الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L’ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de LICENCE

Domain : Mathématiques et Informatique
Filière :Mathématiques
Option :Mathématiques

Par :

Ararem Messaoud et Hassine Abdelkader

THEME

Théorème de Banach-Steinhaus

Sous la direction de monsieur : Amar Bougoutaia

Année Universitaire 2014/2015

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste thèse.

Nos profonds remerciements à notre encadreur Mr Bougoutaia Amar, qui a accepté de nous encadrer. Nous n'oublions plus particulièrement Mr. Mokhtari Abdelkader grâce à leur précieux conseil et leur aide durant tout la période de nos études.

Nos remerciements vont également à Mr. Chef de département d'informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres, sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat (Telidji Amar).

Enfin nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de notre objectif.

Dédicace

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout puissant et miséricor-dieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur Mr : **Bougoutaia Amar**, son précieux conseil et son aide durant toute la période de travail.

Je dédie ce modeste travail à mon père, et ma mère pour leurs soutien et encouragements.

Et toute ma famille et tout ce que j'aime particulièrement M H.

Je n'oublie pas tous les personnels et les étudiants du département Maths et Informatique de l'Université de Laghouat, et tous mes amis.

Enfin, mes remerciements ne vont à toute personne, qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Merci à tous et toutes.

ARAREM MESSAOUD.

Dédicace

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement Mr : **Bougoutaia Amar**, qui nous a permis de bénéficier de son encadrement.

Je dédie ce simple travail à mon père et ma mère pour leurs soutien et encouragements.

Et tout ce que Jaime.

Et a tous les personnes qui m'a encouragé, et tous les profs, les étudiants de département de MATH et NFO de l'Université de Amar Telidji.

Enfin, mes remerciements mes amis qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Hassine Abdelkader.

Table des matières

0.1 INTRODUCTION

Ce mémoire est consacré à l'étude des théorèmes de Banach-Steinhaus est ces application dans un espace de Hilbert.

Notre travail à été effectué selon le plan suivant :

Chapitre 1: *On représente dans ce chapitre un rappel et après on étude la définition d'un espace de Hilbert, puis on donne* quelques théorèmes fondamentaux.

Chapitre 2: *On donne quelques propriétés des opérateurs linéaires continues.*

Chapitre 3: *Est consacré à l'étude des théorèmes de Banach-Steinhaus,*
En particulier les Trois théorèmes de Banach-Steinhaus.

CHAPITRE 1

Espace de Hilbert

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions fondamentales et compléments mathématiques en relation avec ce travail.

1.1 Quelque notions fondamentales

Dans ce chapitre tous les espaces vectoriels sont sur le corps $\mathbb{k}$ des réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$.

1.1.1 *Produit scalaire*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel. Une application $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$,

$(x, y) \mapsto \langle x\ ,\ y \rangle$ *est appelée un* produit scalaire *si elle possède les propriétés suivantes:*

✓ $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *"définie"* .

✓ $\forall\ x, y \in E,\ \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

✓ $\forall\ x, y, z \in E,\ \langle x + y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$

✓ $\forall\ x, y \in E\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Exemple 1

1) Le produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^t XY = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$

de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive

2) Dans $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle X.Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_j.$

3) Dans $E = c([a,b],\mathbb{R})$ $\quad \langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$

1.1.2 *Espace euclidien*

On appelle espace euclidien F tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

2.2 Égalité de polarisation

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle.$$

Ce qui permet d'obtenir le produit scalaire $\langle x,y \rangle$ en fonction des normes.

1.2 Espace de Banach

Proposition 1

Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace métrisable.

Preuve.

Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ρ par

$$\rho(x,y) = \|x-y\|.$$

Cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = 0 \Longrightarrow x-y=0 \text{ d'ou l'égalité } x=y.$$

Il est évident de voir que la distance $\rho(x,y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|y-x\| = \rho(y,x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z+y)\|$$

$$\leq \|x-z\| + \|z-y\|$$
$$= \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \blacksquare$$

Suites de Cauchy

Soit (x_n) *une suite d'éléments d'un espace normé* $(E, \|.\|)$ *on dit que la suite* (x_n) *est de* Cauchy *si, on a la relation suivante*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon,\ \ \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ \ \textit{on a}\ \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Lemme 1

Soit (x_n) *une suite de Cauchy dans un espace normé* $(E, \|.\|)$ *contient une sous suite* (x_{nk}) *convergente vers* x *alors la suite* (x_n) *est aussi convergente vers le même élément* x.

Preuve.

