



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Amar Thelidji- Laghouat

FACULTE: Technologies

DEPARTEMENT : Electrotechnique

Support de Cours

(Destiné aux étudiants de 3^{ème} année Electrotechnique)

Systemes Asservis

Dr. ABDERREZEK Hadjer

2024-2025

Préface

Cette préface met en lumière l'étude des propriétés des structures de commande des systèmes linéaires continus, en abordant les modèles de systèmes dynamiques fondamentaux et en explorant les outils d'analyse temporelle et fréquentielle des systèmes de base.

L'étude des propriétés des structures de commande des systèmes linéaires continus implique l'analyse des modèles de systèmes dynamiques fondamentaux tels que les systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté. Cette analyse repose sur l'utilisation d'outils d'analyse temporelle, qui permettent d'étudier le comportement du système dans le temps, et d'outils d'analyse fréquentielle, qui mettent en lumière la réponse du système à des signaux sinusoïdaux et permettent de déterminer sa stabilité et sa performance. Ces outils sont essentiels pour concevoir et optimiser les systèmes de commande afin d'assurer leur bon fonctionnement et leur efficacité.

L'objectif final du cours d'asservissement va être d'apprendre ces trois aspects qui sont étroitement liés puis les améliorer, on cherchera à rendre compatible la rapidité ou précision et un bon amortissement au cours de la synthèse des correcteurs.

La présentation de cet polycopier respect l'ordre chronologique dans lequel la discipline est en général abordée, et se compose de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente une introduction sur les asservissements il contient l'ensemble des notions essentielles à l'étude des systèmes asservis : intérêts, notion de systèmes en Boucle Ouverte (BO) et en Boucle Fermée (BF), les asservissements, la représentation générale d'un asservissement, et Performances des systèmes asservis.

Le deuxième chapitre est consacré aux quelques rappels nécessaires sur la Transformée de Laplace, la modélisation des systèmes asservis linéaires : modèles mathématiques ; Équations différentielles, la fonction de transfert, diagrammes fonctionnels, algèbres des diagrammes fonctionnels et la correspondance entre représentation d'état et fonction de transfert. Ainsi les performances des systèmes linéaires : analyse temporelle des systèmes du 1er ordre et du 2e ordre, performances temporelles.

Le troisième chapitre concerne la définition de la réponse d'un système, Régime transitoire, Régime permanent, Réponse impulsionnelle (1er et 2ème ordre), Caractéristiques temporelles, Réponse indicielle (1er et 2ème ordre), Identification des systèmes du premier et du second ordre à partir de la réponse temporelle, Systèmes d'ordre supérieur et Influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système.

On étudie en chapitre 4 les réponses fréquentielles des systèmes linéaires : Diagramme de Bode et de Nyquist, Caractéristiques fréquentielles des systèmes dynamiques de base (1^{er} et 2^{ème} ordre), Marges de phase et de gain.

Pour finir, le cinquième chapitre est consacré à l'étude de la Stabilité (définition, explication, critère de Routh, Table de Routh, exemples d'évaluation de la stabilité, les cas particuliers, exemples), ainsi que l'étude des critères de stabilité graphiques (Bode, Nyquist et black) à travers le critère de Revers (marges de gain et de phases)), et la précision d'un système asservi (Précision statique, Calcul de l'écart statique, Précision dynamique, Caractérisation du régime transitoire).

Ce polycopié a été conçu avec le souci de la pédagogie, je formule donc le souhait que tout étudiant en ayant fait l'acquisition puisse y trouver les clés de réussite.

Table de la matière

Préface.....	i
Table de la matière.....	ii
Chapitre I : Introduction aux systèmes asservis	
I.1. Introduction.....	1
I.2. Définitions.....	1
I.2.1. Automatique.....	1
I.2.2. Un système asservi.....	2
I.3. Notion de système.....	2
I.4. Structure d'un système asservi.....	4
I.5. Concepts utiles à l'étude des systèmes asservis.....	5
Chapitre II : Modélisation des systèmes	
II.1. Rappels sur la transformée de Laplace.....	7
II.1.1. Introduction.....	7
II.1.2. Définition.....	7
II.1.2.1. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace.....	7
II.1.2.2. Transformée de Laplace inverse.....	8
II.1.2.3. Transformées de Laplace de quelques signaux usuels.....	8
II.1.2.3.1. Echelon unité.....	8
II.1.2.3.2. Rampe ou échelon de vitesse.....	9
II.1.2.3.3. Impulsion Unitaire.....	9
II.1.2.3.4. Signal sinusoïdal.....	9
II.2. Notion de Modèle.....	10
II.2.1. Définition.....	10
II.2.2. Etude des cas de modélisation.....	10
II.2.2.1. Etude la modélisation d'un système du premier ordre électrique.....	10
II.2.2.2. Etude la modélisation système du second ordre électrique.....	10
II.2.2.3. Etude la modélisation système du 2ème ordre mécanique.....	11
II.2.2.4. Etude la modélisation système Hydraulique.....	11
II.2.2.5. Etude la modélisation d'un Moteur.....	12
II.3. Notion de Fonction de Transfert.....	13
II.3.1. Définition.....	13
II.3.2. Illustration de la fonction de transfert d'un système électrique.....	14
II.3.3. Illustration de la fonction de transfert (Réponse d'un système).....	14
II.4. Schéma fonctionnels.....	14
II.4.1. Définition.....	14
II.4.2. Application d'un schéma fonctionnel.....	15
II.4.3. Réduction du schéma fonctionnel.....	16
II.5. Représentation d'état du système.....	19
II.5.1. Principe générale.....	19
II.5.2. Étude de la représentation d'état d'un système électrique.....	21
II.6. Exercices.....	22

Chapitre III : Réponses temporelles des systèmes linéaires	
III.1 Définitions.....	24
III.2 Signaux test d'entrées.....	25
III.2.1. Impulsion de Dirac.....	25
III.2.2. Signal en échelon.....	25
III.2.3. Signal rampe.....	26
III.2.4. Signal sinusoïdal.....	26
III.3. Calcul de la réponse d'un système.....	26
III.3.1. Systèmes du premier ordre.....	26
III.3.1.1. Définition.....	26
III.3.1.2. Fonction de transfert.....	27
III.3.1.3. Réponse impulsionnelle.....	27
III.3.1.4. Réponse indicielle.....	28
III.3.1.5. Réponse à une rampe.....	29
III.3.1.5. 1. Etude temporelle.....	29
III.3.1.5.2. Erreur de traînage.....	29
III.3.2. Systèmes du second ordre.....	30
III.3.2.1. Définition.....	30
III.3.2.2. Fonction de transfert et schéma bloc.....	30
III.3.2.3. Réponse à un échelon pour un système à fort amortissement.....	30
III.3.2.4. Réponse à un échelon pour un système a le coefficient d'amortissement unitaire.....	31
III.3.2.5. Réponse à l'échelon pour un système à faible amortissement.....	31
III.3.2.6. Réponse d'un système du second ordre à une rampe.....	32
III.3.3. Systèmes d'ordre supérieur.....	33
III.4. Influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système.....	33
III.4.1. Influence d'un zéro.....	33
III.4.1.1. Cas d'un zéro négatif.....	34
III.4.1.2. Cas d'un zéro positif	34
III.4.2. Influence d'un Pôle.....	35
III.4.2.1. Cas des Pôles négatives.....	35
III.4.2.2. Cas des Pôles Positifs.....	36
III.4.2.3. Cas des Pôles Nulles.....	37
III.4.3. Réponse temporelle et position des pôles.....	38
III.5. Identification des systèmes du premier et du second ordre à partir de la réponse temporelle.....	39

III.6. Exercices	39
Chapitre IV : Réponses fréquentielles des systèmes linéaires	
IV.1. Définition.....	43
IV.2. Diagramme de BODE.....	44
IV.2.1. Définition.....	44
IV.2.2. Illustration du diagramme de Bode pour différents systèmes.....	44
IV.3. Lieu et diagramme de NYQUIST.....	47
IV.3.1. Définition.....	47
IV.3.2. Illustration du diagramme de NYQUIST pour différents systèmes.....	48
IV.4. Exercices.....	49
Chapitre V. Stabilité et précision des systèmes asservis	
V.1. Enoncé du critère de stabilité.....	54
V.1.1. Définition.....	54
V.1.2. Analyse de Stabilité.....	54
V.2. Critère mathématique.....	55
V.3. Critère algébrique de Routh.....	56
V.3.1. Application du Critère de Routh pour différents systèmes.....	57
V.4. Critère du revers.....	58
V.5. Critère du revers à partir du diagramme de Bode.....	58
V.6. Les marges de stabilité.....	59
V.6.1. Détermination des marges de stabilité à partir des diagrammes de Bode	59
V.6.2. Détermination des marges de stabilité à partir des diagrammes de Nyquist.....	59
V.7. Précision des systèmes asservis.....	60
V.7.1. Précision Statique.....	60
V.7.2. Précision dynamique.....	62
V.7.2.1. Critères de performance.....	63
V.7.2.2. Rapidité des systèmes.....	64
V.8. Exercices.....	66

Chapitre I : Introduction aux systèmes asservis

I.1. Introduction

Les systèmes de régulation automatique ont une longue histoire, remontant à l'Antiquité avec des dispositifs comme le régulateur à boules flottantes inventé par Héron d'Alexandrie. Au 18^{ème} siècle, James Watt a développé le régulateur centrifuge pour contrôler la vitesse des machines à vapeur. Au 20^{ème} siècle, les avancées en électronique ont permis le développement de systèmes de régulation plus sophistiqués, comme les régulateurs PID (proportionnel-intégral-dérivé) qui sont largement utilisés aujourd'hui dans diverses applications industrielles et technologiques.

Un système automatique est un système capable d'effectuer plusieurs opérations sans interventions de l'homme. La théorie de l'automatique permet de concevoir et d'analyser des asservissements en tenant compte de multiples objectifs :

- Maintenir ou obtenir la stabilité.
- La précision.
- Faire poursuivre rapidement une consigne.
- Obtenir des réponses rapides.
- Concevoir des systèmes de commande relativement simple à mettre en œuvre.

L'objectif d'un asservissement est d'imposer à la sortie loi d'évolution choisie. Exemple : asservissement de position.

La régulation permet de maintenir une valeur donnée de la sortie malgré les perturbations agissant sur le système. Exemple : régulation de température.

I.2. Définitions :

I.2.1. Automatique : Qui fonctionne tout seul ou sans intervention humaine. Il existe deux domaines d'intervention de l'automatique :

- Dans les systèmes à événements discrets. On parle d'automatisme (séquence d'actions dans le temps).

Exemples d'applications : les distributeurs automatiques, les ascenseurs, le montage automatique dans le milieu industriel, les feux de croisement, les passages à niveaux.

- Dans les systèmes continus pour asservir et/ou commander des grandeurs physiques de façon précise et sans aide extérieure.

Exemples d'applications : l'angle d'une fusée, la vitesse de rotation d'un lecteur CD, la position du bras d'un robot, le pilotage automatique d'un avion.

Système d'orientation des pales d'une éolienne : dispositif qui oriente automatiquement la nacelle face au vent grâce à une mesure de la direction du vent effectuée par une girouette située à l'arrière de la nacelle.

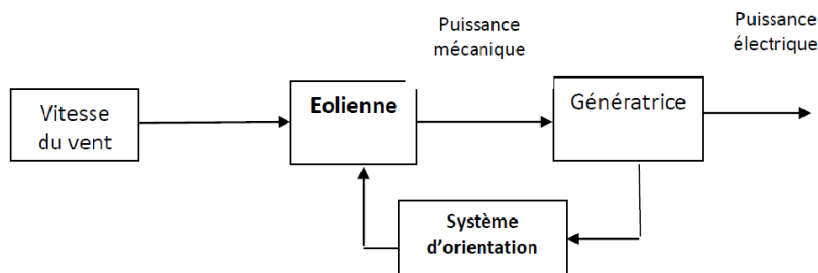


Figure I.1. Schéma fonctionnel d'une chaîne de conversion d'énergie éolienne

I.2.2. Un système asservi : est conçu pour réaliser une certaine tâche : délivrer un signal de sortie fonction connue du signal d'entrée. Ses performances sont donc jugées par comparaison entre la sortie réelle et la sortie désirée. Symboliquement, on est donc conduit au schéma de la figure 1, dans lequel la chaîne en tirets est fictive.

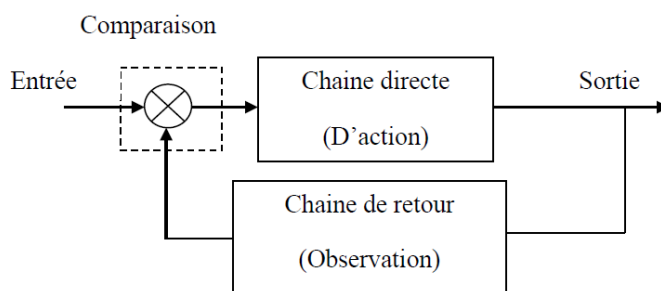


Figure I.2 : Schéma générale de l'asservissement

I.3. Notion de Système :

L'automatique peut s'appliquer à tout ce qui bouge, fonctionne, se transforme, l'objet d'application est appelé système.

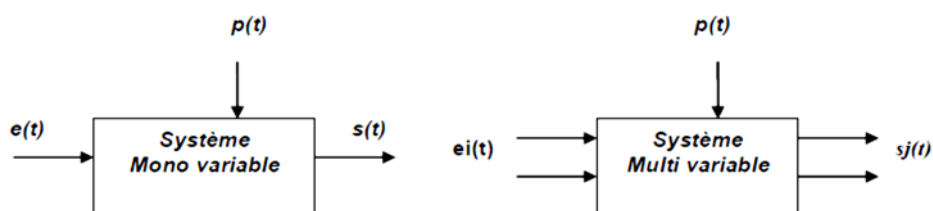


Figure I.3 : Représentation des systèmes monovariante et multivariante

- **Système de commande** : un système de commande c'est l'ensemble des techniques utilise pour commande un notre model.
- **Signal d'entre** : en appelle un signal d'entre, d'excitation applique au système de commande à partir d'une source d'énergie d'extraire afin de provoque une réponse spécifique.
- **Signal de sortie** : en appelle un signal de sortie la réponse effective obtenue à partir des systèmes de commande

Un système se caractérise par ses grandeurs d'entrées et de sorties. Les grandeurs d'entrées sont les grandeurs qui agissent sur le système, il existe deux types :

- **Commandes** : celles que l'on peut maîtriser.
- **Perturbations** : celles que l'on ne peut pas maîtriser.

Un système est dit en boucle ouverte (BO) lorsque la commande est élaborée sans l'aide de connaissances des grandeurs de sorties : il n'y a pas de retour (feedback).

Dans un système en boucle fermée (BF) la commande est alors fonction de la consigne et de la sortie, pour observer la grandeur de sortie on utilise des capteurs, c'est l'information de ces capteurs qui va permettre d'élaborer la commande.

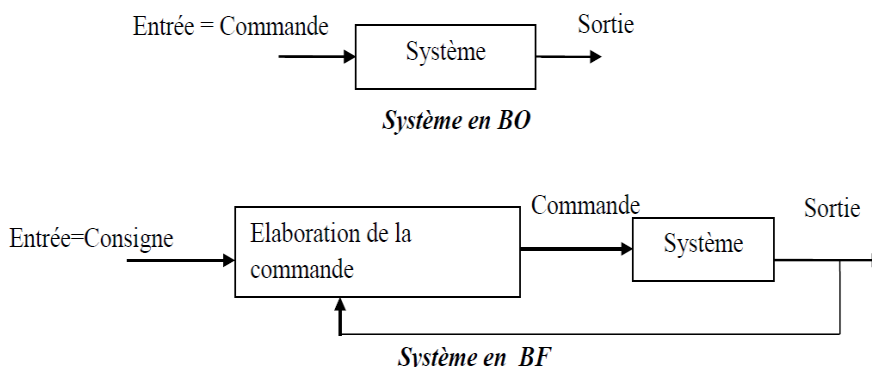


Figure I.4 : Système en boucle ouverte (BO) et système en boucle fermée (BF)

Un système asservi est un système bouclé dans lequel la grandeur de retour est comparée à la grandeur d'entrée par élaboration d'un signal, appelé écart. Ce signal écart est adapté et amplifié afin de commander la partie opérative.

A retenir, un système asservi est un système :

- A amplification de puissance
- En boucle fermée
- Nous prenons en compte les régimes transitoires, les grandeurs d'entrées et de sorties ne sont plus binaires elles sont analogiques.

Parmi les systèmes asservis, on distingue : systèmes régulateurs et systèmes suiveurs :

- On parle d'un **système régulateur** lorsque l'on désire que la sortie prenne une valeur précise et égale à une consigne d'entrée fixe.
- On parle d'un **système suiveur** lorsque l'on désire que la sortie suive une consigne d'entrée qui varie au cours du temps et dont l'évolution n'est pas toujours connue à l'avance.
- **Système dynamique** : est un système dont la réponse dépend du temps. Un système dynamique peut être en régime dynamique ou en régime statique.
- **Système statique** : est un système dont la réponse à une excitation est instantanée, le temps n'intervient pas. Exemple : loi d'Ohm $U = RI$. Relation indépendante du temps.

On distinguera deux catégories de systèmes asservis :

- **Régulations** : Le système asservi est commandé par une grandeur physique constante, et il doit maintenir une sortie constante, quelles que soient les perturbations subies.

Exemple : système de chauffage d'un four, maintien du niveau d'un réservoir...

- **Asservissements** : Les asservissements sont des systèmes destinés à faire suivre à une grandeur physique une loi généralement non fixée à l'avance. Le système doit ajuster en permanence le signal de sortie, à celui de l'entrée, quelles que soient les perturbations subies, pour que le signal de sortie soit une recopie du signal d'entrée. On l'appelle aussi système suiveur.

Exemple : robots, machines-outils, systèmes de pilotage automatiques...

I.4. Structure d'un système asservi

Un système asservi est un système bouclé dont la structure générale est donnée comme suit :

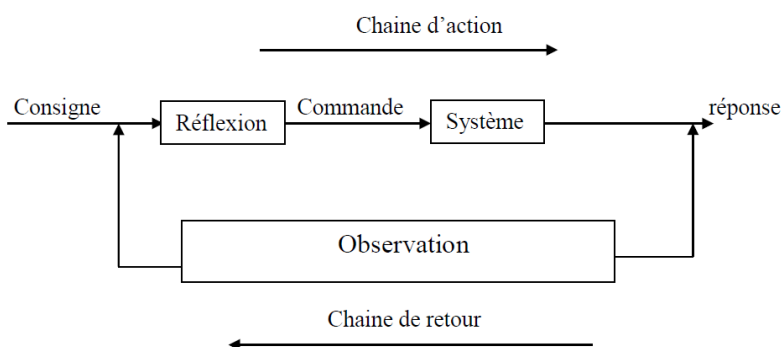


Figure I.5 : Schéma fonctionnel d'un système en boucle fermée avec chaîne d'action et chaîne de retour

On représente cet asservissement habituellement par un schéma appelé schéma fonctionnel ou schéma bloc

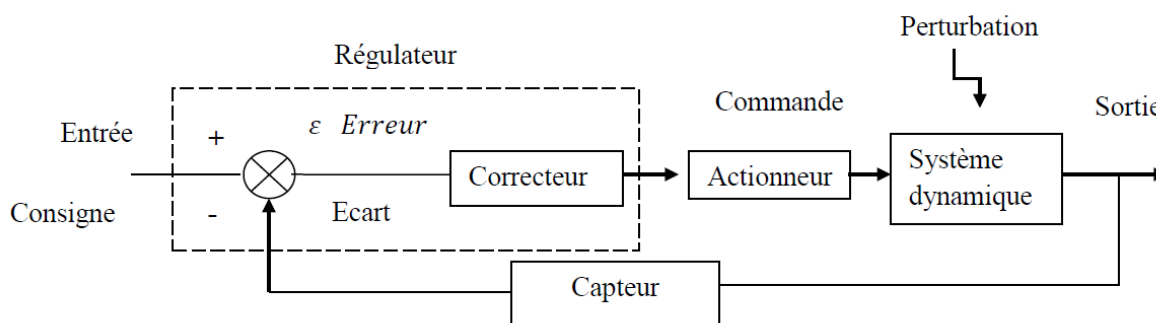


Figure I.6 : Schéma fonctionnel d'un asservissement

- a) Le régulateur (comparateur + correcteur) élabore l'ordre de commande à partir du signal d'erreur ε : c'est l'organe intelligent.

