hbar\sqrt{\beta} \quad (2.18)$$

Dans l'espace des impulsions, où  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  agissent sur les fonctions  $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$ , ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  satisfaisant la relation de commutation canonique  $:[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , alors on peut trouver une représentation de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.9). la réalisation la plus simple s'écrit

$$\hat{X} = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{x}, \hat{P} = \hat{p} \quad (2.19)$$

Ou on a :

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p) \quad (2.20)$$

$$\hat{x}\psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \quad (2.21)$$

Alors

$$\hat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \hat{P} = \hat{p} \quad (2.22)$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.9).

### II.2.1 Produit scalaire et relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation(2.22), est la préservation de la symétrie des opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$ , pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que  $\hbar$  n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur  $\hat{X}$ .

En effet, la condition de symétrie s'écrit :

$$(\langle \psi | \hat{X} | \varphi \rangle) = \langle \psi | (\hat{X} | \varphi \rangle) \quad (2.23)$$

Cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \varphi(p) \quad (2.24)$$

Pour que l'opérateur soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p) \quad (2.25)$$

Le facteur  $\frac{1}{1 + \beta p^2}$  est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur  $\hat{X}$ .

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p|p \rangle = 1 \quad (2.26)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p''|p' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle p''|p \rangle \langle p|p' \rangle \quad (2.27)$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthonormalisation :

$$\langle p|p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p') \quad (2.28)$$

### II.2.2 Fonctions propres de l'opérateur de position

Dans l'espace des impulsions, le problème des valeurs propres de l'opérateur  $\hat{X}$  s'écrit :

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi_x(p) = x \psi_x(p) \quad (2.29)$$

Où  $\psi_x(p) = \langle p|x \rangle$ ,  $|x \rangle$  étant un vecteur propre de  $\hat{X}$  ayant une localisation infinie ( $(\Delta \hat{X})_{|x \rangle} = 0$ ), donc il ne représente pas un état physique car la relation d'incertitude généralisée ne permet pas l'existence de tel état. Les fonctions  $\psi_x(p)$

Seront considérées alors comme des « fonctions propres formelles » de l'opérateur de position.

La solution de l'équation (2.22) est donnée par la formule suivante :

$$\psi_x(p) = c \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p\right) \quad , \quad (2.30)$$

C est une constante de normalisation, elle se calcule en utilisant la relation (2.19) ;

On obtient :

$$1 = c c^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} = \frac{c c^* \pi}{\sqrt{\beta}},$$

avec  $C = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}$ . Alors, les fonctions propres normalisées de l'opérateur de position ont la forme :

$$\psi_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right) \quad (2.30)$$

En utilisant les relations (2.21) et (2.30), on peut montrer que la nouvelle relation de fermeture satisfaite par les vecteurs formels  $|x\rangle$  a la forme suivante :

$$\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| = 1 \quad (2.31)$$

Calculons maintenant le produit scalaire entre deux formels  $|x\rangle$  et  $|x'\rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle x'|x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi_{x'}^*(p) \psi_x(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \exp\left[-i \frac{(x - x')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right] \\ &= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(x-x')} \sin\left(\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

### II.2.3 Exemple pertinent : L'oscillateur harmonique

Nous voudrions maintenant appliquer le formalisme développé jusqu'à présent au cas intéressant d'un oscillateur linéaire de nocivité, en déduisant à la fois le spectre énergétique et l'expression des fonctions propres correspondantes. La comparaison avec le cas limitatif  $\beta = 0$  Ce sera particulièrement intéressant.

De l'expression pour le Hamiltonien :

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 \frac{x^2}{2} \quad (2.33)$$

Et la représentation pour  $x$  et  $p$  dans l'espace  $p$  rapporté dans la section (2.33) nous obtenons la forme suivante pour l'équation de l'état stationnaire de Schrödinger :

Là où nous avons défini :

$$\frac{d^2\psi(p)}{dp^2} + \frac{2\beta p}{1+\beta p^2} \frac{d\psi(p)}{dp} + \frac{1}{(1+\beta p^2)^2} [\epsilon - \eta^2 p^2] \psi(p) = 0 \quad (2.34)$$

$$\epsilon = \frac{2E}{m\hbar^2\omega^2}; \quad \eta^2 = \frac{1}{(m\hbar\omega)^2} \quad (2.35)$$

et  $E$  est l'énergie.

