الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTÉ DES SCIENCES

قسم الرياضيات

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : analyse fonctionnelle et applications

Par :

HARROUZ Kelttoum

Thème

Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et Dirichlet.

Devant le jury composé de :

OUCHENANE Djamel	Professeur	Université de Laghouat	Président
MOSTEFAI Mohamed	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Examinateur
YAGOUB Ameur	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciements

Tout d'abord je remercie ***Allah*** *le tout puissant, qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail. .*

Je remercie vivement monsieur ***Dr.OUCHENANE Djamel*** *, ait accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.*

Je tiens également à remercier ***Dr.MOSTEFAI Mohamed*** *pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

Je souhaite exprimer ma gratitude envers mon superviseur, le ***Dr. YAGOUB Ameur****, pour son soutien et son aide notables, ses précieux conseils et ses remarques pertinentes qui m'ont guidé tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

Harrouz Kelttoum.

Dédicace :

J*e dédie cet humble et modeste travail avec grand amour, sincérité et fierte :*

A mes chers parents, source de tendresse, de noblesse et d'affectation. Puisse cette étape constituer pour vous un motif de satisfaction.

J e vous exprime ma gratitude pour toutes vos efforts pour moi. Que Dieu vous préserve, vous protège et vous bénisse tout au long de votre vie.

Et je le dédie :

A *mes frères et mes soeurs, en témoignage de la fraternité, avec mes souhaits de bonheur, de sante et de succès.*

E*t à tous les membres de Ma famille.*

A *tous mes amis, tous mes professeurs.*

E*t à tout qui compulse ce modeste travail.*

Harrouz Kelttoum.

ملخّص.

لتكن $\mathcal{D}_\alpha, H^2$ ، فضاء هاردي للدّوال التحليلية على $\mathbb{D}$ حيث مربع معاملات متّتالية تايلور قابلة للتكامل و فضاء ديركلي، مع $0 \leq \alpha \leq 1$. يعطى موءثر التركيب للدليل $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D},$ من H^2 او $\mathcal{D}_\alpha$ ، بـ

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

الغرض من هذا العمل هو اجراء دراسة عن تراص موءثر التركيب على فضاءات هاردي و ديركلي.

كلمات المفتاحية .

فضاءات هاردي، فضاءات ديركلي، مؤثرات التركيب، التراص، صنف شاتن .

Abstract :

Let $H^2, \mathcal{D}_\alpha$, be the Hardy space of holomorphic functions on $\mathbb{D}$ for which the sequence of Taylor coefficients is square-summable and Dirichlet space, with $0 \leq \alpha \leq 1$. The composition operator of symbol $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on H^2 (or $\mathcal{D}_\alpha$) in H^2 (or $\mathcal{D}_\alpha$) is defined by :

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

In this work, we shall study the compactness and Schatten class of a composition operator on Hardy and Dirichlet spaces .

Key words : Hardy spaces, Dirichlet spaces, composition operators, compactness, Schatten class.

Résumé :

Soient $H^2, \mathcal{D}_\alpha$, l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles la suite de coefficients de Taylor est carré-sommable et l'espace de Dirichlet, avec $0 \leq \alpha \leq 1$. L'opérateur de composition de symbole $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, sur H^2 (ou $\mathcal{D}_\alpha$) dans H^2 (ou $\mathcal{D}_\alpha$) est défini par :

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

Le but de ce travail est de faire une étude sur la compacité et la classe de Schatten d'un opérateur de composition sur les espaces de Hardy et Dirichlet.

Mots clés : Espace de Hardy, Espace Dirichlet, opérateurs de composition, compacité, classe de Schatten.

Table des matières

Notations.

