الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــة الـعـلــــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: :
Laggoun khaoula

THEME

Approximation des fonctions définies sur un compact

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. M.Bentoubache	***M.C.A***	***Président***
Mr. B.Ismail	***M.C.A***	***Examinateur***
Mr. B.Merrad	***M.C.B***	***Examinateur***
Mr. A.Mokhtari	***Professeur***	***Encadreur***

Année Universitaire 2018\2019

Remerciements

*En premier lieu, mes remerciements s'adressent à **Allah** le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadreur, Monsieur **A. Mokhtari** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

*Je remercie très chaleureusement les membres de jury : **M.Bentoubach**, **B Ismail**, et **D.merrad** qui n'ont pas hésité d'avoir accepté cette tâche.*
*Et sans oublier Mr**. Rahmoune.A.***

Enfin, tous mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Dédicaces

Table des matières

introduction

Dans ce mémoire nous allons étudier l'approximation uniforme des fonctions De même qu'on cherche à approcher un nombre inconnu (défini par un procédé quelconque) à l'aide de nombres décimaux (ou rationnels),

de même il est naturel en Analyse de chercher à « approcher » une fonction inconnue (qui peut être définie par des procédés variés, somme de série, intégrale dépendant d'un paramètre, solution d'équation différentielle, etc.)
à l'aide de fonctions que l'on considère comme connues (polynômes, fonctions exponentielles, fonctions trigonométriques, etc.). Mais il faut préciser ce qu'on entend par « approcher », c'est-à-dire « mesurer » en quelque sorte 1' « écart » de deux fonctions, de même que

la valeur absolue $|x-y|$mesure l'écart de deux nombres réels ou complexes.

Chapitre 1

Approximation uniforme

1.1 Écart de deux fonctions

De même qu'on cherche à approcher un nombre inconnu (défini par un procédé quelconque) à l'aide de nombres décimaux (ou rationnels), de même il est naturel en Analyse de chercher à « approcher » une fonction complexe inconnue (qui peut être définie par des procédés variés, somme de série, intégrale dépendant d'un paramètre, solution d'équation différentielle, etc.) à l'aide de fonctions que l'on considère comme connues (polynômes, fonctions exponentielles, fonctions trigonométriques, etc.). Mais il faut préciser ce qu'on entend par « approcher », c'est-à-dire « mesurer » en quelque sorte 1' « écart » de deux fonctions, de même que la valeur absolue $|x-y|$mesure l'écart de deux nombres réels ou complexes.
L'idée la plus naturelle est que si une fonction g « approche » une fonction f dans un ensemble E où elles sont toutes deux définies, alors, pour chaque $x_0 \in E$ la valeur $g(x_o)$ de g doit approcher la valeur $f(x_o)$ de f au sens usuel, c'est-à-dire que $|f(x_o) - g(x_o)|$ doit être « petit ». comme ceci doit avoir lieu en chaque point x_o de E, on est conduit à prendre pour « écart » de deux fonctions complexes f, g définies dans E le nombre

$$d(f,g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \tag{1.1}$$

Lorsqu'il s'agit de fonctions réelles f, g définies dans un intervalle $E = [a, b]$ de $\mathbf{R}$ l'idée d' «écart» que nous venons de définir peut se concrétiser graphiquement de la façon suivante : dire que $d(f,g) \leq \varepsilon$signifie que pour tout$x \in E$ on a $g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x) + \varepsilon$, c'est-à-dire que le graphe de f est tout entier contenu dans la « bande » de demi-largeur ε autour du graphe de g (figure 1.1).

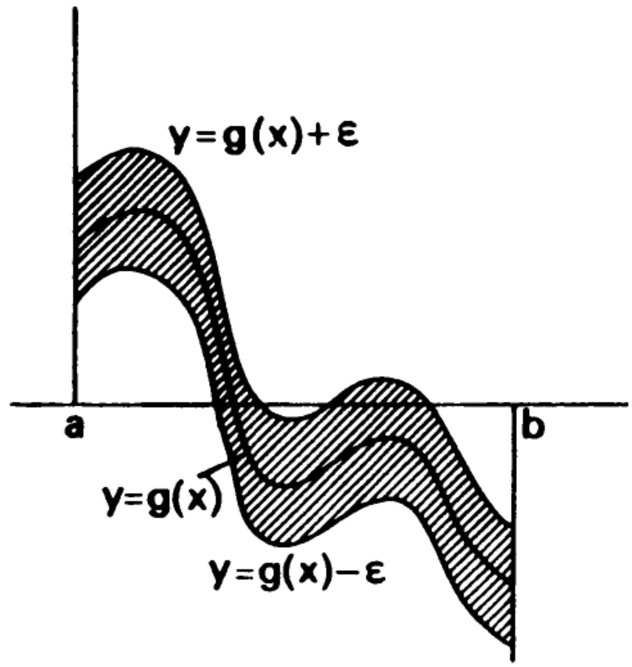

FIGURE 1.1 –

Pour distinguer cette idée d' « approximation » d'autres notions que nous examinerons plus tard (IX, 9), nous dirons qu'il s'agit d'approximation uniforme d'une fonction par une autre dans un ensemble E où elles sont toutes deux définies ; il est important de remarquer que cette notion dépend essentiellement de l'ensemble E que l'on considère : si f et g sont toutes deux définies dans un ensemble plus grand E', la relation $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in E$ n'entraîne nullement $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in E'$.
Étant donnés deux ensembles de Figure 1.1. fonctions $\mathcal{F}$ (les fonctions « inconnues ») et $\mathcal{G}$ (les fonctions « connues ») toutes définies dans un même ensemble E, nous dirons pour abréger qu'on peut approcher uniformément dans E les fonctions de $\mathcal{F}$ par les fonctions de $\mathcal{G}$ si, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{G}$(dépendant de F et de ε) telle que l'écart $d(f, g) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in E \tag{1.2}$$

On généralise aussitôt les notions précédentes au cas des fonctions dont les valeurs sont des vecteurs complexes dans C^n(I, 1.6) : si f, g sont deux telles fonctions, définies dans E, on posera cette fois

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} \| f(x) - g(x) \| \tag{1.3}$$

et on transcrit alors sans changement la définition de (1.3).

1.2 Convergence uniforme et convergence simple

Définition 1.1. Soit (g_n) une suite de fonctions complexes définies dans un ensemble E. On dit que la suite (g_n) converge uniformément dans E vers une fonction f définie dans E si l'on a

$$\lim_{n\to\infty} d(f, g_n) = 0. \tag{1.4}$$

On dit qu'une série de fonctions complexes (u_n) définies dans E est uni- formément convergente si la suite des sommes partielles$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ converge uniformément dans E vers une fonction s, appelée somme de la série de fonctions.

Proposition 1.1. *Étant donnés deux ensembles de fonctions complexes, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ définies dans E, pour que l'on puisse approcher uniformément dans E les fonctions de $\mathcal{F}$ par les fonctions de $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, il existe une suite (g_n) de fonctions de $\mathcal{G}$ qui converge uniformément dans E vers f.*

Démonstration. En effet, s'il existe une telle suite, on a par définition la relation 1.4, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_o tel que pour $n \geq n_o$ on ait $d(f, g_n) < \varepsilon$, ce qui prouve que les fonctions de $\mathcal{F}$ peuvent être approchées uniformément dans E par celles de $\mathcal{G}$. Inversement, s'il en est ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on peut successivement déterminer des fonctions $g_1, g_2, ..., g_n, ...$dans $\mathcal{G}$ de sorte que $d(f, g_1) < 1, d(f, g_2) < 1/2, d(f, g_n) < l/n, ...$: par définition on a donc $\lim_{n\to\infty} d(f, g_n) = 0.$, autrement dit la suite (g_n) converge uniformément vers f dans E. □

Définition 1.2. On dit qu'une suite (g_n) de fonctions complexes définies dans E converge simplement dans E vers une fonction f si, pour tout $x \in E$, la suite de nombres complexes $(g_n(x))$ a pour limite le nombre $f(x)$.

Il est essentiel de distinguer soigneusement la notion de convergence simple de celle de convergence uniforme. Si la suite (g_n) converge uniformément dans E vers f, alors elle converge aussi simplement vers f :
en effet, pour tout $x \in E$, on a par définition , $|f(x) - g_n(x)| < d(f, g_n)$ et la relation 1.4 entraîne a fortiori $\lim_{n\to\infty} |f(x) - g_n(x)| = 0.$. Mais il est facile de donner des exemples de suites (g_n) qui convergent simplement vers 0 mais ne convergent pas uniformément vers 0. On définit (g_n) dans $E = [0, 1]$ comme la fonction linéaire affine par morceaux (fig. 1.2) telle que :

$$\begin{cases} g_n(x) = 2nx \qquad \textit{pour} \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ g_n(x) = 2 - 2nx \qquad \textit{pour} \qquad \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ g_n(x) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pour tout $x \in E$, on a $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0.$: c'est évident pour $x = 0$ puisque $g_n(x) = 0$ pour tout n ; pour $x > 0$, il existe un entier n_o(dépendant de x) tel que$\frac{1}{n_0} < x$ et pour $n \geq n_o$, on a$\frac{1}{n} < x$ donc par définition $g_n(x) = 0$. Cependant la suite (g_n) ne converge pas uniformément vers 0, puisque l'on a $g_n(l/2n) = 1$, donc $d(0, g_n) = 1$ quel que soit n : graphiquement il est clair que le graphe de g_n ne peut jamais être contenu dans une « bande » de demi-largeur $\frac{1}{2}$ entourant le graphe de la fonction 0 (fig. 1.2).