L'équation habituelle de Schrödinger ( $\beta = 0$ ) pour l'oscillateur harmonique linéaire n'a qu'une singularité à l'infini, qui n'est cependant pas de type fuchsien [1,8]. Dans ce cas, la procédure est bien connue la solution a été écrite comme le produit d'un facteur gaussien décroissant et d'une nouvelle fonction satisfaisant une équation, conduisant à des polynômes d'Hermite, où le quadratique  $\eta^2 p^2$  est annulée dans l'équation différentielle si le facteur gaussien est correctement choisi. D'équation (2.34) nous voyons que l'introduction d'une valeur finie pour  $\beta$  change complètement la structure de singularité dans le plan complexe. Trois points singuliers sont maintenant présents : le point habituel à l'infini  $p = \pm i\sqrt{\beta}$  ainsi que tous les coefficients sont réguliers pour les termes au premier dérivé puisque se comporte seulement comme un simple pôle au voisinage de chaque singularité, celui en face de la fonction elle-même ne contient que des pôles doubles. Qualitativement, la présence d'une longueur minimale adoucit le comportement de l'équation de l'onde à très grand moment, transformant le point à l'infini en une singularité fuchsienne.

La solution de l'équation (2.34) est donnée en termes de fonctions hypergéométriques, qui peut toujours être exprimé en termes de la série hypergéométrique Gauss, jusqu'à quelques termes finis. Pour trouver la solution explicite, il est utile d'introduire, comme d'habitude, une nouvelle variable  $\zeta$  en termes de laquelle les pôles sont décalés vers les valeurs de référence 0, 1 et  $\infty$  :

$$\zeta = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{\beta}}{2} p \tag{2.36}$$

L'équation (2.34) se lit alors comme suit :

$$\frac{d^2\psi(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{2\zeta-1}{\zeta(\zeta-1)} \frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} - \frac{q+r(1-2\zeta)^2}{\zeta^2(\zeta-1)^2} \psi(\zeta) = 0 \tag{2.37}$$

avec :

$$q = \frac{\epsilon}{4\beta} \quad ; \quad r = \frac{\eta^2}{4\beta^2} \tag{2.38}$$

dont la solution est représentée par le symbole de Riemann :

$$p \left( \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} ; \zeta \right) \tag{2.39}$$

D'un calcul simple on obtient, pour la racine  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$

$$\alpha_1 = -\sqrt{q+r} \ ; \ \alpha_2 = \sqrt{q+r} \quad (2.40)$$

$$\beta_1 = -\sqrt{q+r} \ ; \ \beta_2 = \sqrt{q+r}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{16r}) \ ; \ \gamma_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{16r})$$

La solution (2.5) est simplement liée à la solution de l'équation Gauss hypergéométrique  $F(a, b, c, z)$ , pour laquelle une des racines pour les deux singularités à distance finie est zéro

$$\begin{aligned} p \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} ; \zeta &= \zeta^{\alpha_1} (1 - \zeta)^{\beta_1} p \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{pmatrix} ; \zeta \\ &= \zeta^{\alpha_1} (1 - \zeta)^{\beta_1} F(a; b; c; \zeta) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Avec

$$a = \gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{16r}) - 2\sqrt{q+r} \quad (2.42)$$

$$b = \gamma_2 - \alpha_1 - \beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{16r}) - 2\sqrt{q+r}$$

$$c = 1 - 2\sqrt{q+r}$$

On obtient donc finalement, en termes de variable de moment réel  $p$ , la forme générale pour la solution de l'équation (2.34) :

$$\psi(p) \propto \frac{1}{(1 + \beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} \cdot F(a; b; c; \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{\beta}}{2} p) \quad (2.43)$$

Puisque nous savons que pour  $\beta = 0$  les fonctions propres sont simplement le produit d'un facteur gaussien avec des polynômes Hermite, nous cherchons maintenant les solutions pour  $\beta \neq 0$  dans les cas où les paramètres hypergéométriques  $F(a, b, c, z)$  se réduisent à un polynôme. On sait que cela se produit lorsque  $a$  ou  $b$  est un entier négatif :

$$a = -n \Rightarrow \sqrt{q+r} = \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{1 + 16r} \quad (2.44)$$

$$b = -n \Rightarrow \sqrt{q+r} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{1+16r} \quad (2.45)$$

Dans les deux cas  $F(a, b, c, z)$  devient un polynôme de degré  $n$ . Cependant, si nous choisissons  $a = 0$ , la fonction d'onde n'aura pas le comportement correct à l'infini et, en particulier, n'appartiendra pas au domaine de  $p^2$ . A partir de l'équation (2.45) on a en fait

$$\psi(p) \propto \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} \cdot F\left(-n; b; c; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p\right) \sim p^{(\sqrt{1+16r}-1)/2} \quad (2.46)$$

qui diverge. D'où la condition  $b = n$  donne le spectre énergétique et les fonctions propres correspondantes. Dans ce cas  $q+r > 0$  pour n'importe quel  $n$  et pour grand  $p$  la fonction d'onde se comporte comme

$$\psi(p) \propto \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} \cdot F\left(a; -n; c; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p\right) \sim p^{-(\sqrt{1+16r}+1)/2} \quad (2.47)$$

