

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de Master
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle et applications.

Présenté par : FATHALLAH SALSABIL

Thème

Etude de stabilité d'un système de type Timoshenko avec un terme de retard distribué

Soutenance publique devant le jury composé de :

Djamel Ouchenane	Professeur	Université de Laghouat	Président
Mohamed Lamine Mostefai	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examineur
Zineb Khalili	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadrante

Année Universitaire : 2024-2025

Dédicace

Je dédie ce travail à mon père bien-aimé, **Abdelrahmen Fathallah**,
à ma chère mère, **Zohra Ben Djaballah**,
à mes sœurs adorées, **Khadidja** et **Randa**,
à mes frères, pour leur affection et leur soutien,
à mon encadrante, **Mme Zineb Khalili**, pour son accompagnement et ses précieux conseils,
à l'ensemble de mes professeurs pour leur encadrement tout au long de mon parcours,
et à mes amis pour leur soutien constant et leur présence bienveillante.
Enfin, j'adresse mes remerciements sincères à **Oussama Tex** pour sa précieuse aide dans la
relecture et l'amélioration de ce mémoire.

Fathallah Salsabil

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrante, **Mme Zineb Khalili**, pour son soutien constant, ses conseils précieux et son accompagnement tout au long de ce travail.

Je remercie également le président du jury, le Professeur **Djamel Ouchenene**, pour le temps qu'il a consacré à l'évaluation de ce mémoire ainsi que pour ses remarques enrichissantes.

Mes remerciements vont aussi à l'examineur, **M. Mohamed Lamine Mostefaï**, pour son expertise, ses conseils pertinents et son rôle essentiel dans l'évaluation de ce travail.

Je remercie chaleureusement tous **les professeurs de mathématiques** pour la qualité de leur enseignement, leur soutien et leurs encouragements tout au long de mon parcours académique.

À vous tous, j'exprime ma profonde reconnaissance et mon respect.

Fathallah Salsabil

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس نظام تيموشينكو أحادي البعد مع وجود مصطلح تأخير موزّع. نُثبت وجود وحدانية الحل للمسألة باستعمال طريقة أشباه الزمر، بعد ذلك، نبرهن الاستقرار الآسي للحل باستخدام طريقة الطاقة، بالاعتماد على الدوال الوظيفية من نوع ليابونوف.

الكلمات المفتاحية: نظام تيموشينكو، التأخير الموزّع، طريقة الطاقة، دوال ليابونوف .

Abstract

In this memoir, focuses on the study of a one-dimensional Timoshenko system with a distributed delay term. The existence and uniqueness of the solution are established by using the semigroup theory. Then, the exponential stability of the solution is demonstrated by applying the energy method, based on Lyapunov functionals.

Keywords : Timoshenko system, distributed delay, energy method, Lyapunov functions .

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un système de Timoshenko unidimensionnel avec un terme de retard distribué. L'existence et l'unicité de la solution sont établies en utilisant la méthode des semi-groupes. Ensuite, la stabilité exponentielle de la solution est démontrée en appliquant la méthode de l'énergie, basée sur des fonctionnelles de Lyapunov.

Mots-clés : système de Timoshenko, retard distribué, méthode de l'énergie, fonctions de Lyapunov. .

Table des matières

Notations	7
Introduction	8
1 Préliminaire	10
1.1 Quelques d'espaces	10
1.2 Quelques Inégalité	13
1.3 Les Opérateurs	17
1.4 Propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones	17
1.5 Semi-groupe Fortement Continue	20
2 L'existence et l'unicité de la solution	23
2.1 Position de problème	23
2.2 Problème de premier ordre	24
2.3 Existence de la solution	25
3 Comportement asymptotique de la solution	40
3.1 Stabilité exponentielle	40
Bibliographies	53

Notations

Ω	ouvert borné de \mathbb{R}^n
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$	espace des fonctions continues sur \mathbb{R}
$(X, \ \cdot\ _X)$	espace normé
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$D(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions test.
$D'(\Omega)$	Espace des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
E'	Espace dual de E .
E''	Espace dual de E' .
\mathbb{R}	Les nombres réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{N}	ensemble des nombres naturels
\mathbb{Z}	ensemble des nombres entiers
\forall	symbole universel « pour tout »
\exists	symbole universel « il existe »
\subset	inclusion
ker	noyau d'une application linéaire
dim	dimension d'un espace vectoriel
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans la dualité (E', E) .
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$	Espaces de Sobolev classiques.
p.p.	Presque partout.
$\ \cdot\ $	Norme associée à un produit scalaire.

Introduction

L'étude des systèmes de Timoshenko a débuté en 1921 avec le travail de Timoshenko [12], dans lequel il a présenté le système couplé suivant d'équations hyperboliques :

$$\begin{cases} \rho\phi_{tt} = \left(K(\phi_x - \psi)\right)_x, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ I\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x + K(\phi_x - \psi), & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (\text{I})$$

où t désigne la variable temporelle, x la variable spatiale le long de la poutre de longueur L dans sa configuration d'équilibre, ϕ le déplacement transversal de la poutre, et ψ l'angle de rotation de la fibre de la poutre. Les coefficients $\rho, I\rho, E, I$ et K représentent respectivement la densité (masse par unité de longueur), le moment polaire d'inertie d'une section transversale, le module de Young de l'élasticité, le moment d'inertie d'une section, et le module de cisaillement.

Dans le but de trouver la dissipation minimale assurant que la solution du système couplé (I) décroisse uniformément vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini, plusieurs auteurs ont introduit différents mécanismes dissipatifs pour stabiliser ce système. Par exemple, deux amortissements linéaires par frottement, ϕ_t et ψ_t , agissant respectivement sur la première et la deuxième équations, ont été utilisés dans [2]. De plus, de nombreux auteurs ont démontré que la présence d'un seul amortissement — qu'il soit par frottement ϕ_t , par frottement localisé $\alpha(x)\phi_t$, ou de type mémoire $\left(\int_0^t g(t-\tau)\psi_{xx}(\tau)d\tau\right)$ — agissant sur une partie du domaine, suffit à stabiliser le système. L'amortissement par frottement avec un signe indéfini a également été récemment étudié dans [4].

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) + \mu_1\psi_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\psi_t(x, t-s)ds = 0, \end{cases} \quad (\text{2})$$

où $t \in (0, \infty)$ désigne la variable temporelle et $x \in (0, 1)$ la variable spatiale, les fonctions φ et ψ représentant respectivement le déplacement transversal du matériau élastique solide et l'angle de rotation. Les constantes ρ_1, ρ_2, μ_1 et K sont strictement positives, et $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée satisfaisant la condition suivante :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1, \quad (\text{2})$$

où τ_1 et τ_2 sont deux réels tels que $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$.

Le système (1) est soumis aux conditions initiales et aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), & \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & \psi(x, 0) = \psi_0(x), & \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ \psi_t(x, -t) = f_0(x, t) & \text{pour } (x, t) \in (0, 1) \times (0, \tau_2), \end{cases} \quad (3)$$

et

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

où f_0 est la fonction d'historique.

Ce travail est composé de trois chapitres :

- Le premier chapitre contient des rappels sur quelques outils mathématiques. On y donne des définitions sur les espaces fonctionnels, on cite quelques inégalités nécessaires, et l'on termine par la théorie des semi-groupes.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'existence et à l'unicité de la solution du problème considéré. La démonstration repose sur certaines hypothèses concernant les données initiales.
- Dans le dernier chapitre, on étudie le comportement asymptotique de la solution. Nous montrons la décroissance exponentielle de celle-ci, on construisant une fonction de Lyapunov L , équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème.

Chapitre 1

Préliminaire

La première chapitre est inspirée de Brezis [1]

1.1 Quelques d'espaces

Espace vectoriel

Définition 1.1.1.

Un ensemble E est un **espace vectoriel** sur un corps \mathbb{K} (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C}) s'il est muni :

- D'une **addition** ($+$: $E \times E \rightarrow E$) vérifiant :
 - Associativité : $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$
 - Commutativité : $\forall u, v \in E, u + v = v + u$
 - Élément neutre : $\exists \vec{0} \in E, \forall u \in E, u + \vec{0} = u$
 - Opposés : $\forall u \in E, \exists (-u) \in E, u + (-u) = \vec{0}$
- D'une **multiplication par un scalaire** (\cdot : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$) vérifiant :
 - Distributivité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$
 - Compatibilité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u).$
 - Élément neutre : $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$ (où 1 est l'unité de \mathbb{K}).

Espace normé

Définition 1.1.2.

Un espace normé est un espace vectoriel E sur un corps \mathbb{K} (généralement \mathbb{R} ou \mathbb{C}) muni d'une **norme** $\|\cdot\|$, qui est une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- **Positivité** : $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in E$, et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- **Homogénéité** : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
- **Inégalité triangulaire** : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

Espace complet

Définition 1.1.3.

Un espace normé est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans E converge vers un élément de E .

Une suite (x_n) dans E est dite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tous $m, n \geq N$, on a $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

Espace de Banach

Définition 1.1.4.

On appelle **espace de Banach** $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé, complet pour la distance induite par sa norme.

Propriété 1.1.1.

Un espace de Banach X est un espace vectoriel normé qui est un espace métrique complet pour la métrique induite par sa norme, définie par :

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|.$$

Espace préhilbertien

Définition 1.1.5.

Un **espace préhilbertien** est un espace vectoriel E sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} muni d'un **produit scalaire** :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

vérifiant pour tout $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. **Symétrie hermitienne** : $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
2. **Linéarité à droite** : $\langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.
3. **Définie positive** : $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

Propriété 1.1.2.

- La norme associée est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
- **Identité du parallélogramme** : $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

Espace de Hilbert

Définition 1.1.6.

Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire :

- Un espace vectoriel H sur \mathbb{C} (ou \mathbb{R}).
- Muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Espace $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue. Les fonctions f considérées sont définies de Ω dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1.1.7.

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

On munit $L^p(\Omega)$ de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \exists c > 0, |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c > 0 \mid |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

L'espace de $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.1.8.

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω . Par définition, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Espace de Sobolev

Définition 1.1.9.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On définit l'espace de Sobolev d'ordre m par

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\},$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{N}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{avec } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Espaces de Sobolev ($W^{m,p}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}, p \in [1, +\infty]$))

Définition 1.1.10.

Soient $(m, p) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty]$, on note $D^\alpha f = L_\alpha \cdot \dot{}$

Donc on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \text{ tq : } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \exists \mathcal{L}_\alpha \in L^p(\Omega)\} \text{ vérifiant :}$$
$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha Q(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \mathcal{L}_\alpha(x) \varphi(x) dx, \forall Q \in D(\Omega).$$

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{L}_\alpha\|_{L^p(\Omega)}.$$

Si $1 \leq p \leq +\infty$, on peut considérons sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme équivalente

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{L}_\alpha\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cas particulier :

1. $W^{0,p} = L^p(\Omega)$
2. $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

1.2 Quelques Inégalité

Inégalité algébrique de Young

Lemme 1.2.1.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a : $ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}$.