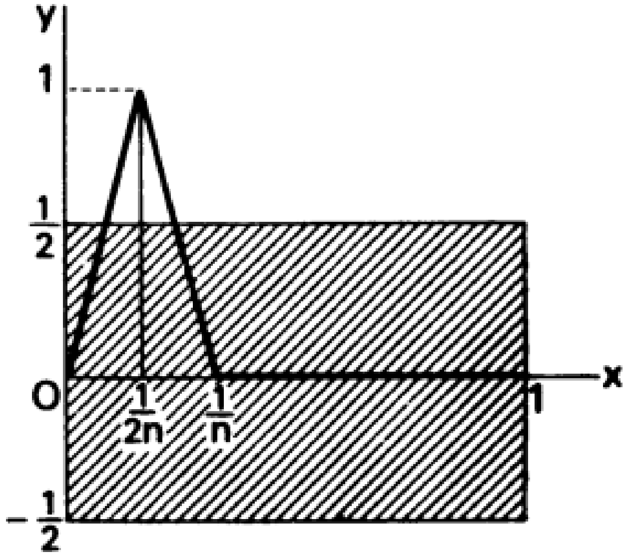

Figure 1.2 –

Si on analyse en général la relation entre les deux modes de convergence, on voit que si la suite (g_n) converge simplement vers f, alors pour un $\varepsilon > 0$ donné et pour chaque $x \in E$, il y a un entier n_o tel que

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq n_o$, mais cet entier n_o dépend non seulement de ε, mais aussi de x en général (comme on l'a vu dans l'exemple précédent) ; par contre, si la suite (g_n) converge uniformément vers f, une fois donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer n_o dépendant de ε mais indépendant de $x$tel que $|f(x) - g_n(x)|\varepsilon$pour $n \geq n_o$et pour tout $x \in E$.

Lorsqu'on veut prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions (g_n) dans un ensemble E, le procédé le plus commode et qui réussit souvent consiste d'abord à « transformer la suite en série » (I, 2.6) en considérant la série de fonctions $U_n = g_n{}^{-}g_{n-1}$ (et en convenant de prendre $g_o = 0$) : il revient au même de dire que la suite (g_n) converge uniformément dans E vers f, ou que la série de terme général u_n converge uniformément dans E et a pour somme f , puisque g_n est la n-ème somme partielle de la série de terme général u_n. Or, pour les séries de fonctions complexes, on a un critère suffisant de convergence uniforme qui ramène cette question à un problème de majoration :

Proposition 1.2. *Supposons qu'il existe une série à termes positifs (α_n) qui soit convergente et que d'autre part, pour tout entier n, on ait $\underset{x\in E}{s}up|u_n(x)| \leq \alpha_n$ (c'est-à-dire*

$$u_n(x) \leq \alpha_n$$

pour tout $x \in E$). Alors la série de terme général U_n est uniformément convergente dans E.

Proposition 1.3. *Soit(h_n) une suite de fonctions complexes définies dans un ensemble E, prenant toutes leurs valeurs dans une partie fermée et bornée F du plan complexe $\mathbb{C}$; soit d'autre part f une* *fonction complexe continue dans F. Alors, si dans E la suite* (h_n) *converge uniformément vers une fonction g la suite* $(f \circ h_n)$ *des fonctions composées converge uniformément dans E vers* fog.

Démonstration. En effet, on a $g(E) \subset F$; d'autre part, un théorème que nous admettrons dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si z, z' sont deux points de F tels que $|z^- z'| < \delta$, alors on a $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. Mais par hypothèse il existe un nombre n_o ne dépendant que de δ , tel que pour $n \geq n_o$on ait $|g(x) - h_n(x)| < \delta$ pour tout $x \in E$. On a donc $|f(g(x))^- f(h_n(x))| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in E$ et tout $n \geq n_o$, d'où notre assertion. □

1.3 Régularisation

Celles des fonctions continues d'une variable réelle qui, historiquement, ont été étudiées dans le début du calcul infinitésimal, et qui sont encore celles que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications, sont très « régulières », en ce sens qu'elles sont indéfiniment dérivables (ce sont même des fonctions analytiques, notion qui sera définie et étudiée au chap. VI). Au contraire, lorsqu'on a voulu étudier les fonctions continues les plus générales, on s'est aperçu qu'elles peuvent avoir des propriétés très surprenantes, comme par exemple n'avoir de dérivée en aucun point (ce qui implique qu'il n'est pas possible d'en tracer le graphe). Heureusement, on peut, comme nous allons le voir, approcher uniformément, dans un intervalle borné, toute fonction continue par des fonctions indéfiniment dérivables, ce qui en facilite souvent considérablement l'étude théorique et pratique. L'idée d'où nous allons partir consiste à remplacer la fonction en chaque point par la « moyenne » de ses valeurs dans un petit intervalle entourant ce point. De façon précise.

Proposition 1.4. *soit f une fonction complexe définie et continue par morceaux dans* $\mathbb{R}$ *tout entier. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*et tout* $h > 0$, *la valeur moyenne de* f *dans l'intervalle* $[x-h, x+h]$ *est par définition l'intégrale*

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt. \tag{1.5}$$

(qu'on peut effectivement, à l'aide de sommes de Riemann, approcher par des moyennes arithmétiques des valeurs de f *en des points régulièrement espacés de l'intervalle*$[x-h, x+h]$*). Lorsque la fonction* f *est continue au point x, on a* $\lim_{h \to 0} f_h(x) = f(x)$.

Démonstration. en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour $x - \delta \leq t \leq x + \delta$ par le th. de la moyenne, dès que $h < \delta$,

$$|\int_{x-h}^{x+h} (f(t) - f(x))dt| \leq 2\varepsilon h$$

autrement dit

$$|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$$

d'où notre assertion. □

Il est donc naturel de considérer, pour chaque h fixé et « assez petit » la fonction$x \to f_h(x)$ comme une « approximation » de f. L'intérêt que présente cette approximation est que, même si

f n'est que continue par morceaux, la fonction f_h, elle, est toujours continue dans $\mathbb{R}$. Vérifions-le seulement par exemple pour la fonction f égale à 0 pour $x < 0$, à 1 pour $x \geq 0$ (« fonction d'Heaviside ») ; on obtient immédiatement $f_h(x) = 0$
pour $x \leq -h, f_h(x) = 1$ pour $x \geq h$ *et* $f_h(x) = \frac{x+h}{2h}$. pour $-h \leq x \leq h$ (fig. 1.3). Lorsque la fonction f admet des discontinuités, on ne peut donc obtenir une approximation uniforme de f à l'aide des f_h, mais on a en tout cas construit une suite $(f_{\frac{1}{n}})$ telle que $(f_{\frac{1}{n}}(x))$ ait pour limite $f(x)$ en tous les points de continuité de f, et qui est formée de fonctions continues, donc « plus régulières » que la fonction d'où l'on était parti.

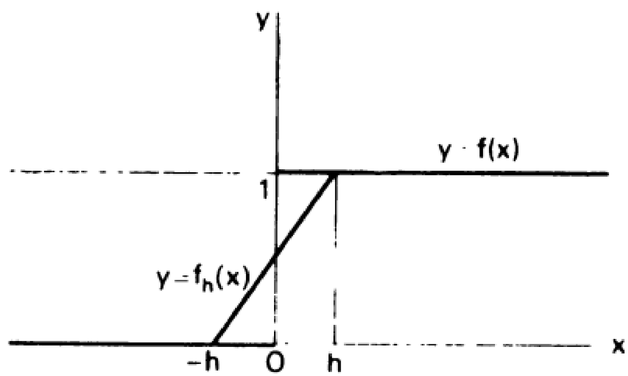

Figure 1.3 –

1.3.1

On peut écrire la formule 1.5 de façon un peu différente. Introduisons la fonction continue par morceaux (fig. 16)

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} 0 & pour \quad x < -h \quad ou \quad x > h \\ \frac{1}{2h} & pour \quad -h \leq x \leq h \end{cases} \tag{1.6}$$

pour laquelle on a $\varphi_h(x) \geq 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(x)dx = 1 \tag{1.7}$$

On peut alors encore écrire la formule 1.5 comme suit

$$f_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_h(x-t)dt \tag{1.8}$$

la fonction intégrée étant nulle hors de l'intervalle $[x-h, x+h]$ et égale à $\frac{f(t)}{2h}$ dans cet intervalle . /(0/2A) dans cet intervalle (III, 9.7). D'une façon générale, pour toute fonction φ continue par morceaux dans $\mathbb{R}$ et nulle hors d'un intervalle borné $I = [-\alpha, \alpha$, nous appellerons convolée de f et φ la fonction

$$x \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_h(x-t)dt \tag{1.9}$$

que nous noterons $f * \varphi$. Nous allons voir qu'on peut améliorer le procédé de la partie (1.3.2) en remplaçant la fonction discontinue φ_h par une fonction continue et même indéfiniment dérivable pn dont le graphe soit en un certain sens « voisin » de celui de φ_h (fig. 1.4)

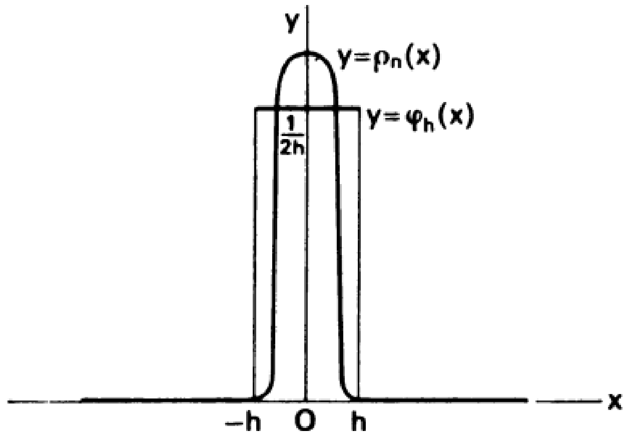

FIGURE 1.4 –

1.3.2

De façon précise, considérons une fonction ρ définie dans $\mathbb{R}$ et ayant les propriétés suivantes :

1 ρ est continue et ≥ 0 dans $\mathbb{R}$, et nulle pour $x < -\alpha$ et $x > \alpha$;
2 on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1. \tag{1.10}$$