Il en est de même pour la mesure  $dp/(1+\beta p^2)$ . Elle appartient également à la domine de  $p^2$ , car elle est immédiatement vérifiée. Notez que, pour tout  $n$  fixe, la valeur de  $r$  plus grand (c.-à-d. la valeur de  $\beta$  plus petite), la décroissance rapide vers le zéro de la fonction d'onde est à l'infini. En partie dans la limite tend vers 0, en utilisant (2.45) on récupère le comportement gaussien habituel des fonctions d'oscillation harmonique

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} = \left(\frac{\eta^2 p^2}{2}\right) \quad (2.48)$$

Par conséquent, à chaque nombre quantique  $n$  correspond la fonction propre

$$\psi(p) \propto \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} \cdot F\left(a_n; -n; c_n; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p\right) \quad (2.49)$$

$$\text{Avec } \sqrt{q+r_n} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{1+16r}; a_n = -n - \sqrt{1+16r} \quad (2.50)$$

$$c_n = 1 - 2\sqrt{q+r_n}$$

Pour le spectre énergétique, nous obtenons de (2.45) et (2.38) :

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4\sqrt{r}} + \sqrt{1 + \frac{1}{16r}}\right) + \hbar\omega \frac{1}{4\sqrt{r}} n^2 \quad (2.51)$$

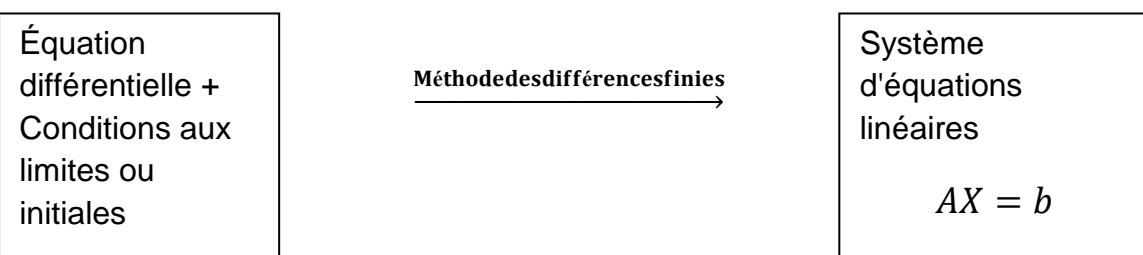
Notez que le spectre habituel est récupéré dans la limite  $\beta \rightarrow 0$  (ou  $r \rightarrow \infty$ ); pour finit  $\beta$ , les niveaux d'énergie dépendent également du carré du nombre quantique  $n$ , et asymptotiquement, pour grand  $n$ , ils grandissent comme  $n^2$ .

# Chapitre III :Méthode des différences finies

**Chapitre III : Méthode des différences finies****III.1 Philosophie générale d'approximation :**

Remplacer le problème initial par un autre plus facile à résoudre et dont la solution est proche en un sens à la solution du problème initial.

Dans le cas des problèmes aux limites, le problème initial, posé dans un espace de dimension infinie et impossible à traiter par ordinateur, est remplacé par un problème qui lui est en un sens proche, mais posé dans un espace de dimension finie et susceptible d'être résolu par ordinateur :



Avec  $A$  une matrice  $N \times N$  dont les coefficients peuvent dépendre (dans les problèmes non linéaires) du vecteur inconnu  $X$  ; le vecteur  $b$  est connu.

**III.2 Généralisations de méthode des différences finies:**

La méthode des différences finies (MDF) pour résolution des problèmes aux limites remplace chaque dérivée dans l'équation différentielle par une approximation appropriée en terme de rapport aux différences. Pour plus détails voir [1,2,3]

Les quotients aux différences et le pas  $h$  sont choisis pour avoir une erreur de troncature d'un ordre donnée.

Toutefois,  $h$  ne peut être choisi trop petit à cause des instabilités dans l'approximation des dérivées.

Le principe des différences finies est de remplacer les dérivées par des rapports aux différences provenant de l'utilisation de la formule de Taylor dans laquelle on néglige le reste.

Commençons par choisir un entier  $N - 1$  et divisons l'intervalle  $[a, b]$  en  $(N + 1)$  sous-intervalles dont les extrémités sont les points su maillage

$$x_i = a + ih \quad \text{tel que } i = 0, 1, \dots, N + 1 \text{ avec } h = \frac{1}{N+1}.$$

Le pas  $h$  est choisi constant pour faciliter l'utilisation des algorithmes servant à résoudre les systèmes linéaires qui résultent de l'approximation et qui résultent de l'approximation et qui font intervenir une matrice  $N \times N$ .