Soit (x_n) *une suite de Cauchy alors il vient*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_\varepsilon,\ \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ \textit{on a}\ \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

d'ou en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, *on a*

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x_{nk}\| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{nk\to\infty} \|x_p - x_{nk}\| = \|x_p - x\| < \varepsilon.$$

D'ou la convergence de la suite (x_n) *vers l'élément* x. $\blacksquare$

1.2.1 *Espaces complets*

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ *est dit complet, si toute suite de Cauchy* (x_n) *d'éléments de* E *est une suite convergente dans* E.

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \ \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ \ \textit{on a}\ \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists x \in E\ \ \textit{tel que}\ \ \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

1.2.2 *Espaces de Banach*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance induite la norme.*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1

Un espace de ***Hilbert*** *est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Théorème 1 ***(inégalité de Cauchy-Schwarz)***

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}.\sqrt{\langle y, y\rangle}$..*(1)*

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x *et* y *sont liés.*

Preuve.

Pour la démonstration de cette inégalité il suffit de considérer l'expression

$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle \geq 0 \ \ \forall x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Posons $\lambda = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$*, on a:*

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$$

$$\langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \geq 0$$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\| \qquad \forall x, y \in E \quad \blacksquare$$

Théorème 2 ***(Norme euclidien)***

Dans un espace préhilbertien E*, l'application* $\|.\| : E \to \mathbb{R}$*, donnée par*

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ . ...*(2)*

pour tout $x \in E$ *est une norme pour* E*.*

Preuve.

Nous avons $\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

De plus

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x\rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &= |\lambda| \|x\| .\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

D'ou

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

La norme $\|.\|$ *ainsi définie s'appelle la norme induite par le produit scalaire.*

on obtient aussi une distance en posant $d(x,y) = \|x-y\|$. ■

Théorème 3 ***(Identité du parallélogramme)***

La norme induite par le produit scalaire satisfait l'égalité

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$..........................*(3)*

Preuve.

En effet

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Les égalités

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$$
$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4\,\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle$$

Nous améent à

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Cette équation nous montre que deux produits scalaire différents sur E entrainent deux normes induites différentes. ■

Théorème 4

Un Produit scalaire est une fonction continuée sur $E \times E$, par rapport à la norme induite.

Preuve.

Soient $x_0, y_0 \in E$ et les suites $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$ et $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$ telles que $(x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x_0)$ et $(y_n \overset{\|\cdot\|}{\to} y_0)$, alors :

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n - x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\ &\le |\langle x_n - x_0, y_n\rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\ &\le \|x_n - x_0\|\,\|y_n\| + \|x_0\|\,\|y_n - y_0\| \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle. \quad ■$$

Théorème 5

Soit E un espace de Banach. E est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in E$, on a:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Le produit scalaire est unique, et on a:

$$4\langle x, y\rangle = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\ . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Preuve.

La condition nécessaire est montrée dans le théorème (3) par les égalités (3) et (4). Supposons donc qu'onait (5) et soit $\langle x, y\rangle$ donné par (6).

a)- Montrons d'abord que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

En posons $x = y$ *dans (6), alors pour tout* $x \in E$,

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \tfrac{1}{4}(4\|x\|^2 - \|0\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2) \\ &= \tfrac{1}{4}(4\|x\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2) \\ &= \|x\|^2 .\end{aligned}$$

b)- Montrons maintenant que l'application $\varphi = \langle .,.\rangle : E \times E \to \Bbbk$. *donnée par (6) vérifie les conditions du produit scalaire.*

1\ Evidemment $\langle x, x\rangle = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

2

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \\ &= \tfrac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 - i\|y+ix\|^2 + i\|y-ix\|^2) \\ &= \overline{\tfrac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 - i\|y+ix\|^2 + i\|y-ix\|^2)} \\ &= \overline{\langle y, x\rangle}.\end{aligned}$$

Puisque d'après (6)

$$\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, iy\rangle$$

il suffit démontrer la linéarité de la première variable de $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle$ *pour la partie réel*

3\ Soient x_1, x_2 *et* $y \in E$ *et posons* $u_1 = \frac{(x_1+x_2)}{2}$ *et,* $u_2 = \frac{(x_1-x_2)}{2}$,

et nous avons, en utilisant (5),

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\langle x_1, y\rangle + \mathrm{Re}\,\langle x_2, y\rangle &= \mathrm{Re}\,\langle u_1+u_2, y\rangle + \mathrm{Re}\,\langle u_1-u_2, y\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}\{\,\|u_1+u_2+y\|^2 - \|u_1+u_2-y\|^2 + \|u_1-u_2+y\|^2 - \|u_1-u_2-y\|^2\,\} \\ &= \tfrac{1}{4}\{\|u_1+u_2+y\|^2 - \|u_1-u_2+y\|^2\} - \tfrac{1}{4}\{\|u_1+u_2-y\|^2 + \|u_1-u_2-y\|^2\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{\|u_1+y\|^2 + \|u_2\|^2\} - \tfrac{1}{2}\{\|u_1-y\|^2 + \|u_2\|^2\} \\ &= \{\|u_1+y\|^2 - \|u_1-y\|^2\} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\langle u_1, y\rangle \\ &= 2\,\mathrm{Re}\langle \tfrac{x_1,x_2}{2}, y\rangle.\end{aligned}$$