$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{T}$	le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\mathbb{D}$	le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$L^\infty(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue.
$< . >$	le produit scalaire.
$\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$	espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
dm	la mesure de lebesgue normalisée sur le cercle unité.
H^2	l'espace de Hardy.
$\mathcal{D}_\alpha$	l'espace de Dirichlet.
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur l'espace $\mathcal{H}$.
$\mathcal{K}(\mathcal{H})$	l'ensemble des opérateurs compacts sur l'espace $\mathcal{H}$.
$c_n(f)$	n-ème coefficient de Fourier de f.
f^*	la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$.
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2 .
k_λ	le noyau reproduisant de H^2.
k_λ^α	le noyau reproduisant de $\mathcal{D}_\alpha$.
α_p	transformation de Möbius.
T_ψ	opérateur de Toeplitz de symbole ψ.
C_φ	opérateur de composition sur un espace de Hilbert.
S_p	classe de Schatten.
A_α^p	l'espace de Bergman.

Introduction.

Ce mémoire se situe à l'interface entre l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs et l'analyse complexe, qui consiste en l'étude des quelques propriétés algébriques d'opérateurs sur divers espaces de fonctions analytiques. On note par $\mathbb{D}$ le disque unité, et $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe. Soit l'espace de Hardy usuel H^2 est l'ensemble des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ dont la série des coefficients de Taylor à l'origine est de carré sommable. L'espace H^2 peut être identifié avec le sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ formé par les fonctions dont la série des coefficients de Fourier d'indice strictement négatif son nuls (pour plus de précisions, veuillez consulter : [1, 5, 14, 17]). Les espaces de Dirichlet sont définis par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}),\ \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \right\},$$

avec $dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1+|z|^2)^\alpha dA(z),\ 0 \leq \alpha \leq 1$, où $dA(z) = dxdy/\pi,\ z = x+iy$ ($dA(z) = rdrd\theta/\varphi,\ z = re^{i\theta}$) et $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$, notons que $\mathcal{D}_1 = H^2$. Soient H est un espace de Hilbert, et φ est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, l'opérateur de composition de symbole φ est donné par

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi,\ \textit{pour tout } f \in H.$$

Les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et Dirichlet ont été largement étudiés (voir par exemple [10, 4, 11, 9, 15, 16, 18]). La fonction de comptage de Nevanlinna classique $N_{\varphi,\alpha}$ de l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ suivante :

$$N_{\varphi,\alpha}(z) := \begin{cases} \sum_{z=\varphi(w), w\in\mathbb{D}} (1-|w|)^\alpha, & z \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}, \\ 0, & z \notin \varphi(\mathbb{D}). \end{cases}$$

joue un rôle essentiel dans l'étude de l'opérateur de composition.

L'étude des opérateurs de composition est un domaine de recherche d'actualité dans la théorie des opérateurs. Notre travail consiste à détailler et, si nécessaire, à redémontrer les résultats relatifs à la bornitude, à la compacité et à l'appartenance de ces opérateurs à la classe de Schatten.

Le mémoire est organisé de la manière suivante : nous commençons par rappeler les définitions et propriétés concernant les espaces de Hilbert, L^2, Hardy H^2, et Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ dans le chapitre 1.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques définitions consacrées aux opérateurs linéaires bornés. Nous abordons les opérateurs bornés et compacts sur les espaces de Hilbert ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous présentons l'objectif de notre travail, qui concerne l'étude de certaines propriétés des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et Dirichlet lorsqu'ils sont bien définis, telles que la bornitude, la compacité et l'appartenance à la classe de Schatten.

Chapitre 1

Préliminaires.

Ce chapitre introductif offre un rappel essentiel sur les bases de l'analyse fonctionnelle, en mettant l'accent sur les espaces fondamentaux tels que Hilbert, L^2, L^∞, Hardy et Dirichlet. La convergence faible est également abordée. Ces consepts nécessaires à la compréhension ultérieure du mémoire, sont présentés à travers des résultats provenant principalement de sources référencées telles que [2, 3, 5, 6, 7, 6, 8, 13].

1.1 Espace de Hilbert.

Définitions.