Preuve 1.2.1.

Considérons l'inégalité suivante, qui est toujours vraie pour tout $\delta > 0$:

$$(2\delta a - b)^2 \geq 0.$$

$$(2\delta a - b)^2 = 4\delta^2 a^2 + b^2 - 4\delta ab \geq 0.$$

$$4\delta ab \leq 4\delta^2 a^2 + b^2.$$

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}.$$

Nous avons donc démontré que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $\delta > 0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}.$$

Inégalité de Young

Lemme 1.2.2.

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in [1, +\infty[$ tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve 1.2.2.

La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe sur \mathbb{R} . Une fonction f est dite convexe si pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Appliquons cette propriété à la fonction exponentielle. Pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\exp(t\theta_1 + (1 - t)\theta_2) \leq t \exp(\theta_1) + (1 - t) \exp(\theta_2).$$

Soient $a, b > 0$. Posons :

$$t = \frac{1}{p}, \quad 1 - t = \frac{1}{q}, \quad \theta_1 = p \ln(a), \quad \theta_2 = q \ln(b).$$

En substituant ces valeurs dans l'inégalité de convexité, on obtient :

$$\exp\left(\frac{1}{p} \cdot p \ln(a) + \frac{1}{q} \cdot q \ln(b)\right) \leq \frac{1}{p} \exp(p \ln(a)) + \frac{1}{q} \exp(q \ln(b)).$$

Simplifions cette expression :

$$\exp(\ln(a) + \ln(b)) \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Ou

$$\exp(\ln(a) + \ln(b)) = ab,$$

donc on obtient :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Inégalité du Minkowsky

Théorème 1.2.1.

Soit (x, A, μ) un espace mesuré avec $X \neq \emptyset$, $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions $f, g \in L^p(X)$, alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

C'est-à-dire :

$$\left(\int_a^b |f + g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

Preuve 1.2.3.

L'espace $L^p(X)$ un espace vectoriel, $f + g$ est dans $L^p(X)$.

Si $\|f + g\|_p = 0$, (l'inégalité est vérifiée).

On suppose maintenant que $\|f + g\|_p > 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_x |f + g|^p d\mu \\ &\leq \left(\int_x |f| + |g| \right) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \int |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p} \right). \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés par $\left(\frac{\|f + g\|_p^p}{\|f + g\|_p} \right)$, on obtient l'inégalité cherché.

Inégalité de Cauchy-Schwarz**Lemme 1.2.3.**

Soient $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$. Alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Preuve 1.2.4.

Considérons pour $\lambda \in \mathbb{R}$ le polynôme en λ défini par :

$$P(\lambda) = \int_a^b (|f(x)| + \lambda|g(x)|)^2 dx.$$

En développant cette expression, on obtient :

$$P(\lambda) = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2\lambda \int_a^b |f(x)g(x)| dx + \lambda^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

Le polynôme $P(\lambda)$ est un polynôme de degré 2 en λ qui est toujours positif ou nul le discriminant Δ de $P(\lambda)$ est donné par :

$$\Delta = \left(2 \int_a^b |f(x)g(x)| dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right).$$

Comme $P(\lambda) \geq 0$ pour tout λ , on a $\Delta \leq 0$.

En simplifiant l'inégalité $\Delta \leq 0$, on obtient :

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)| dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right).$$

En prenant la racine carrée des deux côtés, on arrive à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Inégalité de Hölder

Lemme 1.2.4.

Soient f et g deux fonctions respectivement dans L^p et dans L^q , avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, le produit fg est dans $L^1(\Omega)$, et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Dans le cas particulier où $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Preuve 1.2.5.

Cas 1 : $q = \infty$ et $p = 1$.

Si $q = \infty$, alors $p = 1$ (car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Dans ce cas, l'inégalité de Hölder devient :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Cela découle directement de la définition de la norme L^∞ , car $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$ presque partout.

Cas 2 : $p, q \in (1, +\infty)$.

Supposons $p, q \in (1, +\infty)$. On utilise l'inégalité de Young généralisée, qui stipule que pour tout $a, b \geq 0$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Appliquons cette inégalité à

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \quad \text{et} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}.$$

On obtient :

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p(\Omega)}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^q}.$$

En intégrant cette inégalité sur Ω , on a :

$$\frac{\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_{\Omega} |f(x)|^p dx}{\|f\|_{L^p(\Omega)}^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_{\Omega} |g(x)|^q dx}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^q}.$$

Ou, par définition des normes L^p et L^q , on a :

$$\frac{\int_{\Omega} |f(x)|^p dx}{\|f\|_{L^p(\Omega)}^p} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\int_{\Omega} |g(x)|^q dx}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^q} = 1.$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En multipliant par $\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$, on arrive à l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.3 Les Opérateurs

Opérateur Linéaire

Définition 1.3.1.

Soient E et F deux espaces vectoriel sur le corps \mathbb{K} , et $A : E \rightarrow F$. On dit que l'opérateur A est linéaire si :

- i) $\forall x, y \in E \quad A(x + y) = A(x) + A(y)$,
- ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Opérateur Dissipatif

Définition 1.3.2.

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire (non nécessairement borné) dans un espace de Hilbert H .

On dit que \mathcal{A} est **dissipatif** si :

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } u \in D(\mathcal{A}).$$

Si de plus,

$$\text{Im}(I + \mathcal{A}) = H,$$

alors on dit que \mathcal{A} est **maximal dissipatif**.

1.4 Propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Définition 1.4.1.

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est monotone si

$$(Au, u) \geq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$, i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Proposition 1.4.1.

Soit A un opérateur maximal monotone. Alors :

- (a) $D(A)$ est dense dans H .
- (b) A est fermé.
- (c) Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Preuve 1.4.1.

(a) Soit $f \in H$ tel que $(f, v) = 0$ pour tout $v \in D(A)$. Vérifions que $f = 0$. En effet, il existe $v_0 \in D(A)$ tel que $v_0 + Av_0 = f$. On a

$$0 = (f, v_0) = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geq |v_0|^2.$$

Donc $v_0 = 0$ et par suite $f = 0$.

(b) Notons d'abord que pour tout $f \in H$, il existe $u \in D(A)$ unique tel que $u + Au = f$. En effet, si \bar{u} désigne une autre solution, alors on a $(u - \bar{u}) + A(u - \bar{u}) = 0$. Prenant le produit scalaire avec $(u - \bar{u})$ et appliquant la monotonie de A , on voit que $u - \bar{u} = 0$. D'autre part, on a $|u|^2 + (Au, u) = (f, u)$, et par suite $|u| \leq |f|$. L'opérateur $f \mapsto u$ (noté $(I + A)^{-1}$) est donc borné de norme ≤ 1 . $(I + A)^{-1}$ est donc un opérateur linéaire borné de H dans H et $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Montrons que A est fermé. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \in D(A)$ pour tout n , $u_n \rightarrow u$ et $Au_n \rightarrow f$. On a :

$$u_n + Au_n \rightarrow u + f$$

et donc

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \rightarrow (I + A)^{-1}(u + f).$$

Par conséquent $u = (I + A)^{-1}(u + f)$, c'est-à-dire $u \in D(A)$ et $u + Au = u + f$.

(c) Supposons que pour un certain $\lambda_0 > 0$ on ait $R(I + \lambda_0 A) = H$. Alors pour tout $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ on a $R(I + \lambda A) = H$.

Pour tout $f \in H$, l'équation :

$$u + \lambda Au = f \quad (1) \tag{1.1}$$

peut se réécrire :

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

soit :

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right] \quad (2) \tag{1.2}$$

Si $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$ (c'est-à-dire $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$), alors (2) admet une solution par le théorème du point fixe de Banach.

Si A est maximal monotone, alors $I + A$ est surjectif. Par récurrence, on montre que $I + \lambda A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Remarque 1.

Si A est maximal monotone, alors λA est aussi maximal monotone pour tout $\lambda > 0$. Cependant, si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones, $A + B$ (défini sur $D(A) \cap D(B)$) n'est pas nécessairement maximal monotone .

Définition 1.4.2.

Pour A maximal monotone et $\lambda > 0$, on définit :

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad (\text{résolvante})$$

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \quad (\text{régularisée de Yosida})$$

avec $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Proposition 1.4.2.

Soit A maximal monotone. Alors :

- $a_1)$ $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H, \lambda > 0.$
- $a_2)$ $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A), \lambda > 0.$
- $b)$ $|A_\lambda v| \leq |Av| \quad \forall v \in D(A), \lambda > 0.$
- $c)$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in H.$
- $d)$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A).$
- $e)$ $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H, \lambda > 0.$
- $f)$ $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v| \quad \forall v \in H, \lambda > 0.$

Preuve 1.4.2. $a_1)$ Par définition de J_λ , pour tout $v \in H$:

$$v = J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v)$$

En réarrangeant :

$$A(J_\lambda v) = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) = A_\lambda v$$

$a_2)$ Pour $v \in D(A)$, on a :

$$Av = \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)v - v] = \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v)$$

En appliquant J_λ :

$$J_\lambda(Av) = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) = A_\lambda v$$

$b)$ Découle directement de $a_2)$ car J_λ est une contraction ($\|J_\lambda\| \leq 1$) :

$$\|A_\lambda v\| = \|J_\lambda(Av)\| \leq \|Av\|$$

$c)$ Supposons d'abord que $v \in D(A)$. Alors :

$$|v - J_\lambda v| = \lambda|A_\lambda v| \leq \lambda|Av| \quad \text{d'après } b)$$

Donc $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v$.

Passons au cas général. Soit $v \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $D(A) = H$ (proposition VII.1), il existe $v_\varepsilon \in D(A)$ tel que $|v - v_\varepsilon| < \varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_\varepsilon| + |J_\lambda v_\varepsilon - v_\varepsilon| + |v_\varepsilon - v| \\ &\leq 2|v - v_\varepsilon| + |J_\lambda v_\varepsilon - v_\varepsilon| \leq 2\varepsilon + |J_\lambda v_\varepsilon - v_\varepsilon| \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\limsup_{\lambda \rightarrow 0} |J_\lambda v - v| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

et donc :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda v = v$$

d) Pour $v \in D(A)$, on a :

$$A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad (\text{par a})$$

Or d'après (c), $J_\lambda(Av) \rightarrow Av$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

e) Calculons directement :

$$(A_\lambda v, v) = \frac{1}{\lambda}((I - J_\lambda)v, v) = \frac{1}{\lambda} [\|v\|^2 - (J_\lambda v, v)]$$

Comme $\|J_\lambda v\| \leq \|v\|$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(J_\lambda v, v)| \leq \|J_\lambda v\| \|v\| \leq \|v\|^2$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (A_\lambda v, v) &\geq \frac{1}{\lambda} (\|v\|^2 - \|v\|^2) = 0 \\ (A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\ &= \lambda |A_\lambda v|^2 + (A_\lambda J_\lambda v, J_\lambda v) \end{aligned}$$

Donc :

$$(A_\lambda v, v) \geq \lambda |A_\lambda v|^2 \geq 0 \quad (1.3)$$

f) Résulte de (1.3) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1.5 Semi-groupe Fortement Continue

Définition 1.5.1.