(On observera que si ρ vérifie la condition 1 et n'est pas identiquement nulle, on a $\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx < 1$, donc en remplaçant ρ par $\frac{\rho}{\beta}$ on vérifie aussi la condition de « normalisation » 2.) Pour tout n entier ≥ 1, posons

$$\rho_n(x) = n\rho(nx). \tag{1.11}$$

La fonction ρ_n jouit encore des propriétés 1 mais est nulle hors de l'intervalle $\left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right]$ (fig. 1.5) ; en outre on a

$$n\int_{-\infty}^{\infty} \rho(nx)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)dt = 1.$$

par le changement de variables $t = nx$, donc la condition de normalisation 2 est aussi vérifiée pour ρ_n. Cela étant, nous allons voir qu'en tout point x où f est continue, on a encore

$$\lim_{n\to\infty} (f * \rho_n)(x) = f(x). \tag{1.12}$$

En effet, on peut écrire

$$(f * \rho_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho_n)(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\rho_n)(u)du \tag{1.13}$$

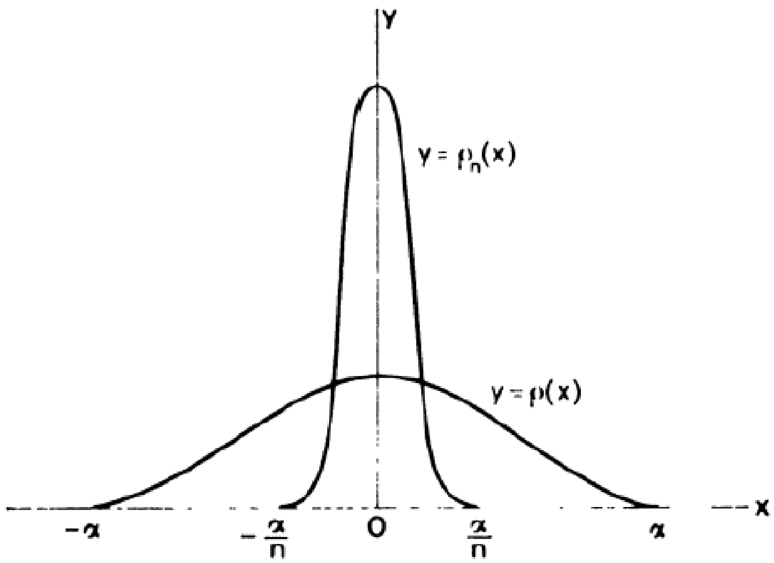

FIGURE 1.5 –

par le changement de variables $t = x - u$; en vertu de la condition de normalisation, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} f(x) - (f * \rho_n)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x-u))\rho_n(u)du \\ &= \int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} (f(x) - f(x-u))\rho_n)(u)du \end{aligned}$$

puisque $\rho_n(u) = 0$ hors de l'intervalle $\left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right]$. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe n_o tel que pour $n \geq n_o$, on ait, pour$|u| < \frac{\alpha}{n}$, $|f(x) - f(x-u)| < \varepsilon$. Comme ρ_n est positive, on en déduit, par le th. de la moyenne et la condition de normalisation

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} (f(x) - f(x-u))\rho_n(u)du\right| &\leq \int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} |(f(x) - f(x-u))|\rho_n(u)du \\ &\leq \varepsilon \int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} \rho_n(u)du \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui prouve notre assertion.

Chapitre 2

Série de Fourier

2.1 coefficient de Fourier

On appelle série trigonométrique une série de la forme :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 cos\omega x + b_1 sin\omega x + ... + \alpha_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x + ... \quad (1)$$

où ω est un nombre réel fixé ,et où $\alpha_0, ..., \alpha_n, b_n$..... sont des coefficients réels.
Si la somme de la série est bien définie en un point x ,elle l'est en point $x + \frac{2k\Pi}{\omega}$(k entier)et sa valeur ne dépend pas de k .
En d'autre termes.la somme d'une série trigonométrique , dans la mesure où elle existe,est une fonction périodique de x,de période $\frac{2\Pi}{\omega}$.
Réciproquement,étant donnée une fonction f(x),définie pour toute valeur de x,périodique de période $\frac{2\Pi}{\omega}$,on peut se demander s'il existe une série trigonométrique dont f(x) soit la somme.cette série s'appelle série de Fourier de f(x) et l'on alors :

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 cos\omega x + b_1 sin\omega x + ... + \alpha_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x + ... \quad (2)$$

On peut écrire une série trigonométrique sous d'autres formes utiles à connaîre.
En posant

$$\alpha_n = r_n cos\varphi_n \ , \ b_n = r_n sin\varphi_n.$$

$$f(x) = \frac{r_0}{2} + r_1 cos(\omega x - \varphi_1) + ... + r_n cos(n\omega x - \varphi_n) + ... \quad (3)$$

le terme $\alpha_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x$,où $r_n cos(n\omega x - \varphi_n)$ s'appelle harmonique de rang n de la fonction périodique f(x).r_n est l'amplitude de l'harmonique,φ_n est sa phase,nω est sa pulsation,$\frac{n\omega}{2\Pi}$ sa fréquence .
On peut aussi introduire la notation complexe ,d'aprés les formules d'Euler,

$$cosn\omega x = \frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}$$

$$sinn\omega x = \frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}$$

Si l'on pose

$$\lambda_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - ib_n), \lambda - n = \lambda_n = \frac{1}{2}(\alpha_n + ib_n), (n \succeq 1)\ \lambda - 0 = \alpha_0, b_0 = 0;$$

On peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \lambda_n e^{in\omega x} ... \qquad (4)$$

Supposons que la série trigonométrique

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + ... + \alpha_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x + ...$$

Soit uniformément convergente dans un intervalle fermé d'amplitude $\frac{2\Pi}{\omega}$,ce serait par exemple le cas de la série

$$\sum \frac{n\omega x}{n^2}$$

qui est majorée par la série $\frac{1}{n^2}$,et de la série

$$\sum \alpha^n cosn\omega x \text{ , pour } \mid \alpha \mid \prec 1.$$

qui est majorée par la série $\mid \alpha \mid^n$.
Plus généralement,c'est ce qui arrive si la série

$$\mid \frac{\alpha_0}{2} \mid +.....+ \mid \alpha_n \mid + \mid b_n \mid +.....$$

est convergente .

Multiplions terme à terme la série (1) par $\mid cosp\omega x \mid$.Comme $x + \frac{2k\Pi}{|}$ est inférieur à 1.la série obtenue est encore uniformément convergente,et on peut l'intégrer dans un intervalle $\triangle$ d'amplitude égale à la période $\frac{2\Pi}{\omega}$.or on vérifie que ,si $n \neq p$.

$$\begin{aligned}
\int_\triangle cosn\omega x.cosp\omega dx &= 0 \\
\int_\triangle sinn\omega x.cosp\omega xdx &= 0 \\
\int_\triangle sinn\omega x.sinp\omega xdx &= 0
\end{aligned}$$

et que :

$$\int_{\triangle} cos^2 p\omega x dx = \int_{\triangle} sin^2 p\omega x dx = \frac{\Pi}{\omega}$$
$$\int_{\triangle} sinp\omega x dx = 0$$

les termess de la série intégrée sont donc tous nuls,sauf le terme pour lequel n=p .
On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{\omega}{\Pi}\int_{\triangle} f(x)cosp\omega x dx && (1') \\ b_p &= \frac{\omega}{\Pi}\int_{\triangle} f(x)sinp\omega x dx && (1'') \end{aligned}$$

On vérifie que la premiére de ces formules reste encore valable pour p=0 et fournit la valeur correcte de α_0.

Définition 2.1. α_p et b_p s'appellent coefficients de fourier de la fonction f sur l 'intervalle $\triangle$.ces coefficients existent sous la seule condition que f soit intégrable .
Nous voyons que si la série de fourier (1) est uniformément convergente dans tout intervalle,la somme f(x) est une fonction continue et périodique de x,et les coefficients de la série sont reliés à la somme par les formules (1') et (1").
Dans le cas où la série est mise sous la forme complexe (4) ;le calcul ci-dessus se simplifie.on multiplie terme à terme la série par e$^{-ip\omega x}$ et l'on intégre sur $\triangle$
l'intégrale

$$\int_{\triangle} e^{i(n-p)\omega x}dx$$

est nulle si $n \neq p$.on a donc

$$\lambda_p = \frac{\omega}{2\Pi}\int_{\triangle} f(x)e^{-ip\omega x}dx$$

Ces formules montrent que ,dans un cas particulier important ,où l'on sait à priori que la série de fourier converge ,les coefficients α_p, b_p se calculent à l'aide de la somme par des formules simples et remarquable .cependant le cas envisagé est beaucoup trop particulier .en outre le probléme des séries de fourier ne se pose pas en général de cette façon .on ne se donne pas les coefficients α_p, b_p.on se donne la fonction f(x), et on demande :

1. si elle est développable en série de fourier :

2. si les coefficients sont alors donnés par les formules (1) et (1') mais il faut

Alors définir ce qu'on entend par $\ll$ développement de f(x) en série de fourier$\gg$.quelle signification donne -t- on au mot convergence ?
On peut demander que,pour chaque valeur de x, on ait l'égalité numérique

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + ... + \alpha_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x + ...$$

(convergence simple).
On peut demander que la convergence soit uniforme sur des intervalles aussi grands que possible . On peut aussi prendre la convergence dans un autre sens , et rattacher la théorie des séries de fourier à celle de la convergence dans l'éspace de Hilbert.dans ce cas,les sommes

$$\frac{\alpha_0}{2} + ... + \alpha_n cosn\omega x + b_n sinn\omega x + ...$$

tendent en norme (au sensL^2)vers f(x) ,mais ne convergent peut-être pas numériquement en un point x donné.
Nous allons examiner successivement ces divert aspects de la convergence des séries de fourier.pour étudier la convergence simple ,nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes,qui constituent ce qu'on appelle la théorie de l'intégrale de Dirichlet.