- b) L'actionneur ou l'organe d'action apporte en générale la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche c'est l'organe musclé (la vanne).
- c) Le système dynamique évolue selon l'action suivant des lois physiques qui lui sont propre ; la sortie est en générale une grandeur physique qui caractérise la tâche à réaliser, en plus cette sortie peut fluctuer en fonction des perturbations imprévisible.
- d) Le capteur délivre à partir de la sortie une grandeur caractérisant l'observation (précision du capteur implique la précision du système).

I.5. Concepts utiles à l'étude des systèmes asservis :

Dans l'analyse des systèmes asservis nous distinguons l'aspect statique et l'aspect dynamique

a) L'aspect statique : concerne l'étude des systèmes asservis en mode régulation (entrée fixée), on définit l'erreur statique comme la différence entre la tâche demandée et la tâche réalisée (annulation de l'erreur statique c'est l'asservissement)

b) Aspect dynamique : essentiel en automatique s'étudie par les notions de précision dynamique, de rapidité et de stabilité

- **La précision dynamique** est caractérisée par l'erreur avec laquelle la sortie suit la loi d'entrée imposée au système.

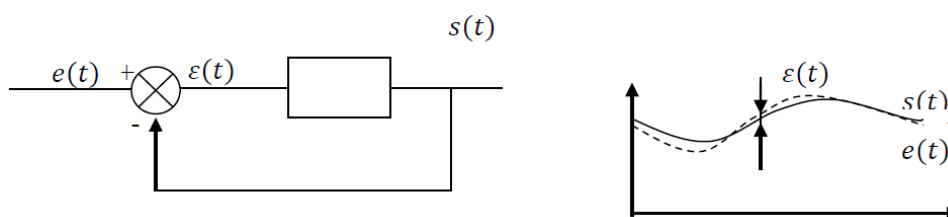


Figure I.7 : précision dynamique d'un système asservi

- **La rapidité** est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la précision dynamique (plus un système est rapide plus il est précis). (Figure I.8)

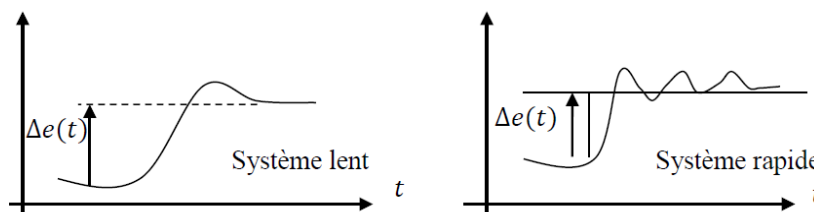


Figure I.8 : Rapidité d'un système asservi

- **La stabilité :** la présence d'un bouclage risque d'introduire une divergence ou une oscillation de la sortie. Ce comportement est intolérable pour un système asservi. On s'efforce au cours de synthèse d'éviter ce risque en se définissant une marge de stabilité. (Figure I.9).

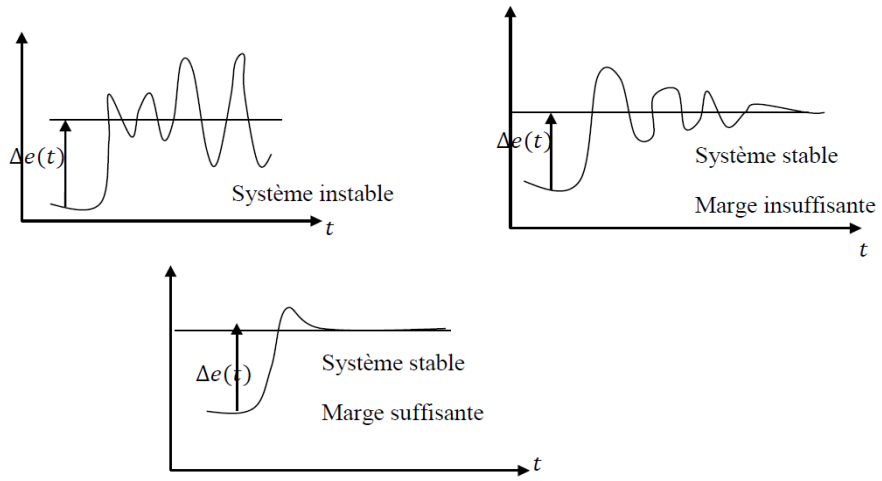


Figure I.9 : Stabilité d'un système asservi.

Chapitre II : Modélisation des systèmes

II.1. Rappels sur la transformée de Laplace

II.1.1. Introduction :

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Par cette transformation, une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique. Elle permet aussi de représenter des fonctions particulières (distribution de Heaviside, distribution de Dirac, etc.) de manière très élégante. Ce sont ces possibilités qui rendent la transformation de Laplace intéressante et populaire auprès des ingénieurs. Cette transformation a donné lieu à la technique du calcul opérationnel ou calcul symbolique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires qui représenteront les systèmes que nous allons étudier.

II.1.2. Définition :

Considérons une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t)=0$ pour $t<0$. On définit sa transformée de **Laplace** $L(s(t))$ comme la fonction S de la variable complexe P comme suit :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt \quad (1)$$

II.1.2.1. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace :

Les propriétés suivantes permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformée de Laplace) les transformées de Laplace de certaines fonctions.

a. Linéarité :

Soient f, g deux fonctions, α, β, k des constants réels

$$(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t)) \quad (2)$$

En particulier $L(f(t) + g(t)) = L(f(t)) + L(g(t)) \quad (3)$

$$L(k(f(t))) = k L(f(t)) \quad (4)$$

b. Transformation de Laplace d'une dérivée :

$$L\left(\frac{d f(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0) \quad (5)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée n -ième est :

$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n \cdot F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f(0)}{dt^{k-n-1}} \quad (6)$$

Exemple : pour la deuxième dérivée ($n=2$)

$$L\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \frac{d f(0)}{dt} \quad (7)$$

NB :

- Il faut noter que l'on trouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t=0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré
- Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui a priori très souvent le cas on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow p F(p) \quad ; \quad \frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$$

c. Transformation de Laplace d'une intégrale :

$$L(\int f(t) dt) = \frac{F(p)}{p} \quad (8)$$

d. Changement d'échelle : Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $k \neq 0$

$$\begin{cases} L(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \\ L\left(f\left(\frac{t}{k}\right)\right) = k \cdot F(kp) \end{cases} \quad (9)$$

e. Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p) \quad (10)$$

f. Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p) \quad (11)$$

II.1.2.2. Transformée de Laplace inverse :

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de trouver son original, autrement dit la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{pt} dt \quad (12)$$

II.1.2.3. Transformées de Laplace de quelques signaux usuels :

II.1.2.3.1. Echelon unité :

L'échelon unité (figure II.1) est la fonction $u(t)$ telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (13)$$

On a alors

$$U(p) = L(u(t)) = \frac{1}{p} \quad (14)$$



Figure II.1 : Echelon unité

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire) d'amplitude A , aura pour transformée de Laplace :

$$F(p) = L(f(t)) = L(A \cdot u(t)) = \frac{A}{p} \quad (15)$$

II.1.2.3.2. Rampe ou échelon de vitesse :

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction $u(t)$ précédente, on la note généralement $v(t)$, telle que $v(t)=t \cdot u(t)$ (figure II.2)

$$v(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

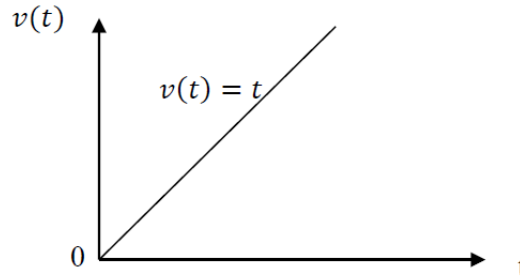


Figure II.2 : Rampe

On a évidemment
$$V(p) = L(v(t)) = \frac{1}{p^2} \quad (17)$$

II.1.2.3.3. Impulsion Unitaire :

En dérivant la fonction $u(t)$, on obtient une fonction habituellement notée $\delta(t)$ qui est appelé impulsion unitaire ou impulsion de **Dirac**

$$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt} \quad (18)$$

Il s'agit d'une fonction nulle partout sauf pour $t=0$ où elle a une valeur infinie.

$$T(p) = L(\delta(t)) = 1 \quad (19)$$

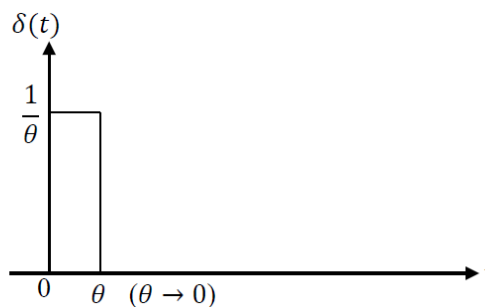


Figure II.3 : Modèle de l'impulsion de Dirac

II.1.2.3.4. Signal sinusoïdal

On considère un signal $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \geq 0$

$$S(p) = L(s(t)) = \frac{p \cdot \sin \varphi + \omega \cdot \cos \varphi}{p^2 + \omega^2} \quad (20)$$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

Pour $s(t) = \sin(\omega t) \rightarrow S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (21)$

Et pour $s(t) = \cos(\omega t) \rightarrow S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (22)$

II.2. Notion de Modèle :

II.2.1. Définition :

Les systèmes dynamiques qu'ils soient hydrauliques, mécaniques, électriques, peuvent être décrits par des équations différentielles qui sont établies à partir des lois de la physique qui gouverne le système considéré, par exemple : loi de Kirchhoff pour les systèmes électriques, loi de Newton pour les systèmes mécaniques. La description mathématique d'un système donné est appelée **modèle mathématique**.

- **Modèle mathématique** : c'est l'ensemble d'équation différentielle reliant la sortie à l'entrée ($e, \dot{e}, \ddot{e}, \dots, s, \dot{s}, \ddot{s}$) = 0 tel que : e : entrée, s : sortie
- **Modèle graphique** : consiste par le schéma fonctionnel et les schémas de fluences.

II.2.2. Etude des cas de modélisation :

II.2.2.1. Etude la modélisation d'un système du premier ordre électrique

On considère le circuit RC de la figure II.4. Nous considérons que c'est un système ayant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$, on peut appliquer la deuxième loi de Kirchhoff ainsi que la loi de Faraday.

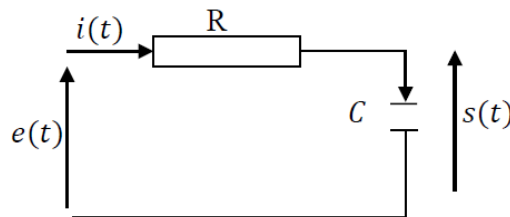


Figure II.4 : Circuit RC

$$e(t) = R i(t) + s(t) \quad (23)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{ds(t)}{dt} \quad (24)$$

Remplaçant (24) dans (23) on obtient l'équation différentielle

$$R \cdot C \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (25)$$

Ce système est donc modélisé par une équation différentielle du premier ordre. On dit aussi que le système est **de premier ordre**.

II.2.2.2. Etude la modélisation système du second ordre électrique :

On considère maintenant le système présentant un circuit RLC comme la montre (Figure II.5). Nous pouvons écrire avec le même principe que pour l'exemple précédent

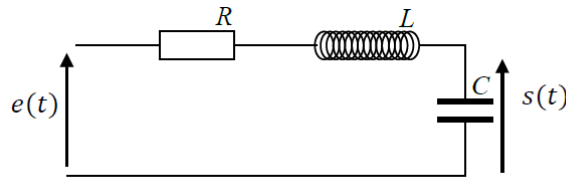


Figure II.5 : Circuit RLC

$$e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + s(t) = 0 \quad (26)$$

$$i(t) = C \frac{ds(t)}{dt} \quad (27)$$

Comme précédemment, on peut obtenir une équation différentielle reliant la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$:

$$LC \frac{d^2s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (28)$$

L'équation ainsi trouvée est une équation différentielle du second ordre qui modélise un système du **second ordre** électrique.

II.2.2.3. Etude la modélisation système du 2ème ordre mécanique

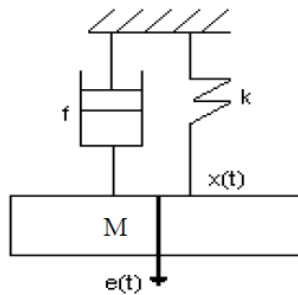


Figure II.6 : Exemple d'un système du 2ème ordre mécanique

On considère le système mécanique de la figure II.6, une masse est soumise à une force $e(t)$, à une force de rappel du ressort $\vec{f}_k = -k\vec{x}(t)$ et une force de frottement visqueux $\vec{f}_h = -f \frac{d\vec{x}}{dt}$

La relation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = e(t) - f \frac{dx(t)}{dt} - k x(t) \quad (29)$$

Ou bien
$$M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) = e(t) \quad (30)$$

II.2.2.4. Etude la modélisation système Hydraulique

Comme pour l'exemple du circuit électrique, soit un système hydraulique constitué d'un réservoir qui est alimenté par une conduite d'arrivée du liquide et qui délivre en sortie un certain débit du liquide. Le réservoir à une surface A et le niveau du liquide est repéré par la hauteur x . Le débit de la conduite qui amène le liquide est noté V_{in} , le débit du liquide quittant le réservoir est noté est V_{out} .

Pour obtenir le modèle de ce système, il faut :

- **Déterminer l'entrée et la sortie.** La grandeur que l'on souhaite contrôler dans le contexte de ce problème est la hauteur du niveau du liquide dans le réservoir. C'est donc la grandeur de sortie. L'entrée est le débit V_{in} du liquide alimentant le réservoir. On peut même définir l'entrée comme la différence entre le débit entrant et le débit sortant : $(V_{in} - V_{out})$.

- **Trouver le lien entre la sortie et l'entrée.** Le modèle mathématique est obtenu en utilisant le principe de la conservation de la matière. La variation de volume dans le réservoir est donnée par la relation :

$$A \frac{dx}{dt} = V_{out} - V_{in} \quad (31)$$

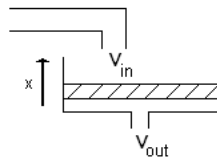


Figure II.7 : modèle d'un système hydraulique

II.2.2.5. Etude la modélisation d'un Moteur

La modélisation d'un moteur consiste à représenter son comportement dynamique à l'aide d'équations mathématiques basées sur des lois physiques. Prenons l'exemple d'un moteur à courant continu (MCC), largement utilisé dans les systèmes de contrôle et d'automatisation.

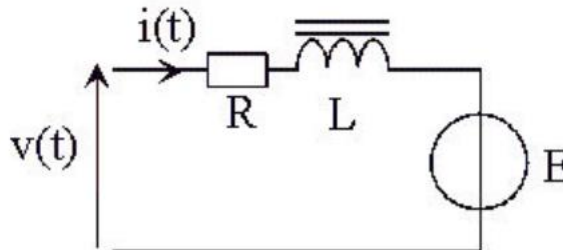


Figure II.8 : Schéma équivalent du moteur à courant continu

1. Équations du moteur à courant continu

Un MCC est décrit par deux équations fondamentales :

-Équation électrique (loi des mailles de Kirchhoff) :

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + e(t) \quad (32)$$

où :

- $V(t)$ est la tension appliquée,
- $i(t)$ est le courant dans l'induit,
- R et L sont la résistance et l'inductance de l'induit,
- $e(t)$ est la force contre-électromotrice (FCEM), proportionnelle à la vitesse du moteur $\omega(t)$.

- Équation mécanique (loi de Newton) :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + f \omega(t) = T_e - T_L \quad (33)$$

où :

- J est le moment d'inertie du rotor,
- f est le coefficient de frottement,
- $T_e = K_t i(t)$ est le couple électromagnétique généré,
- T_L est le couple de charge.

La force contre-électromotrice est donnée par :

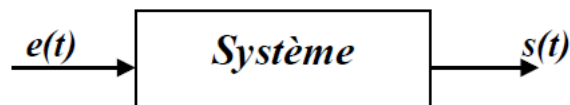
$$e(t) = K_e \omega(t) \quad (34)$$

avec K_e la constante de FCEM du moteur.

II.3. Notion de Fonction De Transfert :

II.3.1. Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$.



On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t) \quad (35)$$

Si on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation et en supposant les conditions initiales nulles il vient :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1+b_1 p+\dots+b_m p^m}{1+a_1 p+\dots+a_n p^n} \quad (36)$$

Appelée fonction de transfert du système ; n est appelé ordre du système.

$n \geq m$ (Système causal).

Où :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} \quad (37)$$

L'ensemble des z_i forme les zéros et l'ensemble p_i forme les pôles de la transmittance $G(p)$.

Le gain statique d'une fonction de transfert $G(p)$ n'est autre que $G(p=0)$.

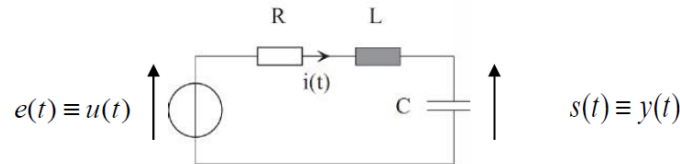
Les racines z_i qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert. Les racines p_i qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que l'étude, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

II.3.2. Illustration de la fonction de transfert d'un système électrique

Exemple 1, d'obtention de fonction de transfert : circuit RLC

L'équation différentielle du système s'écrit :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (38)$$



L'équation différentielle du système s'écrit :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (39)$$

Avec :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{ds(t)}{dt} \quad (40)$$

$$s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (41)$$

L'équation différentielle du 2ème ordre, continu, linéaire invariant devient :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{LC} s(t) = \frac{1}{LC} e(t) \quad (42)$$

La fonction de transfert est alors :

$$G(p) = \frac{1}{1+RC p+LC p^2} \quad (43)$$

II.3.3. Illustration de la fonction de transfert (Réponse d'un système)

Le système est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4 \frac{ds}{dt} + 3 s(t) = 2 e(t) \quad (44)$$

Passage aux transformées de Laplace :

$$p^2s(p) + 4p s(p) + 3 s(p) = 2 e(p) \quad (45)$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2+4p+3} \quad (46)$$

$$e(t) = u(t) \rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \quad (47)$$

Résolution :

$$S(p) = \frac{2}{p^2+4p+3} E(p) = \frac{2}{p(p+3)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+1} = \frac{2}{3p} + \frac{1}{3(p+3)} - \frac{1}{p+1} \quad (48)$$

Passage aux transformées de Laplace inverse :

$$s(t) = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t} - e^{-t} \right] u(t) \quad (49)$$

II.4. Schémas fonctionnels :

II.4.1. Définition :

Un schéma fonctionnel est une représentation simplifiée d'une fonction de transfert d'un processus. En d'autres termes, c'est un graphisme qui peut intervenir des symboles élémentaires de type sommateur, comparateur, capteur, ...

Il existe quatre schémas élémentaires utilisés dans la représentation fonctionnelle des systèmes asservis :

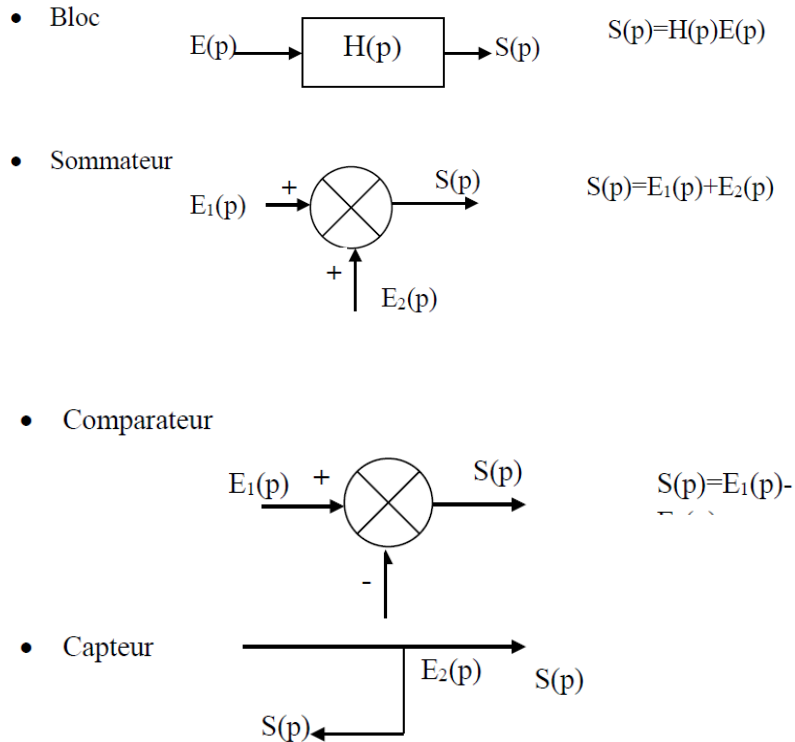


Figure II.9 : Quatre schémas élémentaires utilisés dans la représentation fonctionnelle des systèmes asservis.

