

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université de Laghouat
Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques & informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Thème

Identification numérique d'un paramètre pour un
problème elliptique sous forme divergence

Présentée par :

LOUASSEF Mohamed

Soutenu le : 11/06/2015.

Devant le jury composé de :

Président : *M^{me} BOUKHATEM* Yamna

M.C.B, Université de Laghouat

Encadreur : *M^r NOURI* Brahim

M.C.B, Université de Laghouat

Examineurs : *M^r RAHMOUNE* Abita

M.A.A, Université de Laghouat

M^r OUCHNEN Djamel

M.A.A, Université de Laghouat

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ALLAH tout puissant qui m'a donné la patience, la volonté et le courage pour bien achever mes études. J'exprime ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de mémoire Monsieur NOURI Brahim. J'adresse mon respect à Madame BOUKHATEM Yamna qui a honoré ce travail en acceptant de présider le jury, ainsi que les examinateurs Monsieur RAHMOUNE Abita et Monsieur OUCHNEN Djamel qui ont consacré leurs temps à bien jugé mon travail de façon aussi minutieuse.

Enfin, vifs remerciements sont aussi transmis à tous mes professeurs et à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire.

Dedicaces

Un grand merci à ma famille

En particulier ma femme

Mes deux filles et mon unique garçon

*Pour m'avoir toujours soutenue et conseillée et pour tous les bons
moments passés avec eux.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude pour l'identification numérique d'un paramètre pour un problème elliptique sous forme divergence en dimension deux avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Le problème inverse est étudié dans un cadre d'un problème d'optimisation avec contraintes où les contraintes est un ensemble convexe et fermé, et la fonction objective est donnée par la fonction de moindres carrés non linéaire. Ce problème d'optimisation admet au moins une solution et la régularisation est nécessaire pour l'unicité de la solution. Enfin, nous avons utilisé la méthode du gradient projeté pour résoudre le problème d'optimisation régularisé.

Mots-Clés : Éléments finis, Logiciel FreeFem, Méthode du gradient projeté, Moindres carrés non linéaire, régularisation.

Table des matières

1	Rappels sur des outils mathématiques	1
1.1	Espace normé	2
1.2	Espace de Hilbert	2
1.3	Opérateurs linéaires	6
1.4	Analyse convexe et optimisation	10
1.4.1	Condition d'optimalité	12
2	Problème direct : problème elliptique sous forme divergence	15
2.1	Position du problème	16
2.2	Formulation variationnelle	16
2.3	Approximation interne du problème	19
2.3.1	Convergence de la méthode	20
2.4	Résolution numérique par FreeFem	21
3	Problème inverse	26
3.1	Différentiabilité	28
3.2	Méthode de Moindres carrés non linéaire	31
3.3	Problème régularisé	32
3.3.1	Discrétisation par éléments finis	33
3.3.2	Méthode du gradient projeté	33
3.3.3	Algorithme	35

Table des figures

2.1	Domaine carré	22
2.2	Solution en 2D	23
2.3	Solution en 3D	23
2.4	Un quart d'un disque	24
2.5	Solution en 2D	25
2.6	Solution en 3D	25

Introduction générale

Un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les paramètres d'un modèle à partir de mesures expérimentales.

En mathématiques, un problème inverse a la forme d'une équation

$$F(x) = y \tag{1}$$

Où y représente les mesures effectuées, x représente les valeurs des paramètres du phénomène et F est un opérateur linéaire ou non linéaire qui représente la relation entre les mesures et les paramètres du modèle.

Les problèmes inverses généralement sont des problèmes mal posés car si l'on cherche à résoudre l'équation (1); cela nécessite l'inversion de l'opérateur F . Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique. Et d'après Hadamard [7] un problème est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- ☞ La solution existe;
- ☞ Elle est unique;
- ☞ Elle dépend continument des données.

Donc, si l'une des trois conditions n'est pas satisfaite, on dit que le problème est mal posé.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct. Cette résolution peut se faire par *simulation numérique* ou de façon *analytique*.

Dans ce mémoire, nous avons centré notre travail sur le problème elliptique sous forme divergence en dimension deux suivant :

$$-div(a\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{2a}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d, \tag{2b}$$

$$a\nabla u \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_N. \tag{2c}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_N$ avec $mes(\Gamma_d) > 0$, n le vecteur normal extérieur de Γ_N , (2b) est la condition de Dirichlet homogène et (2c) est la condition de Neumann. Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner un rappels sur des outils mathématiques utilisées dans ce mémoire, comme les espaces de Hilbert et leurs propriétés, les opérateurs linéaires continus et les propriétés les plus importantes dans les espaces de Hilbert ainsi que quelques résultats indispensables d'analyse convexe et d'optimisation.

Dans la deuxième chapitre, nous avons étudié le problème (2a)-(2c) qui consiste à trouver u avec a , f et g sont connues. Nous obtenons la formulation variationnelle du problème.

Ensuite, nous démontrons par le théorème de Lax-Milgram que la formulation variationnelle admet une solution unique. En utilisant l'approximation interne, nous dérivons un système d'équations linéaires à matrice symétrique, définie positive. Nous avons démontré un résultat de convergence. Finalement, avec le logiciel FreeFem, nous avons résolu le problème approché par des exemples numériques.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude le problème (2a)-(2c) pour identifier le paramètre a avec f , g et u sont données. Dans ce cas, nous avons étudié un problème inverse qui ne peut pas être résolu directement en manipulant le problème aux limites (2a)-(2c). Donc, on considère un opérateur implicite F qui associe le paramètre a , la solution $F(a) = u$ du problème direct. Nous avons démontré que cet opérateur est de classe \mathcal{C}^2 . Nous avons utilisé la méthode de moindres carrés non linéaire pour résoudre le problème inverse. Malheureusement, ce problème admet plusieurs solutions. Avec la régularisation de fonction de moindre carrés, nous avons démontré l'unicité d'une solution régularisée. Nous employons la méthode du gradient projeté pour résoudre le problème de moindres carrés régularisé.

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappels sur des outils mathématiques

1.1 Espace normé

Définition 1.1. (Norme) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} on appelle norme sur E , est on la note $\|\cdot\|$ toute application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les axiomes suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle espace vectorielle normé.

Exemple 1.1. On peut définir sur l'espace réel \mathbb{R}^n les normes usuelles suivantes : pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1 \end{aligned}$$

Les couples $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, sont des espaces normés.

Définition 1.2. (Suite de Cauchy.) Soit E un espace vectoriel normé une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \quad \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.3. (Espace complet) Soit E un espace vectoriel normé on dit que E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E .

Définition 1.4. (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace normé complet.

Exemple 1.2. . La droite réelle constitue un espace de Banach.

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.5. (Produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} , un produit scalaire sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, x_1, x_2, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\varphi(x, x) \geq 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.
2. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.
3. $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$.
4. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$.

On dit que le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien si E est un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire. Si l'espace E est de dimension finie on appelle $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace Euclidien. La proposition suivante fait le lien entre les espaces préhilbertiens et les espaces normés.

Proposition 1.1. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien; alors l'expression.*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définie une norme sur E . On dira que $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 1.6. (L'espace $L^2(\Omega)$). l'espace $L^2(\Omega)$ est l'ensemble de toutes des fonctions à carré sommable. Soient u et v deux fonctions de $L^2(\Omega)$, on définit le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, par la relation

$$\langle u, v \rangle = \int u(x).v(x)dx.$$

Et dont la norme est donnée par.

$$\|f(x)\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.7. (Espace de Hilbert) On appelle espace Hilbertien ou espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.

Exemple 1.3. \mathbb{R}^n muni du produit scalaire Euclidien défini par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x.y \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \end{aligned}$$

Lemme 1.1. (Inégalité de Cauchy Schwarz) Soit E un espace pré hilbertien sur le corps \mathbb{K} , $\forall x, y \in E$ on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Démonstration. L'inégalité 1.1 est trivialement satisfaite si $\langle x, y \rangle = 0$. Supposons donc que $\langle x, y \rangle \neq 0$. Alors on pose $z = x - \lambda y$ telle que $\langle z, y \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle z + \lambda y, y \rangle = \langle z, y \rangle + \lambda \langle y, y \rangle \\ &= \lambda \langle y, y \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \langle z + \lambda y, z + \lambda y \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \\ &\geq |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \\ &= \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle \\ |\langle x, y \rangle| &\leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De plus on a l'égalité si $\langle z, z \rangle = 0$. □

Lemme 1.2. (*Inégalité de Minkowski*) Soit E un espace préhilbertien et $\forall x, y \in E$ alors on a :

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}. \quad (1.2)$$

Démonstration. On a .

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2|\langle y, y \rangle|. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité 1.1 on obtient :

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2.$$

D'ou

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

□

Lemme 1.3. (*Loi de parallélogramme*) La norme induite par un produit scalaire satisfait l'égalité .

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.3)$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

□

Définition 1.8. (Orthogonalité) Soit H un espace de Hilbert deux vecteurs $x, y \in H$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ on note par : $x \perp y$ L'orthogonal d'un sous espace vectoriel fermé F est :

$$F^\perp = \{x \in H / \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F\}.$$

F^\perp s'appelle le complément orthogonal de F .