2.1.1 convolution

Définition 2.2. On appelle convolution de deux fonctions F et H appartenant à l'éspace L^2 la fonction de la variable t égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)H(t-x)dx$$

On notera $F * H$ la convolution de F et de H

On voit que :

Théorème 2.1. *la transformée de fourier du produit de deux fonctions f et H est à la convolution des tranformées de fourier de ces deux fonctions.*
la convolution est une transformation bilinéaire du couple de fonction F et H. elle est symétrique en F et H :

$$F * H = H * F$$

On voit que la transformation de fourrier transforme un produit ordinaire en "produit" de convolution.
Nous aurons l'ocasion de retrouver la convolution à propos de la transformation de laplace et de l'intégration des systèmes différentiels.
autre cas de validité pour la convolution-on peut définir la convolution de deux fonctions.
en faisant sur ces fonctions d'autres hypothèses.
Nous avons supposé que F et H appartenaient à L^2.L'intégrale

$$(F * H)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)H(t-x)dx$$

existe aussi :

1. si F est bornée et | H | intégrable sur R :

2. si F et H sont toutes les deux absolument intégrables sur R.

Le premier cas est évident.nous admettrons sans démonstration le second cas.
Nous ne cherchons pas à savoir quelles sont alors les propriétés de la fonction.

Théorème 2.2 (de Shanon)**.** *reprenons la question traitée au paragraphe précédent avec des séries de fourier, au lieu d'intégrale.*
plaçons-nous par exemple sur l'intervalle (0,1) et posons

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\Pi nx} \ ,g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{2i\Pi nx}$$

Si f et g sont de carré intégrable ,on déduit de la formule de parseval que

$$\int_0^1 f(x)\overline{g}(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{c}'_n$$

le produit scalaire de f et g dans l'éspace L^2 est égale au produit scalaire des deux suites

c_n et c'_n dans l'éspace l^2.

Posons maintenant

$$g(x) = e^{2i\Pi xp}\overline{h(x)}$$

où p est un entier.on a :

$$\overline{g}(x) = e^{-2i\Pi xp}\overline{h(x)}$$

et l'on voit apparaitre l'intègrale

$$\int_0^1 e^{-2i\Pi xp} f(x\mu)(x) = dx,$$

coefficient de Fourier de la fonction f(x)g(x).

Or.Si c'_n est coefficient de fourier de g.le coefficient de fourier correspondant pour h est donnè par

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \int_0^1 e^{-2i\Pi nx} h(x)dx \\
&= \int_0^1 e^{-2i\Pi nx} e^{2i\Pi px}\overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 e^{-2i\Pi(n-p)x}\overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 \overline{e^{-2i\Pi(n-p)x} g(x)}dx = \overline{c'_{p-n}}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\overline{c'_n} = \gamma_{p-n}, \text{d'où la formule}$$

$$\int_0^1 e^{-2i\Pi xp} f(x)h(x)dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\gamma_{p-n}$$

Au second membre apparait la convolution de deux suites $c_n et \gamma_n$ dans l'éspace l^2.

Définition 2.3. Si quels que soient les nombres n,$t_1...t_n, c_1...c_n$.la forme hermitienne rèelle

$$\text{z=}\sum c_k\overline{c_1}\varphi(t_k - t_l)$$

est non négative.on dit que φ(t) est une fonction de type positif.
On voit qu'une intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\Pi tx} f(x)dx$
représente une fonction type positif.réciproquement on démontre le théoréme suivant

Théorème 2.3 (de Bochner)**.** *Toute fonction de type positif continue est de la forme*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\Pi tx} dm(x)$$

où m est une fonction non décroissante.variant de 0 à une valeur finie.
cette intégrale peut être considérée.comme une intégrale de stieltjes(intégrale de fourier stieltjes)ou comme l'intégrale de $e^{2i\Pi tx}$ *par rapport à une mesure bornée.*

si m(x) est une fonction en escalier.$\varphi(t)$ se réduit à une série de la forme

$$\sum m_k e^{2i\Pi\omega_k t}$$

Si m(x) admet une dèrivée f(x),$\varphi(t)$ est du type introduit au dèbut du paragraphe
. la dèfinition d'une fonction de type positif entraine de nombreuses consèquences.

Pour n=1,on voit que $\varphi(0)$

est rèel et positif .
pour n=2,on a :

$$z = (| c_1 |^2 + | c |^2)\varphi(0) + c_1\overline{c_2}\varphi(t) + \overline{c_1}c_2\varphi(-t)$$

où l'on a posè $t = t_1 - t_2$.
si $c_1 = c_2 = 1$.

$$2\varphi(0) + \varphi(t) + \varphi(-t) \text{ est réel positif.}$$

Donc $\varphi(t) + \varphi(-t)$ est réel.
Si $c_1 = 1, c_2 = i$.

$2\varphi(0) - i[\varphi(t) - \varphi(-t)]$ est réel positif

Donc $\varphi(t) - \varphi(-t)$ est imaginaire pur.

Il en résulte que

$$\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$$

pour $c_1 = \overline{\varphi(t)}, c_2 = -\varphi(0)$,on trouve

$$(\mid \varphi(t) \mid^2 + \mid \varphi(0) \mid^2)\varphi(0) - 2 \mid \varphi(t) \mid^2 \varphi(0) > 0$$

d'où

$$\mid \varphi(t) \mid \leq \varphi(0)$$

ainsi :

Théorème 2.4. *$\varphi(t)$ est conjugué de $\varphi(-t)$.et son module ne peut dépasser le nombre réel $\varphi(0)$. bien entendu,ces conséquences de la définition sont nécéssaire,mais insuffisantes,pour que $\varphi(t)$ soit de type positif.*

2.1.2 La distribution de dirac

Nous avons défini la convolution de deux fonctions f,g par

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

On peut se demander s'il existe des fonctions g bornées telles que,quel que soit f (dans un ensemble raisonnable E de fonctions)

$$f * g = f$$

Si g existait,g jouerait le rôle d'élément unité dans l'algèbre de convolution ,c'est à dire l'algèbre construite sur l'éspace vectoriel E avec comme multiplication le produit de convolution.

Or la réponse à cette question est négative.prénons en effet pour f une fonction continue nulle en dehors de l'intervalle $[-\alpha, +\alpha]$,et égale à 1 pour x=0.on veut en particulier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(-x)dx = f(0) = 1$$

c'est-à-dire

$$1 = \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)g(-x)dx$$

faisons maintenant tendre α vers 0.

g étant bornée,l'intégrale du second membre tend vers 0,ce qui est incompatible avec le fait qu'elle reste égale à 1.

Mais on peut donner de $f * g = f$ une résolution approchée.par exemple ,si f est continue,on voit

,en utilisant le théorème de la moyenne ,que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx = f(0)$$

la fonction $g_\alpha(x)$ égale à $\frac{1}{2a}$ si $\epsilon < x < \alpha$, et à 0 si

$\mid x \mid\geq \alpha$, est telle que

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g_\alpha(x)dx = f(0).$$

de même ,nous savons que si f est absolument intégrable,

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(x)\frac{sin2\Pi\lambda x}{\Pi x}dx = f(0)$$

On représente alors par $\delta(x)$ la limite commune de $g_\alpha(x)$
lorsque $\alpha \to 0$,de $\frac{sin2\Pi\lambda x}{\Pi x}$lorsque

$\lambda\to\infty$.c'est le symbole d'un être mathématique qui n'est pas une fonction

On l'appelle la distribution de Dirac.on écrit ,d'une façon incorrecte,mais pratique

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\delta(x)dx = f(t) \tag{2.2}$$

où

$$f*\delta = f$$

δ est donc la fonctionnelle linéaire qui,à fait correspondre le nombre f(0) .cette fonctionnelle linéaire peut être a priori définie surtout éspace vectoriel de fonctions définies
Pour x=0.
Si l'on écrit (sans préciser ici la signification du mot limite)

$$\delta(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{sin2\Pi\lambda x}{\pi x}$$

On voit que

$$\delta(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2i\Pi sx}ds$$

en ce sens ,δ est la transformée de Fourier de la fonction constante égale à 1 sur tout R :
$\delta = F1$.
bien entendu ,la fonction 1 ne peut pas avoir pour transformée de Fourier une fonction car elle n'est pas intégrable sur R.
réciproquement ,pour f(x)=$e^{2i\Pi xt}$.
On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\Pi xt}\delta(x)dx = 1$$

Autrement dit

$$F\delta = 1$$

2.1.3 approximation dans l'éspace des fonctions continues sur un compact

Nous dirons qu'une famille B(Q)de fonctions sépare deux points z et y de l'ensemble Q s'il existe dans B(Q)une fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(z) \neq \varphi(y)$(fonction séparatrice pour les points z et y).l'affirmation que B(Q)ne sépare pas les points z et y signifie que f(z)=f(y) pour toute les fonctions $f(x) \in B(Q)$.
Une famille linéaire B(Q)de fonctions réelles sur l'ensemble Q est appelée réseau linéaire si avec toute sa fonction f(x),l'ensemble B(Q) contient la fonction $\mid f(x) \mid$.