II.4.2. Application d'un schéma fonctionnel :

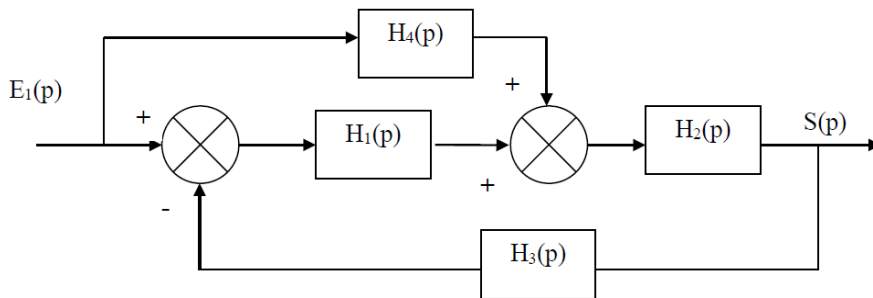


Figure II.10 : Exemple d'un schéma fonctionnel

Remarque :

➤ Représentation d'une Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) :

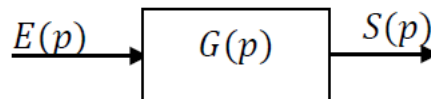


Figure II.11: Schéma fonctionnel d'une FTBO

$$S(p) = G(p).E(p) \Leftrightarrow FTBO = G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \tag{50}$$

- Représentation d'une Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

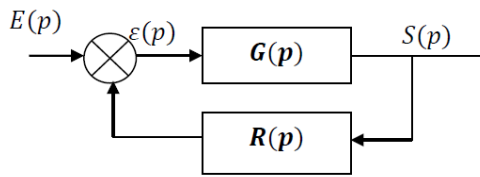


Figure II.12: Schéma fonctionnel d'une FTBF

$$S(p) = G(p) \cdot \varepsilon(p) \quad (51)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p) \cdot S(p) \quad (52)$$

Remplaçant l'équation (52) dans (51) on trouve :

$$S(p) = G(p) \cdot (E(p) - R(p) \cdot S(p)) \quad (53)$$

D'où
$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p) \cdot R(p)} \quad (54)$$

- Pour un système à retour unitaire $R(p)=1$ la FTBF devient :

$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)} \quad (55)$$

II.4.3. Réduction du schéma fonctionnel :

Simplifier un schéma ou le réduire revient à lui faire des transformations pour mettre en évidence la fonction de transfert. Pour ce faire, nous utiliserons un certain nombre de règles élémentaires qui sont :

- **Règle1** : Blocs en cascade (en série)

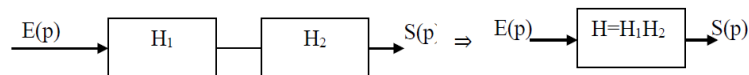


Figure II.12 : Blocs en cascade

- **Règle2** : Blocs en parallèle :

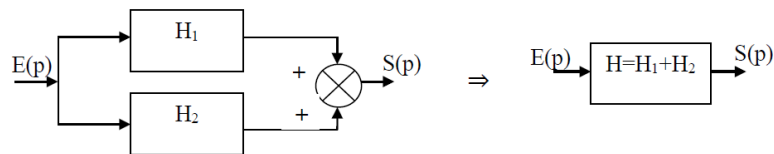


Figure II.13 : Blocs en parallèle

- **Règle 3** : Formule de Black (Réduction de boucle) :

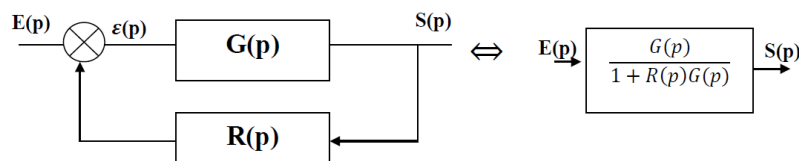


Figure II.14 : Représentation d'une boucle fermée

- **Règle 4** : Transformation d'un comparateur en un sommateur :

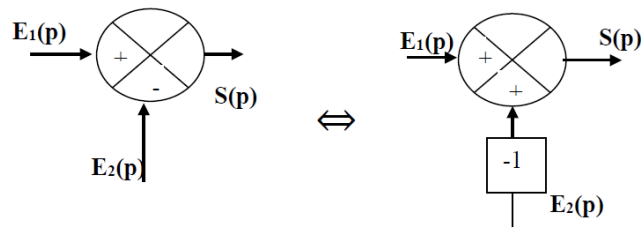


Figure II.15: Transformation d'un comparateur en un sommateur

➤ **Règle 5** : Déplacement d'un comparateur :

a) Déplacement d'un bloc d'aval en amont :

Ce type de déplacement se traduit par l'ajout d'un bloc fonctionnel de fonction de transfert égale à l'entrée du sommateur qui prend la place du comparateur comme le montre la figure (II.16) :

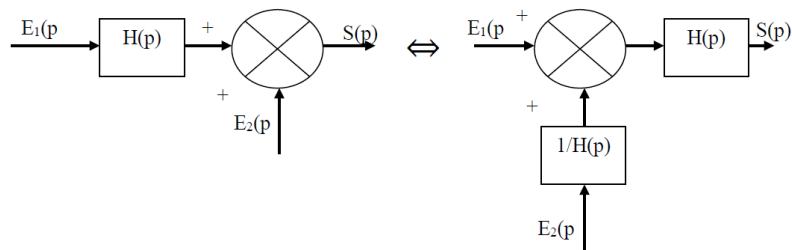


Figure II.16 : Déplacement d'un bloc d'aval en amont

$$S(p) = E_1(p) \cdot H(p) + E_2(p) \quad (56)$$

$$= H(p) \cdot \left[E_1(p) + \left(\frac{1}{H(p)} E_2(p) \right) \right] \quad (57)$$

b) Déplacement d'un bloc d'amont en aval :

Par un raisonnement analogue au cas précédent on obtient :

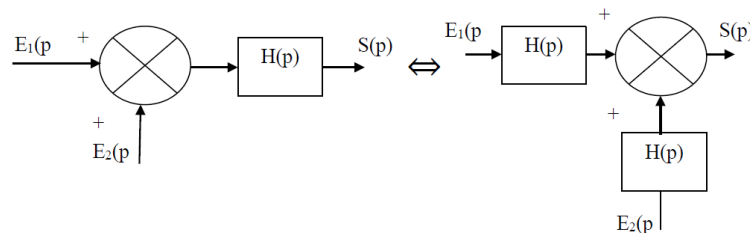


Figure II.17: Déplacement d'un bloc d'amont en aval

$$S(p) = [E_1(p) + E_2(p)] \cdot H(p) = H(p) \cdot E_1(p) + H(p) \cdot E_2(p) \quad (58)$$

➤ **Règle 6** : Déplacement d'un capteur :

- Déplacement d'un bloc d'aval en amont :

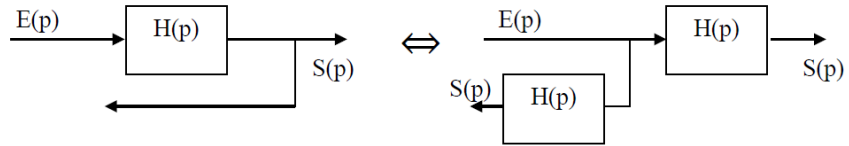


Figure II.18: Déplacement d'un bloc d'aval en amont

- Déplacement d'un bloc d'amont en aval :

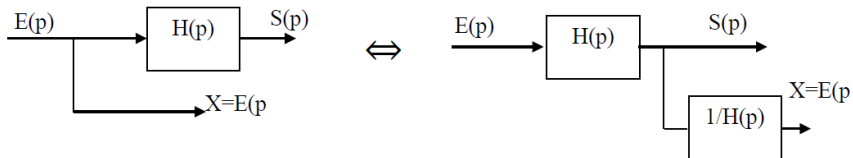


Figure II.19 : Déplacement d'un bloc d'aval en amont

Exemple :

Soit le schéma bloc suivant :

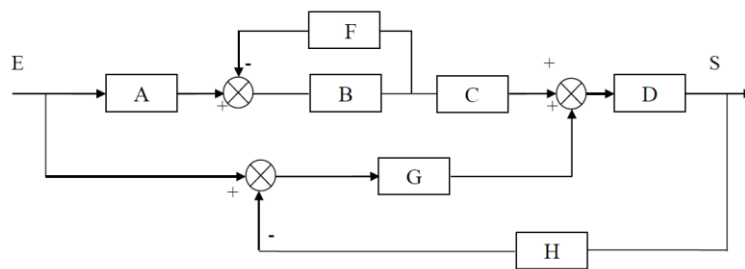
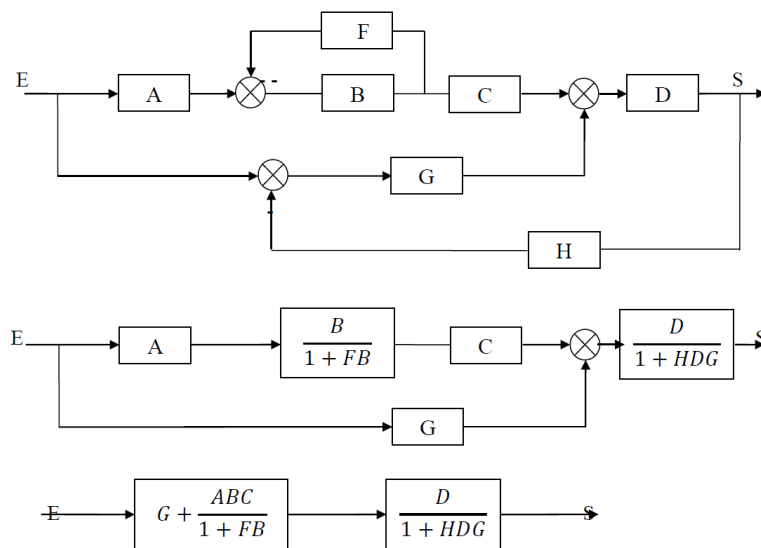


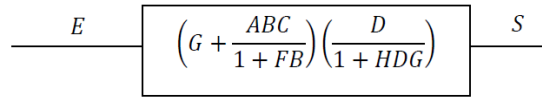
Figure II.20 : Exemple d'un schéma fonctionnel

Calculer sa fonction de transfert S/E ?

Solution :



En fin : la mise en cascade



Donc la fonction de transfert :

$$\frac{E}{S} = \frac{DG + FB DG + ABCD}{(1 + FB)(1 + HDG)} \quad (59)$$

II.5. Représentation d'état du système

La représentation d'un système par la fonction de transfert peut ne pas être appropriée pour d'écrire les comportements considérés du système. Pour cette raison, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert parmi lesquels on cite la représentation d'état ou équation d'état ou encore modèle d'état. Il s'agit, au fait, d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie. Ce support de cours présente les principes de base des systèmes linéaires mono variables continus.

II.5.1. Principe général

Afin de considérer la dynamique interne d'un système et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie, il convient de prendre en considération les grandeurs qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie aussi bien que l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes : Etat : l'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, de grandeurs, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant $t = t_0$, ainsi que celle du signal d'entrée pour $t \geq t_0$, suffit à déterminer complètement le comportement du système pour $t \geq t_0$. L'évolution de l'état à partir de l'instant t_0 n'est donc pas déterminée par son évolution avant l'instant t_0 . Seuls importent l'état à t_0 et l'entrée à partir de t_0 , comme l'illustre la Figure (2.20) où plusieurs trajectoires de $x(t)$ avant l'instant t_0 aboutissant en $x(t_0)$ sont compatibles avec la même trajectoire de $x(t)$ après t_0 .

- **Variables d'état** : ce sont les variables, grandeurs qui constituent l'état du système. Elles ne sont pas nécessairement des grandeurs physiques.

Ces variables sont au nombre de n et notées x_1, x_2, \dots, x_n ; Où n est l'ordre du modèle. L'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ constitue l'état.

- **Vecteur d'état** : on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, a priori réel, de dimension n , que l'on note :

$$x = [x_1, \dots, x_n]'$$

Il va de soi que les expressions état et vecteur d'état sont fréquemment utilisées l'une pour l'autre sans que cela n'altère fondamentalement le propos.

- **Espace d'état** : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer, chaque instance de x étant associée à un point de cet espace. Cet espace est donc R^n .

Pour un système dynamique, le vecteur d'état n'est pas unique car plusieurs choix sont possibles. Mais pour que x soit effectivement vecteur d'état, il importe que chacune des variables d'état apparaissent, de manière explicite ou implicite, sous forme dérivée dans les équations d'écrivant le système. Dans le cas contraire, il sera difficile de se servir de cette variable pour prévoir l'évolution du système.

Cette constatation conduit à un système d'équations différentielles auquel s'ajoute une équation algébrique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (60)$$

Où, f et g sont des fonctions susceptibles de prendre presque n'importe quelles formes.

Le système différentiel apparaissant dans la représentation mathématique précédente est appelé équation dynamique ou équation d'évolution alors que l'équation algébrique $y(t)$ est dite équation de mesure ou équation de sortie.

Par ailleurs, les signaux $u(t)$, $y(t)$ et $x_i(t)$ sont de toute évidence des signaux temporels. De plus, il est assez fréquent, comme il a déjà été mentionné, que les fonctions non-linéaires f et g ne dépendent pas explicitement du temps. L'on peut alors très souvent omettre la dépendance en t de manière à obtenir la représentation d'état suivante, qui correspond à un système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (61)$$

Les relations données dans cette dernière représentation constituent une représentation d'état linéaire invariante dans le temps (acronyme anglais pour Linear Time-Invariant, LTI) d'un système. C'est ce type de modèle qui fait l'objet de ce cours.

- A est appelée matrice d'état ou d'évolution. On la nomme aussi parfois matrice dynamique.
- B est appelée vecteur d'entrée ou de vecteur commande (d'où une ambiguïté avec le vecteur u).
- C est le vecteur de sortie, d'observation ou de mesure (d'où une ambiguïté avec le vecteur y) ;
- D c'est un scalaire dit de transmission directe, qui est nul s'il n'existe aucun lien statique direct entre le signal d'entrée et celui de sortie.

Remarque : Dans le cas où f et g dépendent explicitement de t , alors A , B , C et D sont des fonctions de t et le modèle est dit linéaire variant dans le temps. Il est souhaitable, si possible de recourir aussi à une approximation pour considérer ces matrices comme constantes. L'on retrouve alors un modèle LTI.

La représentation d'état peut être associée au schéma-bloc donné par la figure suivante :

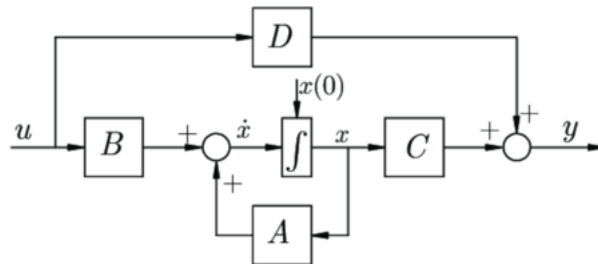


Figure II.21 : Schéma-bloc d'une représentation d'état

II.5.2. Étude de la représentation d'état d'un système électrique

Soit un circuit RLC.

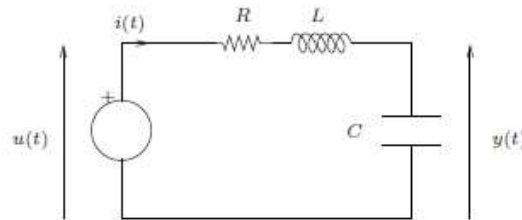


Figure II.22 : Circuit RLC

Les équations issues des lois de l'électricité qui régissent le comportement du circuit RLC sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \Leftrightarrow \frac{d y(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases} \quad (62)$$

Les deux grandeurs dont la dérivée intervient sont i et y (à partir de maintenant, la dépendance en le temps est omise pour alléger les notations). Soient donc les deux variables d'état $x_1 = i(t)$ et $x_2 = y(t)$. Les équations peuvent donc se récrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 \end{cases} \quad (63)$$

Ce qui conduit à noter :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 1]; D = 0 \quad (64)$$

Equation différentielle unique

La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale et suppose que $m = 0$, $a_n = 1$ et on pose, sans se soucier de la signification du vecteur d'état, les variables d'états suivants :

$$x_1 = y; x_2 = \dot{y}; x_3 = \ddot{y}; \dots; x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \quad (65)$$

On peut alors montrer que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]; D = 0. \quad (66)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u \quad (67)$$

On obtient alors :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}; C = [1 \ 0]; D = 0 \quad (68)$$

- **Remarque**

C'est un quadruplet de matrices différent de celui trouvé précédemment. Ceci permet de constater que le modèle d'état obtenu dépend du choix des variables d'état. Il n'est donc pas unique, contrairement à la fonction de transfert.

II.6. EXERCICES :

Exercice 01 :

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^3s}{dt^3} + 3\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + s(t) = 2\frac{de}{dt} + e(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros.

Solution de l'exercice 01 :

Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$p^3S(p) + 3p^2S(p) + 3pS(p) + S(p) = 2pE(p) + E(p)$$

$$D'où : S(p) [p^3 + 3p^2 + 3p + 1] = E(p) [2p + 1]$$

$$Soit : G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p+1}{p^3+3p^2+3p+1}$$

Nous remarquons que le dénominateur se factorise (identité remarquable).

$$D'où : G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p+1}{(p+1)^3}$$

La fonction de transfert possède donc un seul zéro $\left(\frac{-1}{2}\right)$ et un pôle triple (-1) .

Exercice 02 :

On considère le montage électrique représenté sur la figure 1.10. On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon de tension de 0 à 5 V.

Déterminer l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.

En déduire la fonction de transfert du système.

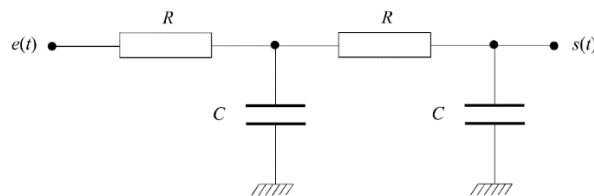


Figure II.23 : Circuit électrique du second ordre.

Solution de l'exercice 02 :

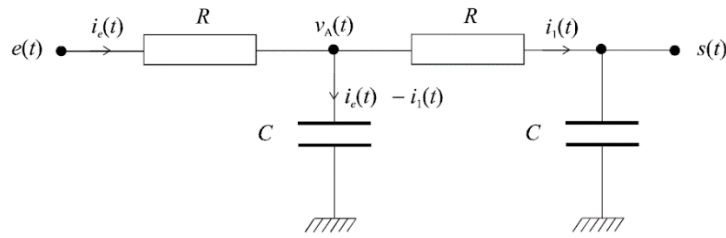


Figure II.24 : Étude du circuit électrique.

Appelons A le point commun aux deux résistances et $v_A(t)$ la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 1.14) et appliquons la loi des nœuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C \frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A - s}{R}$$

Par ailleurs, le courant $i_1(t)$ circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C \frac{ds}{dt} = \frac{v_A - s}{R}$$

Tirons de cette équation l'expression de la tension $v_A(t)$ et remplaçons celle-ci dans la première équation :

$$v_A = RC \frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$e - RC \frac{ds}{dt} - s(t) = R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2RC \frac{ds}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie $s(t)$ à $e(t)$:

$$R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 3RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

La fonction de transfert est donc : $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2 C^2 p^2 + 3RCp + 1}$

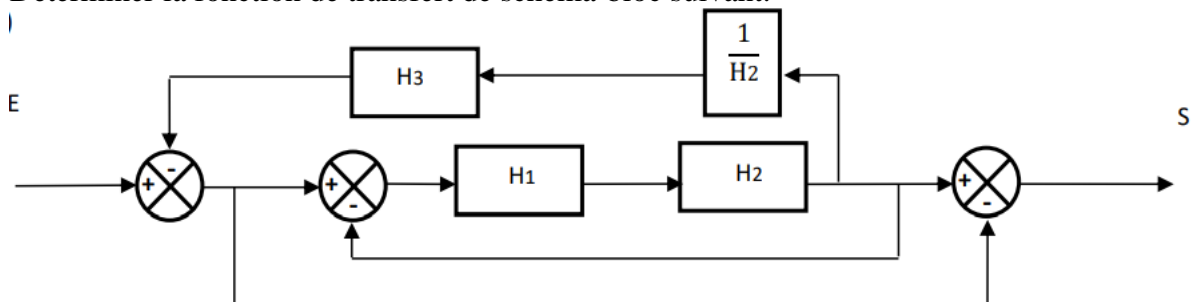
Exercice 03 :

- Calculer la transformée de Laplace de la fonction définie par : $f(t) = \cos^2 \omega t$ pour $t > 0$ et $f(t) = 0$ partout ailleurs.
- Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression

$$F(p) = \frac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$$

Exercice 04 :

Déterminer la fonction de transfert de schéma-bloc suivant.