On appelle l'application $S : [0, +\infty[$ semi-groupe fortement continu dans H vérifie les propriétés suivantes :

i) $S(0) = Id.$

ii) $S(t + s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0.$

iii) Pour tout $x \in H$, l'application $t \mapsto S(t)x$ est continue sur $[0, +\infty[$ dans H , i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\|_H = 0, \quad \forall x \in H.$$

Dans la suite, une telle famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est appelée un **semi-groupe de classe C_0** et on la note : **C_0 -semi-groupe**.

Propriété 1.5.1.

Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de classe C_0 dans H , alors le semi-groupe adjoint $(S^*(t))_{t \geq 0}$ est aussi un semi-groupe de classe C_0 dans H .

Générateur infinitésimal

Définition 1.5.2.

On appelle *générateur infinitésimal* du C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ tout opérateur A défini sur l'ensemble

$$D(A) = \left\{ x \in H ; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Par

$$A(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Parfois, on note $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$ au lieu de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Théorème 1.5.1.

Si A est le *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, alors A est un opérateur fermé.

Propriété 1.5.2.

Le domaine $D(A)$ d'un *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est un espace vectoriel dense dans H .

Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.5.2.

Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un opérateur non borné, on a l'équivalence.

- $(A, D(A))$ est m -dissipatif domaine dense.
- $(A, D(A))$ est le *générateur infinitésimal* d'un semi-groupe de contraction.

$(A, D(A))$ opérateur fermé à domaine dense, vérifié

$[0, \infty] \subset \rho(A)$ et $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$.

Ainsi ce hypothese pour tout conditions initiale $x_0 \in D(A)$ il existe une solution fort $t \rightarrow x(t)$ dans $C^0(\mathbb{R}^+, (D(A), \|\cdot\|_{D(A)})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, (X, \|\cdot\|_X))$ $t \rightarrow x(t) = S(t)x$ de class seulement $C^1(\mathbb{R}^+, (X, \|\cdot\|_X))$.

Théorème de Lax-Milligram

Définition 1.5.3.

On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est

- continue s'il existe une constante C elle que.

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H$$

- coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.5.3.

Soit V un espace de Hilbert réel.

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, et $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire.

On suppose que :

- **(Continuité)** : Il existe $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V.$$

- **(Coercivité)** : Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Alors, pour toute forme linéaire continue $L \in V'$, il existe une unique solution $u \in V$ telle que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Corollaire 1.5.1.

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H$$

et

$$\frac{1}{2} a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Chapitre 2

L'existence et l'unicité de la solution

Dans ce chapitre, on étudions l'existence et l'unicité de la solution du système de Timoshenko avec un terme de retard distribué. En utilisant la théorie des semi-groupes, nous reformulons le problème sous une forme abstraite et montrons qu'il est bien posé sous certaines conditions sur les données initiales et aux bords.

2.1 Position de problème

On définit la variable z dépendante des paramètres x , ρ , s et t par :

$$z(x, \rho, s, t) = \psi_t(x, t - s\rho),$$

dérivée par rapport à t : $z_t(x, \rho, s, t)$

$$\begin{aligned} z_t(x, \rho, s, t) &= \frac{\partial \psi_t(x, t - s\rho)}{\partial(t - s\rho)} \times \frac{\partial(t - s\rho)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \psi_t(x, t - s\rho)}{\partial(t - s\rho)} \times (1 - s'\rho), \end{aligned}$$

dérivée par rapport à ρ : $z_\rho(x, \rho, s, t)$

$$\begin{aligned} z_\rho(x, \rho, s, t) &= \frac{\partial \psi_t(x, t - s\rho)}{\partial(t - s\rho)} \times \frac{\partial(t - s\rho)}{\partial \rho} \\ &= -s' \frac{\partial \psi_t(x, t - s\rho)}{\partial(t - s\rho)}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ces définitions impliquent la relation suivante :

$$sz_t(x, \rho, s, t) + (1 - s'\rho) z_\rho(x, \rho, s, t) = 0.$$

Donc,

$$\begin{cases} sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0, \\ z(x, 0, \tau, t) = \psi_t(x, t). \end{cases}$$

Suivant , nous définissons une variable auxiliaire :

$$\eta^t(x, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t - s), \quad s \geq 0.$$

alors

$$\eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = \psi_t(x, t).$$

Nous pouvons donc reformuler le système principal (1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \psi_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t - s) ds = 0, \\ sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0, \\ \eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = \psi_t(x, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

et les conditions aux limites initiales données par :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), & \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), & \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ z(x, \rho, s, 0) = z_0(x, \rho, s), \\ \eta(x, s, 0) = \eta_0(x, s). \end{cases} \quad (2.2)$$

où $x \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1)$ et $t > 0$.

2.2 Problème de premier ordre

Pour utiliser l'approche de semi-groupe on réécrit notre système comme un système de première order, donc on suppose que

$$U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T,$$

et on réécrit notre problème comme suit

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t), \\ U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, z_0, z_1), \end{cases} \quad (2.3)$$

définissons les variables :

$$\begin{aligned} u &= \varphi_t, \\ v &= \psi_t, \\ z(x, \rho, s, t) &= \psi_t(x, t - s\rho). \end{aligned}$$

Où $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T$ et l'opérateur A est défini par :

$$A \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ \psi \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x \\ v \\ \frac{b}{\rho_2} (b\psi_{xx}) - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x - \psi) - \frac{\mu_1}{\rho_2} - \psi_t(x, t) - \frac{1}{\rho_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t - s) ds \\ - \left(\frac{1}{s}\right) z_\rho \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On considère l'espace suivant :

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)), \quad (2.5)$$

Et \mathcal{A} l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_{xx} & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_{xx} - \frac{k}{\rho_2} - \frac{\mu_1}{\rho_2} \partial_t - \frac{1}{\rho_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \partial_t(\cdot)(t-s) ds & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s} \partial_\rho \end{pmatrix}.$$

Notez que $D(\mathcal{A}(t))$ est indépendant de t .

Maintenant, On définit l'espace d'énergie \mathbb{E} associé au système comme :

$$\mathbb{E} = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))$$

muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 (\rho_1 u_1 u_2 + \rho_2 v_1 v_2 + K(\varphi_{1x} + \psi_1)(\varphi_{2x} + \psi_2) + b\psi_{1x}\psi_{2x}) dx \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z_1 z_2 ds d\rho dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le domaine de A est :

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H} \mid AU \in \mathcal{H}, \varphi, \psi \in H^2(0, 1), z_\rho \in L^2\}. \quad (2.7)$$

2.3 Existence de la solution

Afin de mieux aborder notre problématique, on propose de commencer par la résolution d'un exemple, ce qui nous permettra ensuite de traiter notre propre cas plus efficacement

Exemple de résolution d'un problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Commençons par rappeler un résultat classique.

Théorème 2.3.1 (Cauchy, Lipschitz, Picard).

Soit E un espace de Banach et soit $F : E \rightarrow E$ une application telle que

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in E, \quad (L \geq 0).$$

Alors pour tout $u_0 \in E$, il existe $u \in C^1([0, +\infty[; E)$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Preuve 2.3.1.

Existence. Résoudre (2.8) équivaut à trouver $u \in C([0, +\infty[; E)$ tel que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds \quad (2.9)$$

Étant donné $k > 0$ — qui sera fixé ultérieurement — on introduit

$$X = \left\{ u \in C([0, +\infty[; E) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\| < \infty \right\}$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

i) X est un Banach pour la norme

$$\|u\|_k = \sup_{t \geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|$$

ii) Pour tout $u \in X$, la fonction

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds$$

appartient à X .

iii) $\|\Phi u - \Phi v\|_k \leq \frac{L}{k} \|u - v\|_k \quad \forall u, v \in X$.

Pour $k > L$, Φ admet un point fixe qui est une solution de (2.9).

Unicité.

Soient u et \bar{u} deux solutions de (4). Posant

$$\varphi(t) = \|u(t) - \bar{u}(t)\|,$$

Grâce à (2.9), on a :

$$\varphi(t) \leq L \int_0^t \varphi(s) ds \quad \forall t \geq 0$$

Donc $\varphi \equiv 0$ par le lemme de Gronwall.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard est utile pour les équations différentielles ordinaires, mais peu adapté aux équations aux dérivées partielles. Le théorème suivant est particulièrement efficace pour les équations d'évolution.

Théorème 2.3.2.

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H]) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale)} \end{cases}$$

De plus on a les estimations :

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0. \quad (2.10)$$

Remarque 2.

L'intérêt principal du théorème réside dans le fait que pour résoudre (2.10) on se ramène à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda Au = f$.

Preuve 2.3.2.

1ère étape : Unicité Soient u et \bar{u} deux solutions de (6). On a :

$$\left(\frac{d}{dt}(u - \bar{u}), u - \bar{u} \right) = -(A(u - \bar{u}), u - \bar{u}) \leq 0$$

Or :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t) - \bar{u}(t)\|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t) - \bar{u}(t)), u(t) - \bar{u}(t) \right)$$

Donc $t \mapsto \|u(t) - \bar{u}(t)\|$ est décroissante. Comme $\|u(0) - \bar{u}(0)\| = 0$, on conclut que :

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\| = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Pour prouver l'existence de u , on :

- Remplace A par sa régularisée Yosida A_λ
- Établit des estimations uniformes en λ
- Passe à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$

Soit u_λ la solution du problème régularisé :

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A) \end{cases} \quad (2.11)$$

L'existence de u_λ est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard appliqué avec $F = -A_\lambda$.

2ème étape : Estimation On a l'estimation uniforme :

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.12)$$

Cette inégalité est une conséquence immédiate du

Lemme 2.3.1. Soit $w \in C^1([0, +\infty[; H])$ vérifiant :

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[\quad (2.13)$$

Alors les fonctions :

$$t \mapsto \|w(t)\| \quad \text{et} \quad t \mapsto \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\| = \|A_\lambda w(t)\|$$

sont décroissantes sur $[0, +\infty[$.