### III.3 Application :

Soit le problème modèle du second ordre :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0,1[ \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

La méthode des différences finies appliquée au problème modèle exige que l'on remplace la dérivée seconde  $u''(x_i)$  par rapport aux différences en chacun des points intérieurs  $x_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ . En utilisant un développement de Taylor au point  $x_i$ , on peut voir que si  $u$  est de classe  $C^4$  sur  $[0,1]$ , on a l'approximation :

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))] - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\epsilon_i), \quad \epsilon_i \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[$$

qui est dite formule de différences centrées  $u''(x_i)$ .

Négligeons le terme contenant  $\epsilon_i$  dans la formule précédente et notons  $u_i$  une approximation de  $u$  au point  $x_i$ .

Tenant compte des conditions aux limites, nous obtenons la méthode des différences finies suivante

$$\begin{aligned} u_0 = 0, u_{N+1} = 0 \\ -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Vue le terme négligé, l'erreur de troncature est ici d'ordre  $O(h^2)$ . Le schéma numérique précédent peut être écrit sous la forme matricielle suivante.

$$A_h U_h = b_h$$

Ou :

$A$  est la matrice  $N \times N$  tridiagonale symétrique données par :

$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

et  $U_h$  et  $b_h$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^N$ ,

$$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

et

$$b_h = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Chapitre IV :Schéma  
numérique pour l'oscillateur  
harmonique

**Chapitre IV : Schéma numérique pour l'oscillateur harmonique****IV.1 Schéma numérique pour un problème aux limites**

Dans ce chapitre, on va présenter une approximation du problème par 'MDF' dans le cas simple

Soit le problème aux limites linéaires du second ordre :

$$\begin{cases} \psi''(x) = f(x)\psi(x), & x \in [a, b] \\ \psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta \end{cases}$$

Pour approcher la solution de ce problème par la méthode des différences finies, nous commençons comme ci-dessus par diviser l'intervalle  $[a, b]$  en  $(N + 1)$  sous-intervalles égaux (pour simplifier).

Cela donne les points

$$x_i = a + ih, \text{ avec } i = 0, 1, \dots, N + 1 \quad \text{ou} \quad h = \frac{1}{N+1}$$

Aux points intérieurs  $x_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , l'équation différentielle à approcher est :

$$\psi''(x_i) = f(x_i)\psi(x_i)$$

Supposons que  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

En développant  $\psi$  suivant un polynôme de Taylor d'ordre trois autour du point  $x_i$  et évalué aux points  $x_{i+1}$  et  $x_{i-1}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi(x_{i+1}) &= \psi(x_i + h) \\ &= \psi(x_i) + h\psi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\psi''(x_i) + \frac{h^3}{6}\psi'''(x_i) + \frac{h^4}{24}\psi^{(4)}(\varepsilon_i^+) \end{aligned}$$

tel que  $\varepsilon_i^+$  dans  $]x_i, x_{i+1}[$  et

$$\begin{aligned} \psi(x_{i-1}) &= \psi(x_i - h) \\ &= \psi(x_i) - h\psi'(x_i) + \frac{h^2}{2}\psi''(x_i) - \frac{h^3}{6}\psi'''(x_i) + \frac{h^4}{24}\psi^{(4)}(\varepsilon_i^-) \end{aligned}$$

tel que  $\varepsilon_i^-$  dans  $]x_{i-1}, x_i[$ .

En sommant ces relations, nous obtenons :

$$\psi(x_{i+1}) + \psi(x_{i-1}) = 2\psi(x_i) + h^2\psi''(x_i) + \frac{h^4}{12}[\psi^{(4)}(\varepsilon_i^+) + \psi^{(4)}(\varepsilon_i^-)]$$

Ce qui donne pour  $\psi''(x_i)$  :

$$\psi''(x) = \frac{1}{h^2}[\psi(x_{i+1}) - 2\psi(x_i) + \psi(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}[\psi^{(4)}(\varepsilon_i^+) + \psi^{(4)}(\varepsilon_i^-)]$$

### Approximation de $\psi''$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'écrire l'expression simplifiée

$$\psi''(x_i) = \frac{1}{h^2}[\psi(x_{i+1}) - 2\psi(x_i) + \psi(x_{i-1})] - \frac{h^4}{12}\psi^{(4)}(\varepsilon_i),$$

$$\varepsilon_i \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[$$

Dit formule de différences centrées pour  $\psi''(x_i)$ .