D'autre part, en posant $u_1 = u_2$ *nous obtenons*

$$\mathrm{Re}\langle 2u_1, y\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle u_1, y\rangle$$

ce qui entraîne l'additivité de φ *par rapport à la première variable*

4\ De l'additivité, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle \ \ et \ \langle \tfrac{x}{n}, y\rangle = \tfrac{\langle x,y\rangle}{n}$$

ce qui entraîne pour $\lambda \in \frac{n_1}{n_2}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *que*

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \text{ ....(7)}$$

D'autre part puis que d'après (6)

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$$

(7) reste vrai pour $\lambda \in \varphi$ *et en utilisant la continuité de* φ *(respectivement des normes) aussi pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il nous reste à montrer (7) pour $\lambda \in \mathbb{C}$. *Il suffit de le montrer pour* $\lambda = i$

puisque nous avons montré que $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

D'après (6)

$$\begin{aligned}\langle ix, y\rangle &= \tfrac{1}{4}(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2 + i\,\|ix+iy\|^2 - i\,\|ix-iy\|^2)\\ &= \tfrac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 + i\,\|x+y\|^2 - i\,\|x-y\|^2)\\ &= \langle ix, y\rangle.\end{aligned}$$

et le théorème est établi. ■

Définition 2

Soient un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ *et* $x, y \in H$, *l'angle* θ *entre les deux vecteurs* x *et* y *est donné par:*

$$\cos\theta = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} & si\ x \neq 0\ \ et\ y \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0\ \ et\ y = 0 \end{array} \right\}$$

D'aprés (inégalité de Cauchy Schwarz) on a bien

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

si $(x, y) = 0$, $x \perp y$ *et* $\cos\theta = 0$ *d'ou* $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Théorème 6

Dans un espace de Hilbert H sur $\mathbb{R}$, la loi du cosinus est vérifiée

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\cos\theta.$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs x et y.

Preuve.

D'après définition on a $\langle x,y\rangle = \cos\theta\,\|x\|\,\|y\|$

et on à aussi

$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle$

donc

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\cos\theta.$ ∎

1.4 Orthogonalité

Définition 3

Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire $\langle .|.\rangle$:

◇ *Deux vecteurs de E sont dit orthogonaux si leur produit scalaire est nul,*

◇ *Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale si le produit scalaire de deux vecteurs distincts quelconques de cette famille est nul.*

◇ *Une famille de vecteurs de E est dite orthonormée si elle est orthogonale et si tous les vecteurs de cette famille sont de norme 1.*

1.4.1 *Base orthonormale*

Définition 4

Soit E un espace de Hilbert; $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs est dite ***orthonormée*** *si*

$$\langle e_i|e_j\rangle = 0;\ i \neq j.$$

Orthonormée si de plus $\|e_i\| = 1;\ \forall i \in I.$

1.4.2 *Espace vectoriel normé*

On désignera toujours par $\mathbb{k}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. on appelle norme sur E toute application:

$$\|.\| \;:\; E \to [0, +\infty[\qquad \textit{Telle que :}$$

1) $\forall x \in E; \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{k}; \;\; \forall x \in E; \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

3) $\forall (x, y) \in E^2 \qquad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

1.4.3 *Espaces produits*

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés sur le même Corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'espace produit $E \times F$ définie par:

$$G = E \times F = \{(x, y), \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\},$$

Est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, par l'une des normes produits suivante:

- ✓ $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \qquad \forall x \in E, \; y \in F$
- ✓ $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x \in E, \; y \in F; \; 1 < p < \infty$
- ✓ $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E + \|y\|_F\} \quad \forall x \in E, \; y \in F.$

CHAPITRE 2

Opérateurs linéaires continues

Ce chapitre est consacré à l'étude des opérateurs linéaires continus dans un espace de Hilbert.