Chapitre III : Réponses temporelles des systèmes linéaires

III.1. Définitions :

✓ La réponse temporelle d'un système

L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un système représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entrée variant dans le temps. Le signal d'entrée peut en principe être quelconque.

Toutefois, pour obtenir une expression analytique, nous utiliserons des signaux élémentaires (impulsion, échelon, rampe). Ceci se justifie par le fait que l'on peut décomposer tout signal en une somme de signaux élémentaires. Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- Impulsion de Dirac → Réponse impulsionnelle
- Echelon → Réponse indicielle
- Rampe → Réponse en vitesse
- Sinusoïde → Réponse fréquentielle

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle ; la réponse d'un système à un échelon unitaire est appelée réponse indicielle. L'objet de ce chapitre est d'étudier les réponses temporelles des systèmes du premier et du second ordre aux signaux de référence, auxquels se ramèneront les systèmes d'ordre supérieur, par approximation.

✓ Propriétés d'un asservissement :

- **La stabilité.** A consigne constante, la sortie doit tendre vers une valeur constante. L'effet de toute perturbation de durée limitée doit disparaître aux cours du temps.

C'est la condition nécessaire de fonctionnement du système.

- **La précision.** L'écart entre la sortie et sa valeur de consigne doit être suffisamment petit en régime permanent.

- **La rapidité.** Elle exprime le temps mis par le processus pour suivre un changement brusque de consigne.

✓ Classification des systèmes asservis :

- Classification selon le type de l'entrée de référence ou consigne : Asservissement ou régulation.

- Classification selon le type de régulateur (correcteur) :

- Régulateur analogique - Système asservi linéaire continu.

- Régulateur numérique-Réalisé à l'aide d'un système programmable (calculateur numérique) ; son signal de sortie est alors le résultat d'un algorithme de calcul.

- Système asservi échantillonné.

- Régulateur en tout ou rien - Système non linéaire.

✓ Aspects statique et dynamique.

Dans l'analyse des systèmes asservis on distingue l'aspect statique de l'aspect dynamique.

- **L'aspect statique** concerne l'étude des systèmes asservis en mode régulation (entrée fixe). On définit l'erreur statique comme la différence entre la tâche demandée et celle à réaliser.
- **L'aspect dynamique**, essentiel en automatique s'étudie par les notions de stabilité, de précision et de rapidité.

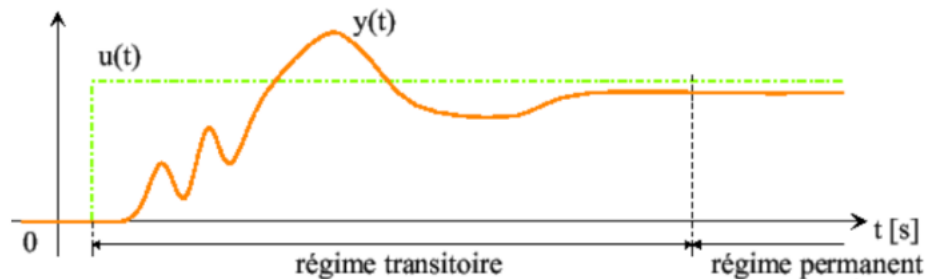


Figure III.1 : Régimes transitoire et permanent

- **Régime transitoire** : un régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable appelé régime permanent. Les **grandeurs** caractérisant le comportement du système **varient**.
- **Régime permanent** : un régime permanent est le régime d'un système **stable** observable après un certain temps, lorsque le régime transitoire est éteint.

III.2. Signaux test d'entrées

On veut caractériser les systèmes d'une part par leur fonction de transfert et, d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse $s(t)$ à une entrée donnée.

III.2.1. Impulsion de Dirac

Cette fonction impossible à réaliser matériellement permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (impulsion) : $\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(t)$

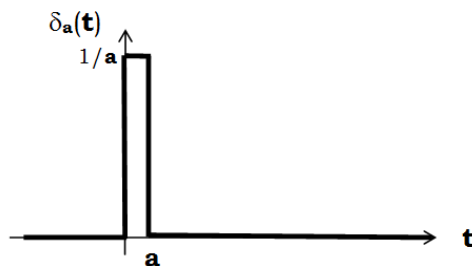


Figure III.2 : Impulsion de Dirac

III.2.2. Signal en échelon

Ce signal est le principal signal d'étude des systèmes linéaires ; la réponse des systèmes linéaires du premier et du deuxième ordre à ce signal est parfaitement connu et caractéristique du système. $e(t) = E_0 \cdot u(t)$

Avec $u(t)$: échelon unitaire telle que : $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

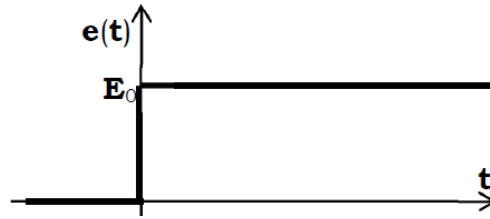


Figure III.3 : Echelon d'amplitude E_0

III.2.3. Signal rampe

Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite :

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$$

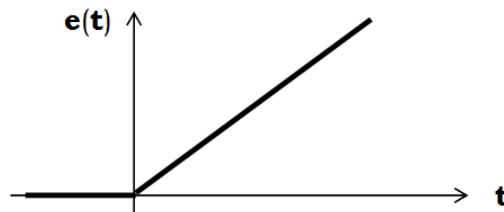


Figure III.4 : Rampe

III.2.4. Signal sinusoïdal

Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système :

$$e(t) = e_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$$

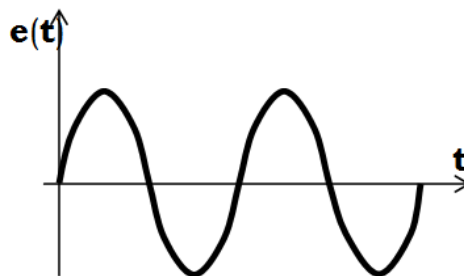


Figure III.5 : Sinusoïde

III.3. Calcul de la réponse d'un système

Dans le domaine de Laplace, La réponse d'un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est donnée par :

$$Y(p) = L\{y(t)\} = L\{g(t) * u(t)\} = G(p) \cdot U(p)$$

Où : $g(t)$ est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert $G(p)$.

La sortie $y(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$. Il suffit pour cela d'utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction $G(p)U(p)$ étudiée au chapitre 2, puis les tables de transformées, pour effectuer l'inversion.

III.3.1. Systèmes du premier ordre

III.3.1.1. Définition :

On appelle système du premier ordre, tout système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k \cdot e(t)$$

Paramètres caractéristiques :

- τ : Constante de temps en s (plus t est petit plus le système est rapide)
- k : gain statique dont l'unité est homogène au rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$. Il traduit la relation entre $e(t)$ et $s(t)$ en **régime permanent**.

III.3.1.2. Fonction de transfert

On pose :

$$L\{e(t)\} = E(p) \text{ et } L\{s(t)\} = S(p)$$

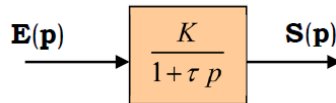
En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient :

$$\tau p S(p) + S(p) = k E(p)$$

D'où la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante :



III.3.1.3. Réponse impulsionnelle

1. Etude temporelle

On cherche à déterminer la réponse d'un système du premier ordre à une **entrée impulsion unitaire** de Dirac $\delta(t)$.

Comme : $E(p) = 1$

Alors : $S(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

La réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = -\frac{k}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

On étudie l'évolution de $s(t)$, donc $s(t)$ est :

- Décroissante d'ordonnée à l'origine : $\frac{k}{\tau}$
- De pente à l'origine $\frac{-k}{\tau^2}$
- $s(t)$ tend vers 0 en $+\infty$

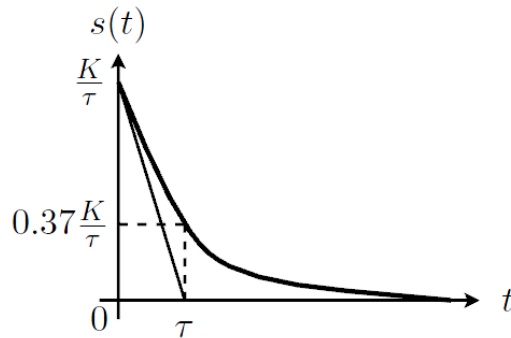


Figure III.6 : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

Temps de réponse à 95 % : T_{R95}

C'est le temps mis par le système pour atteindre 95% de sa valeur finale.

$$S(T_{R95}) = 0.05 \frac{k}{\tau} = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{T_{R95}}{\tau}}$$

D'où : $T_{R95} = -\tau \ln(0.05) = 3\tau$

- ✓ La réponse impulsionnelle est encore une impulsion.
- ✓ Sa largeur (calculée au tiers de sa hauteur) est τ .
- ✓ La valeur résiduelle au bout de 3τ est 5%.

III.3.1.4. Réponse indicielle

1. Etude temporelle

On cherche à déterminer la réponse d'un système du premier ordre à une entrée **échelon de Heaviside**.

Comme $E(p) = \frac{A}{p}$ alors $S(p) = \frac{K.A}{p(1+\tau p)}$

La réponse indicielle d'un système du premier ordre est : $s(t) = K.A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

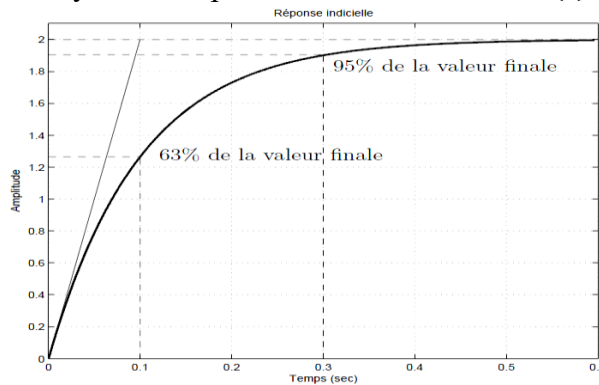


Figure III.7 : Réponse indicielle d'un système du premier ordre

On étudie l'évolution de $s(t)$, donc $s(t)$ est :

- ✓ Croissante d'ordonnée à l'origine 0
- ✓ De pente à l'origine $\frac{K.A}{\tau}$
- ✓ $s(t)$ tend vers $K.A$ en $+\infty$

Performances

❖ **Temps de réponse à 95% : T_{R95}**

C'est le temps mis par le système pour atteindre 95% de sa valeur finale.

$$s(T_{R95}) = 0.05.K.A = K.A \left(1 - e^{-\frac{T_{R95}}{\tau}}\right)$$

$$\Rightarrow T_{R95} = -\tau \ln(0.05) = 3\tau$$

❖ **Constante de temps**

Pour $t = \tau$, on a : $s(\tau) = K \cdot A \cdot (1 - e^{-1}) = 0,63K \cdot A$

❖ **Erreur statique**

Si le système est stable, on appelle erreur statique (aussi erreur de position), la différence que l'on relève sur une réponse indicielle, entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \rightarrow \infty$.

Pour un système du premier ordre, on peut calculer l'erreur statique comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [E(p) - S(p)] = A(1 - K)$$

L'erreur statique n'est donc nulle que pour les systèmes du premier ordre dont le gain statique K est unitaire. On l'exprime en pourcentage (en divisant par A). Elle est alors indépendante de l'amplitude A de l'entrée.

III.3.1.5. Réponse à une rampe

III.3.1.5. 1. Etude temporelle

Un signal d'entrée en rampe est défini par :

$$e(t) = \begin{cases} At & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \Rightarrow E(p) = \frac{A}{p^2}$$

La réponse d'un système du premier ordre à une rampe est :

$$S(p) = \frac{K \cdot A}{p^2(1 + \tau p)} = K \cdot A \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + 1/\tau} \right)$$

$$\Rightarrow s(t) = K \cdot A \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right)$$

III.3.1.5.2. Erreur de traînage

On appelle erreur de traînage (aussi erreur de vitesse), la différence que l'on relève entre l'entrée et la sortie d'un système, lorsque $t \rightarrow \infty$, pour une entrée en rampe.

Dans le cas d'un système du premier ordre, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)] \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} p [E(p) - S(p)] \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \left[\frac{A}{p^2} - \frac{K \cdot A}{p^2(1 + \tau p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{A}{p} \left[1 - \frac{K}{(1 + \tau p)} \right] \end{aligned}$$

Par conséquent : $e(t) = \begin{cases} \text{si } K = 1 & \text{l'erreur de trainage est égale à } A \cdot \tau \\ \text{si } K \neq 1 & \text{l'erreur de trainage est infinie} \end{cases}$

Conclusion : Un système du premier ordre ne suit pas en vitesse.

La figure ci-dessous nous donne l'évolution de cette réponse :

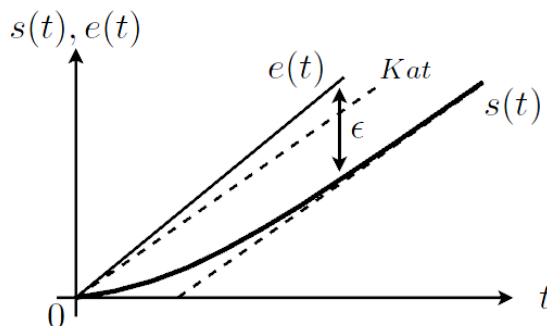


Figure III.8 : Réponse d'un système du premier ordre à une rampe

Remarque : Si K est différent de 1, la sortie ne suit pas l'entrée. On dit qu'elle **“traîne”**. L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini.

III.3.2. Systèmes du second ordre

III.3.2.1. Définition

On appelle système du second ordre tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

Soit sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{ds(t)}{dt} + \omega_n^2 s(t) = K\omega_n^2 e(t)$$

Paramètres caractéristiques :

K : gain statique dont l'unité est homogène au rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$. Il traduit la relation entre $e(t)$ et $s(t)$

en **régime permanent**

ξ : coefficient d'amortissement positif (sans unité)

ω_n : est la **pulsation propre non amortie** en rad/s.

III.3.2.2. Fonction de transfert et schéma bloc

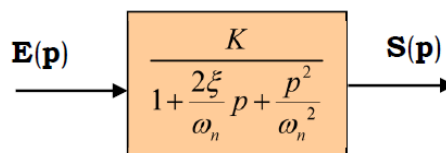
On pose $L[e(t)] = E(p)$ et $L[s(t)] = S(p)$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle de comportement (en supposant les conditions initiales nulles).

La fonction de transfert d'un système du second ordre est :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Un système du second ordre est modélisé par le schéma-bloc suivant :



III.3.2.3. Réponse à un échelon pour un système à fort amortissement ($\xi > 1$) :

On parle de système à fort amortissement. Les deux pôles réels p_1 et p_2 donnent une réponse qui sera la somme de deux exponentielles. Pour une entrée $e(t) = E_0 u(t) \rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

La sortie est donnée par : $S(p) = \frac{KE_0\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$

$$s(t) = KE_0 \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] u(t) \quad \text{avec } p_1 = \frac{-1}{\tau_1} \text{ et } p_2 = \frac{-1}{\tau_2}$$

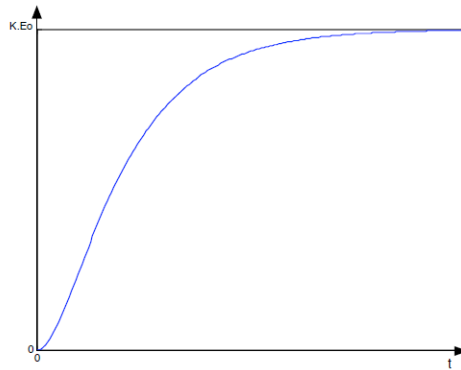


Figure III.9 : Réponse indicielle d'un second ordre à forte amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- Le régime permanent est $S_p(t) = KE_0$
- A l'origine, la tangente est horizontale

III.3.2.4. Réponse à un échelon pour un système à le coefficient d'amortissement unitaire ($\xi=1$) :

Par rapport au paragraphe précédent, les pôles sont confondus.

$$T(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

$$s(t) = KE_0 \left[1 - (1 + \omega_n t)e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right] u(t)$$

La courbe de réponse ressemble à la courbe obtenue au paragraphe précédent, mais la croissance est plus rapide.

III.3.2.5. Réponse à l'échelon pour un système à faible amortissement ($\xi < 1$) :

On parle de système à faible amortissement. Les pôles sont complexes conjugués temporelles

est : $s(t) = KE_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \right]$

Avec $\varphi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

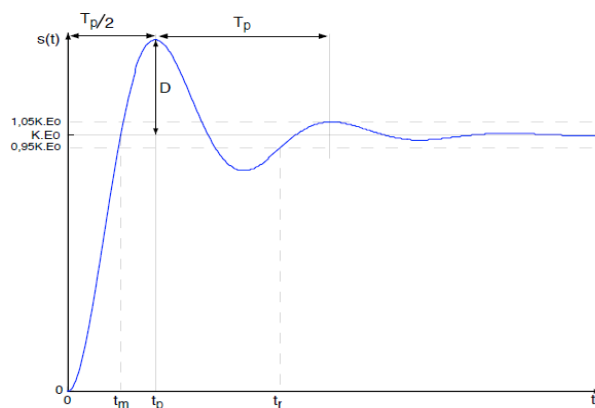


Figure III.10 : Réponse indicielle d'un second ordre à faible amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- Régime permanent $S_p(t) = KE_0$
- A l'origine, la tangente est horizontale

- Pulsation propre amortie : $\omega_p = \omega_n(\sqrt{1 - \xi^2})$
- Pseudo-période des oscillations : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Temps de montée (temps au bout duquel $s(t)$ atteint pour la première fois $S_p(t)$)

$$t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)$$

Temps de pic : $t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$

Temps de réponse à 5% c'est le temps au bout duquel la sortie atteint le régime permanent à 5% près et y reste. L'abaque ci-joint donne ce temps en fonction des caractéristiques de la fonction de transfert. Une approximation pour $\xi \ll 1$ est

$$t_r = 3 \frac{\tau_n}{\xi} = \frac{3}{\xi \omega_n}$$

Qui est le temps de réponse de l'enveloppe exponentielle.

- Le dépassement $D = s(t_p) - KE_0$ le calcul donne $D = K \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- On peut aussi définir le dépassement relatif (sans unité) : $D_r = \frac{D}{KE_0} = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- Dépassement successifs : le rapport entre deux dépassements successifs de même signe peut permettre d'identifier l'amortissement ξ

$$\ln \frac{D_2}{D_1} = \frac{-2\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

III.3.2.6. Réponse d'un système du second ordre à une rampe

L'entrée est une rampe de pente a , $E(p) = \frac{a}{p^2}$. On en déduit la sortie

$$S(p) = \frac{Ka}{p^2(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}$$

Pour $\xi > 1$ $s(t) = K \cdot a \left[t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$

Pour $\xi < 1$ $s(t) = K \cdot a \left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\frac{\xi t}{\tau_n}}}{\omega_p} \sin(\omega_p t - \psi) \right]$

Avec $\psi = -2 \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

Dans les deux cas le régime stationnaire est une droite de pente Ka dans le cas $\xi < 1$ Le régime transitoire est oscillant.

III.3.3. Systèmes d'ordre supérieur :

Soit :

$$H(p) = \frac{K}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses temporelles peut se révéler fastidieux.

L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement d'un système en fonction de ses réponses temporelles tout en considère un nombre restreint de paramètres en le ramenant a un système relativement simple.