Remarque 1.1. La relation d'orthogonalité possédé les propriétés suivantes :

1. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$.
2. $0 \perp x \forall x \in H$.
3. $x \perp x \Rightarrow x = 0$.
4. $x \perp x_i$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow x \perp \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Théorème 1.1. Soit F un ensemble non vide d'un espace de Hilbert et soit \overline{F} la fermeture de F s'il existe $x \in \overline{F}$ tel que $x \perp F$ alors $x = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \overline{F} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tel que $x_n \rightarrow x$

Donc $\langle x_n, x \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$

Alors : $\langle x_n, x \rangle \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ □

Théorème 1.2. Si F un ensemble non vide de H alors :

$$F^\perp = \{x, x \in H \text{ et } x \perp F\}$$

Est un sous espace fermé de H .

Démonstration. On a $F^\perp \neq \emptyset$ car $0 \in F^\perp, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in F^\perp, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{K}, \forall y \in F$ Alors :

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0.$$

Donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F^\perp$; et F^\perp est un sous espace de H

D'autre part on a

$\forall x_0 \in \overline{F^\perp} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F^\perp$ tel que $x_n \rightarrow x_0$. Alors.

$$\langle x_0, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in F$$

Donc $x_0 \in F^\perp$ est un sous espace vectorielle fermé. □

Corollaire 1.1. Soit F_1 espace fermé de H et soit $x \in H$ alors il existe un élément $y_0 \in F_1$ telle que :

$$x - x_0 \perp F_1 \text{ et } \|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in F_1.$$

On appelle cet élément la projection orthogonale de x sur F_1 et l'on note par : $y_0 = P_{F_1}(x)$.

Théorème 1.3. (Décomposition orthogonale) Si F_1 est un sous espace fermé de H , alors tout $x \in H$ se décompose d'une manière unique :

$$x = y + z \text{ où } z \in F_1^\perp, y \in F_1.$$

Démonstration. L'existence d'une telle décomposition vient du fait que.

$$x = px + (I - p)x$$

où p est la projection orthogonal de H sur F_1 supposons, $x = y + z, y \in F_1, z \in F_1^\perp$.

Alors

$$px = py + pz = y$$

Et

$$(I - p)x = (I - p)y + (I - p)z = z$$

cette décomposition est donc unique. □

Corollaire 1.2. *Si F un sous espace fermé de H , on a la propriété suivante : $F \cap F^\perp = \{0\}$ de plus $F = F \oplus F^\perp$ c'est à dire H admet une décomposition orthogonale.*

Démonstration. Si $x = px + (I - p)x \in F_1 \oplus F_1^\perp$

Alors $(x, px) = (x, (I - p)x)$

Ce qui entraîne que $(x, px + (I - p)x) = (x, x) = \|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$

D'après le théorème de décomposition orthogonale on a $H = F_1 \oplus F_1^\perp$. □

1.3 Opérateurs linéaires

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.

Définition 1.9. . L'application.

$$\begin{aligned} T : H_1 &\longrightarrow H_2 \\ x &\longrightarrow y = T(x). \end{aligned}$$

S'appelle opérateur linéaire si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in H_1, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2).$$

D_T désigne le domaine de définition de l'opérateur T . On définit la norme de l'opérateur T par :

$$\|T\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Tx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} \quad x \neq 0.$$

Si $H_1 = \mathbb{R}$ on appelle T forme linéaire.

Définition 1.10. . Un opérateur T est borné, si il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in H_1, \|Tx\|_{H_2} \leq M \|x\|_{H_1}.$$

Définition 1.11. . Un opérateur T est continu de H_1 dans H_2 , si elle vérifier :

$$\exists k > 0, \forall x \in H_1, \|Tx\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}.$$

Théorème 1.4. *L'opérateur T est continu si et seulement si il est borné.*

Proposition 1.2. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit T un opérateur linéaire de H_1 dans H_2 , il existe une opérateur unique T^* de H_2 dans H_1 tel que :*

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Est appelé l'adjoint de l'opérateur T . Si l'opérateur T continue et borné l'opérateur T^ l'est aussi on a :*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)}.$$

si $H_1 = H_2$ on appelle T auto-adjoint.

Définition 1.12. (Noyau et Image de T)

- Le noyau de l'opérateur T est un sous espace de H_1 définie par :
 $\text{Ker}T = \{x \in H_1, Tx = 0\}$;
- L'image de T est le sous espace de H_2 définie par :
 $\text{Im}T = \{y \in H_2, \exists x \in H_1; Tx = y\}$.

Proposition 1.3. si T une application linéaire continue de H espace de Hilbert dans lui-même H réel alors.

$$\text{ker}(T) = [\text{Im}T]^\perp.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} Tx &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle Tx, y \rangle &= 0 \forall y \in H \\ \Leftrightarrow \langle x, Ty \rangle &= 0 \forall y \in H \end{aligned}$$

□

Définition 1.13. (Dual d'un espace de Hilbert) On appelle H' dual topologique de H c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur H .

Théorème 1.5. (*représentation de Riesz*) Pour toute forme linéaire continue T sur H , il existe unique $y \in H$, tel que :

$$\forall x \in H, T(x) = \langle y, x \rangle$$

Démonstration. Soit T une forme linéaire continue sur H . on note $F = \text{ker}T$. c'est un sous-espace fermé puisque T est continue .

Existence : on distingue 2 cas :

1) Si $F^\perp = 0$.

Alors on a : $F = (F^\perp)^\perp = H$, $T = 0$ et $y = 0$.

2) si $F^\perp \neq 0$.

Alors on prend $u \in F^\perp$ de norme 1. on a $T(u) \neq 0$ et pour $x \in H$ on a :

$x - \frac{T(x)}{T(u)}u \in \text{ker}T = F$ le produit scalaire $\langle u, x - \frac{T(x)}{T(u)}u \rangle = 0$, ce qui donne.

$$\begin{aligned} \forall x \in H, T(x) &= T(x)(u, u) \\ &= T(u)(u, x) \\ &= \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

En prenant $y = T(u)u$.

Unicité : soient $y_1, y_2 \in H$, tel que pour tout

$x \in H$, $\langle y_1, x \rangle = T(x) = \langle y_2, x \rangle$

alors en prenant $x = y_1 - y_2$ on obtient, $\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = 0$ d'où $y_1 = y_2$. □

Définition 1.14. (forme bilinéaire) Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que a forme bilinéaire si elle est linéaire en chacune de ses variables .

Définition 1.15. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire on dit que .

1. a est continue sur $H \times H$ s'il existe $\beta > 0$ tel que .

$$\forall (x, y) \in H^2, |a(x, y)| \leq \beta \|x\|_H \|y\|_H.$$

2. a coercive (ou elliptique)

$$\text{S'il } \exists \alpha > 0, \forall x \in H, |a(x, x)| \geq \alpha \|x\|_H^2.$$

Théorème 1.6. (*Lax-Milgram*) Soit H un espace de Hilbert réel $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur H , $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue coercive sur H . Alors la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H \\ \text{telle que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L .

Démonstration. On a $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur H d'après le théorème de Riesz 1.5 : $\exists A(w) \in H$ tel que :

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \quad \forall v \in H.$$

La bilinéarité de $a(w, v) \Rightarrow$ la linéarité de $w \rightarrow A(w)$

car soit $w_1, w_2 \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

on a.

$$\begin{aligned} \langle a(\alpha w_1 + \beta w_2), v \rangle &= a(\alpha w_1 + \beta w_2, v) \\ &= \alpha a(w_1, v) + \beta a(w_2, v) \\ &= \alpha \langle A(w_1), v \rangle + \beta \langle A(w_2), v \rangle \end{aligned}$$

Donc $w \rightarrow A(w)$ est linéaire.

On pose $v = A(w)$ d'après la continuité de $a(w, v)$ on va montrer.

$$\begin{aligned} \|A(w)\|^2 &= a(w, A(w)) \\ &\leq \beta \|w\| \|A(w)\| \\ \Rightarrow \|A(w)\| &\leq \beta \|w\|. \end{aligned}$$

Donc $A \rightarrow A(w)$ est continue.

Une autre application de théorème de Riesz 1.5 alors :

$$\begin{aligned} \exists f \in H \text{ tel que } \|f\|_H &= \|L\|_{H'} \text{ et} \\ L(v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Donc le problème variationnelle (1.4) \Leftrightarrow à trouver $u \in H$ tel que : $A(u) = f$.

On va montrer que A est bijectif (ce qui implique l'existence et l'unicité de u).

1. A est injectif : D'après la coercibilité de $a(w, v)$ on a :

$$\begin{aligned}\alpha \|w\|^2 &\leq a(w, w) \\ &= \langle A(w), w \rangle \\ &\leq \|Aw\| \|w\|.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\alpha \|w\| \leq \|Aw\|, w \in H.$$

Soit $w_1 = w_2$ tel que.

$$\begin{aligned}A(w_1) &= A(w_2) \\ \implies A(w_1 - w_2) &= 0 \text{ (car } A \text{ est linéaire)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\alpha \|w_1 - w_2\| &\leq |A(w_1 - w_2)| \\ &= 0 \implies w_1 = w_2.\end{aligned}$$

2. A est surjectif : il suffit de montrer que ImA est un sous espace fermé .

Donc $H = ImA \oplus ImA^\perp$, on va montrer $ImA^\perp = 0$

Soit $v \in ImA^\perp \implies \forall A(w) \in ImA, \langle A(w), v \rangle = 0 \implies a(w, v) = 0$

on pose $w = v$. D'après la coercibilité de a on a :

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = 0 \implies v = 0.$$

Donc A est surjectif.

3. A^{-1} est continue : $\alpha \|w\| \leq \|Aw\|$ on pose $w = A^{-1}(v) \implies A^{-1}$ est continue. Donc la solution u dépend continument de f .