### Approximation de $\psi'$

Une formule de différences centrées pour  $\psi'(x_i)$  est obtenue de la même manière :

$$\psi'(x_i) = \frac{1}{2h}[\psi(x_{i+1}) - \psi(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}\psi'''(\eta_i) \quad , \eta_i \in ]x_{i-1}, x_{i+1}[$$

L'utilisation des formules de différences centrées dans l'équation conduit à la relation :

$$\frac{\psi(x_{i+1}) - 2\psi(x_i) + \psi(x_{i-1}))}{h^2} = f(x_i)\psi(x_i) - \frac{h^2}{12}[-\psi^{(4)}(\varepsilon_i)]$$

En négligeant dans la relation précédente les termes contenant les dérivées de  $\psi$  aux points inconnus  $\eta_i$  et  $\varepsilon_i$  et tenant compte des conditions aux limites  $\psi(a) = \alpha$  et  $\psi(b) = \beta$ , nous obtenons la méthode aux différences finies suivantes avec une erreur de troncature d'ordre  $O(h^2)$  :

$$\psi_0 = \alpha, \psi_{N+1} = \beta.$$

En pose

$$\psi(x_{i+1}) = \psi_{i+1}, \psi(x_i) = \psi_i, \psi(x_{i-1}) = \psi_{i-1}$$

et

$$f(x_i) = f_i$$

Cette équation sera utilisée sous la forme :

$$-\psi_{i+1} + 2\psi_i - \psi_{i-1} - h^2 f_i \psi_i = 0$$

Alors

$$-\psi_{i+1} + (2 - h^2 f_i) \psi_i - \psi_{i-1} = 0$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N - 1$$

avec

$$\left. \begin{array}{l} \psi_0 = \psi(x_0) = \psi(a) = \alpha \\ \psi_{N+1} = \psi(x_{N+1}) = \psi(b) = \beta \end{array} \right\} \text{données}$$

Que l'on peut écrire sous la forme d'un système linéaire avec une matrice  $N \times N$  tri diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2 f_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 + h^2 f_2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^2 f_3 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & \dots & \ddots & -1 \\ & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 + h^2 f_N \end{bmatrix}$$

et

$$\psi_h = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{N-1} \\ \psi_N \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

en résumé,

$$A\psi_h = b$$

La diagonale principale de  $A = (a_{ij})^N$  est formée des éléments

$$a_{ii} = 2 + h^2 f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Sous la diagonale principale, on a

$$a_{i,i-1} = -1, \quad i = 2, \dots, N$$

Et au-dessus de cette diagonale on a les éléments

$$a_{i,i-1} = -1, \quad i = 2, \dots, N - 1$$

Tous les autres éléments de  $A$  sont nulles.

## IV.2 Simulation numérique de 'MDF' utilisant Matlab :

On a :

Les entrées :

$$\psi_0 = \exp(-x * x),$$

$$[a, b] = [-2, +2],$$

$$N = 200.$$

Les sorties :