Preuve 2.3.3. On calcule :

$$\left(\frac{dw}{dt}, w \right) + (A_\lambda w, w) = 0.$$

D'après (1.4.2), $(A_\lambda w, w) \geq 0$, donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq 0$$

De plus, comme A_λ est linéaire borné, w est C^∞ et satisfait :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dt} \right) + A_\lambda \left(\frac{dw}{dt} \right) = 0$$

Le même raisonnement appliqué à $\frac{dw}{dt}$ donne la décroissance de $\|A_\lambda w(t)\|$.

3ème étape : Convergence des solutions régularisées Pour tout $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge quand $\lambda \rightarrow 0$ vers une limite $u(t)$, uniformément sur tout intervalle $[0, T]$. Soient $\lambda, \mu > 0$.

On a :

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

d'où l'identité fondamentale :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \quad (2.14)$$

Or

$$\begin{cases} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\ + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \end{cases} \quad (2.15)$$

on déduit alors de (2.12),(2.14),(2.15) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 2(\lambda + \mu) \|Au_0\|^2$$

En intégrant cette inégalité :

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t \|Au_0\|^2$$

soit :

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t} \|Au_0\| \quad (2.16)$$

Cette estimation montre que pour tout $t \geq 0$, $(u_\lambda(t))$ est de Cauchy lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Notons $u(t)$ sa limite. En faisant $\mu \rightarrow 0$ dans (12) :

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda t} \|Au_0\|$$

La convergence est donc uniforme sur tout intervalle $[0, T]$, et $u \in C([0, +\infty[; H)$.

4ème étape : Supposons que la donnée initiale vérifie $u_0 \in D(A^2)$, c'est-à-dire :

$$u_0 \in D(A) \quad \text{et} \quad Au_0 \in D(A)$$

Posons $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, qui satisfait l'équation :

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0 \quad \text{avec} \quad v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 \quad (2.17)$$

Par une analyse similaire aux étapes précédentes, on établit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq (\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|)(\lambda \|A_\lambda v_\lambda\| + \mu \|A_\mu v_\mu\|). \quad (2.18)$$

D'après le (2.3.1) on a :

$$\|A_\lambda v_\lambda\| \leq \|A_\lambda v_\lambda(0)\| = \|A_\lambda A_\lambda u_0\| \quad (2.19)$$

Comme $Au_0 \in D(A)$, on a les identités remarquables :

$$\begin{aligned} A_\lambda A_\lambda u_0 &= J_\lambda A J_\lambda A u_0 \\ &= J_\lambda^2 A^2 u_0 \end{aligned}$$

d'où les majorations uniformes :

$$\|A_\lambda A_\lambda u_0\| \leq \|A^2 u_0\| \quad \text{et} \quad \|A_\mu A_\mu u_0\| \leq \|A^2 u_0\| \quad (2.20)$$

En combinant (2.17),(2.18),(2.19)et (2.20) on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq 2(\lambda + \mu) \|A^2 u_0\|^2.$$

5ème étape : Il existe une solution de (2.10) supposons $u_0 \in D(A^2)$. D'après les étapes précédentes, pour tout $T < +\infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \rightarrow u(t) & \text{uniformément sur } [0, T] \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightarrow v(t) & \text{uniformément sur } [0, T] \end{cases}$$

Ceci implique que $u \in C^1([0, +\infty[; H)$ avec $\frac{du}{dt} = v$.

L'équation régularisée :

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(u_\lambda(t)) = 0 \quad (2.21)$$

se réécrit :

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0$$

On observe que :

$$\|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| \leq \|J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \rightarrow 0$$

quand $\lambda \rightarrow 0$, par convergence uniforme.

Comme le graphe de A est fermé, on déduit de (2.21) que :

$$u(t) \in D(A) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

La continuité de $t \mapsto Au(t)$ implique que :

$$u \in C([0, +\infty[; D(A))$$

La solution obtenue vérifie :

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \|Au_0\| \quad \forall t \geq 0$$

Lemme 2.3.2.

Pour tout $u_0 \in D(A)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\bar{u}_0 \in D(A^2)$ tel que :

$$\|u_0 - \bar{u}_0\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|Au_0 - A\bar{u}_0\| < \varepsilon$$

Autrement dit, $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ pour la norme du graphe.

Preuve 2.3.4. Soit $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$. Alors :

- $\bar{u}_0 \in D(A)$ et $\bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0$
- $A\bar{u}_0 = \frac{1}{\lambda}(u_0 - \bar{u}_0) \in D(A)$ donc $\bar{u}_0 \in D(A^2)$
- D'après proposition (1.4.2) que

$$A_{\bar{u}_0} = Au_0 = J_\lambda Au_0,$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda u_0 - u_0\| = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|J_\lambda Au_0 - Au_0\| = 0.$$

On choisit alors $\lambda > 0$ assez petit et on obtient le résultat désiré.

6ème étape : Soit $u_0 \in D(A)$. Grâce au lemme précédent il existe une suite $(u_{0n}) \in D(A^2)$ telle que $u_{0n} \rightarrow u_0$ et $Au_{0n} \rightarrow Au_0$. D'après la 5^e étape on sait qu'il existe une solution u_n du problème

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 & \text{sur } [0, \infty[, \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \quad (2.22)$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_m(t)\| &\leq \|u_{0n} - u_{0m}\| \rightarrow 0, \\ \left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt} \right\| &\leq \|Au_{0n} - Au_{0m}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ uniformément sur } [0, \infty[,$$

$$\frac{du_n}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} \text{ uniformément sur } [0, \infty[.$$

Avec $u \in C^1([0, \infty[; H)$. Passant à la limite dans (2.22), grâce au fait que A est fermé, on voit que $u \in C([0, \infty[; D(A))$ et que u vérifie (2.10).

Remarque 3.

- a) Supposons que $u_0 \in D(A)$. On sait (d'après la 3^e étape) que, quand $\lambda \rightarrow 0$, $u_\lambda(t)$ converge, pour tout $t \geq 0$, vers une limite notée $u(t)$.
On peut montrer que $u \in C^1([0, \infty[; H) \cap C([0, \infty[; D(A))$ et que u vérifie (2.10).
- b) Supposons que $u_0 \in H$. On peut montrer que, quand $\lambda \rightarrow 0$, $u_\lambda(t)$ converge, pour tout $t \geq 0$ vers une limite notée $u(t)$. Mais il peut se produire que $u(t) \notin D(A)$, $\forall t \geq 0$ et que $u(t)$ n'est différentiable en aucun point de $[0, \infty[$.
Donc, à fortiori $u(t)$ ne peut pas être une solution classique de (2.10). De fait, dans ce cas, le problème (2.10) ne possède aucune solution au sens classique. Néanmoins on considère $u(t)$ comme une solution généralisée de (2.10).

Remarque 4. Soit $t \geq 0$; on considère l'application linéaire $S_t(f) : u_0 \mapsto u(t)$ de $D(A)$ dans $D(A)$ où $u(t)$ est la solution de (2.10) obtenue au théorème (2.3.1). Étant donné que $\|S_\lambda(t)u_0\| \leq \|u_0\|$, on peut prolonger $S_\lambda(t)$ par continuité et densité en un opérateur linéaire continu de H dans lui-même. On désigne encore ce prolongement par $S_\lambda(t)^{(1)}$. On vérifie facilement que $S_\lambda(t)$ possède les propriétés suivantes :

- a) Pour chaque $t \geq 0$, $S_\lambda(t) : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire continu et

$$\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$$

- b) $S_\lambda(t_1 + t_2) = S_\lambda(t_1) \circ S_\lambda(t_2) \quad \forall t_1 \geq 0, \forall t_2 \geq 0$

- c) $S_\lambda(0) = I$

- d) $\lim_{t \rightarrow 0} \|S_\lambda(t)u_0 - u_0\| = 0 \quad \forall u_0 \in H$

Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ définie pour chaque valeur du paramètre $t \geq 0$ et vérifiant a), b), c) est, par définition, un **semi-groupe continu de contractions**.

On montre (Hille-Yosida) qu'inversement, étant donné un semi-groupe continu de contractions $S(t)$, il existe un opérateur A maximal monotone unique tel que $S(t) = S_A(t)$ pour tout $t \geq 0$.

On établit ainsi une **correspondance bijective entre les opérateurs maximaux monotones et les semi-groupes continus de contractions**.

Remarque 5. Soit A un opérateur maximal monotone et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La résolution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

se ramène très simplement à la résolution de (2.10) grâce à l'artifice classique suivant. On pose

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

Alors v vérifie

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

Régularité

On va maintenant compléter le résultat du théorème (2.3.1) en montrant que la solution u de (2.10) est **plus régulière** moyennant des hypothèses supplémentaires sur la donnée initiale u_0 .

Pour cela, on définit par récurrence l'espace

$$D(A^*) = \{v \in D(A^{k-1}); Av \in D(A^{k-1})\}, \quad k \text{ entier } \geq 2.$$

On vérifie aisément que $D(A^*)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{D(A^*)} = \sum_{j=0}^k (A^j u, A^j v)$$

et la norme correspondante est

$$\|u\|_{D(A^*)} = \left(\sum_{j=0}^k \|A^j u\|^2 \right)^{1/2}$$

Théorème 2.3.3. On suppose que $u_0 \in D(A^*)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème (2.10) obtenue au théorème (2.3.1) vérifie de plus

$$u \in C^k([0, +\infty[; D(A)) \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, k.$$

Preuve 2.3.5.

Commençons par supposer que $k = 2$.

On considère l'espace de Hilbert $H_1 = D(A)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{D(A)}$. On vérifie aisément que l'opérateur $A_1 : D(A_1) = H_1 \rightarrow H_1$ défini par

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A^2) \\ A_1 u = Au \quad \text{pour } u \in D(A) \end{cases}$$

est maximal monotone dans H_1 . Appliquant le théorème (2.3.1) à l'opérateur A_1 dans l'espace H_1 on voit qu'il existe une solution

$$u \in C^1([0, +\infty[; H_1) \cap C([0, +\infty[; D(A_1))$$

telle que

$$\frac{du}{dt} + A_1 u = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[, \quad u(0) = u_0.$$

En particulier u satisfait (6), grâce à l'unicité il s'agit donc de la solution de (2.10). Il reste à vérifier que $u \in C^2([0, +\infty[; H)$.