□

Définition 1.16. (Opérateur monotone) Soit $T : H \mapsto H$ une opérateur.

1. On dit que T est monotone si

$$\forall x, x' \in H, \langle Tx - Tx', x - x' \rangle \geq 0$$

2. On dit que T est strictement monotone .

$$\forall x, x' \in H, \text{ et } x \neq x', \forall y, y' \in H, \langle Tx - Tx', x - x' \rangle > 0$$

3. On dit que T fortement monotone de module $\alpha > 0$ si

$$\forall x, x' \in H, \forall y, y' \in H, \langle Tx - Tx', x - x' \rangle \geq \alpha \|x - x'\|^2$$

1.4 Analyse convexe et optimisation

Définition 1.17. (Ensemble convexe). Un ensemble S est dite convexe si.

$$\forall x, y \in S, \forall \theta \in [0, 1] : \theta x + (1 - \theta) \times y \in S$$

Exemple 1.4. .

1. les intervalles de \mathbb{R} sont des sous ensembles convexe .
2. Dans un espace vectoriel normé réel toute boule (ouvert ou fermé) est convexe.

Définition 1.18. (Fonction convexe)

On dit qu'une fonction F définie sur un ensemble convexe non vide $S \subseteq H$ et à valeur dans \mathbb{R} est :

1. Convexe sur S si est seulement si :

$$F(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta F(u) + (1 - \theta)F(v), \forall u, v \in S, \forall \theta \in [0, 1]$$

2. Strictement convexe sur S si est seulement si :

$$F(\theta u + (1 - \theta)v) < \theta F(u) + (1 - \theta)F(v), u \neq v, \theta \in]0, 1[.$$

3. Fortement convexe si est seulement si :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } F(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta F(u) + (1 - \theta)F(v) - \frac{\alpha}{2}(1 - \theta)\theta \|u - v\|^2, \forall \theta \in [0, 1].$$

On dit aussi dans ce cas F est α convexe.

Définition 1.19. (Minimum local) On dit que u est un minimum local de F sur S si est seulement si :

$$u \in S \text{ et } \exists \delta > 0, \forall v \in S, \|v - u\| < \delta \Rightarrow F(v) \geq F(u).$$

On dit que u est un minimum global de F sur S si est seulement si :

$$u \in S \text{ et } F(v) \geq F(u), \forall v \in S.$$

Proposition 1.4. Si F est une fonction convexe sur un ensemble convexe S , tout point de minimum local de F sur S est un minimum global, si de plus F est strictement convexe, alors il existe au plus un minimum .

Si S un convexe fermé et F est une fonction α convexe sur S . Alors il existe un unique minimum u de F sur S , et on :

$$\|u - v\|^2 \leq \frac{4}{\alpha} [F(v) - F(u)], \forall v \in S.$$

Définition 1.20. (Différentiabilité au sens de Fréchet) On dit que la fonction F définie sur un voisinage de $u \in H$ à valeur dans \mathbb{R} est différentiable au sens de Fréchet en u s'il existe une forme linéaire continue sur H , $L \in H'$ tel que.

$$F(u + w) = F(u) + L(w) + o(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|o(w)|}{\|w\|} = 0 \quad (1.5)$$

On appelle L la différentielle de F en u et on note $L = F'(u)$.

On peut préciser la relation (1.5) en identifiant H et son dual H' grâce au théorème de représentation de Riesz 1.5. En effet, il existe un unique $p \in H$ tel que $\langle p, w \rangle = L(w)$, donc (1.5) devient

$$F(u + v) = F(u) + \langle p, w \rangle + o(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\|o(w)\|}{\|w\|} = 0$$

Définition 1.21. (Différentiabilité au sens faible) On dit que F définie sur un voisinage de $u \in H$ à valeur dans \mathbb{R} est différentiable au sens de Gâteaux en u s'il existe $L \in H'$ tel que.

$$\forall w \in H, \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{F(u + \delta w) - F(u)}{\delta} = L(w) \quad (1.6)$$

Proposition 1.5. Soit F une fonction différentiable de H dans \mathbb{R} , les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & F \text{ est convexe sur } H \\ & F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle, \forall u, v \in H \\ & \langle F'(u) - F'(v), u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in H \end{aligned} \quad (1.7)$$

Et pour $\alpha > 0$ les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & F \text{ est } \alpha \text{ convexe sur } H \\ & F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v - u \rangle + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2, \forall u, v \in H \\ & \langle F'(u) - F'(v), u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2, \forall u, v \in H \end{aligned} \quad (1.8)$$

Définition 1.22. (La dérivée seconde) Soit F une fonction de H dans \mathbb{R} . On dit que F est deux fois différentiable en $u \in H$ si F est différentiable dans un voisinage de u et sa différentielle F' est différentiable en u . On note F'' la différentielle de F' en u qui vérifie

$$F'(u + w) = F'(u) + F''(u)w + O(w), \text{ avec } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\|O(w)\|}{\|w\|} = 0$$

Définition 1.23. (Problème d'optimisation) Un problème d'optimisation du type suivant : "trouver le minimum d'une fonction sans ou avec contrainte(s)". D'un point de vue mathématique, le problème se formule de la façon suivante :

- problème sans contrainte :

$$\min_{v \in H} F(x),$$

- problème avec contrainte :

$$\min_{v \in S} F(x)$$

1.4.1 Condition d'optimalité

Théorème 1.7. (*Inéquation d'Euler, cas convexe*) Soit $u \in S$ un sos-ensemble de H convexe. On suppose que F est différentiable en u , si u est un point de minimum local de F sur S alors.

$$\langle F'(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in S \quad (1.9)$$

Si $u \in S$ vérifie (1.9) et si F est convexe, alors u est un minimum global de F sur S .

Démonstration. Pour $v \in S$ et $h \in]0, 1]$, $u + h(v - u) \in S$, et donc :

$$\frac{F(u + h(v - u)) - F(u)}{h} \geq 0 \quad (1.10)$$

On en déduit (1.9) en faisant tendre h vers 0. La deuxième assertion du théorème découle immédiatement de (1.7) \square

Remarque 1.2. L'inéquation d'Euler (1.9). Il s'agit d'une condition nécessaire d'optimalité qui devient nécessaire et suffisante si F est convexe. Dans deux cas importants, (1.9) se réduit simplement à l'équation d'Euler $F'(u) = 0$

1. Si $S = H$, $v - u$ décrit tout H lorsque v décrit H et donc (1.9) entraîne $F'(u) = 0$
2. Si u est intérieur à S , la même conclusion s'impose

Proposition 1.6. On suppose que $S = H$ et que F est deux fois différentiable en u . Si u est un point de minimum local de F , alors

$$F'(u) = 0 \text{ et } F''(u) \geq 0, \forall w \in H \quad (1.11)$$

Réciproquement, si pour tout v dans un voisinage de u

$$F'(u) = 0 \text{ et } F''(u)(w, w) \geq 0, \forall w \in H, \quad (1.12)$$

Alors u est un minimum local de F .

Théorème 1.8. (*théorème de projection*) soit F un sous ensemble fermé, convexe et non vide d'un espace de Hilbert réel H , (la norme étant noté $\|\cdot\|$). Alors, pour tout $h \in H$, il existe un unique $x \in F$ tel que :

$$\|h - x\|_H = d(x, F) = \inf_{x \in F} \|h - x\| \quad (1.13)$$

Ce point x noté $x = p_F x$ est appelé projection de x sur F . Est caractérisé par l'inégalité :

$$\forall y \in F, (h - x, y - x) \leq 0 \quad (1.14)$$

Démonstration. • **Existence** : soit d la distance de h à F : $d = \inf_{x \in F} \|x - h\|$

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de F : telle que

$$d_n = \inf_{x_n \in F} \|h - x_n\|$$

$$\text{Et } d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d = \inf_{x \in F} \|h - x\|$$

Pour montrer l'existence on va montrer que x_n est une suite de Cauchy converge. En utilisons l'égalité de parallélogramme(1.3).

$$\begin{aligned} \|(h - x_n) + (h - x_m)\|^2 + \|(h - x_n) - (h - x_m)\|^2 &= 2(\|h - x_n\|^2 + \|h - x_m\|^2) \\ 4\left(\left\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2\right) &= 2(d_n^2 + d_m^2) \end{aligned}$$

Par hypothèse F convexe donc $\frac{x_n + x_m}{2} \in F$ et on a aussi $\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\| \geq 0$

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2$$

par passage à la limite quand $n, m \rightarrow +\infty$

on obtient $\|x_n - x_m\| \leq 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x \in F$ puisque F fermé

Donc il existe $x \in F$ telle que $d = d = \inf_{x \in F} \|h - x\|$

• **Unicité** : posons x_1, x_2 vérifier (1.13) et d'après l'égalité de parallélogramme (1.3)

$$\begin{aligned} \forall h \in H, \|(h - x_1) + (h - x_2)\|^2 + \|(h - x_1) - (h - x_2)\|^2 &= 2(\|h - x_1\|^2 + \|h - x_2\|^2) \\ 4\left(\left\|h - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_1 - x_2}{2}\right\|^2\right) &= 2(d^2 + d^2) \end{aligned}$$

on a $\|h - \frac{x_1 + x_2}{2}\| \geq d$ donc

$$\|x_1 - x_2\| \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

• reste à montrer l'équivalence entre (1.13) et (1.14).