Théorème 2.5. *Un réseau linéaire B(Q)sur un compact Q est partout dense dans l'éspace $R^s(Q)$ de toutes les fonctions continues sur Q s'il sépare n'importe quels deux points du compact et contient la fonction e(x)=1.*

Théorème 2.6 (de Stone pour)**.** *Conformément à la définition générale d'une algébre,une famille linéaire B(Q) composée de fonction (réelles)sur un compact Q s'appelle algébre si avec ses deux fonctions quelquonques f(x) et g(x) la famille B(Q) contient la fonction f(x)g(x).*

Théorème 2.7 (de Stone pour une algébre réelle)**.** *Une algébre B(Q) formée de fonctions réelles,séparant n'importe quels deux points du compact Q et contenant l'unité est partout dense dans l'éspace $R^s(Q)$.*

2.1.4 conséquences des théorèmes de Stone

Supposons que le compact Q soit une partie fermée bornée : de R_n et que l'algébre B(Q) soit formée de tous les polynômes réels $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ toutes les hypothéses du théorème de Stone sont évidemment vérifiées.en l'appliquant on aboutit au théorème suivant :

Théorème 2.8 (de Weierstrass)**.** *Toute fonction réelle f(x) continue sur un ensemble fermé borné $Q \subset R_n$ est la limite uniforme sur Q d'une suite de polynômes en $x_1, x_2 ... x_n$.*

Pour l'algébre B(Q)des polyñomes $p(x_1, ..., x_n)$ à valeurs complexes,les hypothéses du théorème de Stone sont vérifiées :par conséquent toute fonction à valeurs complexes f(x) continue sur un ensemble fermé borné $Q \subset R_n$ est la limite uniforme sur Q d'une suite de polynômes (à valeurs complexes) en $x_1, x_2, ..., x_n$.

Théorème 2.9. *Toute fonction réelle g(t)continue et périodique de période* 2Π *sur l'axe des t est la limite uniforme (sur tout l'axe)d'une suite de polynômes trigonométriques.*

2.1.5 suites en forme de delta

Le théorème de Stone qui établit la possibilité d'approcher toute fonction continue par les fonctions d'une algébre B(Q)n'indique pourtant ancune régle de construction de fonctions approximationtes.Nous signalons ici quelques méthodes concrétes d'approximations.
Puisque dans ce qui suit nous utilisons l'intégration ,supposons que le compact Q est un intervalle fermé de la droite numérique ou la circonférence de rayon 1(intervalle $[-\Pi, \Pi]$ aux éxtrimités identifiées).
Désignons par $U_p(y)$ l'intervalle ouvert de longueur 2p et de centre au point y .Supposons qu'il y ait ,pour un point $y \in Q$ donné,une suite de fonctions non négatives
$D_n(x; y)(n = 1, 2, 3...)$ possédant les propriétés :

1. $\int_{U_p(y)} D_n(x; y)dx \longrightarrow_{n\to\infty} 1$ quel que soit $p > 0$
2. $\int_{Q-U_p(y)} D_n(x, y)dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ quel que soit $p > 0$,

Une telle suite est dite en forme de delta (pour le point y).(l'origine de ce terme sera expliquée plus loin)

Théorème 2.10. *Soit* $D_n(x; y)$ *une suite en forme de delta pour un point y ;si f(x) est une fonction continue par morceaux et continue au point y,alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q D_n(x, y)f(x)dx = f(y) \qquad (3)$$

Démonstration. Soit M = $sup \mid f(x) \mid$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné,choisissons un $\delta > 0$ tel que $\rho(x, y) \leq \delta$ implique $\mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon$, ensuite,on a

$$\begin{aligned} \mid \int_Q D_n(x,y)f(x)dx - f(y) \mid &= \mid \int_Q D_n(x,y)[f(x)-f(y)]dx + f(y)[\mid \int_Q D_n(x,y)dx - 1] \mid \\ &\leq \mid \int_Q D_n(x,y) \mid f(x)-f(y) \mid dx + \int_{Q-U_\delta(y)} D_n(x;y) \mid f(x)-f(y) \mid dx \mid f(y) \mid \int_Q D_n(x,y)d \\ &\leq \varepsilon \int_{U_\delta(y)} D_n(x,y)dx + 2M \int_{Q-U_\delta(y)} D_n(x;y) \mid \int_Q D_n(x;y)dx - 1 \mid \end{aligned}$$

En raison des propriétés (1) et (2) d'une suite en forme de delta,la quantité obtenue est inférieur à 2 ε pour n suffisamment grand,ce qu'il fallait démontrer. □

Complétons le théorème par la remarque suivante sur la convergence uniforme .il est clair,avant tout ,que si les propriétés (1) et (2) sont vérifiées pour tout point y d'un sous - ensemble $E \subset Q$et si la fonction f(x) est continue en tout point$y \in E$,alors le résultat (3) est valable pour tout $y \in E$. Nous dirons que les relations (1)et (2) ont lieu uniformément sur un ensemble $E \subset Q$ si,pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un N tel que les différences du premier et du second membre des relations (1) et (2) réspéctivement ne dépassent pas en module le nombre ε quels que soient $n \geq N$ et $y \in E$. Nous dirons qu'une fonction f(x) est uniformément continue sur E par rapport à Q si,pour tout $\varepsilon > 0$,on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\mid x - y \mid \leq \delta, x \in Q, y \in E,$$

implique $\mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon$,alors,le théorème suivant résulte immédiatement des majorations :

Théorème 2.11. *Si les relations (1) et (2),pour tout $\rho \geq 0$,sont vérifiées uniformément sur un ensemble E et que la fonction soit uniformément continue sur E par rapport à Q,alors la fonction f(x) soit uniformément continue sur E par rapport à Q ,alors les fonctions $f_n(x)$ convergent uniformément sur E vers la fonction f(x) lorsque $n \to \infty$.*

Lemme 2.1. *Sur tout ensemble fermé $E \subset Q$ de points de continuité d 'une fonction f(x)soit uniformément continue par rapport à Q.*

Lemme 2.2. *Si $D_n(x, y)$ est une suite en forme de delta pour un point y et si f(x) est continue pour x=y ,alors pour toute suite $y_n \longrightarrow y$,on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \int D_n(x; y_n) f(x) dx = f(y)$$

Chapitre 3

Les semi groupes des opèrateurs de Toeplitz

3.1 Opèrateurs fermès

Définition 3.1. On dit qu'un opèrateur A∈L(E,F)est fermèe si le graphe de A notè

$$G(A)=\{(x,A(x) \mid x\in D(A)\}\subset ExY$$

est fermè dans ExF.

Dans la suite,on noter par X l'èspace de Banach sur le corps des nombres complexes C et par B(X) L'algèbre de Banach des opèrateurs linèaires bornès dans X .Nous dèsignerons par I l'unitè de B(X).
Pour un opèrateur linèaire A :D(A)⊂X⟶X nous noterons l'image de A par :

$$\text{Im } A=\{Ax|x\in D(A)\}$$

et le noyau de A par :

$$\text{Ker } A=\{x\in D(A)|Ax=0\}.$$

L'opèrateur A :D(A)⊂X⟶ Im A est surjective.si Ker A=0,alors A est injectif pour un opèrateur bijectif.On peut dèfinir l'opèrateur inverse :

$$A^{-1} : D(A^{-1}) \subset X \longrightarrow X$$

par $A^{-1}y$=x, si Ax=y. Evidemment$D(A^{-1})$=Im A.
On note par GL(x)l'ensemble des èlèments inversbles de B(x).l'ensemble GL(x) est un ensemble ouvert dans B(X).

Proposition 3.1. *Soit A∈B(X).Alors ρ(A)est un ensemble ouvert.*

Démonstration. Définissons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi : C & \longrightarrow & B(X) \\ \lambda & \longrightarrow & \phi(\lambda) = \lambda I - A \end{array}$$

Evidemment ϕ est continue .si $\lambda \in \rho$(A).Alors λI-A $\in$ GL(X) et par suite

$$\rho(A) = \phi^{-1}(GL(X))$$

Comme GL(x) est un ensemble ouvert,on voit que ρ(A) est ouvert.

□

Définition 3.2. l'appliation

$$\begin{array}{rcl} R(.;A) : \rho(A) & \longrightarrow & B(X) \\ \lambda & \longrightarrow & R(\lambda;A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{array}$$

s'appelle la rèsolvante de A.

Lemme 3.1. *Si A∈B(x) et $\|A\|$ <1,alors I-A∈ GL(X)*

$$et\ (I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Proposition 3.2. *La résolvante d'un opérateur linéaire A∈B(X) a les propriétés suivantes :*

1. *Si λ,μ $\in \rho(A)$,alors :*

   $$R(\lambda,A) - R(\mu,A)=(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$$

2. *R(. ;A) est une application analytique sur $\rho(A)$*

3. *Si $\lambda \in C$ et $\lambda > \|A\|$,alors$\lambda \in \rho(A)$et nous avons :*

   $$R(\lambda;A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

4. *$\forall n \in N$;$\forall\ \lambda \in \rho(A)$, on a :*

   $$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda;A) = (-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}$$

Démonstration. Nous avons successivement :

1.

$$\begin{array}{rcl} R(\lambda,A) - R(\mu,A) & = & (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ & = & (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A - \lambda I + A)\mu I - A)^{-1} \\ & = & (\mu - \lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A), \forall \lambda, \mu \in \rho(A) \end{array}$$

2. Soit $\lambda_0 \in \rho$(A).notons par D(λ_0 ;$\frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}$) le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}$.Alors pour $\lambda \in D(\lambda_0\,;\frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|})$, nous avons :

$$\lambda I\text{-A=[I-}(\lambda_0\text{-}\lambda)\text{R}(\lambda - 0\,;\text{A})](\lambda_0 \text{ I-A})$$

Comme

$$\| (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \| = \| \lambda_0 - \lambda \| R(\lambda_0; A) < 1$$

et compte tenu du lemme 3.1, on a :

$$\text{I-}(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in GL(X)$$

d'où

$$\lambda I - A \in GL(X)$$

et :

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1}[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} \\
&= R(\lambda_0; A)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc R(. ;A) est analytique sur ρ(A).