On note que $u \in C^1([0, +\infty[; D(A))$, donc

$$\frac{du}{dt} \in C([0, +\infty[; D(A)).$$

De plus,

$$Au \in C^1([0, +\infty[; H),$$

et on a que

$$A \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(Au). \quad (2.23)$$

Appliquant (2.10), on voit que $\frac{du}{dt} \in C^1([0, +\infty[; H)$, c'est-à-dire $u \in C^2([0, +\infty[; H)$, et que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + A \left(\frac{du}{dt} \right) = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty[. \quad (2.24)$$

Passons maintenant au cas général $k \geq 3$. On raisonne par récurrence sur k : admettons le résultat jusqu'à l'ordre $k - 1$ et supposons que $u_0 \in D(A^*)$. D'après

D'après ce qui précède, on sait que la solution u de (2.10) appartient à :

$$C^2([0, \infty[; H) \cap C^1([0, \infty[; D(A))$$

et vérifie (2.24). En posant :

$$v = \frac{du}{dt}$$

on obtient les propriétés suivantes :

$$v \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, \infty[; D(A)),$$

avec le système :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 & \text{sur } [0, \infty[\\ v(0) = -Au_0. \end{cases}$$

Ainsi, v est la solution de (2.10) correspondant à la donnée initiale $v_0 = -Au_0$.

Comme $v_0 \in D(A^{k-1})$, l'hypothèse de récurrence implique :

$$v \in C^{k-1-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, k-1, \quad (2.25)$$

ce qui équivaut à :

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty[; D(A^j)) \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Il reste à montrer que :

$$u \in C([0, +\infty[; D(A^k)). \quad (2.26)$$

En appliquant (2.25) avec $j = k - 1$, on obtient :

$$\frac{du}{dt} \in C([0, +\infty[; D(A^{k-1})). \quad (2.27)$$

De (2.27) et de l'équation (2.10), on déduit :

$$Au \in C([0, \infty[; D(A^{k-1})), \quad (2.28)$$

ce qui confirme (2.26).

Le cas autoadjoint

Définition 2.3.1.

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné avec $D(A)$ dense dans H . En identifiant $H' = H$, on peut considérer A^* comme un opérateur non-borné dans H .

- **Symétrique :**

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D(A).$$

- **Autoadjoint :**

$$A^* = A \quad (\text{avec } D(A^*) = D(A)).$$

Remarque 6. Lorsque $A \in \mathcal{L}(H)$, il n'y a pas lieu de distinguer entre opérateur symétrique et opérateur autoadjoint. Par contre, si A est non-borné, la distinction entre « symétrique » et « autoadjoint » est subtile. Il est clair qu'un opérateur autoadjoint est symétrique. La réciproque n'est pas vraie : A est symétrique si et seulement si $A \subset A^*$ — ce qui sous-entend $D(A) \subset D(A^*)$ et $A^* = A$ sur $D(A)$. Lorsque A est symétrique, il peut arriver que $A \neq A^*$ (voir [1]).

Le résultat suivant montre que lorsque A est maximal monotone, alors :

$$(A \text{ symétrique}) \Leftrightarrow (A \text{ autoadjoint}).$$

Proposition 2.3.1. Soit A un opérateur maximal monotone, symétrique. Alors A est autoadjoint.

Preuve 2.3.6. Soit $J_1 = (I + A)^{-1}$. Montrons d'abord que J_1 est autoadjoint. Il suffit de vérifier — puisque $J_1 \in \mathcal{L}(H)$ — que :

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v) \quad \forall u, v \in H.$$

Posons $u_1 = J_1 u$, $v_1 = J_1 v$ de sorte que :

$$\begin{aligned} u_1 + Au_1 &= u, \\ v_1 + Av_1 &= v. \end{aligned}$$

Comme $(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$, il en résulte que $(u_1, v) = (u, v_1)$, c'est-à-dire (24).

Soit $u \in D(A^*)$ et posons $f = u + A^*u$. On a :

$$(f, v) = (u, v + Av) \quad \forall v \in D(A),$$

c'est-à-dire :

$$(f, J_1 w) = (u, w) \quad \forall w \in H.$$

Par conséquent, $u = J_1 f$ et donc $u \in D(A)$. Conclusion : $D(A^*) = D(A)$.

Remarque 7. Il faut faire très attention. Si A est un opérateur monotone, même symétrique, alors A^* n'est pas nécessairement monotone ; Par contre, on démontre les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & A \text{ maximal monotone} \\ & \Leftrightarrow A^* \text{ maximal monotone} \\ & \Leftrightarrow A \text{ fermé, } D(A) \text{ dense, } A \text{ et } A^* \text{ monotones.} \end{aligned}$$

Théorème 2.3.4. Soit A un opérateur maximal monotone, autoadjoint. Alors pour tout $u_0 \in H$ (*), il existe une fonction :

$$u \in C([0, +\infty[; H) \cap C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A)),$$

unique, telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur }]0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, on a les estimations suivantes :

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0.$$

$$u \in C^k([0, +\infty[; D(A^l)) \quad \forall k, l \text{ entiers.} \quad (2.29)$$

Preuve 2.3.7.

Unicité Soient u et \bar{u} deux solutions. En appliquant la monotonie de A , on voit que la fonction $\varphi(t) = |u(t) - \bar{u}(t)|^2$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. D'autre part, elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi \equiv 0$.

Existence

1ère étape

Supposons d'abord que $u_0 \in D(A^2)$ et soit u la solution de (2.10) obtenue au théorème (2.3.1). On va établir l'estimation :

$$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0. \quad (2.30)$$

Notons que :

$$J_k^* = J_k \quad \text{et} \quad A_k^* = A_k \quad \forall k > 0$$

(voir la démonstration de la proposition (2.3.1)).

Reprenons l'approximation utilisée dans la démonstration du théorème (2.3.1) :

$$\frac{du_k}{dt} + A_k u_k = 0 \quad \text{sur } [0, \infty[, \quad u_k(0) = u_0. \quad (2.31)$$

En multipliant scalairement (2.31) par u_k et en intégrant sur $[0, T]$, on obtient :

$$\frac{1}{2}|u_k(T)|^2 + \int_0^T (A_k u_k, u_k) dt = \frac{1}{2}|u_0|^2. \quad (2.32)$$

Prenant ensuite le produit scalaire de (2.31) avec $t \frac{du_k}{dt}(t)$ et intégrant sur $[0, T]$, il vient :

$$\int_0^T \left| \frac{du_k}{dt}(t) \right|^2 t dt + \int_0^T \left(A_k u_k(t), \frac{du_k}{dt}(t) \right) t dt = 0. \quad (2.33)$$

Ou :

$$\frac{d}{dt} (A_k u_k, u_k) = \left(A_k \frac{du_k}{dt}, u_k \right) + \left(A_k u_k, \frac{du_k}{dt} \right) = 2 \left(A_k u_k, \frac{du_k}{dt} \right),$$

puisque $A_k^* = A_k$.

Par conséquent, en intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{cases} \int_0^T \left(A_k u_k(t), \frac{du_k}{dt}(t) \right) t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} [(A_k u_k, u_k)] t dt \\ = \frac{1}{2} (A_k u_k(T), u_k(T)) T - \frac{1}{2} \int_0^T (A_k u_k, u_k) dt. \end{cases} \quad (2.34)$$

D'autre part, comme la fonction $t \mapsto \left| \frac{du_k}{dt}(t) \right|$ est décroissante (lemme (2.3.1)) on a :

$$\int_0^T \left| \frac{du_k}{dt}(t) \right|^2 t dt \geq \left| \frac{du_k}{dt}(T) \right|^2 \frac{T^2}{2} \quad (2.35)$$

Combinant (2.32), (2.33), (2.34) et (2.35) on aboutit à :

$$\frac{1}{2} |u_k(T)|^2 + T (A_k u_k(T), u_k(T)) + T^2 \left| \frac{du_k}{dt}(T) \right|^2 \leq \frac{1}{2} |u_0|^2$$

d'où il résulte, en particulier, que :

$$\left| \frac{du_k}{dt}(T) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}T} |u_0| \quad \forall T > 0 \quad (2.36)$$

On conclut la démonstration de (2.30) en passant à la limite dans (2.36) quand $k \rightarrow \infty$ (noter que $\frac{du_k}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$ grâce à la 1^{ère} étape de la démonstration du théorème (2.3.1)).

2ème étape

On suppose maintenant que $u_0 \in H$. Soit (u_{0n}) une suite dans $D(A)$ telle que $u_{0n} \rightarrow u_0$. Soit u_n la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases}$$

On sait (théorème (2.3.1)) que :

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n} - u_{0m}| \quad \forall m, n, \quad \forall t \geq 0$$

et (1^{ère} étape) que :

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \leq \frac{1}{t} |u_{0n} - u_{0m}| \quad \forall m, n, \quad \forall t > 0$$

Il en résulte que $u_n(t)$ converge vers une limite $u(t)$ uniformément sur $[0, \infty[$ et $\frac{du_n}{dt}$ converge vers $\frac{du}{dt}$ uniformément sur chaque intervalle $[\delta, +\infty[$ avec $\delta > 0$. Donc :

$$u \in C([0, +\infty[; H]) \cap C^1([0, +\infty[; H])$$

On conclut aisément que $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et vérifie l'équation $\frac{du}{dt} + Au = 0$ sur $]0, +\infty[$ (utiliser le fait que A est fermé).

► Maintenant, nous allons procéder à la résolution de notre problème en utilisant le théorème suivant.

Théorème 2.3.5.

Nous supposons que (2) est vrai. Ensuite, pour tout

$\mathcal{X}_0 \in D(\mathcal{A}(0))$, il existe une solution unique \mathcal{X} de (2.1)-(2.2) satisfaisante

$$\mathcal{X} \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0, \infty), \mathbb{E}).$$

Preuve 2.3.8.

nous utilisons l'approche des semi-groupes. Plus précisément, nous montrons que l'opérateur \mathcal{A} engendre un semi-groupe C_0 dans l'espace \mathcal{H} . Dans cette étape, nous prouvons que l'opérateur \mathcal{A} est dissipatif. Pour tout $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$, nous avons :

$$\langle AU, U \rangle_H = -\mu_1 \int_0^1 v^2(x) dx - \mu_2 \int_0^1 z(x, 1)v(x) dx - \frac{\xi}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx \quad (2.37)$$

en considérant maintenant le dernier terme du membre de droite de l'équation (2.37), on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) d\rho dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \{z^2(x, 1) - z^2(x, 0)\} dx \quad (2.38)$$

en remplaçant dans l'équation (2.37), on obtient :

$$\langle AU, U \rangle_H = -\mu_1 \int_0^1 v^2(x) dx - \mu_2 \int_0^1 z(x, 1)v(x) dx - \frac{\xi}{2\tau} \int_0^1 z^2(x, 1) dx + \frac{\xi}{2\tau} \int_0^1 v^2(x) dx$$

en appliquant l'inégalité de Young, on déduit :

$$\langle AU, U \rangle_H \leq \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_0^1 v^2(x) dx + \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau} \right) \int_0^1 z^2(x, 1) dx.$$

Compte tenu de la condition (2), on remarque que :

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau} < 0, \quad \frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau} < 0$$

Par conséquent, l'opérateur \mathcal{A} est dissipatif.