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de pôles (réelles ou complexe conjugués) et tous ne possède pas la même influence sur les réponses temporelles. Soit une fonction de transfert d'ordre supérieur a 2.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(1+p) \cdot \left(1 + \frac{p}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{20}\right)}$$

La réponse temporelle s'écrit :

$$s(t) = 1 - \frac{25}{19}e^{-t} - \frac{1}{57}e^{-20t} + \frac{1}{3}e^{-5t}$$

Dans cette réponse temporelle, tous les éléments non pas le même poids, le terme e^{-20t} tend beaucoup plus rapidement vers zéro que e^{-t} et e^{-5t} , il peut donc être néglige par rapport au deux autres.

Sur la figure () on a tracé les réponses temporelles pour un échelon unitaire des fonctions de transfert.

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)\left(1+\frac{p}{6}\right)} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{1}{\left(1+\frac{p}{20}\right)}$$



Figure III.11 : Comparaison des réponses temporelles

On remarque qu'il n'y a peu de différence en régime permanent. Par contre l'erreur peut être notable au début.

Le résultat mis en évidence par cet exemple possède plusieurs conséquences :

- Un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, 1 ou 2 pôles dominants et se comporte donc comme un système du premier ou deuxième ordre.
- On peut simplifier la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le (ou les) pôle (s) dominant(s) (approximation par un système du premier ou du deuxième ordre).
- En pratique, un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 à 4 fois supérieur au précédent.

III.4. Influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système :

III.4.1. Influence d'un zéro :

Soit la fonction de transfert possédant un possédant un zéro réel :

$$H(p) = K \cdot \frac{1 + a \cdot p}{1 + b_1 p + b_2 p^2}$$

Cette fonction peut s'inscrire :

$$H(p) = K. \left(\frac{1}{1 + b_1 p + b_2 p^2} + a. \frac{p}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \right)$$

Elle e construit donc comme la somme de deux fonctions de transfert : la fonction sans le numérateur à laquelle on ajoute la dérivée de cette fonction affectée du coefficient a .

La réponse temporelle a un échelon unitaire est donc :

$$S(p) = K. \left(\frac{1}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \cdot \frac{1}{p} + a. \frac{p}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \cdot \frac{1}{p} \right)$$

On pose : $s_1(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \cdot \frac{1}{p} \right)$, alors : $s(t) = K. \left(s_1(t) + a. \frac{ds_1(t)}{dt} \right)$

A partir de théorème de la valeur finale, on constate que le terme dérive ne modifie pas la valeur finale.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p. S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p. K. \left(\frac{1}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \cdot \frac{1}{p} + a. \frac{p}{1 + b_1 p + b_2 p^2} \cdot \frac{1}{p} \right) \right) = K \end{aligned}$$

Le zéro a surtout un effet que pendant le régime transitoire.

III.4.1.1. Cas d'un zéro négatif :

Sur la figure () on a tracé la réponse temporelle a un échelon unitaire de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 + 0.5 p}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + p + p^2} + \frac{0.5 p}{1 + p + p^2}$$

On trouve la réponse temporelle $s(t) = s_1(t) + 0.5 \dot{s}_1(t)$

On constate sur ce graphe que l'effet du numérateur avec un zéro négatif est d'accélérer la réponse temporelle mais aussi d'amplifier les dépassements.

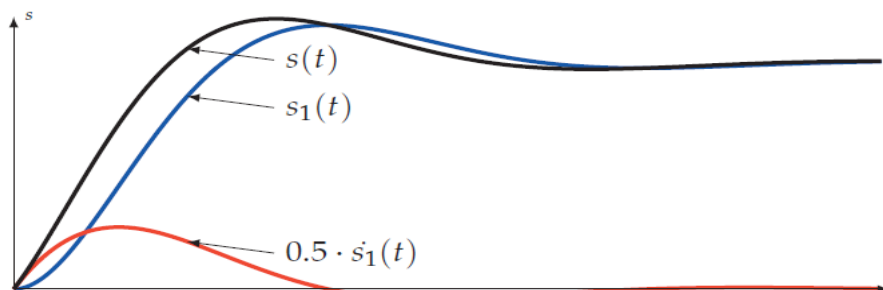


Figure III.12 : Influence d'un zéro négatif

III.4.1.2. Cas d'un zéro positif :

Sur la figure (III.13) on a tracé la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 - 0.5 p}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + p + p^2} - \frac{0.5 p}{1 + p + p^2}$$

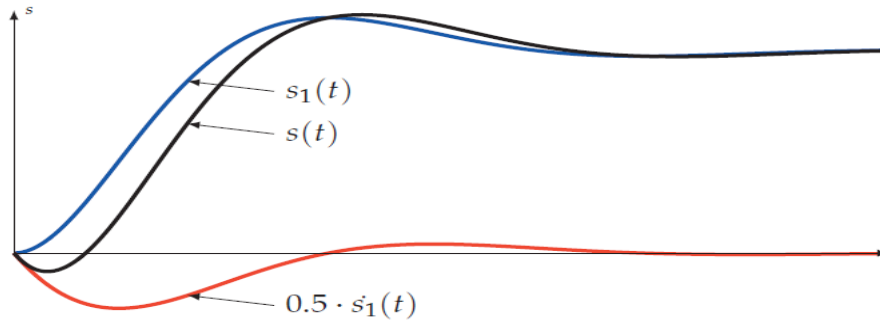


Figure III.13 : Influence d'un zéro positif

Présentant un pôle positif.

On constate que : La réponse temporelle $s(t)$ présente un « undershot » c'est-à-dire un dépassement vers le bas au démarrage.

Les zéros ont seulement une influence transitoire sur le comportement d'un système.

La présence des zéros peut provoquer des dépassements indésirables sur la réponse indicielle d'un système, ou encore sur le signal de commande.

En règle générale, la présence des zéros se traduit par une avance dans le domaine temporel.

III.4.2. Influence d'un Pôle :

III.4.2.1. Cas des Pôles négatives :

- Considérons le système du 1^{er} ordre :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p + 4}{p + 2}$$

$G(p)$ possède un pôle à -2 et un zéro à -4.

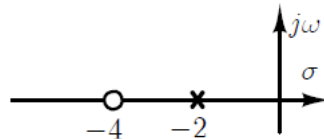


Figure III.14 : pôles et zéros de l'exemple 1.

Pour une entrée échelon unitaire, la sortie est :

$$Y(p) = U(p) G(p) = \frac{p + 4}{p(p + 2)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p + 2}$$

Ainsi, la réponse temporelle est : $y(t) = 2 - e^{-2t}$

- Considérons le système du 3^{eme} ordre :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p + 2)(p + 4)}{(p + 1)(p + 5)(p + 8)}$$

$G(p)$ possède des pôles a -1, -5, -8 et des zéros a -2, -4.

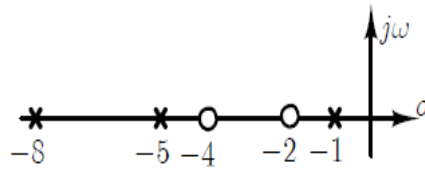


Figure III.15 : pôles et zéros de l'exemple 2.

La réponse à une entrée échelon est :

$$Y(p) = U(p) G(p) = \frac{(p+2)(p+4)}{p(p+1)(p+5)(p+8)}$$

$$= \frac{1}{5} \frac{1}{p} - \frac{3}{28} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{20} \frac{1}{p+5} - \frac{1}{7} \frac{1}{p+8}$$

Ainsi, la réponse temporelle est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{5}}_1 + \underbrace{-\frac{3}{28}e^{-t} + \frac{1}{20}e^{-5t} - \frac{1}{7}e^{-8t}}_2$$

La réponse du système est composée de 2 parties : la première (1) est la réponse forcée générée par l'entrée échelon ; la deuxième (2) est la réponse naturelle générée par la fonction de transfert.

Un pôle sur l'axe réel génère une réponse exponentielle de la forme e^{-pt} . Ainsi, plus un pôle est à gauche sur l'axe réel négatif, plus la réponse exponentielle est rapide, elle va décroître jusqu'à zéro (là encore, le pôle a -8 génère e^{-8t}).

III.4.2.2. Cas des Pôles Positifs :

Jusqu'ici, nous n'avons traité que le cas de pôles réels négatives ou de pôles complexes à partie réelles négatives.

Quel est l'effet d'un pôle réel positif sur le comportement du système ?

Soit :

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau.p)(1-\tau.p)}$$

Avec $\tau > 0$.

Étudions la réponse temporelle à un échelon $e(t) = E_0.H(t)$

$$S(p) = \frac{K}{(1+\tau.p)(1-\tau.p)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

D'où la décomposition en fractions simples :

$$S(p) = K.E_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{2.(1+\tau.p)} + \frac{\tau}{2.(1-\tau.p)} \right)$$

Et la réponse temporelle :

$$s(t) = K.E_0 \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{t/\tau} + e^{-t/\tau} \right) \right) \mathcal{H}(t)$$

Cette fonction temporelle diverge (figure ()), elle tend $-\infty$.

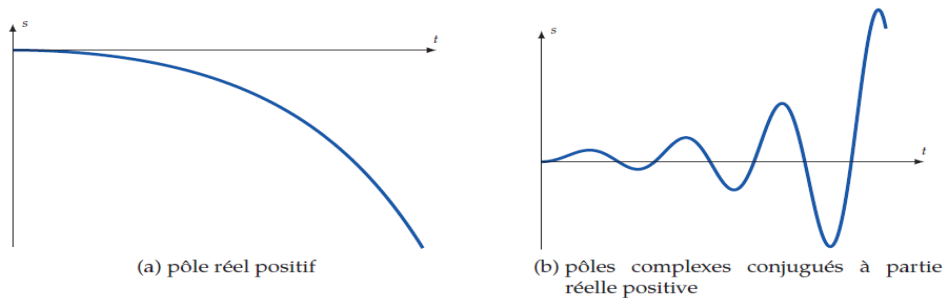


Figure III.16 : influence d'un pôle positif

De la même manière, un système possédant deux pôles complexes conjugués à partie réelle positives divergera aussi mais en oscillant, le graphe (b) présente l'allure de la réponse temporelle à un échelon unitaire de

$$H(p) = \frac{1}{1 - p + 10.p^2}$$

III.4.2.3. Cas des Pôles Nulles :

La stabilité d'un système asservi dépend des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. Lorsqu'un **pôle en zéro** ($p=0$) est introduit dans un système, il agit comme un **intégrateur**, ce qui modifie la stabilité du système.

Un **système instable** est un système qui ne possède **aucun état d'équilibre stable**. Cela signifie que sa réponse ne converge jamais vers une valeur fixe, mais au contraire, elle **diverge** ou **oscille indéfiniment** sans jamais s'amortir.

Considérons la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{K}{p(p - a)}$$

Où $K > 0$ et $p > 0$.

Les pôles de ce système sont les solutions de : $p(p - a) = 0$.

Donc, les pôles sont :

- $p = 0$ (pôle nul, qui agit comme un intégrateur).
- $p = a$ avec $a > 0$ (pôle instable, situé dans le demi-plan droit).

Le pôle en $p = a$ provoque une **divergence exponentielle**, et le pôle en $p = 0$ amplifie cette instabilité en **accumulant** les erreurs.

Exemple : Un moteur à vitesse non régulée

Prenons un **moteur à courant continu** avec une tension d'entrée $U(p)$ et une vitesse de sortie $\Omega(p)$, et dont la fonction de transfert est :

$$G(p) = \frac{K}{Jp(p - a)}$$

- J est l'inertie du moteur,
- K est une constante du système,
- a représente un effet d'instabilité (ex : rétroaction positive).

Dans ce cas

- Le **pôle en zéro** signifie que le moteur **intègre** toute commande (comme un système à accélération constante).
- Le **pôle instable** $p = a$ signifie que si l'on applique une petite perturbation, la vitesse du moteur **dérive et augmente sans limite**, rendant le système totalement **hors de contrôle**.

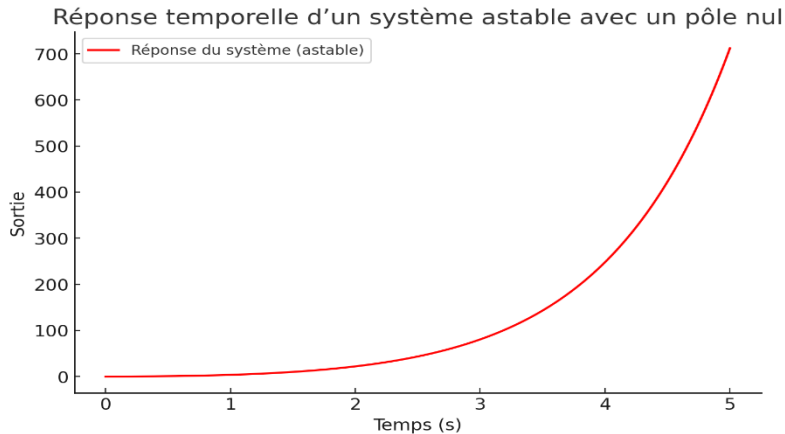


Figure III.17 : Réponse temporelle d'un système astable avec un pôle nul.

Le graphique montre la **réponse à un échelon** du système astable avec un **pôle en zéro** et un **pôle instable** $p = a$.

Un **système avec un pôle en zéro et un pôle instable** est **astable**, car il ne revient jamais à un état d'équilibre et peut soit osciller indéfiniment, soit diverger exponentiellement. Ce type de système est souvent observé en **automatique** et **électronique**, notamment dans les systèmes **sans rétroaction stabilisante**.

III.4.3. Réponse temporelle et position des pôles :

On peut regrouper les différents résultats sur la figure (III.18) sur laquelle est représentée la réponse impulsionnelle en fonction de la nature des pôles de la fonction de transfert.

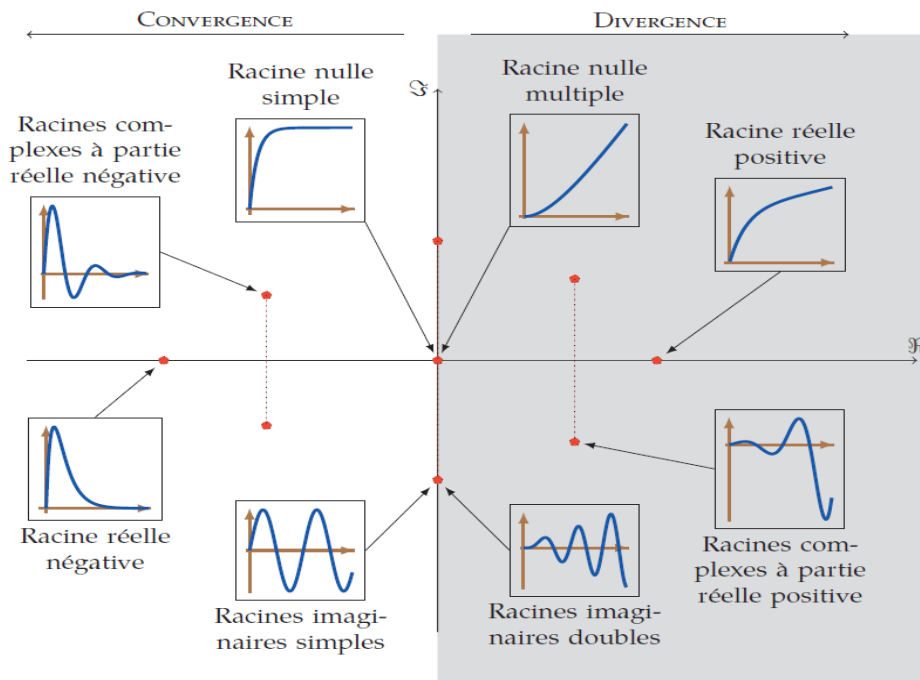
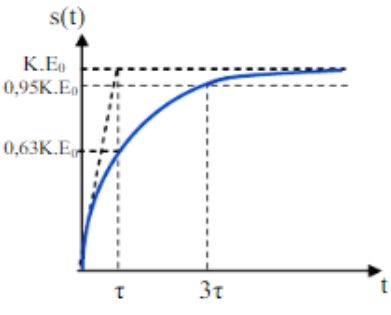
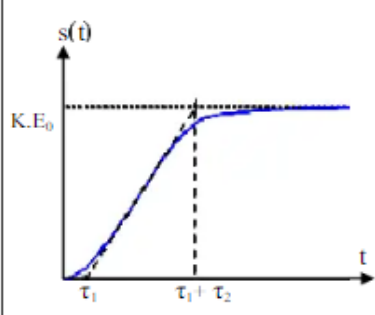
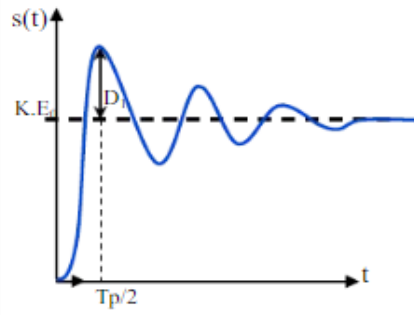


Figure III.18 : Réponse temporelle en fonction de la position des pôles.

III.5. Identification des systèmes du premier et du second ordre à partir de la réponse temporelle :

On sollicite le système par une entrée de type échelon ou par une impulsion de Dirac, on étudie ensuite la réponse temporelle de la sortie

Réponses pour une entrée échelon

Premier ordre	Second ordre	
	$\xi \geq 1$	$\xi < 1$
		
On détermine le gain par le rapport de la sortie sur l'entrée en régime permanent : $s(\infty) = KE_0$		
<p>- Tangente non nulle à l'origine. On a donc un système de 1^{er} ordre :</p> $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$ <p>On déduit la constante de temps à partir du temps de réponse à 5% ($t_{5\%} = 3\tau$) ou par la pente à l'origine ($\text{tg}\alpha = \frac{K.E_0}{\tau}$) on a aussi : $s(\tau) = 0,63 KE_0$</p>	<p>- Tangente nulle à l'origine. → système de second ordre :</p> $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$ <p>Si $\tau_1 \ll \tau_2$ on peut approximer : Méthode 1: L'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses → τ_1 et avec l'asymptote à l'infini → $\tau_1 + \tau_2$ Méthode 2 : par un premier ordre : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_2 \cdot p)}$, en utilisant l'hypothèse du pôle dominant.</p>	<p>- Tangente nulle à l'origine. → système de second ordre :</p> $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$ <p>- On détermine ξ à partir de la mesure du premier dépassement D_1 :</p> $D_1 = K.E_0 \cdot e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ <p>- ω_0 est déterminée à partir de la pseudo période T_p :</p> $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$

III.6. Exercices

Exercice 01 :

- a) Déterminer la fonction de transfert reliant la sortie $v_2(t)$ à l'entrée $v_1(t)$ du circuit électrique donné par la figure 1.

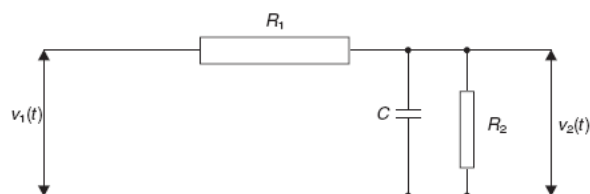


figure 1

- b) Pour $C = 2\mu\text{F}$ et $R_1 = R_2 = 1\text{M}\Omega$, calculer le gain statique K ainsi que la constante du temps τ .
- c) Donner la réponse indicielle de ce système.

Solution de l'exercice 01 :

1) La fonction de transfert reliant la sortie $v_2(t)$ à l'entrée $v_1(t)$ du circuit électrique :

$$V_1 - V_2 = R_1 i = R_1(i_1 + i_2)$$

$$V_1 - V_2 = R_1 \left(C \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{R_2} \right)$$

$$V_1(t) = V_2(t) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R_1 C \frac{dV_2}{dt}$$

La transformé de Laplace de cette équation :

$$V_1(p) = V_2(p) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R_1 C p V_2(p)$$

$$V_1(p) = \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R_1 C p \right] V_2(p)$$

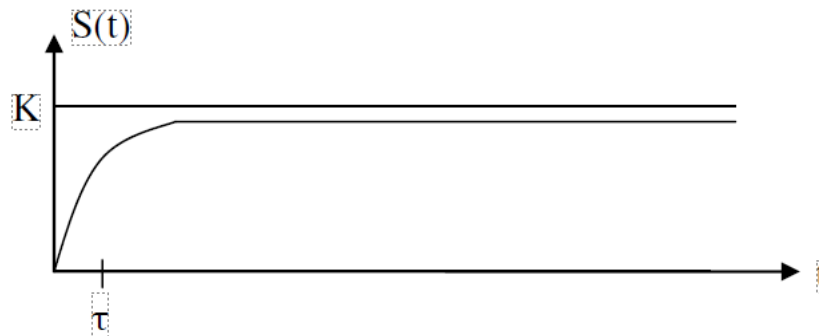
$$\frac{S}{E} = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + R_1 C p} = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_1 C}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \cdot p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2) Pour $C=2\mu\text{F}$ et $R_1=R_2=1\text{M}\Omega$:

Le gain statique : $K = 1 + \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$

La constante du temps : $\tau = \frac{R_1 C}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = 1\text{s}$

3) La réponse indicielle de ce système :

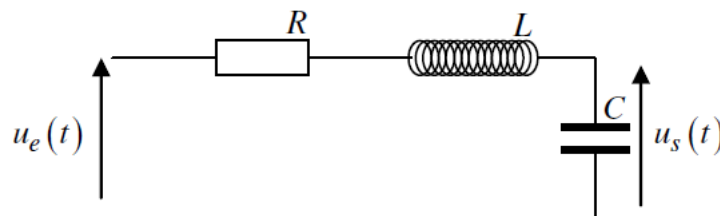


Exercice 02 :

On considère le circuit RLC

Entrée : Tension aux bornes du circuit.