3. Soit $\lambda \in$ C tel que | λ | > $\|$A$\|$.Alors

$$\| \lambda^{-1}A \| < 1$$

D'aprés le lemme précédent.On a :

$$I - \lambda^{-1}A \in \text{GL(X)}$$

De plus :

$$(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

Par conséquent :

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

4. En utilisant la réccurence sur n.pour n=1,nous avons :

$$\tfrac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = \tfrac{d}{d\lambda}(\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = R(\lambda; A)^2$$

Supposons que pour k $\in N$,on ait :

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda, A) = (-1)^k k! R(\lambda, A)^{k+1}$$

Montrons que :

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda; A) = (-1)^{k+1}(k+1)! R(\lambda; A)^{k+2}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda; A) &= \frac{d}{d\lambda}(\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda; A)) \\
&= \frac{d}{d\lambda}[(-1)^k k!(\lambda I - A)^{-k-1}] \\
&= (-1)^k k!(-k-1)(\lambda I - A)^{-k-2} = (-1)^{k+1}(k+1)! R(\lambda; A)^{k+2}
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}, \; \forall n \in N^\star$$

□

3.1.1 semi-groupe uniformément continus

Définition 3.3. Soit X un espace de banach et soit $(T(t))_t \geq 0$ une famille d'opérateur linéaire borné de X dans X.on dit que $(T(t))_t \geq 0$ est un semi- groupe si :

1. T(0)=I(I identité opérateur sur X)

2. T(t+s)=T(t)T(s) $\forall t, s \geq 0$

Proposition 3.3. *Soit $(T(t))_t \geq 0$ un semi-groupe, pour tout $n \in N$ on a les propiétés suivantes :*

1. *T(nt)= $(T(t))^n$*

2. *T(-t)=$(T(t))^{-1}$*

3. *T(n)=$(T(1))^n$*

Démonstration. On a :

1.
$$T(nt) = T(\sum_{j=1}^{n} t) = \prod_{j=1}^{n} T(t) = (T(t))^n$$

2. T(t)T(-t)=T(t-t)=T(0)=I

   On pose t=1 dans 1 on obtient T(n)=$(T(1))^n$.

On dit que le semi-groupes $(T(t))t \geq 0$ est uniformément continu si

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \parallel T(t) - I \parallel = 0$$

la générateur infinitésimal de semi- groupe $(T(t))t \geq 0$ défini par :

$$\text{D(A)} = x \in X, \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \qquad exists$$

et

$$\text{Ax} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt} \mid_{t=0} \forall x \in D(A)$$

□

Théorème 3.1. *Soit $T(t)_{t \geq 0}$ et $S(t)_{t \geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés. Si*

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t) - I}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{S(t) - I}{t} = A.$$

Alors :

$$T(t) = S(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$.définissons l'application

$$[0, t] \ni s \to U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$.par suite U(0)x=U(t)x.pour tout $x \in D(A)$,d'ou :

T(t)x=S(t)x, $\forall x \in D(A)$ et $t \geq 0$

puisque

$D(\overline{A}) = EetT(t), S(t) \in L(E) \forall t \geq 0$
Il résulte que :

$$\text{T(t)x} = \text{S(t)x} , \forall x \in E$$

□

Corollaire 3.1. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi- groupe uniformément continu d'opérateurs linéaire borné. Alors :*

1. *Il existe un constante $\omega \geq$0 telle que $\| T(t) \| \leq e^{\omega t}$*

2. *Il existe une unique opérateur linéaire borné A telle que T(t)=e^{i}A.(A infinitésimal générateur de T(t))*

3. *$t \to T(t)$ dérivable en norme avec*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$$

3.1.2 Semi-groupe fortement continues

Définition 3.4. Un semi-groupe $(T(t)t \geq 0$ d'opérateurs linéaire borné de X est fortement continue

Si

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x \ , \forall x \in X$$

les semi-groupes fortement continue sont appelé semi-groupe de classe C_0 ou C_0-semi- groupe.

Remarque 3.1. *Les semi-groupe uniformémént continus sont C_0semi-groupes puisque :*

$$\| T(t)x - x \| \leq \| T(t) - I \| \| x \|.$$

Mais il existe des C_0 -semi-groupes qui ne sont pas uniformémént continu.

Théorème 3.2. *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe,il existe une constante $\omega \geq 0$ et $M \geq$ 1 telle que*

$$\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \succeq 0.$$

Démonstration. T(t) est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné.alors :

$$\exists M \geq 0 \, ; \| T(s) \leq M \ , \forall s \in [0, 1]$$

On pose t=s+n.$\forall s \in [0, 1]$, $\forall n \in N$,on a :

$$\begin{aligned} \| T(t) \| &= \| T(s+n) \| = \| T(s) \| \| T(n) \| \\ &\leq M \| T(1) \|^n \\ &\leq MM^n = M^{n+1} \\ &\leq Me^{nlogM} \\ &\leq Me^{\omega t}, \forall t \succeq 0; \omega = logM \end{aligned}$$

□

Définition 3.5. On dit que $T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de type (M,ω) avec $M \geq 1$ et $\omega \in R^*$. Si

$$\forall t \geq 0, \| T(t) \| \leq M e^{\omega t} \ .$$

$T(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction si de type (1.0).i.e :

$$t \geq 0, \| T(t) \| \leq 1 \ .$$

Corollaire 3.2. *Si $T(t)_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe,alors l'application :*

$$[0,+\infty[\ni t \longrightarrow T(t)x \in X$$

est continue sur $[0,+\infty[$ quel que soit $x \in X$.

Démonstration. Soient $t_0, h \in [0,+\infty[$ et $x \in X$ si $t_0 < h$,nous avons :

$$\begin{aligned} \| T(t_0+h)x - T(t_0)x \| &= \| T(t_0)T(h)x - T(t_0)x \| \\ &\leq \| T(t_0) \| \| T(h)x - x \| \\ &\leq Me^{\omega t_0} \| \| T(h)x - x \| \end{aligned}$$

Si $t_0 > h$,nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| T(t_0-h)x - T(t_0)x \| &= \| T(t_0-h)x - T(t_0-h+h)x \| \\ &= \| T(t_0-h)x - T(t_0-h)T(h)x \| \\ &\leq \| T(t_0 \| -h) \| \| T(h)x - x \| \\ &\leq Me^{\omega(t_0-h)} \| T(h)x - x \| \end{aligned}$$

La continuité forte en $t_0$de l'application considérée dans l'énoncé est évidente.

□

Proposition 3.4. *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe ,alors l'application $(t,x) \longrightarrow T(t)x$ est conjointement continue sur $[0,+\infty[\times X$ dans X*

Théorème 3.3. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe de type (M,ω) et (A,D(A)) sont générateur infinitésimal.Alors on a :*

1. *si $\lambda \in C$ telle que $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(s)xds$ existe pour tout $x \in X$ .Alors*

   $$R(\lambda, A) = R(\lambda), \ \forall \lambda \in \rho(A)$$

2. *Si $Re\lambda > w$. Alors $\lambda \in \rho(A)$ et*

   $$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(s)ds$$

3. *$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}$,$\forall Re\lambda > \omega$.*

3.1.3 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 3.4. *Pour tout opérateur linéaire (A,D(A)) sur un éspace de Banach X, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *(A,D(A)) générateur de*C_0 *semi-groupe de contraction.*

2. *A est fermé et D(A) dense dans X*

3. *Pour tout*$\lambda > 0$ *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*$\| \lambda(\lambda I - A)^{-1}) \| \leq 1$

Démonstration. $1 \Longrightarrow 2$.Soit (A,D(A)) un générateur du C_0 semi-groupe de contraction. Alors On a, A fermé et D(A) dense dans X.
D'autre part, à partir du théoréme précédent on a :

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}. \ \forall Re\lambda > \omega$$

Comme A est le générateur du C_0 semi-groupe de contraction. Alors $\omega = 0$ et M =1 .cela implique que $\lambda > \omega$ et

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\lambda - 0} = \frac{1}{\lambda}$$

$2 \Longrightarrow 1$ pour cela on a besoin des lemmes suivants □

Lemme 3.2. *Soit A un opérateur qui vérifie la condition 2 du théoréme de Hille-Yosida alors :*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \ ; \ \forall x \in X$$

Démonstration. Soit $x \in D(A)$. Alors :

$$\begin{array}{rcllll} \| \lambda R(\lambda, A)x - x \| & = & \| AR(\lambda, A)x \| & (car & A, R(\lambda, A) & commute) \\ & = & \| R(\lambda, A)Ax \| & (car & A, R(\lambda, A) & borné) \\ & \leq & \dfrac{1}{\lambda} \|\| Ax \| \to 0 & lorsque \lambda \to \infty & & \end{array}$$

Mais ,D(A) est dense dans X . Alors : si $\lambda \to \infty$ on a $\lambda R(\lambda, A)x \to x$ pour tout $x \in X$ □

Remarque 3.2. *On a défini l'approximation de Yosida de A comme suit :*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R\ (\lambda,A)\text{-}\lambda I \ , \qquad \forall \lambda > 0.$$

Lemme 3.3. *Soit A un opérateur qui vérifier la condition 2 de théoréme de Hille-Yosida.*
Si A_λ *l'approximation de Yosida de A. Alors on a :*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \qquad \forall x \in D(A).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda, A)x; \qquad \forall\lambda > 0\\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax\\ &= Ax\end{aligned}$$

□

Soit A un opérateur qui vérifier la condition 2 de théoréme de Hille-Yosida .