Soit $x \in F$ vérifier (1.13) et soit $y \in F$ on a : F convexe donc

$$(1 - \theta)x + \theta y \in F \forall \theta \in [0, 1]$$

Et donc

$$\begin{aligned} \|h - x\| &\leq \|h - [(1 - \theta)x + \theta y]\| \forall h \in H \\ \Leftrightarrow \|h - x\|^2 &\leq \|h - x\|^2 - 2\theta(h - x, y - x) + \theta^2 \|y - x\|^2 \\ \Leftrightarrow 2(h - x, y - x) &\leq \theta \|y - x\|^2 \end{aligned}$$

Si $\theta \rightarrow 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \|h - x\| \|y - x\| &\leq 0 \\ \Rightarrow (h - x, y - x) &\leq 0 \end{aligned}$$

□

Lemme 1.4. *L'opérateur de projection sur un ensemble convexe satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\langle x - P_S x, P_S x - y \rangle \geq 0, \forall x \in H, \forall y \in S.$
2. $\|x - y\|^2 \geq \|x - P_S x\|^2 + \|y - P_S x\|^2, \forall x \in H, y \in S.$

Chapitre 2

Problème direct : problème elliptique sous forme divergence

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_N$ sa frontière régulier avec $mes(\Gamma_d) > 0$. On considère le problème elliptique sous forme divergence avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann suivant : trouve $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$-div(a\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d, \quad (2.1b)$$

$$a\nabla u \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (2.1c)$$

Où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ sont des fonction données, n est le vecteur normal extérieur à Γ_N et $a \in A$ est une fonction telle que, A est une ensemble fermé convexe donnée par :

$$A := \{a \in L^\infty(\Omega) / \exists a_1, a_2 > 0 : a_1 \leq a(x) \leq a_2, \forall x \in \Omega\}.$$

Remarque 2.1. L'équation (2.1a) est une généralisation de l'équation de Laplace. Par exemple, l'équation de Laplace permet de modéliser le problème stationnaire de diffusion de la chaleur dans un matériau homogène isotrope.

Dans le cas d'un matériau isotrope (aucune direction de l'espace ne joue un rôle privilégié) et non homogène, l'équation s'écrit

$$-div(A\nabla u) = f$$

où A une matrice diagonale d'ordre d . Par exemple, en dimension 2, A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Alors, on a :

$$-div(A\nabla u) = -div(a\nabla u) = f$$

où a est une fonction strictement positive.

2.2 Formulation variationnelle

Soit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in (L^2(\Omega))^2\}.$$

Proposition 2.1. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

On notera $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ la norme associée donnée par :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left[\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Alors, (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet. De même $\partial_x u_n$ et $\partial_y u_n$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ donc les suites (u_n) , $\partial_x u_n$ et $\partial_y u_n$ sont convergentes. Soient u , v et w leur limites respectives. En prenant $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et par intégration par parties, on a :

$$\langle \partial_x u_n, \phi \rangle = -\langle u_n, \partial_x \phi \rangle \quad \text{et} \quad \langle \partial_y u_n, \phi \rangle = -\langle u_n, \partial_y \phi \rangle.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$v = \partial_x u \quad \text{et} \quad w = \partial_y u.$$

Donc, $u \in H^1(\Omega)$ et $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$. □

Nous introduisons l'espace V défini par :

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_d} = 0\}. \quad (2.2)$$

Proposition 2.2. *L'espace V est un sous espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$. De plus, l'application suivante :*

$$u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

est une norme sur V équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Démonstration. On considère l'application linéaire $\varphi : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ définie par

$$\varphi(v) = v|_{\Gamma_d}.$$

L'application φ est l'application de trace donc continue sur $H^1(\Omega)$, Alors $\ker(\varphi) = V$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. De plus, avec l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad C_p > 0. \quad (2.3)$$

Ainsi, nous avons :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_p^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Alors, on a :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{C_p^2 + 1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où l'équivalence des normes. □

En multipliant l'équation (2.1a) par une fonction $v \in V$ et on intègre le résultat sur Ω , on obtient :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(a\nabla u) v dx = \int_{\Omega} v f dx. \quad (2.4)$$

On pose $q = -a\nabla u$ et pour tout $v \in V$, nous avons :

$$\operatorname{div}(qv) = v \operatorname{div}(q) + q \cdot \nabla v. \quad (2.5)$$

De (2.1b), la formule de Gauss est donnée par :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(qv) \, dx = \int_{\Gamma_N} qv \cdot n \, dx. \quad (2.6)$$

En utilisant (2.4), (2.5) et (2.6), nous obtenons la formulation variationnelle du problème (2.1a)-(2.1c) par : trouver $u \in V$ tel que

$$T(a, u, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (2.7)$$

Où $T : A \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme trilinéaire donnée par :

$$T(a, u, v) = \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall a \in A, \forall u, v \in V.$$

et $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire telle que

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, dx, \quad \forall v \in V.$$

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (2.7), nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Pour tout $a \in A$, Le problème variationnel (2.7) admet une solution unique $u \in V$.*

Démonstration. Montrons que les hypothèses du Théorème 1.6 de Lax-Milgram sont vérifiées.

1. Pour la continuité de la forme linéaire L , nous avons :

$$|L(v)| \leq \int_{\Omega} |f| |v| \, dx + \int_{\Gamma_N} |g| |v| \, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz(1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_{\Gamma_N} |g(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_N} |v(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Gamma_N)}. \end{aligned}$$

De (2.3) et d'après le théorème de trace, on obtient :

$$|L(v)| \leq M \|v\|_V \quad \text{où } M = C_p \|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}. \quad (2.8)$$

Alors, $L(\cdot)$ est continue sur V .

2. Pour la continuité de la forme trilinéaire T , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Proposition 2.2, nous avons :

$$\begin{aligned} |T(a, u, v)| &= \left| \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |a| |\nabla u| |\nabla v| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} |a(x)| \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} |a(x)| \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donc, T est continue.

3. Pour la coercivité de la forme trilinéaire T , en utilisant l'inégalité de Poincaré (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} T(a, u, v) &= \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 dx \geq \inf_{x \in \Omega} a(x) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \text{où } \alpha = \frac{1}{C_p^2 + 1} \inf_{x \in \Omega} a(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Alors, T est coercive. D'où le problème (2.7) admet une unique solution. \square

2.3 Approximation interne du problème

L'approximation interne consiste à considérer une suite V_h de sous-espaces fermés de V de dimension finie. définis par

$$V_h = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_d} = 0\}$$

Alors, on s'intéresse au problème approché : trouver $u_h \in V_h$ telle que

$$T(a, u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.11)$$

où $a \in A$:

Proposition 2.4.

Le problème approché (2.11) admet une solution unique.

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution de (2.11) découle du théorème de Lax-Milgram. \square

Soit $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ une base de V_h . Alors, il existe $u_1^h, \dots, u_N^h \in \mathbb{R}$ tels que la solution $u_h \in V_h$ de (2.11) s'écrit

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j^h \phi_j.$$

Pour que l'égalité $T(a, u_h, v_h) = L(v_h)$ ait lieu pour tout $v_h \in V_h$, il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour tous les vecteurs de base ϕ_1, \dots, ϕ_N . En utilisant la bilinéarité de $T(a, \cdot, \cdot)$, le problème (2.11) s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1^h, \dots, u_N^h \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \sum_{j,i=1}^N u_j^h T(a, \phi_j, \phi_i) = L(\phi_i). \end{cases}$$

En posant $U_h := (u_1^h, \dots, u_N^h)^T \in \mathbb{R}^N$, on obtient que le problème (2.11) est équivalent au problème matriciel

$$K_h U_h = b_h.$$

où $K_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b_h \in \mathbb{R}^N$ sont définis par

$$K_h := (T(a, \phi_j, \phi_i))_{1 \leq i, j \leq N} \quad \text{et} \quad b_h := L(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}. \quad (2.12)$$

Proposition 2.5. *La matrice K_h définie par (2.12) est définie positive. En particulier, K_h est inversible et donc le système $K_h U_h = b_h$ admet une solution unique $U_h \in \mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Par définition, $T(a, \cdot, \cdot)$ est symétrique donc K_h est une matrice symétrique. d'autre part, soit $\xi \in V_h, \xi := (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$. On pose

$$\tilde{\xi} := \xi_1 \phi_1 + \dots + \xi_N \phi_N \in V_h.$$

Puisque $T(a, \cdot, \cdot)$ est coercive, on a :

$$K_h \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N T(a, \phi_i, \phi_j) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^N T(a, \xi_i \phi_i, \xi_j \phi_j) = T(a, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq \alpha \|\tilde{\xi}\|_V^2$$

donc K_h est définie positive. □

2.3.1 Convergence de la méthode

Il reste à montrer que la solution $u_h \in V_h$ de (2.11) est bien une approximation de u . Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Lemme 2.1. *(lemme de Céa) Soit $u \in V$ la solution de (2.7) et $u_h \in V_h$ la solution de (2.10), alors on a*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

Démonstration. D'après (2.7) et (2.11), on a :

$$\begin{aligned} T(a, u, v) &= L(v) \quad \forall v \in V, \\ T(a, u_h, v_h) &= L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Puisque $V_h \subset V$. Donc, pour tout $w_h \in V_h$ on a :

$$T(a, u - u_h, w_h) = 0$$

posons $w_h = v_h - u_h \in V_h$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow T(a, u - u_h, v_h - u_h) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(a, u - u_h, v_h - u + u - u_h) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(a, u - u_h, u - u_h) = -T(a, u - u_h, v_h - u) \\ &\Leftrightarrow T(a, u - u_h, u - u_h) = T(a, u - u_h, u - v_h) \end{aligned}$$

De la continuité et la coercivité de T , on a :