Sortie : Tension aux bornes du condensateur.



1) Ecrire l'équation différentielle régissant la dynamique de sortie de ce système :

2) Donner la fonction de transfert

- 3) Donner l'expression du gain statique ; la pulsation naturelle et le coefficient d'amortissement en fonction en fonction de R ; L et C.
- 4) On supposant que $\xi < 1$; tracer l'allure de la réponse temporelle du système a un échelon de tension (0V-EV).

Solution de l'exercice 02 :

1) Les équations différentielles régissant la dynamique des sorties de ce système :

La loi des mailles donne : $u_e = u_R + u_L + u_c$

Avec : $u_R = R \cdot i$; $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ et $u_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$

Il vient donc rapidement : $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_e$

2) La fonction de transfert : $[LC p^2 + RC p + 1] \cdot u_c(p) = u_e(p)$

Il vient immédiatement : $\frac{u_c(p)}{u_e(p)} = \frac{1}{1+RC p+LC p^2}$

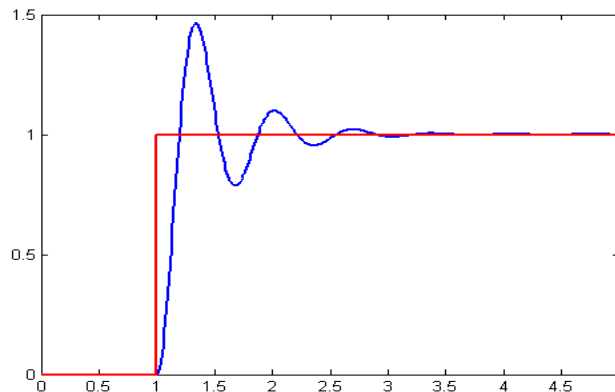
3) On procède par identification terme a terme des coefficients des fonction de transfert

- Système électrique : $\frac{u_c(p)}{u_e(p)} = \frac{1}{1+RC p+LC p^2}$

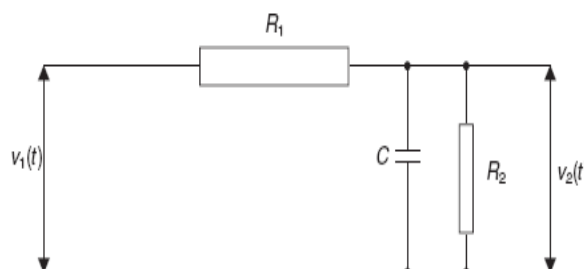
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \frac{\omega_n}{2} \cdot RC \end{array} \right. \quad \text{donc :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Gain statique} = 1 \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \end{array} \right.$$

4) En supposant que $\xi < 1$; l'allure de la réponse temporelle du système a un échelon de tension (0V-EV).

On ne dispose d'aucune valeur numérique ; Il s'agit donc de tracer l'allure de la réponse obtenue qui doit être bien connue....



Exercice 03 :



- a) Déterminer la fonction de transfert reliant la sortie $v_2(t)$ à l'entrée $v_1(t)$ du circuit électrique donné par la figure 1.
- b) Pour $C=2\mu\text{F}$ et $R_1=R_2=1\text{M}\Omega$, calculer le gain statique K ainsi que la constante du temps τ .
- c) Donner la réponse indicielle de ce système.

Exercice 04 :

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3 \frac{ds}{dt} + 2s(t) = e(t)$$

Calculer la réponse de ce système à une entrée en rampe $e(t) = t$.

Chapitre IV : Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

IV.1. Définition :

L'étude de la réponse en fréquence concerne l'étude de la réponse du système lorsqu'il est soumis aux entrées sinusoïdales de fréquences différentes. La réponse en fréquences peut être regardée de deux manières : par l'intermédiaire du diagramme de Bode ou diagramme de Nyquist.

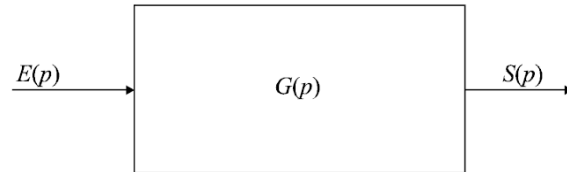


Figure IV.1 : Modèle général d'un système linéaire.

Considérons le traditionnel schéma de fonctionnement d'un système, traduit dans la représentation Laplacienne:

$$S(p) = G(p).E(p)$$

En posant $p = j\omega$, on obtient :

$$S(j\omega) = G(j\omega).E(j\omega)$$

Dans le cas de signaux à énergie finie, $S(j\omega)$ et $E(j\omega)$ représentent les transformées de Fourier des deux signaux, de sortie et d'entrée. Plus précisément, la relation ci-dessus, réduite à l'égalité des modules, prend un sens tout particulier si l'on constate que $|S(j\omega)|$ et $|E(j\omega)|$ ne sont rien d'autre que les spectres des signaux :

$$|S(j\omega)| = |G(j\omega)|.|E(j\omega)|$$

La fonction $|G(j\omega)|$, que l'on note en général $|G(\omega)|$ représente donc le rapport entre le spectre du signal de sortie et celui du signal d'entrée. Autrement dit $|G(j\omega)|$ représente le rapport des amplitudes des sinusoïdes de sortie et d'entrée, pour une pulsation ω donnée. C'est donc le gain fréquentiel du système à cette pulsation, que l'on appelle également le gain réel.

Par ailleurs, l'équation $S(j\omega) = G(j\omega).E(j\omega)$ nous conduit également à l'égalité des arguments :

$$\arg S(j\omega) = \arg G(j\omega) + \arg E(j\omega)$$

$$\text{Soit : } \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arg S(j\omega) - \arg E(j\omega)$$

Cette fonction correspond au déphasage, à la pulsation ω donnée, entre la sinusoïde de sortie et celle d'entrée.

Au final, la fonction $G(j\omega)$, que l'on appelle fonction de transfert en fréquence (ou gain complexe du système), nous fournit le gain réel $|G(j\omega)|$ et le déphasage $\varphi(\omega) =$

$\arg G(j\omega)$ induit par le système vis-à-vis des composantes sinusoïdales. Elle traduit donc le comportement fréquentiel du système.

IV.2. Diagramme de BODE :

IV.2.1. Définition :

Le diagramme de Bode permet d'étudier la réponse en fréquences d'un système linéaire de fonction de transfert $G(p)$. Pour ce faire, on remplace p par $j\omega$, ce qui permet d'écrire la fonction de transfert sous la forme suivante : $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Dans cette expression, on considère le module $A(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction complexe paramétrée par la pulsation ω . Le diagramme de Bode est obtenu en traçant (asymptotiquement) les fonctions suivantes de $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sur des échelles logarithmiques en abscisse ω (Figure IV.2)

$$A|_{dB} = 20 \log_{10}|G(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(G(j\omega))$$

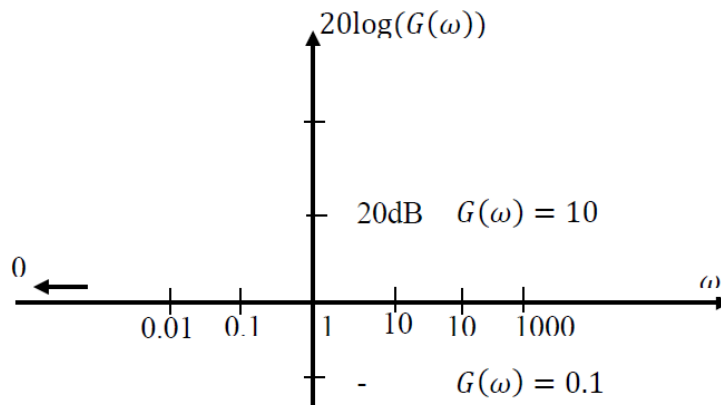


Figure IV.2 : Echelle logarithmique du diagramme de Bode

On notera que l'un des avantages du diagramme de Bode est que le diagramme global est la somme algébrique des diagrammes partiels. On donnera quelques exemples de tracés des courbes de Bode.

IV.2.2. Illustration du diagramme de Bode pour différents systèmes

Exemple 1 : On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte : $G(p) = p$

Pour étudier la réponse en fréquences de ce système, on remplace $p = j\omega$

D'où : $G(j\omega) = j\omega$

Pour utiliser la représentation de Bode, on cherche les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert.

Le gain est : $G|_{dB} = 20 \log_{10}|j\omega|$

D'où : $G|_{dB} = 20 \log_{10}\omega$

C'est cette courbe qu'il faut tracer asymptotiquement. Il s'agit d'une droite de pente égale à : $+20 \text{ dB / décade}$ (décade = $[\omega \quad 10\omega]$)

La phase est : $\varphi = \arg\left(\frac{\omega}{0}\right) = \arg(\infty) = \frac{\pi}{2}$, elle est constante (90°).

La courbe asymptotique est donnée par la figure 4.3

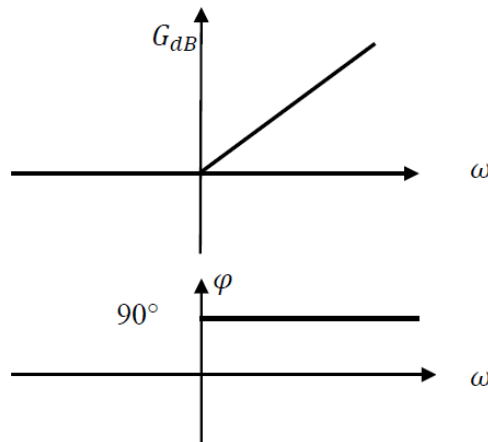


Figure IV.3 : Diagramme de Bode asymptotique de $G(p)=p$

Exemple 2 : On considère le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{1}{1+\tau p}$

τ est une constante positive (la constante de temps).

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$$

Le gain en dB

$$G_{dB} = -20 \log_{10}(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2} = -10 \log_{10}(1 + \tau^2\omega^2)$$

Et la phase : $\varphi = -\arctan(\tau\omega)$

Le diagramme asymptotique est obtenu par le raisonnement suivant. On étudie le gain aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Les basses et hautes fréquences sont déterminées par rapport à une fréquence de coupure ω_c qui est définie par : $\tau\omega_c = 1$.

- Si $\omega \ll \omega_c$, le gain en basses fréquences est : $G_{dB} = -10 \log_{10}(1) = 0dB$

Donc en basse fréquences : de $\omega=0$ jusqu'à $\omega = \omega_c$ le gain en décibel est nul.

- Si $\omega \gg \omega_c$, le gain en hautes fréquences est : $G_{dB} = -20 \log_{10}(\tau\omega)$

Donc en hautes fréquences : de $\omega = \omega_c$ jusqu'à $\omega=\infty$, le gain est asymptotiquement linéaire.

De même, pour le déphasage,

--Si $\omega \ll \omega_c$, le déphasage en basses fréquences est : $\varphi = -\arg(0) = 0^\circ$. Donc en basse fréquences : de $w=0$ jusqu'à $\omega = \omega_c$, le déphasage en décibel est pratiquement nul.

--Si $\omega \gg \omega_c$, le déphasage en hautes fréquences est : $\varphi = -\arg(\infty) = -90^\circ$. Donc en hautes fréquences : de $\omega = \omega_c$ jusqu'à $\omega = \infty$, le déphasage est asymptotiquement égale à 90° .

Ayant déterminé le comportement asymptotique, il reste à préciser les valeurs du gain et du déphasage au voisinage de la fréquence de coupure. Ceci est obtenu en posant $\omega = \omega_c$. On en déduit le gain qui vaut -3 dB.

$$G(\omega = \omega_c) = -20 \log_{10}(1 + \tau^2 \omega_c^2)^{\frac{1}{2}} = 20 \log_{10}(2) = -3 \text{ dB}$$

Pour le déphasage à la fréquence de coupure, on a: $\varphi = -\text{arg}(\tau \omega_c) = -\text{arg}(1) = -45^\circ$

Le diagramme de Bode Asymptotique est donné par la figure

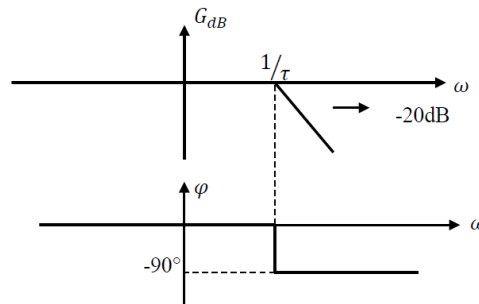


Figure IV.4 : Diagramme de Bode asymptotique d'un système du premier ordre

Exemple 3 : Système du second ordre :

Soit le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2}$ avec $0 < \xi < 1$

On a déjà déterminé les expressions du gain et du déphasage qui sont :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_n^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2}} \text{ et } \varphi(\omega) = -\text{arg} \frac{2\xi \omega_n}{(1 - \omega_n^2)}$$

• *Comportement asymptotique*

L'expression du gain est : $G_{dB} = -20 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

--En basses fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, $G_{dB} \cong -20 \log_{10}(1) \approx 0$. L'asymptote en basse fréquences est nulle.

--En hautes fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, $G_{dB} \cong -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$, L'asymptote en hautes fréquences est une pente de -40 dB/ décade.

--Si la pulsation du signal d'entrée est ω_c , alors $\frac{\omega_c}{\omega_n} = 1$; le gain est : $G = -20 \log_{10} [(2\xi)^2]^{\frac{1}{2}}$

Ce gain pour la fréquence de coupure dépend du coefficient d'amortissement. Si on suppose $\xi = 1$, le gain est de -6dB.

On effectue un raisonnement analogue pour déterminer le diagramme asymptotique du déphasage.

$$\varphi(\omega) = -\text{arg} \frac{2\xi \omega_n}{(1 - \omega_n^2)}$$

--En basses fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$, $\varphi \cong 0$. L'asymptote en basse fréquences est nulle.

--En hautes fréquences, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, $\varphi(\omega) = -\arg \frac{2\xi\omega_n}{(1-\omega_n^2)} \approx -\arg \left(\frac{1}{\infty}\right) \approx -\arg(0) = -180^\circ$;
L'asymptote en hautes fréquences est une droite horizontale à -90° .

--Si la pulsation du signal d'entrée est ω_c , alors $\frac{\omega_c}{\omega_n} = 1$, le déphasage est :

$$\varphi(\omega_c) = -\arg(\infty) = -90^\circ.$$

Le diagramme de Bode (amplitude et phase) est donné pour $F(p) = \frac{1}{p^2+0.5p+1}$ dans la figure 4.5.

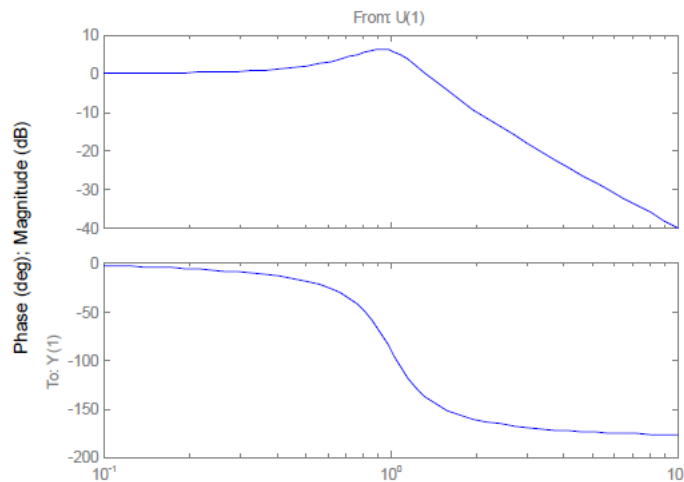


Figure IV.5 : courbes de Bode d'un système du second ordre

IV.3. Lieu et diagramme de NYQUIST

IV.3.1. Définition :

Les courbes de gain et de phase ne constituent pas la seule représentation possible du comportement harmonique d'un système de fonction de transfert $G(p)$. Il existe une autre représentation qui consiste à décomposer la fonction de transfert en sa partie réelle et imaginaire.

$$G(\omega) = Re(\omega) + j Im(\omega)$$

Cette formulation est exploitée par **Nyquist** pour représenter la réponse harmonique d'un système donnée par sa fonction de transfert, il s'agit du tracé de la courbe polaire des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Cette courbe s'appelle le lieu de Nyquist ou lieu polaire. (Figure IV.6)

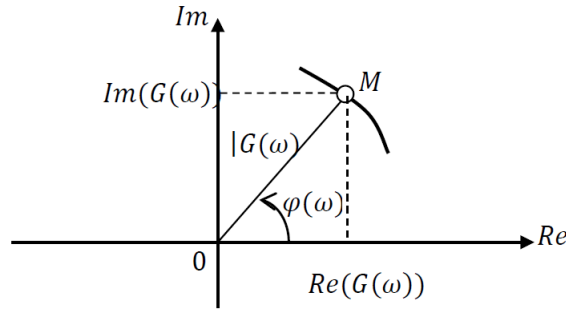


Figure IV.6 : Définition du diagramme de Nyquist

IV.3.2. Illustration du diagramme de NYQUIST pour différents systèmes :

Exemple 1 : Soit le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{1}{p+1}$

Pour établir le lieu de Nyquist, on remplace p par $j\omega$ dans $G(p)$ et on décompose $G(j\omega)$ en une partie réelle et une partie imaginaire.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \quad \Rightarrow \quad Re(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \text{et} \quad Im(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

Le lieu de Nyquist est obtenu pour différentes valeurs de ω de 0 jusqu'à l'infini. On se contente d'une étude asymptotique et de la détermination de quelques points remarquables.

$$\omega \rightarrow 0 \quad \begin{cases} Re \rightarrow 1 \\ Im \rightarrow 0 \end{cases} ; \quad \omega \rightarrow \infty \quad \begin{cases} Re \rightarrow 0 \\ Im \rightarrow 0 \end{cases} ; \quad \omega \rightarrow 1 \quad \begin{cases} Re \rightarrow 1/2 \\ Im \rightarrow 1/2 \end{cases}$$

On obtient le tracé du lieu de Nyquist donné par la figure (4.7)

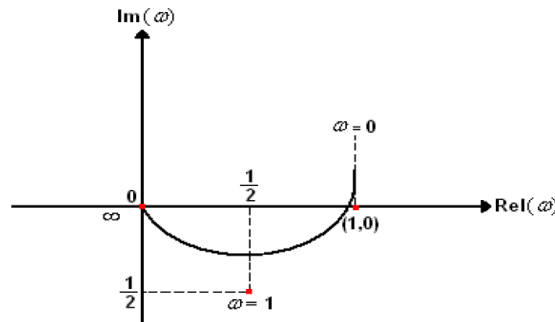


Figure IV.7 : Tracé de Nyquist de la FT $G(p) = \frac{1}{p+1}$

Exemple 2 : Soit le système de FT : $H(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

Pour établir le lieu de Nyquist, on remplace p par $j\omega$ dans $H(p)$ et on décompose $H(j\omega)$ en une partie réelle et une partie imaginaire comme suit.