Si A_λl'approximation de Yosida de A. Alors A $_\lambda$ est le générateur de C_0 semi-groupe de contraction e^{tA_λ} et

$$\parallel e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu} \parallel \leq t \parallel A_\lambda x - A_\mu x \parallel, \forall\lambda, \mu > 0. \qquad \forall x \in X.$$

3.1.4 semi-groupes dans un éspace de Hilbert

Définition 3.6. On dit qu'un opérateur non borné A sur un éspace de Hilbert H est coercif s'il existe une constante C> 0 telle que

$$Re < Au, u > \geq C \parallel u \parallel^2. \qquad \forall u \in D(A)$$

Lemme 3.4. *Un opérateur non borné $A : D(A) \to H$ coercif et fermé admet un inverse continu*

$$A^{-1} : H \to D(A)$$

(de norme inférieur à C^{-1} ou C est la constante de coercivité)

Remarque 3.3. *Si D(A)=H et $A \in L(H)$ est borné alors il est automatiquement fermé*

Lemme 3.5. *L'adjoint A^* d'un opérateur A à domaine dense est fermé.*

Démonstration. Soit $(u_n, v_n = A^*u_n)_{n\in N}$ une suite du graphe de l'adjoint A^* *de* A convergeant dans
$H \times H$ vers (u,v). Soit $\rho \in D(A)$, on a :

$$< v - A^*u, \rho > = < v, \rho > < u, A\rho > = \lim_{n\to\infty <} A^*u_n, \rho > - < u_n, A\rho > = 0.$$

Comme D(A) est dense dans H,cela implique que $v = A^*u$ etImA^* est fermée.

□

3.1.5 Théoréme de Lumer-philips

Définition 3.7. Un opérateur non borné est dissipatif si

$$Re < Au, u > \leq 0.\ u \in D(A).$$

IL est maximal dissipatif si en plus il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $A - \lambda_0 I$ soit surjective.

Remarque 3.4. *En fait $A - \lambda_0 I$ est bijective d'inverse continu car*

$$-Re < (A - \lambda I)u, u > \geq \lambda_0 \parallel u \parallel^2.$$

implique que $A - \lambda_0 I$ est injectife et de plus par Cauchy - Shwarez

$$\parallel (A - \lambda)u \parallel \geq \lambda_0 \parallel u \parallel$$

ce qui implique que $\parallel (A - \lambda_0 I)^{-1} \parallel \leq \frac{1}{\lambda_0}$

Lemme 3.6. *Soit A un opérateur maximal dissipatif et B un opérateur dissipatif , si $A \subset B$ alors A=B.*

Démonstration. Soit $v \in D(B)$,il existe $u \in D(A)$ tel que $(B - \lambda)v = (A - \lambda)u$ et comme $Au = Bu$, *on a* $(B - \lambda)(v - u) = 0$,or B est dissipatif donc.

$$0 = - < (B - \lambda)(v - u), v - u > \geq \lambda \parallel v - u \parallel^2$$

Ce qui implique u=v et donc $v \in D(A)$.ceci donne D(A)=D(B) et A=B. □

Remarque 3.5. *Ce lemme justifie la dénomination de maximal dissipatif :il n'y a pas d'opérateur dissipatif B plus grand pour la relation d'ordre ($\subset$)qu'un opérateur maximal dissipatif.*

Lemme 3.7. *Un opérateur maximal dissipatif est à domaine dense.*

Démonstration. Soit $v \in D(A)^{\perp}$,comme $A - \lambda_0$ est surjective , il esiste $u \in D(A)$ tel que

$$\text{v}=(A - \lambda_0)u$$

On a alors

$$0 = Re < u, v >= Re < Au, u > -\lambda_0 \parallel u \parallel^2 \leq -\lambda_0 \parallel u \parallel^2$$

Ce qui implique u=0 et v=0.ainsi $D(A)^{\perp} = 0$ et donc $D(A)^{\perp} = 0$ et donc D(A) dense dans H . □

Lemme 3.8. *Soit A un opérateur maximal dissipatif ,alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $(A - \lambda)$ soit inversible ,d'inverse continu pour tout $\lambda \geq \lambda_0$.*

Proposition 3.5. *D'aprés la remarque 3.4 $A-\lambda_0 I$ est inversible,d'inverse R(λ_0) bornée, on a :*

$$(A-\lambda)=(A-\lambda_0-(\lambda-\lambda_0))=(A-\lambda_0)(I-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda_0))$$

Il suffit donc de montrer que l'opérateur borné

$$T_\lambda=I-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda_0)\in L(H)$$

est inversible ,d'inverse continu pour tout $\lambda\geq\lambda_0$,or on a

$$<T_\lambda u,u>=\| u \|^2-(\lambda-\lambda_0)<R(\lambda_0)u,u>\geq\| u \|^2$$

Ce qui implique que T_λ est coercif et par le lemme que $T_\lambda\in L(H)$ est inversible d'inverse continu.

Théorème 3.5. *Un opérateur non borné à doamaine dense dans un espace de Hilbert ,est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contraction si et seulement s'il est maximal dissipatif.*

Démonstration. Si A est à domaine dense et maximal dissipatif alors A vérifie les hypothéses du théorème de Hille -Yosida ,et il existe donc un unique semi-groupe de contraction associé à A. Réciproquement si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction alors,pour tout $u\in D(A)$, par Cauchy-Schwarz

$$Re<\frac{S(t)u-u}{t},u>\leq\frac{1}{t}(\| S(t)u \|\| u \|-\| u \|^2)\leq 0$$

et en faisant tendre t vers 0 ,on obtient que A est dissipatif.par le théorème 3.3, A est maximal dissipatif.

□

Théorème 3.6. *Soit A un opérateur non borné de domaine dense . A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction si et seulement si A et son adjointA^* sont dissipatifs.*

3.1.6 Semi-groupe unitaire et théorème de Stone

Définition 3.8. On dit qu'un opérateur A non borné est auto-adjoint ,si $D(A)=D(A^*)$ et si A=A^*.on dit
qu'il est anti-adjoint si D(A)=D(A*) et si A=$-A^*$.

Remarque 3.6. *D'aprés le théorème 3.6 . Les opérateurs auto-adjoint dissipatifs à domaine dense et les opérateurs anti-adjoint à domaine dense sont les générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe de contraction.*

Définition 3.9. Soit S un semi-groupe fortement continu,on dit que S est unitaire,si

$$S(t)^*S(t)=S(t)S^*(t)=I,\qquad\forall t\geq 0$$

Chapitre 4

Applications des séries et intégrales de Fourier

4.1 Introduction

Dans ce chapitre,nous allons développer quelques applications des séries et des inégrales de Fourier à des problèmes de représentation et d'approximation.
Nous avons déjà vu comment les séries et les intégrales de Fourier se prêtaient à la représentation de fonctions.Suivant les hypothèses faites sur ces fonctions,on obtient des représentations en moyenne,ou des représentations locales.le cas des fonctions continues se prête pas bien au représentation locales,mais nous verons qu'on peut à ce sujet énoncer des résultats plus précis que ne le laissent prévoir les théories des chapitres précédents.Tiendrons en fin quelques nouvelles formules relatives aux intégrales de Fourier à support borné.
Nous appliquerons ensuite la notion de transformation de Fourier et de convolution aux fonctions positives et nous obtiendrons quelques résultats,utiles en théorie des probabilités,sur les fonctions de type positif.
Nous monterons enfin comment une notion nouvelle, celle de distribution, peut servir à généraliser quelques résultats sur les séries et les intégrales de Fourier.

4.2 Application des séries de ourier à l'approximation des fonctions

Soit f(x) une fonction définie sur un intervalle[a,b].Même si cette fonction est continues,elle peut être très compliquée.Et en particulier ne pas être dérivable ou ne pas être a variation bornée en certains points.Il peut alors être commode pour diverses application de la représenter,avec une approximation suffisante,par des fonctions plus simples.Ces représentation dépendent essentiellement de la définition choisie pour l'approximation.Nous allons ici en éxaminer qui ne font intervenir que la notion élémentaire de convergence uniforme,et dans
laquelles on se propose d'approcher les fonctions continues par des polynômes.

Théorème 4.1 (de Weierstrass)**.** *Si f(x) est une fonction continue sur l'intervalle fermé[a,b]on peut trouver un polynômes p(x) tel que,ε étant un nombre positif donné arbitrairement petit,on ait|f(x)-p(x)| $<\varepsilon$ quelque soit x dans l'intervalle.*

Démonstration. Divison l'intervalle[a,b] par des points $x_1, x_2, ...x_{n-1}$,en n intervalles dont les longueur soient toutes infèrieures à un nombre δ.dans chaque interval (x_i, x_{i+1}),remplaçons la courbe y=f(x) par sa corde, c'est-à-dire par les segment de droite joignant les points de coordonnées $(x_i, f(x_i))et(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Nous obtenons une ligne polygonale continue inscrite dans la courbe. Soit y=g(x) son équation. Il est possible de choisir δ assez petit pour que. ε étant donné,on ait,quelque

$$|f(x)\text{-}g(x)| < \varepsilon$$

En effet,
la fonction f(x)-g(x) est continue ,et s'annule pour x=x_i . étant donné ε arbitrairement petit,on peut trouver η (ε),indépendant de x et x_i(continuité uniforme tel que,si |x-xi| $< \eta(\varepsilon$)

$$\text{On ait } |[f(x)\text{-}g(x)]\text{-}[f(xi)\text{-}g(xi)]| < \varepsilon$$

$$\text{c'est-à-dire } |f(x)\text{-}g(x)| < \varepsilon$$

.

Si l'on prend la plus grande longueur des intervalles $x_{i+1} - x_i$ infèrieur à $\eta(\varepsilon)$,l'inègalitè souhaitèe est bien vèrifièe pour tout x.
On est donc ramené au même probléme pour g(x).or g(x) satisfait aux conditions d'application de tous les théorèmes relatifs aux séries de Fourier.
La fonction périodique égale à g(x) sur(a,b) est continue(sauf peut-être pour x=a et x=b),et sa dérivée est continue sauf aux points anguleux.
Si g(x) n'est pas continue aux éxtrémités de la période,sa série de Fourier convegrge
lentement.or nous aurons besoin d'une série de Fourier absolument convergente.pour cela,agrandissons l'intervalle[a,b]en un intervalle$[a, b']$,$b' > b$. Désignons par g_1(x) la fonction périodique et continue de période $T = b' - a$,qui coincide avec g(x) entre a et b,varie linéairement de la valeur g(b) à la valeur g(a) lorsque x varie de b à b'.cette fonction est développable en une série de Fourier de la forme

$$g_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2\Pi}{T}ax + b_n \sin\frac{2\Pi}{T}nx)$$

a_n et b_n tendant vers 0 comme $\frac{1}{n^2}$.la série $\mid a_n \mid + \mid b_n \mid$ est convergente.
Soit S_n(x) la somme des 2n+1 premiers termes de la série.on peut définir un nombre N(ε) indépendant de x.tel que,si n>N (ε),le reste de la série soit inférieur à ε.
S_n(x) réalise une approximation,à moins de 2ε,de f(x) par un polynômes trigonométrique sur l'intervalle a< x<b.
Pour terminer, on développe suivant les puissances de x les 2n cosinus et sinus qui figurent dans S_n.
On prend un nombre de termes tel que chaque développement soit valable avec une erreur inférieur

à $\frac{\varepsilon}{2n}$. On obtient ainsi un polyômes qui représente f(x) avec une erreur inférieure à 3ε.