Nous montrons maintenant que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Soit

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H},$$

nous cherchons

$$U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T \in D(\mathcal{A})$$

solution du système suivant :

$$\begin{cases} \lambda\varphi - u = f_1 \\ \lambda u - K/\rho_1 (\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2 \\ \lambda\psi - v = f_3 \\ \lambda v - b/\rho_2 \psi_{xx} + K/\rho_2 (\varphi_x + \psi) + \mu_1/\rho_2 v + \mu_2/\rho_2 z(\cdot, 1) = f_4 \\ \lambda z + \frac{1}{\tau} z_\rho = f_5 \end{cases} \quad (2.39)$$

en supposant que φ et ψ sont connues, les première et troisième équations (2.39) donnent :

$$\begin{cases} u = \lambda\varphi - f_1 \\ v = \lambda\psi - f_3 \end{cases} \quad (2.40)$$

il est clair que $u \in H_0^1(0, 1)$, $v \in H_0^1(0, 1)$. De plus, l'équation (2.39) permet d'obtenir z sous la forme suivante :

$$z(x, 0) = v(x), \quad \text{pour tout } x \in (0, 1)$$

en suivant la même approche que dans [8], on obtient à partir de l'équation de (2.39) :

$$z(x, \rho) = v(x)e^{-i\rho\tau} + \tau e^{-\bar{\lambda}\rho\tau} \int_0^1 f_5(x, \sigma) e^{i\sigma\tau} d\sigma$$

à partir de (2.40), on obtient :

$$z(x, \rho) = \lambda\psi(x)e^{-i\rho\tau} - f_3 e^{-\bar{\lambda}\rho\tau} + \tau e^{-\bar{\lambda}\rho\tau} \int_0^1 f_5(x, \sigma) e^{j\sigma\tau} d\sigma \quad (2.41)$$

en utilisant (2.39) et (2.40), les fonctions φ et ψ satisfont le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda^2\varphi - K/\rho_1 (\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2 + \lambda f_1 \\ \lambda^2\psi - b/\rho_2 \psi_{xx} + K/\rho_2 (\varphi_x + \psi) + \mu_1/\rho_2 v + \mu_2/\rho_2 z(\cdot, 1) = f_4 + \lambda f_3 \end{cases} \quad (2.42)$$

résoudre le système (2.42) revient à trouver $(\varphi, \psi) \in (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1))^2$ tel que :

$$\begin{cases} \int_0^1 (\rho_1 \lambda^2 \varphi w + K (\varphi_x + \psi) w_x) dx = \int_0^1 \rho_1 (f_2 + \lambda f_1) w dx \\ \int_0^1 (\rho_2 \lambda^2 \psi \chi dx + b \psi_x \chi_x + K (\varphi_x + \psi) \chi + \mu_1 v \chi + \mu_2 z(\cdot, 1) \chi) dx = \int_0^1 \rho_2 (f_4 + \lambda f_3) \chi dx \end{cases} \quad (2.43)$$

pour tout $(w, \chi) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

D'après (2.41), on a

$$z(x, 1) = \lambda\psi(x)e^{-i\tau} + z_0(x)$$

où $x \in (0, 1)$, et

$$z_0(x) = -f_3 e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_5(x, \sigma) e^{i\sigma\tau} d\sigma \quad (2.44)$$

Il est clair, d'après cette formule, que z_0 dépend uniquement des données f_3 et f_5 . Par conséquent, le problème (2.43) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\zeta((\varphi, \psi), (w, \chi)) = l(w, \chi) \quad (2.45)$$

où la forme bilinéaire $\zeta : [H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et la forme linéaire $l : H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{aligned} \zeta((\varphi, \psi), (w, \chi)) &= \int_0^1 \left(\rho_1 \lambda^2 \varphi w + K (\varphi_x + \psi) (w_x + \chi) \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\rho_2 \lambda^2 \psi \chi + b \psi_x \chi_x \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\mu_1 + \mu_2 e^{-\lambda x} \right) \lambda \psi \chi dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l(w, \chi) &= \int_0^1 \left(\mu_1 f_3 \chi - \mu_2 z_0(x) \chi \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \rho_1 (f_2 + \lambda f_1) w dx \\ &\quad + \int_0^1 \rho_2 (f_4 + \lambda f_3) \chi dx \end{aligned}$$

où $z_0(x)$ est défini par l'équation (2.44).

Il est facile de vérifier que la forme bilinéaire ζ est continue et coercive, et que la forme linéaire l est continue. Par conséquent, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que, pour tout $(w, \chi) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$, le problème (2.45) admet une solution unique $(\varphi, \psi) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

En appliquant ensuite la régularité elliptique classique, il résulte de (2.43) que $(\varphi, \psi) \in H^2(0, 1) \times H^2(0, 1)$.

Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Le résultat du théorème 1.5.2 s'ensuit alors en vertu du théorème de Hille-Yosida.

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution

3.1 Stabilité exponentielle

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats relatifs à la stabilité du système étudié. Nous commençons par énoncer les principaux résultats, puis nous procédons à leur démonstration en utilisant la méthode d'énergie. Plus précisément, nous établissons un résultat de stabilité exponentielle dans le cas où les vitesses de propagation des ondes sont égales.

Approche technique

Cette approche consiste à construire des fonctions d'énergie appropriées, qui mesurent l'évolution du système au cours du temps.

Nous dérivons ensuite des inégalités différentielles satisfaites par ces fonctions d'énergie, en utilisant les conditions aux limites et les propriétés des termes d'amortissement ou de retard. Grâce à ces estimations, nous montrons que l'énergie décroît exponentiellement sous certaines hypothèses, notamment en cas d'égalité des vitesses d'onde.

Cette technique permet non seulement d'établir l'existence d'un taux de décroissance, mais aussi de donner des indications précises sur la vitesse de convergence vers l'équilibre.

Lemme 3.1.1.

$$\begin{aligned} E(t) &= E(t, \varphi, \psi, z, \eta^t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \{K(\varphi_x + \psi)^2 + b\psi_x^2\} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds dp dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

satisfait

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -C \left\{ \int_0^1 \psi_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) + \int_0^1 \psi_t^2(x, t) dx \right\}, \tag{3.2}$$

où $C > 0$, ce qui implique que l'énergie E est une fonction décroissante par rapport à t .

Preuve 3.1.1. Nous considérons le système (2.1) :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) + \mu_1 \psi_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t - s) ds = 0, \\ sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0, \\ \eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = \psi_t(x, t). \end{cases}$$

On multiplie la première équation par φ_t , la deuxième par ψ_t , et la troisième équation (pour z) par $|\mu_2(s)|z$. On intègre sur $(0, 1)$ (et sur $(0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$ pour z).

Étape 1 : termes d'inertie

$$\int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t dx = \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \quad \int_0^1 \rho_2 \psi_{tt} \psi_t dx = \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Étape 2 : termes d'élasticité

$$\int_0^1 (-K(\varphi_x + \psi)_x) \varphi_t dx = K \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx = \frac{K}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx.$$

$$\int_0^1 (-b\psi_{xx}) \psi_t dx = b \int_0^1 \psi_x \psi_{xt} dx = \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx.$$

Étape 3 : termes d'amortissement

$$\int_0^1 \mu_1 \psi_t \psi_t dx = \mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t - s) ds \right) \psi_t(x, t) dx = \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t) \psi_t(x, t - s) ds dx.$$

Pour traiter le terme de retard, on introduit la variable auxiliaire z et on utilise l'équation pour z . Après intégration par parties et sous certaines conditions techniques (dérivées nulles aux bords, etc.), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx.$$

Étape 4 : synthèse

En regroupant tous les termes, on obtient :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t) \psi_t(x, t - s) ds dx.$$

On applique ensuite les inégalités de Young et Cauchy-Schwarz pour estimer le dernier terme. En choisissant les coefficients appropriés, on obtient finalement :

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -C \left\{ \int_0^1 \psi_t^2(x, t) dx + \int_0^1 \psi_t(x, t) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx \right\},$$

où $C > 0$ est une constante positive.

On en déduit que l'énergie $E(t)$ est décroissante, ce qui montre la dissipation et prépare l'étude de la stabilité exponentielle.

Théorème 3.1.1 (Théorème principal).

Soit $U_0 \in D(A)$. Supposons que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}.$$

Alors, il existe deux constantes positives C et γ , indépendantes de t , telles que

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0. \quad (3.3)$$

Remarque 8.

Pour établir la décroissance exponentielle de la solution, il suffit de construire un fonctionnel $L(t)$, équivalent à l'énergie $E(t)$, vérifiant

$$\frac{dL(t)}{dt} \leq -\Lambda L(t), \quad \forall t > 0$$

où Λ est une constante positive. Pour obtenir un tel fonctionnel L , nous aurons besoin de plusieurs lemmes auxiliaires.

Lemme 3.1.2. *Commençons par définir le fonctionnel suivant.*

$$I_1(t) := - \int_0^1 (\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi) dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx. \quad (3.4)$$

Nous démontrons alors la majoration suivante.

Considérons $(\varphi, \psi, z, \eta^t)$ solution du système (2.1)-(2.2). Pour tous $\varepsilon, \delta_1 > 0$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &\leq - \int_0^1 (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2) dx \\ &+ \frac{c\varepsilon_2}{2} \int_0^1 \psi^2 dx \\ &+ (b + \delta_1) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t^2(x, t-s) ds dx + K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $c = 1/\pi^2$ est la constante de Poincaré.

Preuve 3.1.2. *On commence par dériver $I_1(t)$ par rapport au temps :*

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = - \int_0^1 (\rho_1 \varphi_{tt} \varphi + \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_{tt} \psi + \rho_2 \psi_t^2) dx - \mu_1 \int_0^1 \psi \psi_t dx.$$

On remplace ensuite φ_{tt} et ψ_{tt} à partir du système (2.1) :

$$\rho_1 \varphi_{tt} = K(\varphi_x + \psi)_x, \quad \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - K(\varphi_x + \psi) - \mu_1 \psi_t - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t-s) ds.$$

En substituant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &= - \int_0^1 K(\varphi_x + \psi)_x \varphi dx - \int_0^1 \rho_1 \varphi_t^2 dx - \int_0^1 b\psi_{xx} \psi dx \\ &- \int_0^1 K(\varphi_x + \psi) \psi dx - \int_0^1 \mu_1 \psi_t \psi dx - \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t-s) ds \right) \psi dx \\ &- \int_0^1 \rho_2 \psi_t^2 dx - \mu_1 \int_0^1 \psi \psi_t dx. \end{aligned}$$

On intègre par parties les termes avec dérivées spatiales :

$$\int_0^1 K(\varphi_x + \psi)_x \varphi dx = -K \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx, \quad \int_0^1 b \psi_{xx} \psi dx = -b \int_0^1 \psi_x^2 dx.$$

On regroupe les termes et on utilise les inégalités de Young :

$$\left| \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t-s) \psi(x, t) ds dx \right| \leq \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t^2(x, t-s) ds dx + \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^1 \psi^2(x, t) dx.$$

De même, pour $\int_0^1 \psi \psi_t dx$, on applique Young :

$$\left| \int_0^1 \psi \psi_t dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

En combinant ces estimations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &\leq - \int_0^1 (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2) dx + \left(\frac{c\varepsilon_2}{2} \right) \int_0^1 \psi^2 dx + (b + \delta_1) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t^2(x, t-s) ds dx + K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx. \end{aligned}$$

On remarque que la constante $c = 1/\pi^2$ provient de l'inégalité de Poincaré appliquée à ψ sur $(0, 1)$. Ainsi, l'estimation finale correspond exactement à l'inégalité annoncée dans (3.5).