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{1}{(j\omega+2-\omega^2+2j\omega)} = \frac{2-\omega^2-3j\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

$$\text{d'ou : } Re(j\omega) = \frac{2-\omega^2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} \quad \text{et} \quad Im(j\omega) = \frac{-3j\omega}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

On détermine quelques points caractéristiques pour tracer le lieu de Nyquist :

Pour $\omega \rightarrow 0$, on a : $Re(0) = \frac{1}{2}$ et $Im(0) = 0$

Pour $\omega \rightarrow \infty$, on a : $Re(\infty) = 0$ et $Im(\infty) = 0$

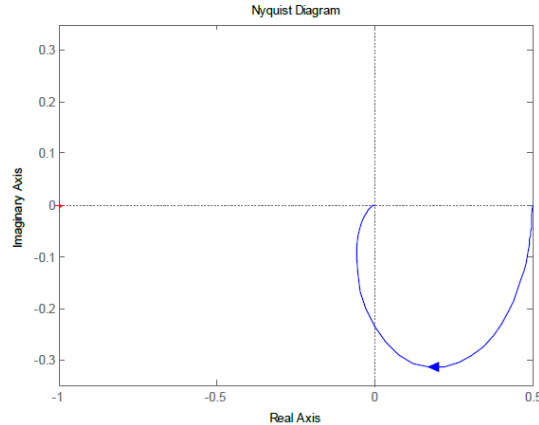


Figure IV.8 : Tracé de Nyquist de la FT $H(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$ par Matlab

IV.4. Exercices :

Exercice 01 :

On considère le système de fonction de transfert $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+100)}$$

Déterminer la valeur de K pour laquelle la pulsation de coupure à 0 dB, définie par $G(\omega_{c0}) = 1$ ou encore par $G_{dB}(\omega_{c0}) = 20 \log G(\omega_{c0}) = 0$ est égale à 5 rad/s.

Solution de l'exercice 01 :

Calculons l'expression du gain réel :

On considère le système de fonction de transfert $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+100)} \Rightarrow G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+10^4}}$$

Pour ω_{c0} , on a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{\omega_{c0}^2+1}\sqrt{\omega_{c0}^2+10^4}} = 1$$

d'où :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{5^2+1}\sqrt{5^2+10^4}} = 1$$

On en déduit :

$$K = \sqrt{25+1}\sqrt{25+10^4} = 511$$

Exercice 02 :

On considère le système de fonction de transfert $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{1000}{p(p+1)^2(p+10)}$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce système et en déduire son diagramme de Nyquist. On s'attachera, notamment, à démontrer l'existence d'une asymptote à la courbe de Nyquist lorsque $\omega \rightarrow 0$.

Solution de l'exercice 02 :

Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque p tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0).

On a :
$$G(p) \approx \frac{100}{p} \implies G(\omega) = \frac{100}{\omega}$$

soit :
$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 40 \text{ dB} - 20 \log \omega$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (figure 4.8). Il s'agit d'un segment de pente $[-1]$ autrement dit -20 dB/décade . La connaissance d'un point suffit donc pour tracer de segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = 40 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle $[0, 1]$ possède donc une pente de -20 dB/décade et s'arrête au point

$(1, 40 \text{ dB})$, comme indiqué sur la figure 4.8.

Au-delà de la pulsation de coupure $\omega = 1 \text{ rad/s}$, nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme $(p+1)$ se trouve au dénominateur et qu'il est élevé au carré, la pente se décrémente de deux unités. Nous obtenons donc un segment de droite de pente $[-3]$. Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ($\omega = 10 \text{ rad/s}$).

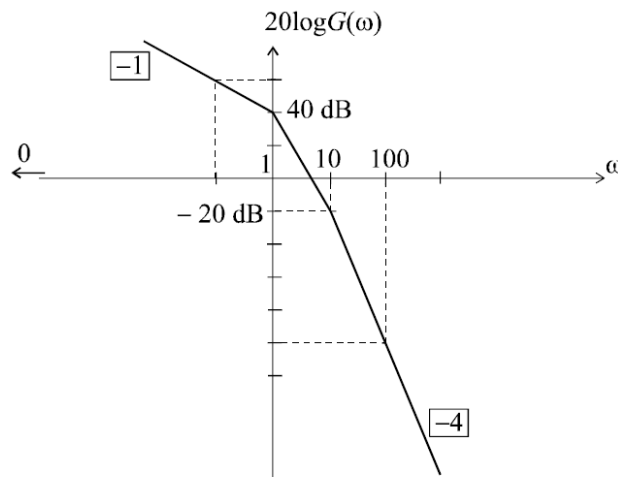


Figure IV.9 Diagramme de Bode de gain du système.

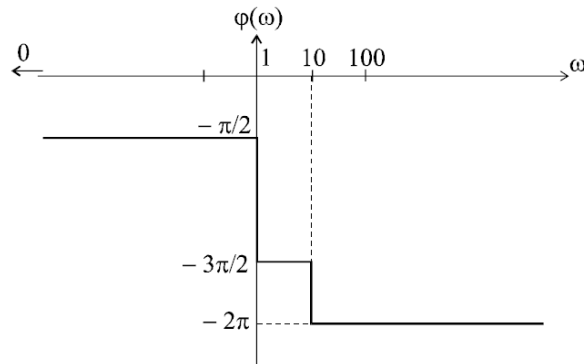


Figure IV.10 : Diagramme de Bode de phase du système.

À partir de $\omega = 10$ rad/s, nous aurons une direction asymptotique de pente $[-4]$ puisque le terme $(p + 10)$ se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 10 et 100 rad/s, par exemple, le gain chute de 80 dB (pente -80 dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente $[n]$ une direction asymptotique de phase égale à $n\pi/2$.

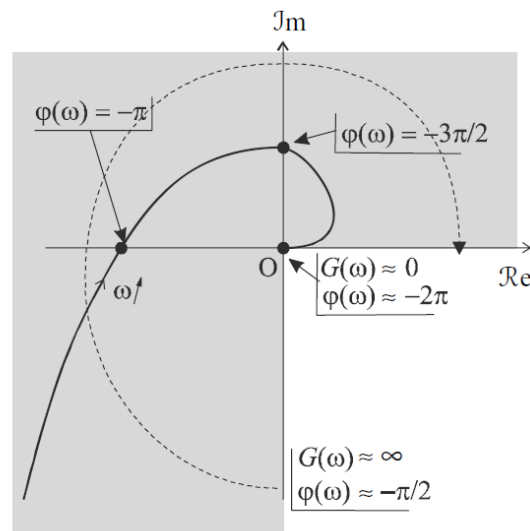


Figure IV.11: Diagramme de Nyquist du système.

La meilleure technique, pour tracer le diagramme de Nyquist à partir du diagramme de Bode, consiste à considérer le diagramme de phase :

Le déphasage $\varphi(\omega)$ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et -2π . Dans le plan de Nyquist représenté sur la figure 3.29, cela correspond aux trois secteurs grisés. Lorsque $\omega=0$ (point de départ du lieu de Nyquist), ce déphasage vaut $-\frac{\pi}{2}$ et le gain est infini.

Il faut, pour esquisser la courbe, imaginer une rotation autour du point O, ici entre $-\frac{\pi}{2}$ et -2π et reporter, tout en tournant, la valeur du gain. La courbe recherchée part du secteur grisé inférieur, coupe l'axe des réels, puis l'axe des imaginaires et termine sa course au point

O avec une tangente horizontale. En effet, lorsque $\varphi(\omega)$ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et -2π le gain ne fait que décroître de l'infini à 0.

Pour démontrer l'existence d'une asymptote lorsque $\omega \rightarrow 0$, calculons la fonction de transfert en fréquence :

$$G(j\omega) = \frac{1000}{j\omega(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)}$$

Soit :

$$G(j\omega) = -\frac{1000j\omega(-j\omega + 1)^2(-j\omega + 10)}{\omega^2(\omega^2 + 1)^2(\omega^2 + 100)}$$

D'où :

$$Re[G(j\omega)] = -\frac{20000 + 1000(1 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)^2(\omega^2 + 100)}$$

Cet équivalent nous montre que la partie réelle tend bien vers une valeur finie lorsque $\omega \rightarrow 0$.

La droite d'équation

$X = -210$ est asymptote à la courbe.

Exercice 03:

- 1- Tracer sur papier semi log le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{10}{p(p + 1)(p + 5)}$$

- 2- Montrer que le diagramme de Bode asymptotique de gain possède une symétrie par rapport à la droite $V=10$, et on déduire la valeur maximale précise G_{max} de gain.
- 3- Déterminer, pour la pulsation V_{max} correspondant à ce maximum, la valeur du déphasage.

Exercice 04 :

Tracer les courbes en polaires des fonctions de transferts suivantes :

$$G_1(p) = \frac{1}{p+1} \qquad G_2(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

Si on remplace le numérateur par K, pour quelle valeur de K ce système est stable ?

Chapitre V. Stabilité et précision des systèmes asservis

L'étude de la stabilité est d'une importance capitale dans l'étude des systèmes et des systèmes asservis. Dans ce chapitre nous allons donner les différents critères de stabilité d'un asservissement.

V.1. Enoncé du critère de stabilité :

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

V.1.1. Définition : Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

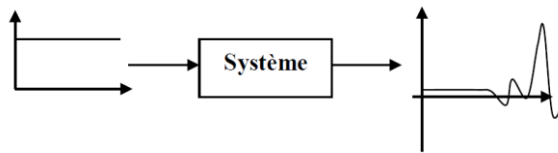


Figure V.1 Exemple d'un comportement instable

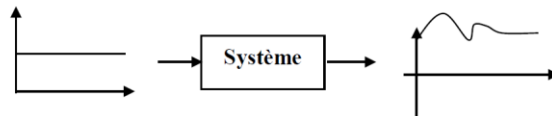


Figure V.2 Exemple d'un comportement stable

Remarque :

- **Une autre définition :** Un système est stable si sa réponse libre tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.
- La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en générale synonyme de destruction du système.

V.1.2. Analyse de Stabilité :

On distingue trois critères d'analyse de stabilité illustrés par la figure V.3

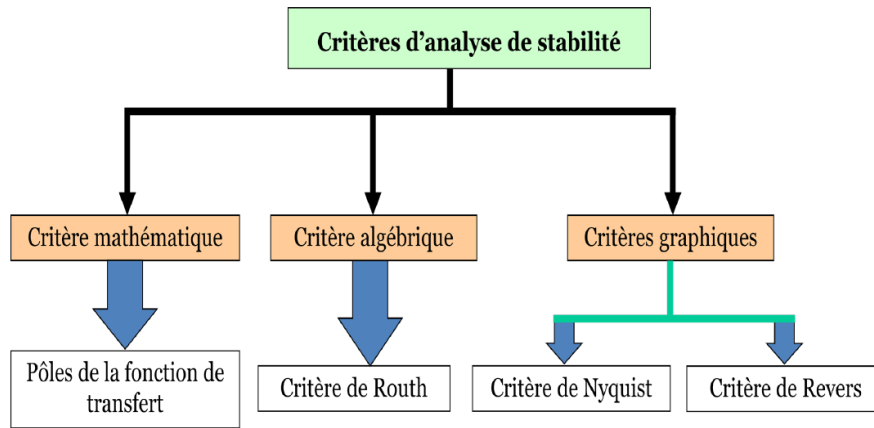


Figure V.3 : Critères d'analyse de stabilité

V.2. Critère mathématique :

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure 5.4, la condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

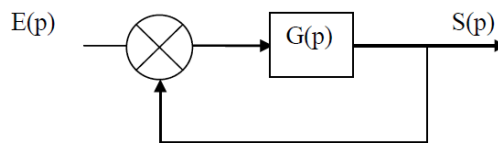
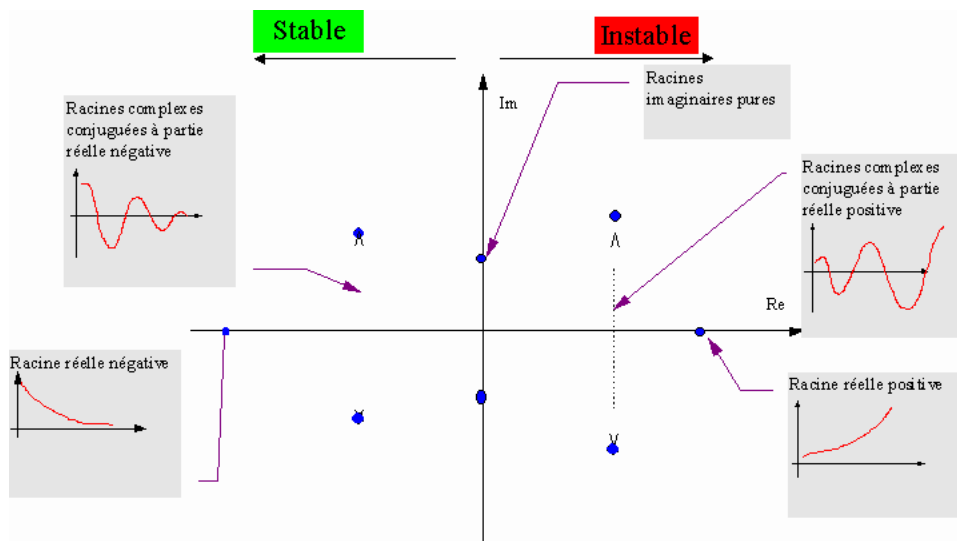


Figure V.4 : Système en boucle fermée

Illustration sur un système du deuxième ordre :



Exemple :

Soit le système de fonction de transfert en boucle fermée donnée par l'équation :

$$F(p) = \frac{k}{(p + 5)(p + 2)}$$

Les pôles du système sont :

$p_1 = -5 < 0$; $p_2 = -2 < 0$; \Rightarrow Deux pôles à partie réelle négative \Rightarrow système stable

V.3. Critère algébrique de Routh:

Le critère de Routh est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée), le signe des racines de ce polynôme sans résoudre l'équation caractéristique

$$1 + G(p) = 0$$

Remarque : Dans la suite du cours la FTBO est notée $G(p)$.

Soit l'équation caractéristique de l'asservissement (Déterminant de la F.T.B.F)

$$E(p) = 1 + FTBO = 1 + G(p) = 0$$

On la met sous forme polynomiale :

$$E(p) = 1 + a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

On construit **la table de Routh** comme suit :

$$\begin{array}{l|llll} p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ p^{n-2} & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots \\ p^{n-3} & c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Avec :

$$\begin{aligned} b_m &= -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\ b_{m-1} &= -\frac{1}{a_{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\ &\vdots \\ c_m &= -\frac{1}{b_m} \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_m & b_{m-1} \end{bmatrix} = \frac{b_m a_{n-3} - b_{m-1} a_{n-1}}{b_m} \\ c_{m-1} &= -\frac{1}{b_m} \det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_m & b_{m-2} \end{bmatrix} = \frac{b_m a_{n-5} - b_{m-2} a_{n-1}}{b_m} \\ &\vdots \end{aligned}$$

La procédure est itérée jusqu'à p^0

Résultat : le système est stable si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

- Le nombre de pôles instable (i.e. à partie réelle positive) de la F.T.B.F est égale au nombre de changements de signe sur la première colonne.
- Si au cours de calcul on trouve un zéro dans la première colonne seulement on le remplace par $\varepsilon \ll 1$ et on continue le calcul. Pour l'analyse de stabilité on fait tendre ε vers 0.
- L'obtention des zéros sur une ligne entière correspond à une paire de pôles imaginaires conjugués

V.3.1. Application du Critère de Routh pour différents systèmes

Exemple 1 : soit l'équation caractéristique d'un asservissement :

$$E(p) = p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4 = 0$$

La table de Routh correspondantes est la suivante :

p^4	1	13	4
p^3	6	12	0
p^2	11	4	0
p	9.82	0	0
p^0	4	0	0

Il n'y a pas de changement de signe dans la première colonne donc la FTBF n'a pas de pôles à partie réelle positive, par conséquent le système asservi est stable en boucle fermée

Exemple 2 : soit l'équation caractéristique d'un asservissement

$$E(p) = p^5 + 6p^4 + 12p^3 + 12p^2 + 11p + 6 = 0$$

La table de Routh est la suivante :

p^5	1	12	11
p^4	6	12	6
p^3	10	10	0
p^2	6	6	0
p	0	0	0
p	12	0	0
p^0	6	0	0

Une ligne entièrement égale à zéros implique 1 paire de pôles imaginaires purs. Soit

$$E_1(p) = 6p^2 + 6$$

Et on remplace dans la ligne suivante par :

$$\frac{dE_1(p)}{dp} = 12p$$

Et en constitue la table de Routh.

Il n'y a pas de changement de signe dans les coefficients de la première colonne, alors la FTBF n'a pas de pôles à partie réelle positive, mais elle a deux pôles imaginaires purs. Ce sont les racines de : $E_1(p) = 6p^2 + 6 = 0 \Rightarrow p = \mp j$

Remarque : le critère de **Routh** est très utile lorsque les coefficients du polynôme sont des paramètres de réglage de l'asservissement.

Exemple 3 : soit un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire (Figure V.4)

$$G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}$$

A l'aide du critère de Routh, trouver la valeur de K, pour laquelle le système en boucle fermée est stable.

Le système est stable pour : $K < 3$

- **Remarque :** le critère mathématique et celui de **Routh**, sont des critères de stabilité absolue, ils ne permettent pas de préciser les marges de stabilité du système. En d'autres termes, ils n'indiquent pas le degré de stabilité ou d'instabilité.

V.4. Critère du revers :

Si la FTBO d'un système asservi ne possède aucun pôle à partie réelle positive, alors ce système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO dans le sens des ω croissantes (de 0 à ∞), on laisse le point critique $(-1,0)$ à gauche de la courbe.

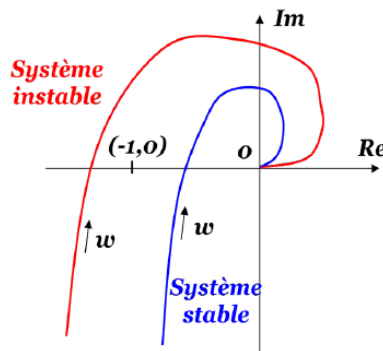


Figure V.6: Critère de revers à partir du lieu de Nyquist

- **Remarque :** Il ne faut pas oublier que l'on trace toujours le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte pour étudier la stabilité en boucle fermée.

V.5. Critère du revers à partir du diagramme de Bode :

Un système asservi est stable si, à la pulsation ωI pour laquelle $|FTBO|_{dB}(j\omega) = 0dB$, le déphasage est supérieur à -180°

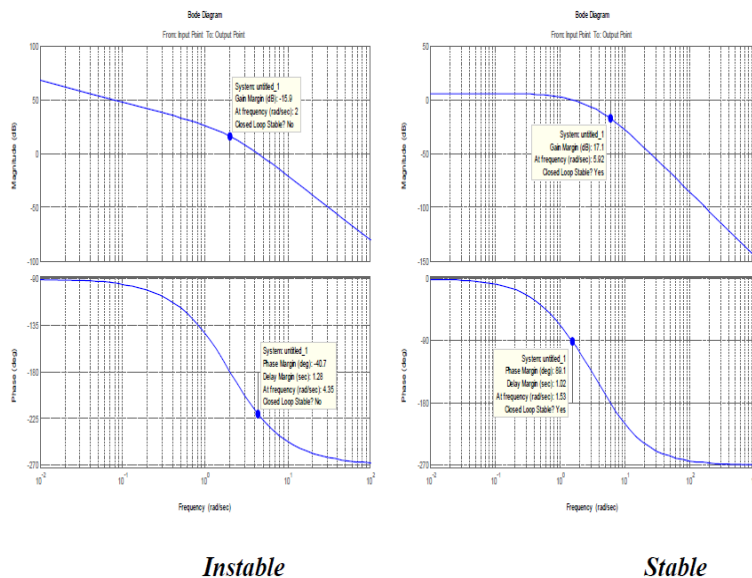


Figure V.7: Critère de revers à partir des diagrammes de Bode

V.6. Les marges de stabilité :

V.6.1. Détermination des marges de stabilité à partir des diagrammes de Bode

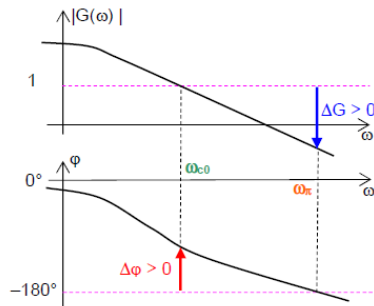
a) Marge de Gain (MG)

On détermine la pulsation ω_c pour laquelle le déphasage est de -180° , la marge de gain est la distance (en dB) entre la courbe et l'axe des abscisses.