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\| \Leftrightarrow \alpha \|u - u_h\| \leq M \|u - v_h\|$$

donc, on a :

$$\|u - v_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 2.1. (Théorème de convergence, voir [2]). On suppose qu'il existe un sous-espace W de v dense dans V tel qu'il existe une application linéaire $r_h : W \rightarrow V_h$ vérifiant

$$\forall v \in W, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_V = 0 \quad (2.13)$$

L'application r_h est appelée opérateur d'interpolation de W sur V_h . Alors, la solution $u_h \in V_h$ de (2.11) converge vers la solution $u \in v$ de (2.7), au sens où on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0. \quad (2.14)$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Puisque W est dense dans V , il existe $v \in W$ tel que

$$\|u - v\|_V \leq \epsilon.$$

De plus, l'existence de l'opérateur d'interpolation vérifiant (2.13) entraîne qu'il existe $h_0 > 0$ tel que $h \leq h_0$ alors on a :

$$\|v - r_h v\|_V \leq \epsilon.$$

Puisque $r_h v_h \in V_h$, on a d'après Lemme 2.1 :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - r_h v\|_V \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|_V + \frac{M}{\alpha} \|v - r_h v\|_V \leq \frac{2M}{\alpha} \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

2.4 Résolution numérique par FreeFem

```
// maillage structuré du domaine
int n=20;
int m=20;
mesh Th1 = square(n,m,[x,y]);
plot (Th1,wait=1);
// Maillage non structuré du domaine
border a(t=0,1){x=t;y=0; label=1;};
border b(t=0,1){x=1;y=t;label=2;};
border c(t=0,1){x=1-t;y=1;label=3;};
border d(t=0,1){x=0;y=1-t;label=4;};
//plot (a(1)+b(2)+c(3)+d(4),wait=1);
mesh Th2=buildmesh (a(10)+b(10)+c(10)+d(10));
//plot (Th2,wait=1);
// Espace d'approximation
fespace Vh (Th1,P1);
Vh u,v;
func f=-2*x-2*y-2*x*y^2-2*y*x^2-4*x^3-4*y^3;
func g=-(1+y^2)*(1+x^2+y^2);
```

```

func k=1+x^2+y^2;
// Problème variationnel
problem pbdirect(u,v,solver=Cholesky)=int2d(Th1)(k*dx(u)*dx(v)+ k*dy(u)*dy(v))
      -int2d(Th1)(f*v)-int1d(Th1,1)(g*v)
      +on(2,3,4,u=0);

// Résoudre le problème
pbdirect;
// Affichage
plot(u,wait=1);

```

Exemple 2.1.

Ω est un carré $[0, 1]^2$

$$a(x, y) = 1 + x^2 + y^2,$$

$$f(x, y) = -2x - 2y - 2xy^2 - 2yx^2 - 4x^3 - 4y^3,$$

$$g(x, y) = -(1 + y^2)(1 + x^2 + y^2).$$

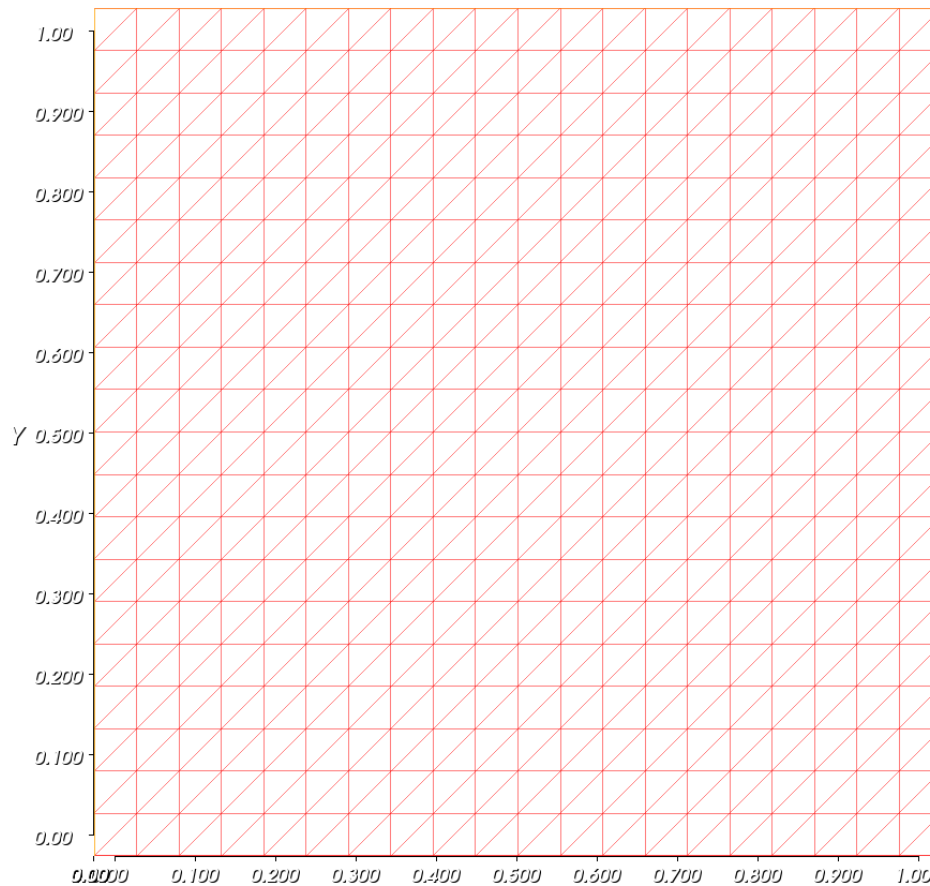


FIGURE 2.1 – Domaine carré

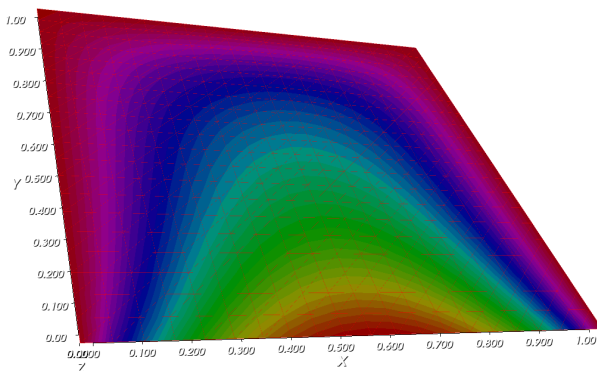


FIGURE 2.2 – Solution en 2D

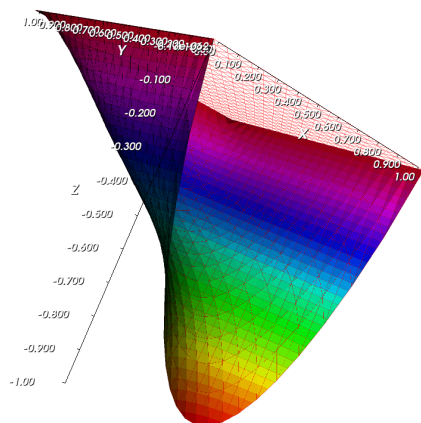


FIGURE 2.3 – Solution en 3D

Exemple 2.2.