2.1 Opérateurs linéaire

Définition 5

Soient E et F deux espace vectoriels sur le corps $\Bbbk$, on dit que l'application U définie sur E dans F est un application linéaire ou un ***opérateur linéaire*** *si:*

$$\forall x, y \in E, \ \ \forall \alpha, \beta \in \Bbbk, \ \ \text{on a } U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y).$$

On note $L(E, F)$ l'ensemble de tous les opérateur linéaire de E vers F.

2.2 Opérateurs continus

Définition 6

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F est dit ***continu*** *au point x_0 de A si, on a la propriété suivante Pour toute suite x_n de A converge vers x_0, la suite $U(x_n)$ converge vers $U(x_0)$ c'est à dire:*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \quad \|x - x_0\|_E < \delta \Longrightarrow \|U(x) - U(x_0)\|_F < \varepsilon,$$

Alors $$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(\lim_{n\to\infty} x_n) = U(x_0).$$

Remarque 1

L'opérateur U est dit continu sur A s'il est continu en chaque point de l'ensemble A.

Théorème 7

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire U défini sur un Sous ensemble $A \subset E$ dans F est dit continu partout sur A s'il est continu en point x_0 de A.

Preuve.

Soit (x_n) une suite convergente vers x_0 alors, cette suite peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0). \\ &= y_n + (x - x_0). \end{aligned}$$

Il est clair que la suite (y_n) est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim y_n = \lim [x_0 + (x_n - x)] = x_0,$$

la composition des deux membres par l'opérateur U donne

$$\begin{aligned} U(x_n) &= U(x_0 + (x_n - x)) + U(x - x_0) \\ &= U(y_0) + U(x - x_0). \end{aligned}$$

L'opérateur U étant continu au point x_0 alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim U(x_n) &= \lim U(y_n) + U(x - x_0) \\ &= U(x_0) + U(x) - U(x_0) \\ &= U(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3 Opérateurs bornés

Définition 7

Un opérateur linéaire U défini sur E dans F est dit ***borné*** *s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que*

$$\|U(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \ \ \forall\, x \in E. \tag{1}$$

Proposition 2

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée norme de U notée $\|.\|$ et donnée par

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|U(x)\|_F\,. \qquad (2)$$

Preuve.

En effet, de la relation (1) les constantes C s'écrivent

$$\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E}\leq C,\ \forall x\in E,\ x\neq 0.$$

d'ou, il est simple de voir que la plus petite des constante C notée $\|U\|$ s'écrit comme suit

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned}\|U\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E},\\ &= \sup_{x\neq 0}\left\|\frac{1}{\|x\|_E}U(x)\right\|_F,\\ &= \sup_{x\neq 0}\left\|U\Big(\frac{x}{\|x\|_E}\Big)\right\|_F,\\ &= \sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F\,.\end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F\,.$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|U(x)\|_F\,.$$

De plus, pour tout $x\in E$ tel que $\|x\|\leq 1$ et $x\neq 0$, on écrit

$$\begin{aligned}\|U(x)\|_F &= \|x\|_E\left\|U\Big(\frac{x}{\|x\|_E}\Big)\right\|_F;\\ &\leq \sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F\,.\end{aligned}$$

ou encore

$$\|U(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F\,.$$

Passons au suprimum sur la boule fermée $\bar{B}(0.1)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0}\|U(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1}\|U(x)\|_F\,.$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0} \|U(x)\|_F\,.$$

D'où la troisième égalité

$$\|U\| = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0} \|U(x)\|_F\,. \ \blacksquare$$

Proposition 3

La norme $\|U\| = \sup \|U(x)\|_F$ *sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.*

Preuve.

Supposons que la norme $\|U\|$ *n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément* x *de* E, *tel que*

$$\|x\| \leq 1,\ \ et\ \ \sup \|U(x)\|_F = \infty,$$

ou encore il existe une suite (x_n) *de* E *telle que*

$$\|x_n\| \leq 1,\ \ et\ \ \|U(x_n)\|_F = a_n,$$

avec $$\lim a_n = \infty.$$

Définissons la suite (y_n) *par*

$$y_n = \tfrac{x_n}{a_n}.$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, *c'est à dire* $\lim y_n = 0$, *d'où, on obtient*

$$\begin{aligned}\lim \|U(y_n)\|_F &= \lim \tfrac{1}{a_n} \|U(x_n)\|_F \\ &= lim \tfrac{a_n}{a_n} = 1\,.\end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que U *est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité*

$$\lim y_n = 0 \Longrightarrow \lim \|U(y_n)\|_F = 0\,,$$

Ce qui affirme que la constante $C = \|U\|$ *est finie.* $\blacksquare$

Théorème 8

Un opérateur linéaire U *est continu, si et seulement si, il est borné.*

Preuve.