$\square$

Remarque 4.1. *La fonction g(x) est définie sur un segment [a,b]. Nous avons vu qu'il peut être nécéssaire, pour en faire la représentation,de la prolonger d'une façon un peu arbitraire sur un intervale plus grand, de manière qu'elle ait les mêmes valeurs aux éxtrémités de l'intervalle,même lorsque ce prolongement n'est pas nécéssaire,il est souvent préférable,du point de vu de la rapidité de la convergence ;de remplacer g(x) par une fonction définie sur un intervalle plus grand.*
Supposons par exemple qu'on veuille faire l'approximation de $|x|$ *par un polynôme sur l'intervalle [-1,1],au lieu d'introduire la fonction paire ,de période 2 égale à* $|x|$ *pour* $-1 \prec x \prec 1$ *, On a intérét à partir d'un intervalle plus grand,*$-2 < x < 2$*. Pour fixer les idées .On développe en série de Fourier* $\mid x \mid$ *avec la période 4. On trouve :*

$$\mid x \mid = 1 - \frac{8}{\Pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{2n+1}{2} nx; -2 < x < 2.$$

On remplace $\mid x \mid$ *par la somme finie*

$$1 - \frac{8}{\Pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{2n+1}{2} nx$$

; On dèveloppe ensuite $\cos \frac{2n+1}{2} \Pi x$ *les puissances de x.tous ces calculs sont valables pour* $|x| < 2$*. Mais on se limite pour finir au nombre de termes tel que,sur l'intervalle partiel* $|x| \leq 1$ *initialement imposè. La prècision soit celle qu'impose l'ènoncè,cette prècision pouvant être moins bonne pour* $1 < |x| < 2$*. Cette remarque diminue beaucoup le degrè du polynôme d'approximation.*

Lemme 4.1. *Si f(x) est continue et à variation bornée, on peut la représenter par une série de Fourier uniformément,sans passer par l'intérmédiaire d'une ligne polygonale. Les sommes partielles de cette série se traitent ensuite comme nous l'avons fait ci-dessus.*
Si f(x),toujours continue,n'est pas à variation bornée en un point, sa série de Fourier peut ne pas converger en un point. D'où la nécéssité d'approcher d'abord f(x) par une fonction continue plus réguliére. On approche ainsi f(x) par des sommes trigonométriques qui ne sont pas les sommes partielles d'une série de Fourier repésentant f(x).

Théorème 4.2 (de Fejer)**.** *Le théorème de Wierstrass ne se prête pas bien aux calculs effectifs. Mais il existe un procédé plus précis qui permet d'approcher une fonction continue d'abord par un polynôme trigonométrique,puis par un polynôme ordinaire. Or nous savons qu'on ne peut pas en générale reprèsenter une fonction continue f(x) par la somme d'une série de Fourier [au sens de la convergence uniforme].la continuité n'est pas une hypothése assez précise. Si* a_n *et* b_n *sont les coefficients de Fourier de f(x),la suite*

$$S_n(x) = \tfrac{a_0}{2} + ... + a_n cosnx + b_n sinnx$$

ne converge pas uniformément(ni peut être même au sens de la convergence simple)vers f(x). On peut seulement affirmer la convergence en moyenne quadratique,qui ne nous renseigne pas suffisament.

Le théoreme de Weierstrass prouve qu'il existe des suites de polynômes trigonométriques différentes $S_n(x)$,et qui convergent uniformément vers f(x).le théoréme de Fejer a pour but de construire efféctivement une telle suite. Il utilise la notion de convergence en moyenne,ou convergence au sens de Cesaro.

Lemme 4.2. *Si la suite numérique S_n tend vers une limite S,la suite $T_n = \frac{S_1+...+S_n}{n}$ converge aussi vers S. On a en effet*

$$T_n - S = \frac{S_1-S+...+S_p-S}{n} + \frac{S_{p+1}-S...+S_n-S}{n}$$

Comme la suite S_n tend vers S,on peut choisir p assez grand pour que

$$\mid S_{p+1} - S \mid < \varepsilon, ... \mid S_n - S \mid < \varepsilon$$

Le second terme de T_n-S est donc inférieur en module à

$$\frac{n-p}{n}\varepsilon < \varepsilon$$

p étant choisi n assez grand pour que le premier terme, qui est somme d'un nombre fini et fixé de termes, soit inférieur à ε. Si n est suffisamment grand,on a donc

$$\mid T_n - S \mid < 2\varepsilon$$

et $T_n$tend vers S.
On sait que réciproquement, il existe des suites S_n non convergentes telles que la suite T_n ait une limite S. On dit alors que S_n converge en moyenne(ou au sens de Cesaro)vers S ,par exemple,la suite $(-1)^n$ converge en moyenne vers 0.

Théorème 4.3 (de Fejer)**.** *Si f(x) est une fonction périodique continue sur tout intervalle, les sommes partielles $S_n(x)$ de sa série de Fourier convergent uniformément en moyenne vers f(x).*
On dit que l'opérateur A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Démonstration. • Soit A un opératur linéaire borné sur X on défini

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{tA^n}{n!} \qquad (1)$$

Pour tout $t \geq 0$ la relation (1) converge en norme et défini un opérateur linéaire borné. On a :

$$
\begin{aligned}
T(0) &= I \\
T(t)T(s) &= e^{tA}e^{sA} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{n-k} A^{n-k} s^k A^k}{(n-k)k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\
&= T(t+s)
\end{aligned}
$$

De plus on a :

$$\| T(t) - I \| \leq \| \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \| \leq e^{t\|A\|} - 1 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\| \frac{T(t) - I}{t} - A \| \leq \| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \| \leq t \| A \|^2 e^{t\|A\|} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui implique que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu et A un générateur infinitésimal de T(t).
Fixer $\rho > 0$. Assez petit tel que

$$\| I - \rho^{-1} \int_0^p T(s)ds \| < 1$$

Alors $\rho^{-1} \int_0^p T(s)ds$ est inversible ainsi $\rho^{-1} \int_0^p T(s)ds$ est inversible, donc on a :

$$
\begin{aligned}
h^{-1}(T(h) - I) \int_0^p T(s)ds &= h^{-1}(\int_0^p T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds) \\
&= h^{-1}(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \\
&= (h^{-1} \int_0^p T(s+h)ds - h^{-1} \int_0^\rho T(s)ds)
\end{aligned}
$$

Alors

$$h^{-1}(T(h) - I) = (h^{-1} \int_0^\rho T(s+h)ds - h^{-1} \int_0^\rho T(s)ds(\int_0^\rho T(s)ds)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}$$

Si $h \longrightarrow 0$. Alors $h^{-1}(T(h) - I)$ converge en norme à l'opérateur linéaire borné

$(T(\rho) - I)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}$(générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$)

$\square$

Proposition 4.1. *Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur un espace de Banach X et A son générateur infinitésimal,alors :*

1. $\overline{D(A)}$=X
   .
2. *A est un opérateur fermé.*

Démonstration. • soient $x \in X$ et $t_n > 0$ avec n $\in N$,tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} t_n = 0$. Alors :

$$x_n = \tfrac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds \in D(A).\ \forall n \in N$$

d'où :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds = T(0)x = x$$

par conséquent D(A)=X .

• soit$(x_n)_n \in N \subset D(A)$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$

et

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} Ax_n = y$.alors :

$\| T(s)Ax_n - T(s)y \| \leq \| T(s) \| \| Ax_n - y \| \leq Me^{wt} \| Ax_n - y \|$

quel que soit $s \in [0,t]$ par suite $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$,pour

$n \longrightarrow \infty$,uniformément par rapport à $s \in [0,t]$.D'autre part,puisque

$x_n \in D(A)$,nous avons :

$$T(t)x_n - x_n = \textstyle\int_0^t T(s)Ax_nds,$$

d'où :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}[T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\longrightarrow\infty} \textstyle\int_0^t T(s)Ax_nds$$

Ou bien :

$$T(t)x - x = \textstyle\int_0^t T(s)yds.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \tfrac{T(t)x-x}{t} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \tfrac{1}{t}\textstyle\int_0^t T(s)yds = y.$$

Pour $x \in D(A)$ et A x=y,il résulte que A est un opérateur fermé.

□

Bibliographie

[1] G. Chilov, *Analyse mathématique fonctions d'une variable*, Mir.Moscou.(Tome 1).1973

[2] G. Chilov, *Analyse mathématique fonctions d'une variable*, Mir.Moscou.(Tome 2).1973

[3] J.Bass *cours matématiques*, Paris.(Tome 1) 1977.
G.Aubrun.Théorie des opérateurs,M1 Mathématique .université de la réunion.

[4]

[5] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* Mir.Moscou, Décembre 1973.

[6] B.Barusssu sous la diréction de E.Strousse *sous la diréction de E.Strousse.Propriétéq spectrales des opérateurs de Toeplitz,Thése de doctorae.Université de Bordeau*

[7] D.d.SFERRIRA *semi-groupe de contraction*,cour MASTER 2.