Ω un quart d'un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1

$$a(x, y) = 1 + x^2 + y^2,$$

$$f(x, y) = -2x - 2y - 2xy^2 - 2yx^2 - 4x^3 - 4y^3,$$

$$g(x, y) = -(2 + x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2).$$

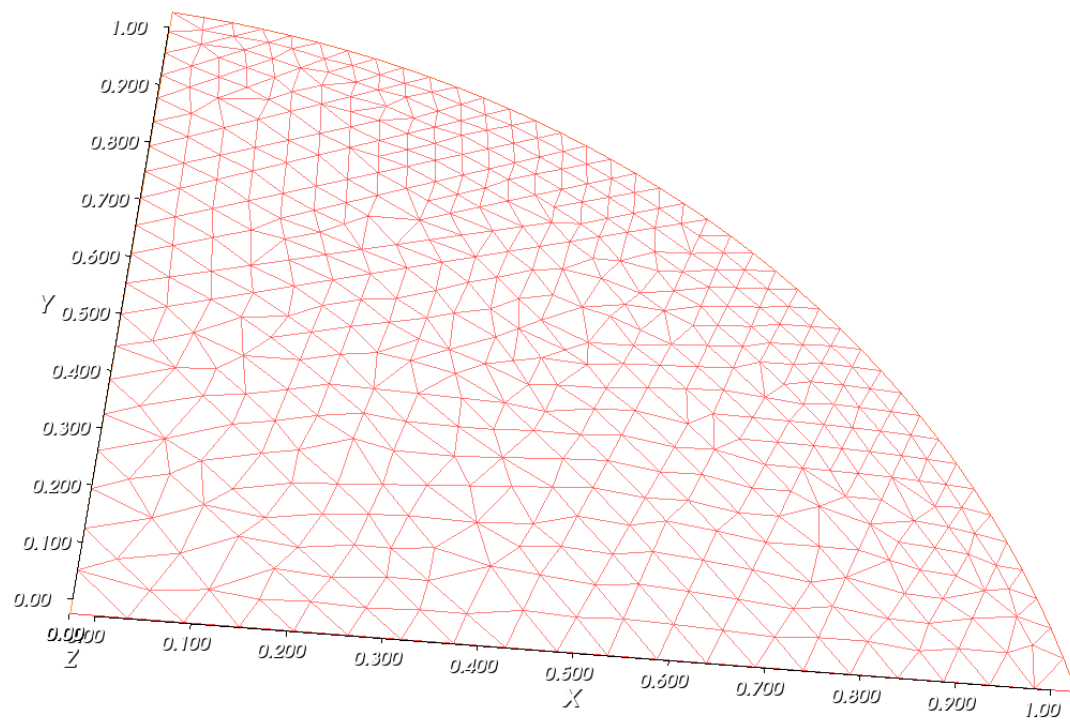


FIGURE 2.4 – Un quart d'un disque

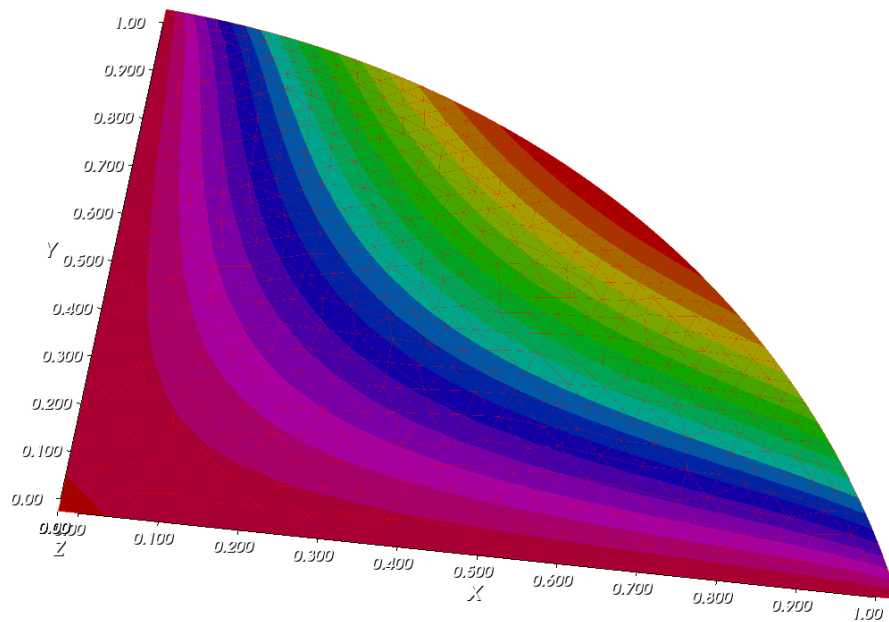


FIGURE 2.5 – Solution en 2D

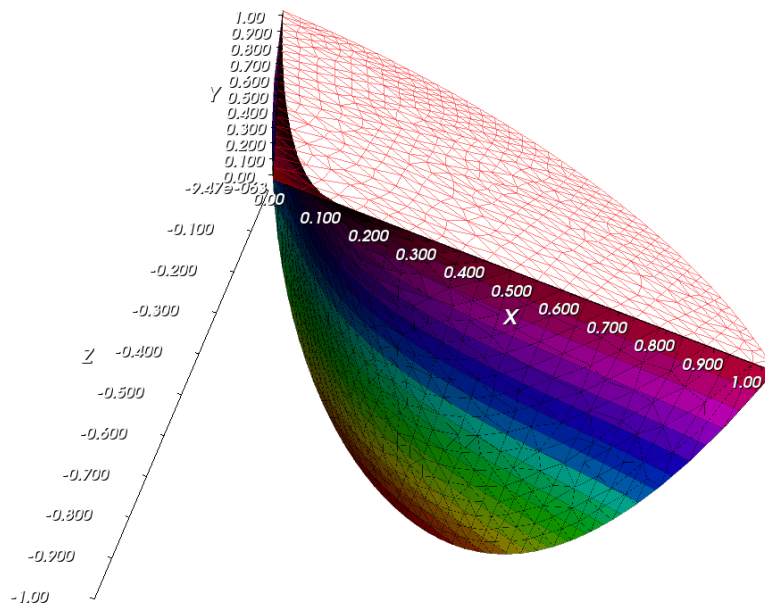


FIGURE 2.6 – Solution en 3D

Chapitre 3

Problème inverse

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'identification numérique de paramètre a solution du problème suivant :

$$-div(a\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d, \quad (3.1b)$$

$$a\nabla u \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (3.1c)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ sont données et u une solution du problème direct (2.1a)-(2.1c). n le vecteur normal extérieur à Γ_N .

Nous définissons l'opérateur $F : \mathcal{A} \rightarrow V$ par :

$$F(a) = u \quad \text{où } u \text{ est l'unique solution du problème (2.7).}$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1. . *L'opérateur F est borné sur \mathcal{A} c'est à dire*

$$\|u\|_V = \|F(a)\|_V \leq \frac{M}{\alpha}.$$

où M et α sont des constantes données par (2.8) et (2.10) respectivement.

Démonstration. En remplaçant dans (2.7) v par u et avec (2.8) et (2.10), on obtient :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq T(a, u, u) \leq |L(u)| \leq M \|u\|_V.$$

Donc, on a :

$$\|u\|_V = \|F(a)\|_V \leq M/\alpha. \quad \square$$

L'opérateur F est de Lipschitz et la proposition suivante démontré cette propriété.

Proposition 3.1. *L'opérateur F est de Lipschitz sur \mathcal{A} c'est à dire pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a :*

$$\|F(a) - F(b)\|_V \leq k \|a - b\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{où } k = M/\alpha^2.$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathcal{A}$. Posons $u = F(a)$, $w = F(b)$. De (2.7), on a :

$$\begin{cases} T(a, u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \\ T(b, w, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.2)$$

On pose $v = u - w$ dans (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} T(a, u, u - w) = T(b, w, u - w) &\Leftrightarrow T(a, u, u - w) = T(b - a, w, u - w) + T(a, w, u - w) \\ &\Leftrightarrow T(a, u, u - w) - T(a, w, u - w) = T(b - a, w, u - w) \\ &\Leftrightarrow T(a, u - w, u - w) = -T(a - b, w, u - w) \end{aligned}$$

En utilisant la continuité T (2.8) et la coercivité de T (2.10), on obtient :

$$\alpha \|u - w\|_V^2 \leq \|b - a\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_V \|u - w\|_V.$$

Avec Lemme 3.1, on obtient :

$$\|F(a) - F(b)\|_V \leq k \|a - b\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{où } k = M/\alpha^2. \quad \square$$

3.1 Différentiabilité

Pour étudier la différentiabilité de l'opérateur F , on va montrer une égalité essentielle. Donc, si a un élément appartient à l'intérieur de A , on choisi $\delta a \in \mathcal{A}$ tel que $a + \delta a \in A$. On pose $\delta w = F(a + \delta a) - F(a)$, nous avons :

$$\begin{cases} T(a, u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ T(a + \delta a, u + \delta w, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} T(a + \delta a, u + \delta w, v) - T(a, u, v) &= 0 \Leftrightarrow T(a, u + \delta w, v) + T(\delta a, u + \delta w, v) - T(a, u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(a, u, v) + T(a, \delta w, v) + T(\delta a, u + \delta w, v) \\ &\quad - T(a, u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(a, \delta w, v) + T(\delta a, u, v) + T(\delta a, \delta w, v) = 0. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$T(a + \delta a, \delta w, v) = -T(\delta a, u, v) \quad (3.3)$$

Théorème 3.1. (voir [5, p. 262]). Pour chaque a a l'intérieure de A , F est différentiable en a et $\delta u = DF(a)\delta a$ est l'unique solution de l'équation variationnelle.

$$T(a, \delta u, v) = -T(\delta a, u, v), \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (3.4)$$

De plus, on a :

$$\|DF(a)\delta a\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2} \|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Démonstration. L'équation variationnelle (3.4) admet une unique solution grâce à la théorème de Lax-Milgram. Avec la différence entre (3.3) et(3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} T(a + \delta a, \delta w, v) - T(a, \delta u, v) &= 0 \Leftrightarrow T(a, \delta w, v) + T(\delta a, \delta w, v) - T(a, \delta u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow T(a, \delta w - \delta u, v) + T(\delta a, \delta w, v) = 0. \end{aligned}$$

Posons $v = \delta w - \delta u$

$$T(a, \delta w - \delta u, \delta w - \delta u) = -T(\delta a, \delta w, \delta w - \delta u)$$

En utilisant (2.9) et (2.10), on trouve :

$$\|\delta w - \delta u\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta w\|_V$$

Avec Proposition 3.1, on a :

$$\|\delta w - \delta u\|_V \leq \frac{M}{\alpha^3} \|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \Leftrightarrow \frac{\|\delta w - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}} \leq \frac{M}{\alpha^3} \|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Donc, on a :

$$\lim_{\|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0} \frac{\|\delta w - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}} = \lim_{\|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0} \frac{\|F(a + \delta a) - F(a) - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}} = 0.$$

Donc, l'opérateur F est différentiable en a .