Condition suffisante

Supposons que l'opérateur U est borné alors, on doit avoir

$$\|U(x)\|_F \leq M \|x\|_E \,,$$

ou encore

$$\|U(x) - U(0)\|_F \leq M \|x - 0\|_E \,,$$

d'où la continuité de l'opérateur U au point 0, ce qui entraîne la partout. Autrement dit, $U(x)$ tend vers $U(0)$ quand x tend vers 0.

Condition nécessaire

Soient x et y deux éléments de E tels que

$$x \in \bar{B}(0,1) = \{x \in E, \quad \|x\|_E \leq 1\},$$

et

$$y \in S(0,1) = \{x \in E, \quad \|x\|_E = 1\}.$$

Il est clair que l'on a la relation

$$\|U(y)\|_F \leq \sup \|U(x)\|_F = \|U\| \,.$$

D'autres part, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$ on a $\frac{x}{\|x\|_E} \in S(0,1)$ cela veut dire que l'on a

$$\left\| U(\tfrac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F \leq \|U\| \,,$$

ou encore

$$\tfrac{1}{\|x\|_E} \|U(x)\|_F \leq \|U\| \,,$$

ce qui implique la relation

$$\|U(x)\|_F \leq \|U\| \, \|x\|_E \,.$$

D'où l'opérateur U est borné, car la constante $\|U\|$ est toujours finie pour les opérateurs U continus. ■

Théorème 9

Soient E et F deux espaces normés, l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ de tous les opérateurs linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$ l'ensemble de tous les *opérateurs linéaires sur E dans F de plus $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|U\|$ est un espace normé.*

Preuve.

En effet, si $\|U\| = 0$, avec $U \in \mathcal{L}(E,F)$ alors, de la relation

$$\|U(x)\| \leq \|U\| \|x\|,$$

On aura

$U(x) = 0$, $\forall x \in E$ *d'où* $U = 0$

Soit $U_1, U_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $U = U_1 + U_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, avec $\|U(x)\| \leq \|U\| \|x\|$

De plus, on a:

$$\begin{aligned}\|U(x)\| &\leq \|U_1(x)\| + \|U_2(x)\| \\ &\leq \|U_1\| \|x\| + \|U_2\| \|x\| \\ &\leq (\|U_1\| + \|U_2\|) \|x\|,\end{aligned}$$

D'où

$$\|U\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|$$

Car $\|U\|$ est une borne supérieur

Soit $U \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\forall \lambda \in K$, on a $\lambda U \in \mathcal{L}(E,F)$, avec

$$\|\lambda U(x)\| \leq \|\lambda U\| \|x\|,$$

Ce qui implique:

$$\|\lambda U(x)\| = |\lambda| \|U(x)\| \leq |\lambda| \|U\| \|x\|$$

D'où

$$\|\lambda U\| \leq |\lambda| \|U\|$$

d'autres parts, on a:

$$\tfrac{1}{|\lambda|} \|\lambda U(x)\| = \|U(x)\| \leq \|U\| \|x\| \leq \tfrac{1}{|\lambda|} |\lambda| \|U\| \|x\|.$$

D'où

$$\|U\| \leq \tfrac{1}{|\lambda|} \|\lambda U\| \Longrightarrow |\lambda| \|U\| \leq \|\lambda U\|. \ \blacksquare$$

Théorème 10

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Preuve.

En effet, soit (U_n) *une suite de Cauchy d'éléments de* $\mathcal{L}(E,F)$

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$, $\forall p,q \geq N_\varepsilon \quad \|U_p - U_q\| < \varepsilon$. *alors pour tout* $x \in E$, *on a*

$$\begin{aligned}\|U_p(x) - U_q(x)\| &= \|(U_p - U_q)(x)\| \\ &\leq \|U_p - U_q\| \|x\| \\ &\leq \varepsilon \|x\|.\end{aligned}$$

D'où, on tire que $\{U_n(x)\}$ *est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach* F, *alors* $U_n(x)$ *converge dans* F *vers un opérateur* $U(x)$. *Passons à la limite des deux membres, on obtient*

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \|U_p(x) - U_q(x)\| &= \|U_p(x) - U_q(x)\| \\ &< \varepsilon \|x\|, \ \ \forall p,q \geq N_\varepsilon\end{aligned}$$

D'où l'opérateur $V(x) = U(x) - U_q(x)$ *est borné donc continu de* E *dans* F, *il est un élément de* $\mathcal{L}(E,F)$, *c'est à dire*

$$\|U(x) - U_q(x)\| \leq \|U - U_q\| \|x\|,$$

Notons que $\|U - U_q\|$ *est une borne supérieure. Autrement dit le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.*