$$E_1, E_2, E_3$$

Désigner :  $\psi_0$  et

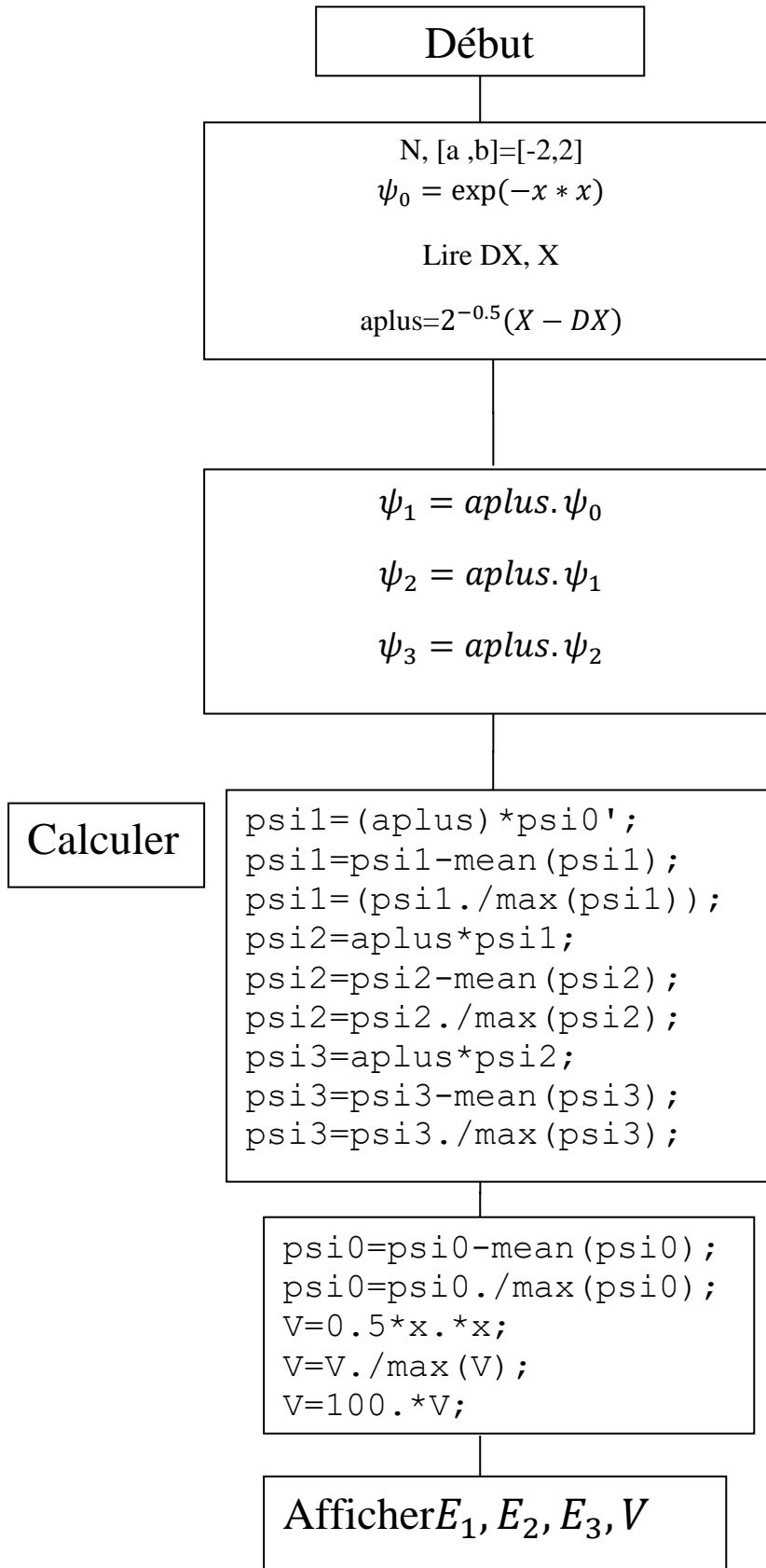
$$E_1, E_2, E_3$$

Titre :

L'état stationnaire d'oscillateur harmonique

'Stationary states of harmonic oscillator'.