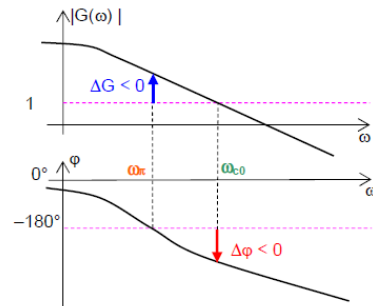
b) Marge de Phase (MP)

On détermine la pulsation ω_{c0} pour laquelle le gain est $0dB$, on mesure la distance entre la courbe de phase et -180° .

Exemple ci-dessous : $\omega_{c0} = 0.5$; $MP = 75^\circ (\Delta\varphi)$



Systeme stable $\Delta G > 0, \Delta\varphi > 0$



Systeme instable $\Delta G < 0, \Delta\varphi < 0$

V.6.2. Détermination des marges de stabilité à partir des diagrammes de Nyquist

a) Marge de Gain (MG)

C'est la distance entre le point critique et l'intersection du lieu de Nyquist avec l'axe des réels. (Voir courbe figure 5.8)

b) Marge de Phase (MP)

C'est l'angle entre l'axe des réels négatifs et le vecteur OM . Le point M correspond à l'intersection du lieu de transfert $FTBO$ avec le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon unité. La pulsation en ce point est ωI . (Voir courbe figure 5.8)

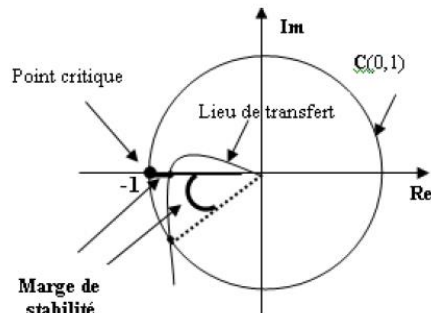


Figure V.8 : Stabilité à partir des diagrammes de Nyquist

- **Remarque :**

- Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase positive est un système stable.

- Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase négative est un système instable.
- Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase nulle est un système à la limite de stabilité.

Les valeurs usuelles des marges de stabilité permettant un réglage correct des boucles d'asservissement sont :

- ✓ Marge de gain : 10dB à 15dB
- ✓ Marge de phase : 40° à 45°

Lorsque la fonction de transfert en boucle ouverte est explicitement connue, il est possible de déterminer algébriquement les marges de stabilité. Dans le cas contraire, on utilise le tracé expérimental.

V.7. Précision des systèmes asservis

Nous avons vu dans ce qui précède que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée par l'entrée $e(t)$. Un système peut être jugé par sa stabilité et aussi bien par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée. Les sources d'erreur sont à la fois les variations de l'entrée mais aussi les effets des perturbations.

L'étude de la précision d'un système à retour unitaire revient à étudier la valeur de la différence : $e(t)-s(t)$ notée $\varepsilon(t)$. En effet, au régime transitoire cette différence s'appelle **erreur dynamique** alors qu'en régime permanent s'appelle **erreur statique**.

Par conséquent, on distingue deux types de précisions :

- ❖ **Précision Statique** : Elle est caractérisée par l'erreur au régime permanent lorsqu'on soumet le système à des entrées canoniques :
 - ✓ Echelon, on parle alors d'erreur indicielle ou erreur de position.
 - ✓ Rampe, on parle d'erreur de trainage ou erreur de poursuite ou de vitesse.
 - ✓ Parabole, on parle d'erreur en accélération.
- ❖ **Précision dynamique (rapidité)** : Elle est caractérisée par l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation.

V.7.1. Précision Statique :

Nous supposerons dans l'étude qui suit que les systèmes asservis étudiés sont stables. La précision d'un système est définie à partir de l'erreur entre la grandeur de consigne E et la grandeur de sortie S (Figure 5.9) nous analyserons la précision statique qui caractérise la limite de l'erreur ε au bout d'un temps infini pour une entrée donnée, c'est-à-dire le régime permanent.

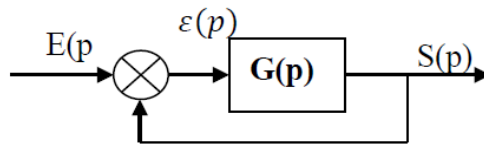


Figure V.9 : Schéma d'un asservissement à retour unitaire

❖ **Erreur statique ou erreur de position :** Soit un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ et de fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$. On appelle erreur statique, le paramètre ε_p défini par : $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ lorsque $e(t) = u(t)$

En invoquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p [E(p) - S(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p [E(p) - H(p)E(p)]$$

Puisque l'entrée est un échelon unitaire, on a

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{1}{p} - \frac{H(p)}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} (1 - H(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(p)}$$

Donc

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 + \lim_{p \rightarrow 0} G(p)}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} G(p) = k_p$$

Est le coefficient de l'erreur de position

$$k_p = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = K$$

Soit $G(p) = \frac{k}{p^n} \frac{1+a_1p+a_2p^2+\dots}{1+b_1p+b_2p^2+\dots}$ n est appelé la classe du système

Pour $n=0$ le système de classe 0, $k_p = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = K$ le gain statique de F.T.B.O

Donc
$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K}$$

Nous pouvons en conclure que la précision est d'autant meilleure que le gain statique est important.

- **Remarque :**

Pour un système de classe 1 et plus l'erreur de position est nulle. Cela revient à dire que de tels systèmes sont caractérisés par une précision statique parfaite.

- **Exemple :**

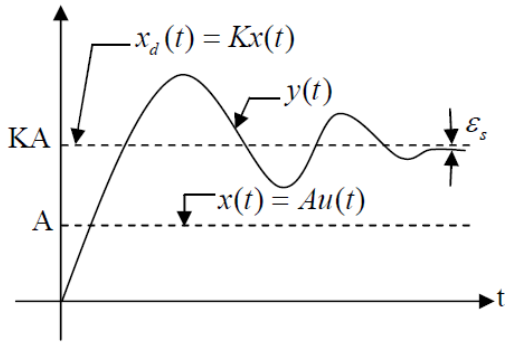


Figure V.10 : erreur finie ($\epsilon_{s(\infty)} = cst$)

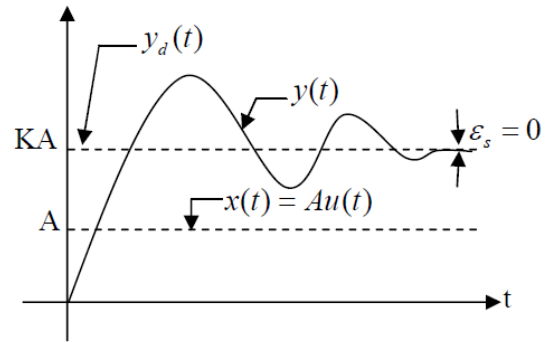


Figure V.11: Erreur nulle ($\epsilon_{s(\infty)} = 0$)

Où :

$y_d(t)$: Valeur désirée.

$y(t)$: Valeur réelle.

❖ **Erreur de vitesse ou erreur de traînage** : Soit un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ et de fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$.

On appelle erreur de vitesse (ou erreur de traînage) du système en boucle fermée, le paramètre ϵ_v défini par :

$$\epsilon_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) \text{ Lorsque } e(t) = t, \text{ rampe unitaire.}$$

En invoquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$\epsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - S(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - H(p)E(p)]$$

Puisque l'entrée est une rampe unitaire :

$$\epsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - H(p)E(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{1}{p^2} - \frac{H(p)}{p^2} \right]$$

$$\epsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - H(p)}{p}$$

L'erreur de vitesse est le second paramètre qui permet d'évaluer la précision d'un système en boucle fermée.

Il se différencie de l'erreur de position par le fait qu'il permet de chiffrer l'aptitude d'un système à fournir une réponse qui suit le plus précisément possible une consigne qui varie dans le temps (cas général des asservissements), tandis que l'erreur de position évalue son aptitude à se conformer à une consigne constante (cas particulier de la régulation). Plus ϵ_v est faible, meilleure est la précision du système dans le cas d'une consigne variable.

- **Remarque** : Un système peut très bien posséder une très bonne précision statique (erreur de position faible voire nulle), donc être tout à fait apte à être régulé de manière précise, mais avoir une erreur de vitesse importante, autrement dit être tout à fait inapte à répondre correctement à une consigne variable dans le temps.

V.7.2. Précision dynamique :

Une bonne précision dynamique donne un amortissement moyen pour un temps de réponse faible. Un amortissement moyen correspond à une réponse transitoire à faible dépassement. La précision dynamique est appelée aussi qualité du système asservis. Elle

chiffre l'erreur transitoire apparaissant dans la réponse à un échelon. Si on veut un amortissement élevé pour un temps de réponse faible, on a intérêt à minimiser l'erreur dynamique, c'est-à-dire minimiser l'aire hachurée sur la figure (V.12) ci-dessous.

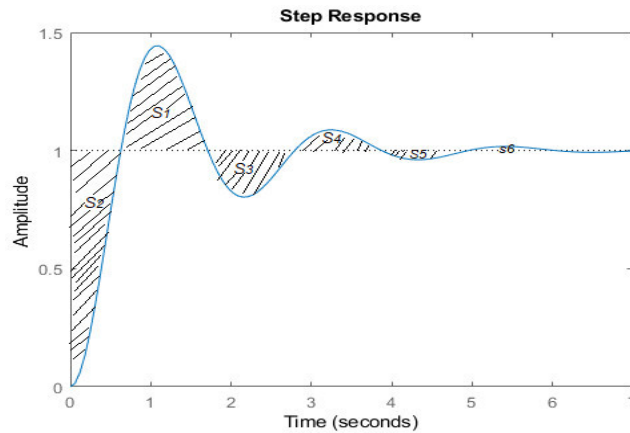


Figure V.12: Mise en évidence de l'erreur dynamique.

V.7.2.1. Critères de performance :

Plusieurs critères de performance permettent d'estimer l'erreur (et la rapidité de sa disparition), pour les présenter, on considère un système stable dont l'erreur statique en réponse à un échelon est nulle, cf. figure V.13.

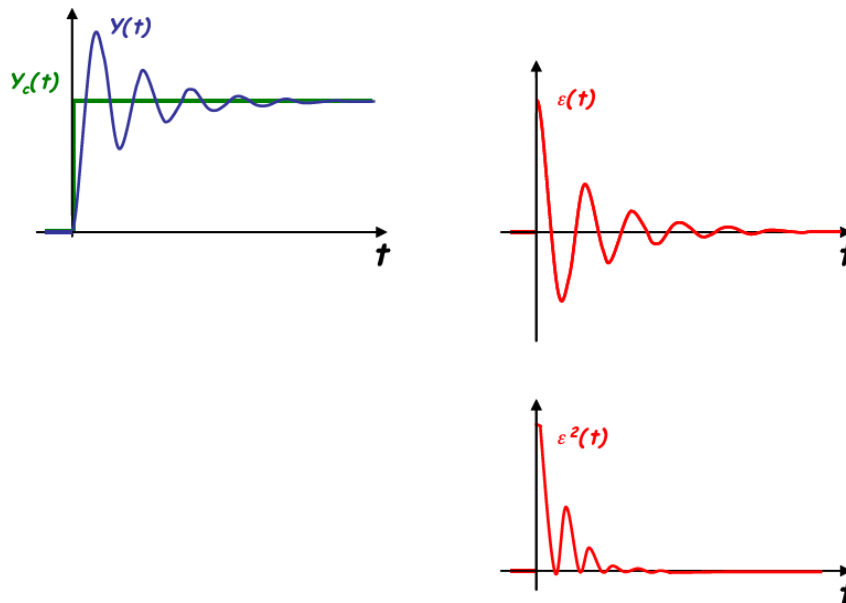


Figure V.13 : Visualisation de l'erreur et de l'erreur quadratique.

Un premier critère consiste à intégrer le carré de l'erreur :

$$I = \int_0^{+\infty} \epsilon^2(t) dt$$

La meilleure précision est obtenue pour I faible.

On rencontre d'autres façons de calculer le critère :

$$I = \int_0^{+\infty} |\varepsilon(t)| dt$$

Afin de minimiser l'influence excessive du 1^{er} lobe de ε^2 .

Ou encore :
$$I = \int_0^{+\infty} t \cdot |\varepsilon(t)| dt$$

(ITAE, *Integral of Time Multiplied Absolute value of Error*) pour introduire une pondération temporelle du poids des lobes.

V.7.2.2. Rapidité des systèmes :

On cherche à obtenir des systèmes asservis une réponse rapide aux variations de la consigne et une aptitude à effacer rapidement les perturbations.

Le **temps de réponse à 5%** donne une bonne évaluation de la rapidité d'un système, il exprime le temps mis par le processus soumis à un échelon pour atteindre sa valeur de régime permanent à $\pm 5\%$ près (**et y rester**). La figure (5.14) illustre la mesure du temps de réponse à 5% pour un 1^{er} et un 2nd ordre.

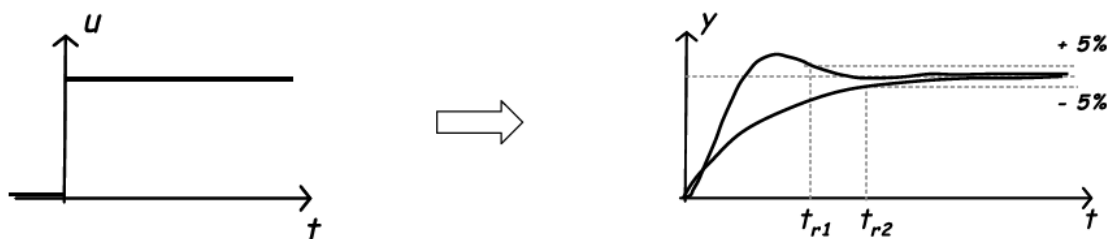


Figure V.14 : Illustration de la mesure du temps de réponse à 5%.

Le temps de réaction est lié à l'inertie du système considéré, c'est-à-dire à ses propriétés physiques (réaction rapide d'un micro moteur, dynamiques lentes d'un réacteur nucléaire). Elles ne sont pas modifiables.

Dans le cas d'un 1^{er} ordre, on a établi la relation liant le temps de montée et la fréquence de coupure, $t_m \cdot f_c = 0.35$; le système étant d'autant plus rapide (t_m faible) que sa bande passante est large.

D'une façon générale : l'amélioration de la rapidité (propriété temporelle) d'un système passe par l'élargissement de sa bande passante (propriété fréquentielle).

Pour préciser cette notion, étudions l'effet du bouclage à retour unitaire d'un système du 1^{er} ordre $T(p)$ (figure V.15).

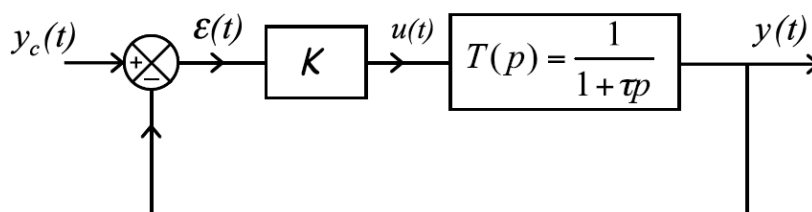


Figure V.15 : Asservissement d'un système du 1^{er} ordre.

Calcul de la FTBF :

$$H(p) = \frac{K \cdot T(p)}{1 + K \cdot T(p)} = \dots = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

Avec : $K_1 = \frac{K}{1 + K}$ et $\tau_1 = \frac{\tau}{1 + K}$

On en déduit les pulsations de coupure en boucle ouverte :

$$\omega_c = 1/\tau$$

Et en boucle fermée :

$$\omega_{c1} = 1/\tau_1 = (1 + K)\omega_c$$

Ainsi, le passage en boucle fermée entraîne une multiplication par $1 + K$ de la pulsation de Coupure et, par conséquence, une division par $1 + K$ du temps de montée ($t_m \cdot f_c = 0.35$).

On notera, que les propriétés intrinsèques du processus physique $T(p)$ ne sont pas modifiées par le passage en boucle fermée, $T(p)$ a toujours une pulsation de coupure égale à $1/\tau$.

Cependant, le système bouclé se comporte globalement comme s'il avait une bande passante de $1/\tau_1$. C'est la commande générée en entrée de $T(p)$ par la boucle d'asservissement qui, du fait de son amplitude, permet d'accélérer la réponse comme illustré figure (5.16) pour la boucle ouverte (à gauche) et pour la boucle fermée (à droite).

La forme de $u(t)$, la loi de commande du système en boucle fermée, appelle deux remarques :

- en pratique, la pointe de commande de $u(t)$ est limitée, si on atteint la saturation, le système a un comportement non linéaire et l'étude perd sa validité mathématique,
- un à-coup de démarrage trop important sur $u(t)$ n'est pas toujours souhaitable, par exemple, pour éviter un vieillissement trop rapide d'un système mécanique, ou pour des raisons de surconsommation d'énergie.

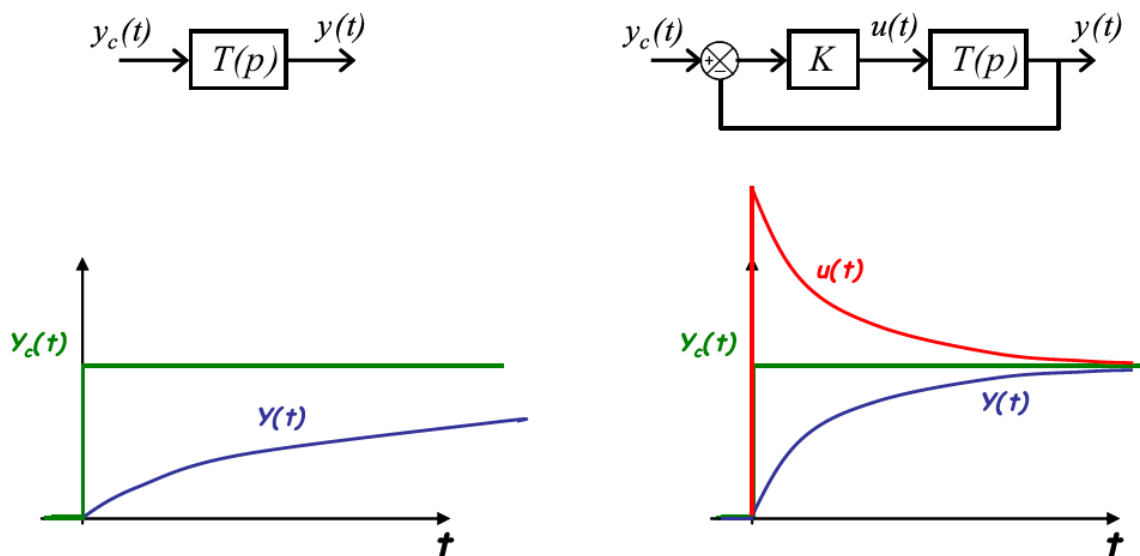


Figure V.16 : Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre.

V.8. Exercices :

Exercice 1 : On considère un système de fonction de transfert en boucle ouvert $G(p)$ définie par : $G(p) = \frac{K}{p(p+3)^2}$ avec $K > 0$.

- 1) Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.
- 2) Calculer la valeur de K qui assure au système une marge de phase égale à 45° .

Solution de l'exercice 1 :

- 1) Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :
$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{p(p+3)^2+K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = p(p+3)^2 + K = p^3 + 6p^2 + 9p + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	9
6	K
54-K	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si $K < 54$.

- 2) Pour disposer d'une marge de phase égale à 45° , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \frac{\pi}{4}$$

Or :
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+3)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{3}$$

On a donc :
$$\pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

D'où :
$$2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_{c0} = 3 \tan \frac{\pi}{8} = 1,24 \text{ rad/s.}$$

Or ω_{c0} est tel que :
$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2+9)} = 1 \Rightarrow K = 13.$$

En conclusion, on obtient une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$ pour $K=13$.

Exercice 02 :

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{100}{(1+10p)(10+p)}$$

Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Solution de l'exercice 02 :

La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{100}{(1 + 10p)(10 + p) + 100}$$

Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{100}{10 + 100} = 0,091 = 91\%$$

Par ailleurs, l'erreur de vitesse est définie par :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1 - H(p)}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,091}{p} \rightarrow +\infty.$$

Exercice 03 : Soit la fonction de transfert suivante :

$$K(p) = \frac{K}{p(p^2 + 6p + 25)}$$

- 1) Tracer son lieu des pôles ?
- 2) Préciser les valeurs de K et ω à la limite de la stabilité ?
- 3) Préciser les angles aux points de départ ?

Exercice 04 : On considère un système de F.T.B.O. : $T(p) = \frac{K}{p.(p+1).(p+2)}$ $K > 0$.

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.