D'après l'expression explicite de w , on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|w_x\|_{L^2(0,1)} &\leq C \|\psi\|_{L^2(0,1)}, \\ \|w\|_{L^2(0,1)} &\leq C \|\psi\|_{L^2(0,1)}, \\ \|w_{xx}\|_{L^2(0,1)} &= \|\psi_x\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de t . Ces inégalités seront cruciales dans la suite pour les estimations d'énergie et la construction des fonctionnelles de Lyapunov.

Lemme 3.1.3.

La solution de l'équation (3.6) satisfait les propriétés suivantes :

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx,$$

et

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Preuve 3.1.3. On part de l'équation

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(1) = 0.$$

En multipliant les deux côtés par w et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient :

$$\int_0^1 -w_{xx} w dx = \int_0^1 \psi_x w dx.$$

Intégration par parties à gauche (avec $w = 0$ aux bords) donne :

$$\int_0^1 w_x^2 dx = \int_0^1 \psi_x w dx.$$

Ensuite, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré pour w :

$$\int_0^1 \psi_x w dx \leq \left(\int_0^1 \psi_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 w^2 dx \right)^{1/2}.$$

Or, d'après l'inégalité de Poincaré (comme $w = 0$ aux bords),

$$\int_0^1 w^2 dx \leq C_p \int_0^1 w_x^2 dx,$$

où C_p est une constante. Ainsi,

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \left(\int_0^1 \psi_x^2 dx \right)^{1/2} \left(C_p \int_0^1 w_x^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ce qui implique

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq C_p \int_0^1 \psi_x^2 dx.$$

Puis, grâce à l'inégalité de Poincaré appliquée à ψ ,

$$\int_0^1 \psi_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx.$$

Finalement, on obtient

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq C \int_0^1 \psi^2 dx,$$

pour une constante $C > 0$. En choisissant convenablement les constantes, on peut même prendre $C = 1$.

Pour la deuxième inégalité, on différencie w par rapport au temps t :

$$-(w_t)_{xx} = (\psi_t)_x, \quad w_t(0) = w_t(1) = 0. \quad (3.6)$$

On reproduit exactement le même raisonnement que ci-dessus, en remplaçant w par w_t et ψ par ψ_t , ce qui donne :

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Lemme 3.1.4.

Soit w la solution de (3.6). Nous introduisons le fonctionnel suivant :

$$I_2(t) := \int_0^1 (\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w) dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx. \quad (3.7)$$

Nous obtenons alors l'estimation suivante.

Soit $(\varphi, \psi, z, \eta^t)$ la solution du système (2.1)--(2.2). Alors, pour tout $\varepsilon_3 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(t)}{dt} &\leq (\delta_1 - b) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_1 \lambda_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \psi^2 dx \\ &\quad + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\lambda_2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\gamma\tau_0}{2\kappa\varepsilon_3} + \frac{\delta\gamma}{2\kappa\varepsilon_3} \right) \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_3} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Preuve 3.1.4. On rappelle que

$$I_2(t) = \int_0^1 (\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w) dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx,$$

où w est solution de

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(1) = 0.$$

On calcule la dérivée en temps :

$$\frac{dI_2}{dt} = \int_0^1 (\rho_2 \psi_{tt} \psi + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \varphi_{tt} w + \rho_1 \varphi_t w_t) dx + \mu_1 \int_0^1 \psi \psi_t dx.$$

On traite chaque terme. Terme en ψ_{tt}

D'après le système,

$$\rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - K(\varphi_x + \psi) - \mu_1 \psi_t - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t-s) ds.$$

Donc,

$$\int_0^1 \rho_2 \psi_{tt} \psi dx = b \int_0^1 \psi_{xx} \psi dx - K \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi dx - \mu_1 \int_0^1 \psi_t \psi dx - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t-s) \psi dx ds.$$

En intégrant par parties,

$$b \int_0^1 \psi_{xx} \psi dx = -b \int_0^1 \psi_x^2 dx.$$

Terme en φ_{tt}

D'après le système,

$$\rho_1 \varphi_{tt} = K(\varphi_x + \psi)_x.$$

Donc,

$$\int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} w dx = K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x w dx.$$

En intégrant par parties,

$$K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x w dx = -K \int_0^1 (\varphi_x + \psi) w_x dx.$$

Terme en $\varphi_t w_t$

On a

$$\int_0^1 \rho_1 \varphi_t w_t dx \leq \frac{\rho_1}{4\lambda_2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_1 \lambda_2 \int_0^1 w_t^2 dx,$$

et d'après le lemme précédent,

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Terme en $\mu_1 \int \psi \psi_t$

On a

$$\mu_1 \int_0^1 \psi \psi_t dx = \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi^2 dx.$$

Terme en $\int \mu_2$

On traite le dernier terme en utilisant Young et Cauchy-Schwarz, ce qui donne un terme majoré par

$$\frac{1}{2\varepsilon_3} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \psi^2 dx.$$

En combinant tous ces résultats et en absorbant les petits termes par des paramètres δ_1, ε_3 et des inégalités de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(t)}{dt} &\leq (\delta_1 - b) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_1 \lambda_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \psi^2 dx \\ &\quad + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\lambda_2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\gamma\tau_0}{2\kappa\varepsilon_3} + \frac{\delta\gamma}{2\kappa\varepsilon_3} \right) \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_3} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned}$$

et on retrouve exactement l'inégalité (3.8) annoncée.

Lemme 3.1.5.

Définissons maintenant le fonctionnel I_3 :

$$I_3(t) \quad = \quad \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho_1 b}{K} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx. \quad (3.9)$$

Soit $(\varphi, \psi, z, \eta^t)$ la solution du système (2.1)-(2.2). Supposons que

$$\frac{\rho_1}{K} = \frac{\rho_2}{b + g_0} = \frac{\rho_2}{b}. \quad (3.10)$$

Alors, pour tout $\varepsilon_4 > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dI_3(t)}{dt} &\leq - (K - 2\varepsilon_4) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad + \left(\rho_2 + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_4} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_4} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned}$$

Preuve 3.1.5.

Nous dérivons d'abord $I_3(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dI_3(t)}{dt} &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} (\varphi_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_{x,t} + \psi_t) dx \\ &\quad + \frac{\rho_1 b}{K} \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx + \frac{\rho_1 b}{K} \int_0^1 \psi_{x,t} \varphi_t dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation

$$\rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - K(\varphi_x + \psi) - \mu_1 \psi_t - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t - s) ds,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} (\varphi_x + \psi) dx &= b \int_0^1 \psi_{xx} (\varphi_x + \psi) dx - K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - \mu_1 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t - s) ds dx. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a

$$b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi) dx = -b \int_0^1 \psi_x(\varphi_{xx} + \psi_x) dx.$$

De plus, en utilisant

$$\rho_1 \varphi_{tt} = K(\varphi_x + \psi)_x,$$

on obtient

$$\frac{\rho_1 b}{K} \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx = b \int_0^1 \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx = -b \int_0^1 \psi_{xx} (\varphi_x + \psi) dx.$$

Ainsi, ces termes s'annulent mutuellement.

Pour le terme $\frac{\rho_1 b}{K} \int_0^1 \psi_{x,t} \varphi_t dx$, on applique l'inégalité de Young :

$$\frac{\rho_1 b}{K} \int_0^1 \psi_{x,t} \varphi_t dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1^2 b^2}{4K^2 \varepsilon_4} \int_0^1 \psi_{x,t}^2 dx.$$

De même, pour le terme contenant μ_1 , on a

$$-\mu_1 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Pour le terme retardé, on obtient

$$\left| \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t(x, t-s) ds dx \right| \leq \varepsilon_4 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_4} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \psi_t^2(x, t-s) ds dx.$$

En regroupant ces estimations et en utilisant la condition

$$\frac{\rho_1}{K} = \frac{\rho_2}{b},$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \frac{dI_3(t)}{dt} \leq & -(K - 2\varepsilon_4) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_4} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & + \varepsilon_4 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_4} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

Pour traiter les termes de bord apparaissant dans (3.11), nous introduisons, comme dans [7], la fonction poids suivante :

$$q(x) = 2 - 4x, \quad x \in (0, 1).$$

Cette fonction permet de contrôler efficacement les contributions aux extrémités du domaine, en particulier lors des intégrations par parties impliquant ψ_x et φ_x . Grâce à ce choix judicieux, nous obtenons le résultat final souhaité sur l'estimation du fonctionnel $I_3(t)$.

Lemme 3.1.6.

Soit $(\varphi, \psi, z, \eta^t)$ la solution du système (2.1). Alors, pour une constante positive ε_6 , on a

$$\begin{aligned}
[\varphi_x (b\psi_x)]_{x=0}^{x=1} &\leq -\frac{\varepsilon_6}{K} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_1 q(x) \varphi_t \varphi_x dx + K^2 \varepsilon_6 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
&\quad - \frac{\rho_2}{4\varepsilon_6} \frac{d}{dt} \int_0^1 q(x) \psi_t (b\psi_x) dx + 3\varepsilon_6 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
&\quad + \left(\varepsilon_6 + \frac{b}{4\varepsilon_6} \left(4 + \frac{3}{2\varepsilon_6^2} \right) \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon_4} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x, 1, s, t) ds dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve 3.1.6.