Reste à montrer que δu borné. En remplaçant dans (3.4) v par δu , on obtient :

$$T(a, \delta u, \delta u) = -T(\delta a, F(a), \delta u).$$

D'après (2.9) et (2.10), nous avons :

$$\|\delta u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)} \|F(a)\|_V.$$

Grâce Lemme 3.1, on a :

$$\|Df(a)\delta a\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2} \|\delta a\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

D'ou le résultat. □

Pour étudier la dérivée seconde de F , on procède de la même manière que la dérivée première. Donc, pour a un élément de l'intérieur de A et soient $\delta a_1, \delta a_2 \in A$ tels que $a + \delta a_1$ et $a + \delta a_2$ restent dans l'intérieur de A . En utilisant (3.4), on obtient :

$$T(a + \delta a_1, DF(a + \delta a_1)\delta a_2, v) = -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1), v) \quad \forall v \in V.$$

Donc, pour tout $v \in V$ on a :

$$\begin{aligned} T(a + \delta a_1, DF(a + \delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v) &= -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1), v) \\ &\quad - T(a + \delta a_1, DF(a)\delta a_2, v) \\ &= -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v) \\ &\quad - T(\delta a_2, F(a) + DF(a)\delta a_1, v) \\ &\quad - T(a + \delta a_1, DF(a)\delta a_2, v) \\ &= -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v) \\ &\quad - T(\delta a_2, F(a), v) - T(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, v) \\ &\quad - T(a, DF(a)\delta a_2, v) - T(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v). \end{aligned}$$

Grâce (3.4), nous avons :

$$T(a, DF(a)\delta a_2, v) = -T(\delta a_2, F(a), v). \quad (3.5)$$

On remplace (3.5) dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} T(a + \delta a_1, DF(a + \delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v) &= -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v) \\ &\quad - T(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, v) - T(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pour la dérivée seconde de F , nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2. (voir [5, p. 263]). Pour chaque a appartient à l'intérieur de A . F est deux fois différentiable en a , et $\delta^2 u = D^2 F(a)(\delta a_1, \delta a_2)$, est l'unique solution de l'équation variationnelle suivante :

$$T(a, \delta^2 u, v) = -T(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, v) - T(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v) \quad (3.7)$$

De plus, pour tout $v \in V$ on a :

$$\|D^2 F(a)(\delta a_1, \delta a_2)\|_V \leq \frac{M}{\alpha^3} \left(\|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right).$$

Démonstration. Avec les hypothèses (2.8)-(2.10) et d'après le théorème de Lax-Milgram, l'équation variationnelle (3.7) admet une unique solution.

En soustrayant (3.7) de (3.5), on obtient :

$$\begin{aligned} T(a + \delta a_1, DF(a + \delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v) - T(a, D^2 F(a)(\delta a_1, \delta a_2), v) \\ = -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v). \end{aligned}$$

donc, on a :

$$\begin{aligned} T(a, DF(a + \delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2 - D^2 F(a)(\delta a_1, \delta a_2), v) \\ = -T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v) \\ - T(\delta a_1, DF(a + \delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v). \end{aligned} \quad (3.8)$$

On pose

$$\delta^2 u = DF(a + \delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2,$$

et choisissons

$$v = \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2),$$

donc, (3.8) devienne :

$$\begin{aligned} T(a, \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2), \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)) = -T(\delta a_1, \delta^2 u, \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)) \\ - T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)). \end{aligned}$$

En utilisant (2.9), (2.10) et Théorème 3.1, on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\|_V \leq \frac{M}{\alpha^4} \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta^2 u\|_V. \quad (3.9)$$

D'autre part, en remplaçant dans (3.5) $v = \delta^2 u$, on obtient :

$$\begin{aligned} T(a + \delta a_1, \delta^2 u, \delta^2 u) = -T(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, \delta^2 u) - T(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, \delta^2 u) \\ - T(\delta a_2, F(a + \delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, \delta^2 u). \end{aligned}$$

En utilisant (2.9) et (2.10), on trouve :

$$\|\delta^2 u\|_V \leq \frac{M}{\alpha^3} \left(2 \|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\alpha} \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right). \quad (3.10)$$

De (3.9) et (3.10), on obtient :

$$\frac{\|\delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\|_V}{\|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)}} \leq \frac{M}{\alpha^4} \left(3 \|\delta a_1\|_{L^\infty(0,1)} + \|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \xrightarrow{\|\delta a_1\|, \|\delta a_2\| \rightarrow 0} 0$$

Alors, F est deux fois différentiable au point a .

On pose dans (3.7) $v = D^2 F(a)(\delta a_1, \delta a_2)$ et en utilisant (2.9), (2.10) et Théorème 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \|D^2 F(a)(\delta a_1, \delta a_2)\|_V &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\|DF(a)\delta a_1\|_V \|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|DF(a)\delta a_2\|_V \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{M}{\alpha^3} \left(\|\delta a_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\delta a_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

□

3.2 Méthode de Moindres carrés non linéaire

Soit $z \in V$ une mesure de la solution u du problème direct (2.7). On va chercher une valeur de paramètre $a \in A$ solution de

$$F(a) = z. \quad (3.11)$$

où l'opérateur F est défini implicitement. Il est non linéaire. Donc, nous utilisons la méthode de moindres carrés non linéaire et nous remplaçons (3.11) par un problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \min J(a) \\ a \in A \end{cases} \quad (3.12)$$

où $J : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle donnée par :

$$J(a) = \frac{1}{2} \|F(a) - z\|_V^2 = \frac{1}{2} T(a, F(a) - z, F(a) - z). \quad (3.13)$$

Pour l'existence de la solution du problème de minimisation avec contrainte (3.12), nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Le problème de minimisation avec contrainte (3.12) admet au moins une solution.*

Démonstration. Grâce Théorème 3.1 Théorème 3.2, la fonctionnelle J est deux fois différentiable, et la dérivée de J est donnée par :

$$DJ(a)\delta a = \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) - z, F(a) - z) - T(a, aF(a) - z, F(a) - z)$$

De (3.3), on a :

$$T(a, DF(a)\delta a, F(a) - z) = -T(\delta a, F(a), F(a) - z).$$

Donc,

$$\begin{aligned} DJ(a)\delta a &= \frac{1}{2}T(\delta a, F(a) - z, F(a) - z) - T(\delta a, F(a), F(a) - z) \\ &= \frac{1}{2}T(\delta a, F(a) + z, F(a) - z) \end{aligned}$$

Et la dérivée seconde de J est donnée par :

$$\begin{aligned} D^2J(a)(\delta a, \delta a) &= -\frac{1}{2}T(\delta a, DF(a)\delta a, F(a) - z) - \frac{1}{2}T(\delta a, F(a) + z, DF(a)\delta a) \\ &= -T(\delta a, F(a), DF(a)\delta a) \\ &= T(a, DF(a)\delta a, DF(a)\delta a) \end{aligned}$$

En utilisant (2.10), on obtient :

$$D^2J(a)(\delta a, \delta a) \geq \alpha \|DF(a)\delta a\|_V^2 \geq 0.$$

D'où J est convexe, donc le problème (3.12) admet au moins une solution. \square

Pour étudier l'unicité de la solution du problème (3.12), on va étudier un problème régularisé.

3.3 Problème régularisé

On considère le problème régularisé suivant :

$$\begin{cases} \min J_\epsilon(a) \\ a \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (3.14)$$

où J_ϵ est une fonctionnelle donnée par :

$$J_\epsilon(a) = J(a) + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla a\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \epsilon > 0. \quad (3.15)$$

Proposition 3.3. *Le problème régularisé (3.14) admet une solution unique.*

Démonstration. il suffit de montrer que F est strictement convexe. Soit $a \in A$ et on pose

$$R_\epsilon(a) = \frac{\epsilon}{2} \|\nabla a\|_{L^2(\Omega)} = T(1, a, a).$$

La dérivée seconde de J_ϵ est donnée par :

$$D^2J_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) = D^2J(a)(\delta a, \delta a) + D^2R_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) \quad \text{pour tout } \delta a \in A.$$

Nous avons :

$$DR_\epsilon(a)\delta a = \epsilon T(1, \delta a, a) \quad \text{pour tout } \delta a \in A.$$

Et la dérivée seconde de R_ϵ est :

$$D^2R_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) = \epsilon T(1, \delta a, \delta a) \geq \alpha \epsilon \|\delta a\|^2.$$

Donc, on a :

$$D^2J_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) \geq \alpha \|DF(a)\delta a\|_V^2 + \alpha \epsilon \|\delta a\|_V^2 \geq \alpha \epsilon \|\delta a\|_V^2. \quad (3.16)$$

Le fonctionnel J_ϵ fortement convexe donc le problème (3.14) admet une unique solution. \square

3.3.1 Discrétisation par éléments finis

Soit A_h la discrétisation de A telle que $A_h = A \cap V_h$. Le problème discret est défini par :

$$\begin{cases} \text{Min} J_\epsilon(a) \\ a \in A_h \end{cases} \quad (3.17)$$

où J_ϵ est donnée par (3.15).