## IV.2.1 Organigramme :



## IV.2.2 Programme écriture par Matlab Organigramme :

```

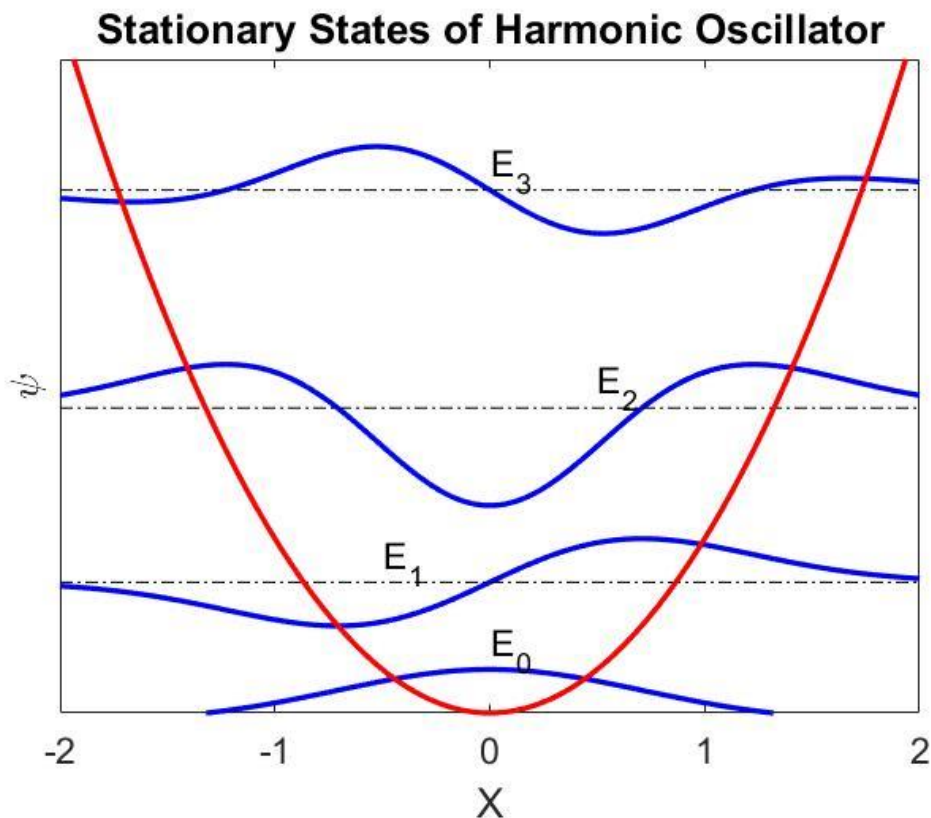
%------%
%-----The Quantum HarmonicOscillator-----%
%------%
N=200;% no of grid points
x=linspace(-2,2,N); % x-coordinate
psi0=exp(-x.*x); % ground state wavefunction
%---forming the raisingoperator -----%
neg_one=-1.*ones(N,1);
pos_one=1.*ones(N,1);
X=spdiags(x,N,N);
DX=0.5.*(spdiags([neg_onepos_one ],[-1 1 ],N,N));
aplus=2.^(-0.5).*(X-DX); %
%--- Using the raisingoperator to findexcited states-----%
psi1=(aplus)*psi0'; % first excited state
psi1=psi1-mean(psi1); % normalizing
psi1=(psi1./max(psi1));
psi2=aplus*psi1;% second excited state
psi2=psi2-mean(psi2);
psi2=psi2./max(psi2);
psi3=aplus*psi2;% thirdeccited state
psi3=psi3-mean(psi3);
psi3=psi3./max(psi3);
%-----rescaling the wavefunction for visualizationpurpose-----%
psi0=psi0-mean(psi0);
psi0=psi0./max(psi0);
psi1=psi1+3;
psi2=psi2+7;
psi3=psi3+12;
V=0.5*x.*x;% parabolicoscillatorpotential
V=V./max(V);
V=100.*V;
%------%
figure(1)
plot(x,psi0,'b','linewidth',2)
text(0, 1.5,'E_0','fontSize',14)
axis([-2 2 0 15])
holdon
plot(x,psi1,'b','linewidth',2)
line([-2 2], [3 3],'color','k','LineStyle','-')
text(-0.5, 3.5,'E_1','fontSize',14)
plot(x,psi2,'b','linewidth',2)
line([-2 2], [7 7],'color','k','LineStyle','-')
text(0.5, 7.5,'E_2','fontSize',14)
plot(x,psi3,'b','linewidth',2)
line([-2 2], [12 12],'color','k','LineStyle','-')
text(0, 12.5,'E_3','fontSize',14)
plot(x,V,'r','linewidth',2)
h=gca;
get(h,'FontSize')
set(h,'FontSize',14)
xlabel('X','fontSize',14);
ylabel('\psi','fontSize',14);
title('Stationary States of Harmonic Oscillator','fontsize',14)
fh = figure(1);
set(fh, 'color', 'white');
set(gca, 'ytick', []);

```

```
hold off
%-----end-----%
```

### IV.2.3 Résultat après compilation :

Après écrire un programme par matlab pour résoudre ce problème par la méthode des différences finies on obtient la solution donnée sous la figure suivante :



-Le graphe rouge représenté l'énergie potentielle  $kx^2$

-Les graphes bleus représenté les fonctions d'onde

-les niveaux des énergies  $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$  représenté par les lignes discret ,avec

$$n = 0,1,2,3 \dots$$

**Conclusion :**

## ***Conclusion***

---

### **Conclusion :**

Dans ce travail, Nous avons présenté dans ce mémoire, une contribution importante à l'approche de la résolution de l'équation de Schrödinger avec des potentiels harmonique par la méthode de méthode de différence finie, dans le cadre de la mécanique quantique ordinaire et la mécanique quantique non relativiste basée sur un principe d'incertitude généralisé, impliquant l'existence d'une longueur élémentaire.

Tous d'abord nous avons donné un aperçu général sur quelques méthodes utilisées en mécanique quantique pour la résolution du problème relatif aux potentiel harmoniques. Puis nous présentons les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste basée sur un principe d'incertitude généralisé, nous avons résolu analytiquement l'équation de Schrödinger pour le cas de l'oscillateur harmonique unidimensionnel en présence des longueurs minimales dans l'espace des impulsions. On remarque que la présence de la longueur minimale conduit à une dépendance quadratique du spectre d'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  .et pour  $r \rightarrow \infty$  ou  $\beta \rightarrow 0$  nous trouvons le spectre d'énergie du cas ordinaire.

Le travail de notre mémoire est concerné à la résolution de l'équation de Schrödinger par la méthode des différences finies 'MDF' on a testé le programme élaboré pour différents cas, en écrit le programme par logiciel MATLAB, particule sous l'effet d'un potentiel d'oscillateur harmonique ordinaire et déformée par l'existence d'une longueur élémentaire.