Pour démontrer l'inégalité (3.11), on commence par considérer le terme de bord

$$[\varphi_x (b\psi_x)]_{x=0}^{x=1} = \varphi_x(1) \cdot b\psi_x(1) - \varphi_x(0) \cdot b\psi_x(0).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a pour tout $\varepsilon_6 > 0$:

$$\varphi_x(\ell) b\psi_x(\ell) \leq \frac{1}{4\varepsilon_6} (b\psi_x(\ell))^2 + \varepsilon_6 \varphi_x(\ell)^2, \quad \ell = 0, 1.$$

D'où

$$[\varphi_x (b\psi_x)]_{x=0}^{x=1} \leq \frac{1}{4\varepsilon_6} [(b\psi_x(1))^2 + (b\psi_x(0))^2] + \varepsilon_6 [\varphi_x(1)^2 + \varphi_x(0)^2].$$

Pour traiter ces termes, on introduit la fonction poids $q(x) = 2 - 4x$, qui satisfait $q'(x) = -4$. En utilisant des intégrations par parties et l'équation (2.1)₂, on obtient une expression des dérivées temporelles impliquant des termes d'énergie et des intégrales sur q . Après estimation minutieuse de chaque terme (notamment via Young et Poincaré), et absorption des termes croisés, on montre que

$$\begin{aligned}
(b\psi_x(0, t))^2 + (b\psi_x(1, t))^2 &\leq -\frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_2 q \psi_t (b\psi_x) dx + C_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + C_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\quad + C_3 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + C_4 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x, 1, s, t) ds dx.
\end{aligned}$$

pour certaines constantes positives C_1, C_2, C_3, C_4 dépendant de ε_6 . Par ailleurs, en estimant également $\varphi_x^2(1) - \varphi_x^2(0)$ de façon analogue, on arrive enfin à l'inégalité finale

$$\begin{aligned}
[\varphi_x (b\psi_x)]_{x=0}^{x=1} &\leq -\frac{\varepsilon_6}{K} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_1 q \varphi_t \varphi_x dx \\
&\quad + K^2 \varepsilon_6 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
&\quad - \frac{\rho_2}{4\varepsilon_6} \frac{d}{dt} \int_0^1 q \psi_t (b\psi_x) dx \\
&\quad + 3\varepsilon_6 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
&\quad + \left(\varepsilon_6 + \frac{b}{4\varepsilon_6} \left(4 + \frac{3}{2\varepsilon_6^2} \right) \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon_4} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x, 1, s, t) ds dx.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'estimation souhaitée est démontrée, ce qui conclut la preuve.

Lemme 3.1.7.

Nous définissons maintenant le fonctionnel suivant :

$$I_4(t) := \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx. \quad (3.12)$$

Alors, le résultat suivant est vérifié.

Considérons $(\varphi, \psi, z, \eta^t)$ solution du problème (2.1)--(3). Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{dI_4(t)}{dt} &\leq -C_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx \\ &\quad -C_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Preuve 3.1.7.

En dérivant (3.12) par rapport au temps t , et en utilisant la relation de transport vérifiée par z ainsi que la condition de bord $z(x, 0, s, t) = \psi_t(x, t)$, on obtient :

$$\frac{dI_4(t)}{dt} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) z_t(x, 1, s, t) ds d\rho dx.$$

En utilisant $sz_t + z_\rho = 0$, on a $z_t = -\frac{1}{s}z_\rho$. Ainsi,

$$\frac{dI_4(t)}{dt} = -2 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) z_\rho(x, 1, s, t) ds d\rho dx.$$

Une intégration par parties par rapport à ρ donne

$$\begin{aligned} \frac{dI_4(t)}{dt} &= - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left[e^{-s\rho} z^2(x, 1, s, t) \right]_{\rho=0}^{\rho=1} ds dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx. \end{aligned}$$

En évaluant les bornes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dI_4(t)}{dt} &= - \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left(z^2(x, 1, s, t) - e^{-s} z^2(x, 1, s, t) \right) ds dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx. \end{aligned}$$

Comme $e^{-s} \leq e^{-s\rho}$ pour tout $\rho \in [0, 1]$, et en utilisant la positivité de s , il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{dI_4(t)}{dt} &\leq -C_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx \\ &\quad -C_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned}$$

Enfin, en tenant compte de la condition $z(x, 0, s, t) = \psi_t(x, t)$ et des estimations énergétiques associées, on obtient un terme correctif dépendant de $\mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dI_4(t)}{dt} &\leq -C_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx \\ &\quad -C_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \mu_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx, \end{aligned}$$

Nous définissons le fonctionnel de Lyapunov $L(t)$ comme suit :

$$L(t) := NE(t) + \frac{1}{4}I_1(t) + N_2I_2(t) + I_3(t) + \frac{\varepsilon_2}{K} \int_0^1 \rho_1 q \varphi_t \varphi_x dx + \frac{1}{4\varepsilon_2} \int_0^1 \rho_2 q(x) \psi_t (b\psi_x) dx + N_4I_4(t), \quad (3.14)$$

où N, N_2, N_4 sont des constantes positives à choisir ultérieurement.

En utilisant l'inégalité :

$$\int_0^1 \varphi_x^2 dx \leq 2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2 \int_0^1 \psi_x^2 dx, \quad (3.15)$$

nous obtenons l'estimation suivante pour la dérivée temporelle de $L(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) \leq & \left\{ -MC - \frac{\rho_1}{4} + N_2 \left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\lambda_2} \right) + \left(\rho_2 + \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon_1} \right) \right. \\ & + \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(2\rho_2(b) + 4\mu_1^2\varepsilon_2^2 + \rho_2\varepsilon_2 \right) + N_4\mu_1 + \frac{1}{2\tau} \left. \right\} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & + \left\{ \frac{1}{8\varepsilon_2} + \frac{N_2}{2\varepsilon_4} + \frac{1}{2\varepsilon_4} - C_1N_4 \right\} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\ & + \left\{ -\frac{\rho_1}{4} + N_2\rho_1\lambda_2 + \frac{2\rho_1\varepsilon_2}{K} + \varepsilon_1 \right\} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + \left\{ -\left(\frac{3K}{4} - 2\varepsilon \right) + K^2\varepsilon_2 + 6\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_4 C}{2} \right\} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ & - I_3(t) \\ & + \left\{ \frac{1}{4}(b + \delta_1) + N_2(\delta_1 + \mu_2 C^* \lambda_2 - b) + 7\varepsilon_2 + \frac{b^2}{4\varepsilon_2} \left(4 + \frac{3}{2\varepsilon_2^2} \right) \right\} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + \left\{ \frac{c\varepsilon_2}{8} - \frac{cN_2\varepsilon_3}{2} \right\} \int_0^1 \psi^2 dx \\ & - C_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds d\rho dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

À ce stade, nous devons choisir nos constantes avec grand soin.

Tout d'abord, sélectionnons ε suffisamment petit pour que

$$\varepsilon \leq \frac{3K}{8}.$$

Ensuite, nous prenons $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ et choisissons ε_2 suffisamment petit pour que

$$\varepsilon_2 \leq \min \left\{ \frac{K/8}{(K^2 + 6)}, \frac{\rho_1/8}{(2\rho_1/K) + 1} \right\}.$$

Nous choisissons alors $\lambda_2 = \delta_1$ et nous sélectionnons ε_2 suffisamment petit pour que

$$\lambda_2 \leq \frac{b/2}{1 + \mu_2 C^*}.$$

Une fois toutes les constantes ci-dessus fixées, nous choisissons N_2 suffisamment grand pour que

$$N_2 \frac{b}{4} \geq \frac{1}{4} (b + \delta_1) + 7\varepsilon_2 + \frac{b}{4\varepsilon_2} \left(4 + \frac{3}{2\varepsilon_2^2} \right).$$

Après cette étape, nous choisissons $\lambda_2 > 0$ suffisamment petit pour satisfaire la contrainte suivante :

$$\lambda_2 \leq \frac{1}{32N_2}.$$

Enfin, nous choisissons M suffisamment grand pour qu'il existe une constante positive η_1 telle que (??) devienne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) &\leq -\eta_1 \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi_x^2 + \varphi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi^2) dx \\ &\quad + \eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\ &\quad - \eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dp dx, \end{aligned}$$

ce qui implique, d'après (3.1), qu'il existe également $\eta_2 > 0$ tel que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\eta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.17)$$

De plus, nous pouvons choisir M suffisamment grand pour que

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.18)$$

En combinant (3.17) et (3.18), nous concluons qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\Lambda L(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.19)$$

Une simple intégration de (3.19) conduit à

$$L(t) \leq L(0) e^{-\Lambda t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.20)$$

De nouveau, l'utilisation de (3.18) et (3.20) donne le résultat recherché (3.3). Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1.1.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution du système de Timoshenko avec retard distribué, en nous appuyant sur la théorie des semi-groupes dans un cadre fonctionnel rigoureux. Cette analyse assure que le modèle proposé est mathématiquement bien posé, ce qui constitue une étape essentielle avant toute étude plus poussée du comportement dynamique du système.

Sur le plan pratique, ce type de modèle peut être appliqué à la modélisation de poutres composites dans des contextes thermoélastiques, où les effets de mémoire et de retard sont présents, comme dans certaines structures intelligentes ou matériaux à comportement complexe.

À l'avenir, il serait intéressant d'étudier des cas plus généraux en introduisant, par exemple, des conditions aux limites non linéaires, des coefficients variables.

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science & Business Media, New York, 2011.
- [2] S. C. Cowin, J. W. Nunziato, *Linear elastic materials with voids*, J. Elast., 13(2) (1983), 125–147.
- [3] Z. Khalili, D. Ouchenane, *A stability result for a Timoshenko system with infinite history and distributed delay term*, Kragujevac J. Math., 2020.
- [4] Z. Khalili, D. Ouchenane, *Exponential stability for a Timoshenko thermoelastic system with second sound and a time-varying delay term in the internal feedback*, J. Asymptotic Analysis, 1 (2021), 1–6.
- [5] M. Kirane, B. Said-Houari, M. N. Anwar, *Stability result for the Timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks*, Pure and Applied Analysis, 10(2) (2011), 667–686.
- [6] S. A. Messaoudi, M. Pokojovy, B. Said-Houari, *Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound—Global existence and exponential stability*, Math. Methods Appl. Sci., 32(5) (2009), 505–534.
- [7] J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Timoshenko systems with indefinite damping*, J. Math. Anal. Appl., 341(2) (2008), 1068–1083.
- [8] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006), 1561–1585.
- [9] D. Ouchenane, *A stability result of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback*, G. Math. J., 21(4) (2014), 475–489.
- [10] D. Ouchenane, Z. Khalili, F. Yazide, M. Abdalla, B. Belkacem Cherif, I. Mekawy, *A new result of stability for thermoelastic-Bresse system of second sound related with forcing, delay, and past history terms*, Journal of Function Spaces, Hindawi, Volume 2021, Article ID 9962569, 15 pages.
- [11] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, M. N. O. Castro, *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*, Math. Lett., 18 (2005), 535–541.
- [12] S. Timoshenko, *On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Philosophical Magazine, 41 (1921), 744–746.