D'où la relation

$$\|U - U_q\| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de la suite (U_q) *vers* U *dans* $\mathcal{L}(E,F)$, *L'opérateur* U *est un élément de* $\mathcal{L}(E,F)$ *comme différence de deux opérateurs continus*

$$U(x) = V(x) - U_q(x) \in \mathcal{L}(E,F). \ \blacksquare$$

Définition 8

On appelle opérateur sur H *une application linéaire continue de* H *dans* H, *on note* $\mathcal{L}(H)$ *l'ensemble des opérateurs sur* H *si* $U \in \mathcal{L}(H)$, *on définit sa norme opérateur par:*

$$\|U\| = \sup\{\|Uh\| : h \in H, \ \|h\| \leq 1\}.$$

Proposition 4

Les propriétés de la norme opérateur:

1- $\|U\| = 0$ *si et seulement si* $U = 0,\ U \in \mathcal{L}(H)$.

2- $\|U + V\| \leq \|U\| + \|V\|,\ U, V \in \mathcal{L}(H)$.

3- $\|\lambda U\| \leq |\lambda|\, \|U\|,\quad U \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\lambda \in \mathbb{k}$.

4- $\|U.V\| \leq \|U\| . \|V\|,\quad U, V \in \mathcal{L}(H)$.

CHAPITRE 3

Théorème de Banach-Steinhaus

Nous introduisons dans ce chapitre les théorèmes de Banach-Steinhaus.

3.1 Evaluation de la norme

Théorème 11 *(Evaluation de la norme)*

Soient E et F deux espaces normés et U un opérateur défini sur E dans F, si l'opérateur U est borné dans la boule $B(x_0, r)$, alors la norme $\|U\|$ de cet opérateur est aussi bornée, de plus, on a la relation suivante

$$\forall\ x \in B(x_0, r),\ \ \|U(x)\| \leq M,\ \ \textit{implique}\ \|U\| \leq \tfrac{2M}{r}.$$

Preuve.

Pour tout $y \in B(0, 1)$, on a

$$x = x_0 + ry \in B(x_0, r).$$

ou encore

$$\|x - x_0\| = r\,\|y\| \leq r,$$

D'où la relation

$$\begin{aligned}\|U(y)\| &= \tfrac{1}{r}\,\|U(ry)\| \\ &= \tfrac{1}{r}\,\|U(x) - U(x_0)\| \\ &\leq \tfrac{1}{r}(\|U(x)\| + \|U(x_0)\|)\end{aligned}$$

$\leq \frac{2M}{r}$.

Passons au suprimum des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|U(y)\| = \|U\|$$
$$\leq \frac{2M}{r} \quad \blacksquare$$

3.1.1 *Espaces de Baire*

Définition 9

Soit $(E, \|.\|)$ *un espace normé, on dit que* E *est un espace de* ***Baire*** *si pour toute famille d'ouverts* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E, *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \ \overline{E_n} = E \quad \text{implique} \overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} E_n} = E,$$

ou encore pour toute famille de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E, *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad int\ F_n = \emptyset \quad \text{implique} \ \ int(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n) = \emptyset.$$

Lemme 2 *(de Baire)*

Tout espace de Banach $(E, \|.\|)$ *est un espace de Baire.*

Preuve.

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'ouverts telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \overline{E_n} = E.$$

Montrons que l'intersection de tout les éléments de cette famille $\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} E_n}$ *est dense dans l'espace* E, *cela revient à dire que pour tout* $x \in E$, *les boules ouvertes* $B(x, \varepsilon)$ *de centre* x *et de rayon* ε *ont une intersection non vide avec chaque élément de la famille* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *car ces derniers sont denses dans* E *en particulier avec* E_1 *c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E,\ \exists x_1 \in E_1 \text{ tel que } \|x - x_1\| < \varepsilon,$$

ou encore

$$B(x, \varepsilon) \cap E_1 \neq \emptyset.$$

cette intersection étant ouverte comme intersection de deux ouverts $B(x, \varepsilon)$ *et* E_1 *il existe alors* $\rho_1 > 0$ *et* $x_1 \in B(x, \varepsilon) \cap E_1$ *tels que*

$$\bar{B}(x_1, \rho_1) \subset B(x, \varepsilon) \cap E_1 \neq \emptyset.$$

L'élément $x \in E$, *les boules ouvertes* $B(x_1, \varepsilon)$ *de centre* x_1 *et de rayon* ε *ont une intersection non vide avec chaque élément de la famille* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *car ces derniers sont denses dans* E, *en particulier avec* E_2 *c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x_1 \in E, \quad \exists x_2 \in E_2 \quad \textit{tel que } \|x_1 - x_2\| < \varepsilon,$$