Les résultats obtenus sont satisfaisants car une comparaison avec les solutions exactes montre un très bon accord avec les résultats numériques.

# Référence

## Référence

---

Référence :

- [1] Djamil Bouaziz, Thèse présentée docteur en sciences, universite de liège, Juin 2009
- [2] F. Brau, J. Phys. A : Math. Gen. 32, 7691 (1999).
- [3] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A 72,012104 (2005).
- [4] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A 74, 012101 (2006).
- [5] M. M. Stetsko, Phys. Rev. A 74, 062105 (2006).
- [6] R. Akhoury and Y.-P. Yao, Phys. Lett. B 572, 37-42 (2003).
- [7] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D 65,125027 (2002).
- [8] Achim. Kempf, J. Phys. A : Math. Gen. 30, 2093 (1997).
- [9] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D52, 1108 (1995).
- [10] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37 (1996) 2121-2137.
- [11] M. Maggiore, Phys. Lett. B 319, 83 (1993).
- [12] Badis Ydri ; cours Physique Numérique ; Université d'Annaba
- [13] H. Löwen, J. Phys.: Condens. Matter 15, V1 ,2003.- R. J. Furnstahl, J. Phys. G 31, S1357 ,2005.
- [14] J.V. Lill, G.A. Parker, and J.C. Light, Chem. Phys. Lett. 89, 483 (1982);J.Chem. Phys. 85, 900 (1986).
- [15] S. L. Altmann, C. J. Bradley, Proc. Phys. Soc. London 86, 915 ,1965.
- [16] M. Kossow, Annal. Phys: Quantum field theory and composite fermions in the fractional quantum Hall effect, 18N5, 285-377, 2009.
- [17] R. M. Martin, Electronic Structure: Basic Theory and Practical Methods,Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [18]AMEUR Rabah, Mémoire de Magister, Université de MEDEA.
- [19]Cohen-Tannoudji, B.Diu et Laloë, Mécanique quantique T<sub>1</sub>,T<sub>2</sub>. Hermann, Paris, 1973 (Nouveaux tirages 1998). Albert Messiah, Mécanique quantique T<sub>1</sub>,T<sub>2</sub> L.Landau et E.Lifchits , physique théorique T<sub>1</sub> Mécanique quantique.

## *Référence*

---

- [20] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, Éditions Ellipses, Paris (2006).  
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/livre2.html>
- [21] G. Allaire & S.M. Kaber, Algèbre linéaire numérique. Cours et exercices, Édition ellipses, Paris (2002).
- [22] R.L. Burden & J.D. Faires, Numerical Analysis, 7th edition, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2001.
- [23] Bouzenada Abdelmalek, mémoire de master, Université de Larbi Tébessi –Tébessa.
- [24] Guerna Rebiha Souhila et Belagraa Messkia, Mémoire de Master d'université de Mohamed Boudiaf- M' SILA.
- [25] Betrouche Malika, thèse de doctorat, Université Ferhat Abbas SETIF.

## Résumé

Nous présentons les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste basée sur un principe d'incertitude généralisé, et l'utilisation de la méthode de différence finie pour étudier l'oscillateur harmonique unidimensionnel généralisé par la présence d'une longueur élémentaire, nous présentons comment on peut résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger avec un potentiel harmonique en présence d'une longueur minimale toujours dans le cas des systèmes unidimensionnels. Nous avons utilisé le logiciel matlab pour le traitement numérique.

Mots clés : Oscillateur harmonique , méthode des différences finies, le principe d'incertitude généralisé.

## ABSTRACT

We present the fundamental tools of the formalism of nonrelativistic quantum mechanics based on a generalized uncertainty principle, and the use of the finite difference method to study the one-dimensional harmonic oscillator generalized by the presence of an elementary length, we let us present how we can analytically solve the Schrödinger equation with a harmonic potential in the presence of a minimum length, still in the case of one-dimensional systems.

We used matlab software for digital processing.

Keywords: the harmonic oscillator , finite difference method , the generalized uncertainty principle.

## ملخص

لقد قدمنا الأدوات الأساسية لشكلية ميكانيكا الكم غير النسبية على أساس مبدأ عدم اليقين المعمم، واستخدام طريقة الفروق المنتهية لدراسة التذبذب التوافقي أحادي البعد المعمم بوجود طول أولي، إننا نقدم كيفية حل معادلة شرودينغر تحليليا باستعمال جهد توافقي في وجود حد أدنى للطول، لا يزال في حالة الأنظمة أحادية البعد. استعملنا برنامج ماتلاب للمعالجة العددية.

الكلمات المفتاحية: الهزاز التوافقي، طريقة الفروق المنتهية، مبدأ عدم اليقين المعمم.