Soit $a_h = \sum_{i=1}^{i=m} a_i \phi_i$, $u_h = \sum_{i=1}^{i=n} u_i \phi_i$ et $z_h = \sum_{i=1}^{i=n} z_i \phi_i$

$$\begin{aligned} J_\epsilon(a_h) &= J(a_h) + R_\epsilon(a_h) \\ &= \int_{\Omega} a |\nabla u_h - z_h|^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla a_h|^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} a_k \left(\sum_{i,j}^n (u_i - z_i)(u_j - z_j) \right) \int_{\Omega} \phi_k \phi_i \phi_j dx + \frac{\epsilon}{2} \sum_{k,j}^m a_k a_j \int_{\Omega} \phi_k \phi_j dx \\ &= (u - z)^T K(a) (u - z) + \frac{\epsilon}{2} A^T \tilde{K} A \end{aligned}$$

3.3.2 Méthode du gradient projeté

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Pour tout $\rho > 0$, nous avons :*

$$a^* \text{ est un minimum de (3.17)} \Leftrightarrow a^* = P_{A_h}(a^* - \rho \nabla J_\epsilon(a^*)) \quad (3.18)$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$

$$\begin{aligned} a^* \text{ est un minimum de (3.17)} &\Leftrightarrow \langle \nabla J_\epsilon(a^*), a^* - a \rangle \leq 0, \quad \forall a \in A_h \\ &\Leftrightarrow \langle \rho \nabla J_\epsilon(a^*), a^* - a \rangle \leq 0, \quad \forall a \in A_h \\ &\Leftrightarrow \langle a^* - (a^* - \rho \nabla J_\epsilon(a^*)), a^* - a \rangle \leq 0, \quad \forall a \in A_h \\ &\Leftrightarrow a^* = P_{A_h}(a^* - \rho \nabla J_\epsilon(a^*)) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2. *La fonctionnelle J_ϵ est*

1. *fortement convexe c'est à dire*

$$\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b), a - b \rangle \geq l \|a - b\|^2 \quad (3.19)$$

2. *et lipschitzienne c'est à dire*

$$\|J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\| \leq L \|a - b\| \quad \forall a, b \in A \quad (3.20)$$

Démonstration. 1. Soit $a, b \in A \cap V_h$. D'après théorème d'accroissement finie on a

$$\begin{aligned} J'(b) - J'(a) &= (a - b)J''(a) \\ \Leftrightarrow \langle J'(a) - J'(b), a - b \rangle &= \langle (a - b)J''(a), a - b \rangle \\ \Leftrightarrow \langle J'(a) - J'(b), a - b \rangle &\geq a_1 \epsilon \|a - b\|^2 \\ \Leftrightarrow \langle J'(a) - J'(b), a - b \rangle &\geq l \|a - b\|^2 \quad \text{avec } l = a_1 \epsilon \end{aligned}$$

2. Soit $a, b \in A \cap V_h$ on a

$$\begin{aligned} J'(b) - J'(a) &= (a - b)J''(a) \\ \Leftrightarrow \langle J'(a) - J'(b), a - b \rangle &= \langle (a - b)J''(a), a - b \rangle \end{aligned}$$

Et on a

$$J''(a)(\delta a, \delta a) = T(a, DF(a)\delta a, DF(a)\delta a)$$

Si on pose $\delta a = b - a$ et T continue donc

$$\begin{aligned} \langle J'(a) - J'(b), a - b \rangle &\leq \beta \|DF(a)\|^2 \|b - a\|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{|\langle J'(a) - J'(b), a - b \rangle|}{\|b - a\|} &\leq \beta \|DF(a)\|^2 \|b - a\| \end{aligned}$$

$DF(a)$ continue sur un ensemble fermé donc $DF(a)$ bornée donc

$$\|J'(b) - J'(a)\| \leq \beta k \|b - a\| \quad (3.21)$$

Et on a aussi de la même méthode

$$\|R'_\epsilon(b) - R'_\epsilon(a)\| \leq \epsilon \beta \|b - a\| \quad (3.22)$$

De (3.21) et (3.22) on a

$$\|J'_\epsilon(b) - J'_\epsilon(a)\| \leq L \|b - a\| \quad \text{avec } L = \epsilon \beta + \beta K$$

□

En utilisant l'égalité (3.14) alors la solution du problème (3.10) est un point fixe de l'application g qui donnée par

$$g(a^*) = P_{A \cap V_h}(a^* - \rho \nabla j_\epsilon(a^*))$$

une idée naturelle pour approcher numériquement ce point fixe est de construire une suite $(a^k) \in A_h$ définie par :

$$\begin{cases} a^0 \text{ un élément donné de } A_h \text{ et} \\ a^{k+1} = P_{A_h}(a^k - \rho \nabla j_\epsilon(a^k)), \quad \rho > 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Pour la convergence de la suite (3.23), nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3. (*théorème de convergence*). Si le pas ρ est choisi tel que $0 < \rho < \frac{2l}{L}$ le procédé de projection (3.23) converge vers une solution de (3.14)

Démonstration. Nous pouvons prouver la convergence de la méthode du gradient de projeté à laide de contraction . Soient (a^k) une suite dans $A \cap V_h$ et

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= P_{A \cap V_h} (a^k - \rho \nabla J_\epsilon(a^k)) \\ a^* &= P_{A \cap V_h} (a^* - \rho \nabla J_\epsilon(a^*)) \end{aligned}$$

Et on a

$$|P_{A \cap V_h}(b) - P_{A \cap V_h}(a)| \leq \|b - a\|$$

Donc

$$\begin{aligned} \|a^{k+1} - a^*\|^2 &= \|P_{A \cap V_h} (a^k - \rho \nabla J_\epsilon(a^k)) - P_{A \cap V_h} (a^* - \rho \nabla J_\epsilon(a^*))\|^2 \\ &\leq \|(a^k - \rho \nabla J_\epsilon(a^k)) - (a^* - \rho \nabla J_\epsilon(a^*))\|^2 \\ &= \|a^k - a^*\|^2 + \rho^2 \|\nabla J_\epsilon(a^k) - \nabla J_\epsilon(a^*)\|^2 - 2\rho \langle a^k - a^*, \nabla J_\epsilon(a^k) - \nabla J_\epsilon(a^*) \rangle \end{aligned}$$

En utilisant les in égalités (3.19) et (3.20), on trouve :

$$\|a^{k+1} - a^*\|^2 \leq (1 - 2l\rho + L^2\rho^2) \|a^k - a^*\|^2$$

et par récurrence, on obtient :

$$\|a^k - a^*\| \leq \mu^k \|a^0 - a^*\| \quad \text{où } \mu = \sqrt{1 - 2l\rho + L^2\rho^2}. \quad (3.24)$$

On remarque que

$$\rho < \frac{2l}{L^2} \Leftrightarrow 1 - 2l\rho + L^2\rho^2 < 1.$$

Alors, on a :

$$\mu^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow a^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a^*.$$

□

3.3.3 Algorithme

Nous avons l'algorithme suivant qui permet de résoudre numériquement le problème d'optimisation régularisé (3.17).

Étape 0 : Soient a^0 , $\epsilon > 0$ et $0 < \rho < \frac{2l}{L^2}$ données.

Étape 1 : Calculer $\nabla J_\epsilon(a^k)$

Étape 2 : Calculer $a^{k+1} = P_{A \cap V_h} (a^k - \rho \nabla J_\epsilon(a^k))$

Étape 3 : Test d'arrêt, si $\|a^{k+1} - a^k\| \leq \epsilon$ alors a^{k+1} est la solution. Sinon aller à l'étape 1 avec $k = k + 1$.

Conclusion générale

dans ce mémoire est l'étude numérique pour estimer un paramètre d'un problème elliptique sous forme divergence en dimension deux. Ce travail consiste à résoudre numériquement deux problèmes suivants :

- ✓ Problème elliptique sous forme divergence comme un problème direct : nous avons démontré que ce problème est bien posé par le théorème de Lax-Milgram. Avec le logiciel FreeFem, nous avons résolu ce problème par un exemple numérique.
- ✓ Problème inverse : nous avons utilisé la méthode de moindres carrés non linéaire et la méthode du gradient projeté.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Méthodes de type extra-gradient pour identifier numériquement le paramètre a pour un problème elliptique sous forme divergence suivant :

$$\begin{aligned} -div(a\nabla u) &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_d, \\ a\nabla u \cdot n &= g && \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

- ☞ Identification numérique d'un paramètre a pour un problème de la chaleur dans un milieu non homogène :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - div(a\nabla u(x, t)) &= f, && \text{dans } \Omega, t > 0. \\ u &= 0, && \text{sur } \Gamma_d, t > 0 \\ a\nabla u \cdot n &= g, && \text{sur } \Gamma_N, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

- ☞ Identification numérique d'un paramètre a pour un problème des ondes dans milieu non homogène :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(a\nabla u(x, t)) &= f, && \text{dans } \Omega, t > 0. \\ u &= 0, && \text{sur } \Gamma_d, t > 0 \\ a\nabla u \cdot n &= g, && \text{sur } \Gamma_N, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), && \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= v_0(x), && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] T. Ahmed. Méthodes itératives pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2013.
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [3] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. American Elsevier, New York, 1972.
- [4] L. F. Demkowicz and J. T. Oden. *Applied Functional Analysis*. CRC Press,, 1996.
- [5] M.S. Gockenbach and A.A. Khan. An abstract framework for elliptic inverse problems. part 1 : an output least squares approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 12 :259–276, 2007.
- [6] M. Hanke H. Engl and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [7] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, 1923.
- [8] A.N. Iusem J. Y. Cruz, J.Y. Bello. *Full convergence of an approximate projection method for nonsmooth variational inequalities*. Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, 2010.
- [9] Z. Nashed K. M. Furati and A. H. Siddiqi. *Mathematical Models and Methods for Real World Systemss*. Taylor & Francis Group, LLC, 2006.
- [10] C. T. Kelly. *Iterative Methods for Optimization*. SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 1999.
- [11] M. Mogé. Méthodes numériques pour un problème inverse. Master's thesis, EPFL, Suisse, 2011.
- [12] S. Nafissa. Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2013.
- [13] J. Oleksyn. Extragradient methods for elliptic inverse problems and image denoising. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, England, 2011.
- [14] B. Brian R. C. Aster and H.T. Clifford. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [15] E. Ramirez. *Finite element methods for parameter identification problem of linear and nonlinear steady-state diffusion equations*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [16] Y. Z. Said. Méthodes de factorisation pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2014.

-
- [17] S. Sariaydin. Numerical identification of a variable parameter in 2d elliptic boundary value problem by extragradient methods. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, Rochester, England, 2013.
- [18] J. Zou. Numerical methods for elliptic inverse problems. *Intern. J. Computer Math*, 70 :211–232, 1998.