ou encore

$$B(x, \varepsilon) \cap E_2 \neq \emptyset,$$

cette intersection étant ouverte comme intersection de deux ouverts $B(x_1, \varepsilon)$ *et* E_2 *il existe alors* $\rho_2 > 0$ *et* $x_2 \in B(x_1, \rho_2) \cap E_2$ *tels que*

$$\bar{B}(x_2, \rho_2) \subset B(x_1, \rho_1) \cap E_2 \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow$$

$$\bar{B}(x_2, \rho_2) \subset B(x, \varepsilon) \cap E_1 \cap E_2.$$

D'où, on peut construire par récurrence deux suites (ρ_n) *et* (x_n) *telles que*

$$\bar{B}(x_{n+1}, \rho_{n+1}) \subset B(x_n, \rho_n) \cap E_{n+1} \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow$$

$$\bar{B}(x_{n+1}, \rho_{n+1}) \subset B(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{n} E_n \right).$$

Il en résulte que la suite (x_n) *est de Cauchy dans un espace de Banach, d'où la converge de cette dernière vers l'élément* $x_0 \in \bar{B}(x_n, \rho_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *car, ona*

$$\forall p, q \geq n; \quad x_p,\ x_q \in B(x_n, \rho_n)$$

Autrement dit, il vient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ \exists x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \textit{tel que } \ \|x - x_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow E = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n}. \ \blacksquare$$

3.2 Théorème de Banach-Steinhaus 1

Théorème 12

Soit $\{U_n(x)\}$ *une suite d'opérateurs définie sur un espace de Banach* E *dans un espace normé* F.

si la suite $\{U_n(x)\}$ *est bornée en chaque point* x *de* E *alors les normes de ces opérateurs sont aussi bornées. Autrement dit, on a*

$$\forall x \in E, \quad \sup \|U_n(x)\| < \infty \Longrightarrow \sup \|U_n\| < \infty.$$

Preuve.

Supposons que la suite $\{U_n(x)\}$ n'est pas bornée, alors la fonctionnelle définie par

$$p(x) = \sup \|U_n(x)\|$$

est aussi non bornée dans aucune boule, car si $p(x)$est bornée dans une boule, alors d'après le théorème d'évaluation des normes, les normes $\|U_n\|$ seront aussi bornées.

Soit E_k l'ensemble ouvert, donné par

$$E_k = \{x \in E, p(x) > k\},$$

Alors cet ensemble est dense dans E pour tout $k \geq 1$ car, on a pour tout $x \in E$, on peut trouver un $x_0 \in B(x, \varepsilon)$ tel que $p(x_0) > k$ (il est donné que $p(x)$ est non bornée dans la boule $B(x, \varepsilon)$) c'est à dire $x_0 \in E$, d'où la densité de E_k dans E.

D'après le lemme de Baire il existe un $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, tel que la fonctionnelle

$$p(x_0) = \sup \|U_n(x_0)\| = \infty.$$

D'où, on obtient le résultat voulu

$$\sup \|U_n\| = \infty \Longrightarrow \exists\ x_0 \in E, \quad \sup \|U_n(x_0)\| = \infty. \ \blacksquare$$

Théorème 13

Soient E et F deux espaces Banach et $\{U_n(x)\}$ une suite d'opérateurs linéaires et continus définie sur E dans F, si la suite $\{U_n(x)\}$ converge vers un opérateur U, alors cet opérateur est linéaire et continu de plus, on a

$$\|U\| \leq \liminf \|U_n\|.$$

Preuve.

Il est clair que l'opérateur U est linéaire

$$\begin{aligned} U(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \to \infty} U_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \to \infty} (\alpha U_n(x) + \beta U_n(y)) \\ &= \lim_{n \to \infty} (\alpha U_n(x)) + \lim_{n \to \infty} (\beta U_n(y)) \\ &= \alpha \lim_{n \to \infty} U_n(x) + \beta \lim_{n \to \infty} U_n(y) \\ &= \alpha U(x) + \beta U(y). \end{aligned}$$

La suite des opérateurs $\{U_n\}$ *étant continue alors, on a*

$$\|U_n(x)\| \leq C\,\|x\|\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ et\ \ \forall x \in E,$$

passons à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n(x)\| = \|U(x)\| \leq C\,\|x\|\,,\ \forall x \in E.$$

d'où la continuité de l'opérateur U.

pour l'évaluation de la norme $\|U\|$ *de l'opérateur* U, *on écrit*

$$\|U_n(x)\| \leq \|U_n\|\|\,x\|\,.$$

passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\|U(x)\| = \lim \|U_n(x)\,\| \leq \liminf \|\,U_n\|\,\|x\|\,,$$

D'où il vient

$$\|U\| \leq \liminf \|U_n\|\,.\ \ \blacksquare$$

3.3 Théorème de Banach-Steinhaus 2

Théorème 14

Soit $\{U_n\}$ *une suite d'opérateurs linéaires continus, définie sur un espace de Banach* E *dans un espace de Banach* F, *la suite* $\{U_n\}$ *converge vers un opérateur linéaire continu* U *si et seulement si:*

♣ *Les normes* $\|U_n\|$ *des opérateurs* U_n *sont bornées*

♣ *La suite* $\{U_n(x)\}$ *est de Cauchy pour tout élément de l'ensemble* G *dense dans* E .

Preuve.

Condition suffisante

La densité de l'ensemble G *dans* E *donne*

$$\bar{G} = E \iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E, \exists y \in G, \text{tel que } \|x-y\| < \varepsilon.$$

la suite $\{U_n\}$ *étant de Cauchy pour les éléments de* G *alors, on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \text{tel que}\ \ \forall p,q \geq N,\ \ \text{on a } \|U_p(y) - U_q(y)\| < \varepsilon.$$

D'où pour tout $x \in E$, *on a*

$$\|U_p(x) - U_q(x)\| = \|U_p(x) - U_q(x) + U_p(y) - U_p(y) + U_q(y) - U_q(y)\|$$

$$\leq \|U_p(y) - U_q(y)\| + \|U_p(x) - U_p(y)\| + \|U_q(x) - U_q(y)\|$$
$$\leq \varepsilon + (\|U_p\| + \|U_q\|)\, \|x - y\|$$
$$\leq (1 + 2C)\varepsilon.$$

L'espace F étant complet, alors il existe un opérateur linéaire continu U, tel que

$$\lim U_n(x) = U(x).$$

Condition nécessaire

La suite d'opérateurs linéaires continus $\{U_n\}$ converge vers l'opérateur linéaire continu U, d'où elle est de Cauchy pour tout élément de E et par conséquent pour tout élément de G dense dans E. De plus, les normes $\|U_n\|$ et $\|U\|$ sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Théorème 15 *(Théorème de l'application ouverte)*

Soit U un opérateur linéaire continu et surjectif, défini sur un espace de Banach E dans un espace de Banach F, alors il existe une constante positive $\alpha > 0$ telle que

$$B_F(0, \alpha) \subset U(B_E(0, 1)).$$

Corollaire 16

Soit U un opérateur vérifiant le théorème de l'application ouverte, alors l'image de tout ouvert V de E est un ouvert $U(V)$ de F.

Preuve.

L'opérateur U étant surjectif, alors pour tout $y \in U(V)$ il existe $x \in V$ tel que

$$y = U(x),$$

cela veut dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_E(x, \varepsilon) \subset V,$$

ou encore

$$x + B_E(0, \varepsilon) \subset V$$

La composition par l'opérateur U des deux membres nous donne

$$U(x) + U(B_E(0, \varepsilon)) \subset T(V)$$

Appliquons le théorème de l'application ouverte, on obtient

$$y+B_F(0,\alpha\varepsilon) \subset U(x)+U(B_E(0,\varepsilon)) \subset T(V),$$

ou encore

$$B_F(0,\alpha\varepsilon) \subset T(V). \qquad \blacksquare$$

Conclusion:

Dans ce mémoire, nous considérons un problème les théorèmes de Banach-Steinhaus. On a commencé par quelques préliminaires sur les espaces fonctionnels et nous démontrons quelques théorèmes fondamentaux.

Après, on définit les opérateurs linéaires continues et bornées on donne quelques propriétés générales dans un espace de Hilbert.

Enfin, nous démontrons les théorèmes de Banach-Steinhaus passons par l'évaluation de la norme et le lemme de Baire.

Bibliographie

[1] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Elements de Théorie Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir1974.

[2] **BRUNO VALLETTE.** L'Agebre linéaire pour tous; Universite de Nice 2013.

[3] **L.KANTOROVITCH,D.AKILOV**.Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila - Algérie 2004.

[5] **MT 404**. Analyse fonctionnelle et théorie spectrale 2001/2002

[6] **OLOVIER. GLASS.** Algebre loineaire 3:produit scalire, espace euclidiens, formes quadratique Universite Paris-Dauphine 2011.

[7] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[8] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill NewYork1973.