Définition 1.1.1. *Soit H espace vectoriel sur le corp $\mathbb{K}$ (des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou réels $\mathbb{R}$), on appelle* ***produit scalaire*** *défini sur H toute application*

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : \qquad H &\longrightarrow H \\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y\rangle. \end{aligned}$$

Vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$, *(le produit est hermitien).*

ii) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle, \forall x,y,z \in H.$

iii) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle, \forall x,y \in H$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}.$

iv) $\langle x,x\rangle \geq 0, \forall x \in H.$

v) $\langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

On appelle espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ tout espace vectoriel H sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire.

Exemple 1.1.1. *1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est un espace préhilbertien réel, où le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. L'espace $\mathbb{C}^n$ est un espace préhilbertien, où le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ est définie par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k},$$

pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$.

3. L'espace $l^2 = \left\{x = (x_i)_{i>0}, x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$, muni d'un produit scalaire :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

4. L'espace de Lebesgue $L^2([a, b])$ des classe d'équivalences des fonctions mesurables $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, pour la relation d'équivalence définie d'égalité presque partout, et telle que $\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$, est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire :

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$$

Propriétés élémentaires.

Théorème 1.1.1. *(**Inégalité de Cauchy Schwarz**). Soit H un espace préhilbertien, pour tout $x, y \in H$, on a :*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Démonstration. Si $y = 0$, alors $\langle x, y\rangle = 0$ et donc l'inégalité est immédiate. Sinon on suppose $y \neq 0$. Soit :

$$\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle &= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}, \end{aligned}$$

d'oú le résultat. $\square$

Définition 1.1.2. *Le produit scalaire induit une norme, dite hilbertienne définie de H dans $\mathbb{R}_+$ par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Démonstration. Soient $x \in H$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle x, x\rangle = |\lambda|\,\|x\|^2.$$

Soit y un élément de H, on a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2, (par\ Cauchy - Schwarz) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

enfin, $\|x\| = 0$ alors $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$, et donc $x = 0$. $\square$

Théorème 1.1.2. *Soit H un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors pour tous éléments $x, y \in H$, les identités suivantes sont satisfaites.*

a) ***Dévloppement d'un carrée*** *:*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

b) ***Identitée de parallélogramme*** *:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

c) ***Idetitée de polarisation sur*** $\mathbb{R}$ *:*

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2.$$

d) ***Idetitée de polarisation sur*** $\mathbb{C}$ *:*

$$4\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k\|x + i^k y\|^2.$$

e) ***Formule de la médiane :***

$$2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Démonstration. a) **Dévloppement d'un carrée** :

$$\begin{aligned}\langle x+y,x+y\rangle &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\langle y,y\rangle\\ &= \parallel x\parallel^2+2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle+\parallel y\parallel^2.\end{aligned}$$

b) **Identitée de parallélogramme** : comme

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle \tag{1.1}$$

et

$$\|x-y\|^2=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle \tag{1.2}$$

d'où l'identité b par (1.2) + (1.1).

c) **Idetitée de polarisation sur** $\mathbb{R}$: Pour obtenir c, il suffit de soustraire (1.1) de (1.2), et alors on a :

$$2(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2. \tag{1.3}$$

d) **Idetitée de polarisation sur** $\mathbb{C}$: En remplaçant y dans (1.3) par iy, on aura

$$2(\langle x,iy\rangle+\langle iy,x\rangle)=\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2. \tag{1.4}$$

Finalement, (1.3) et (1.4) entraîne

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+i\langle x,iy\rangle+i\langle iy,x\rangle\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right),\end{aligned}$$

d'où d.

e) **Formule de la médiane** :

$$2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 = \frac{2}{4}\|x+y\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Définition 1.1.3. ***(Espace de Hilbert)****. Un espace préhilbertien H est un* ***espace de Hilbert*** *s'il est complet par rapport à sa norme induite. Rappelons qu'un espace H et dit complet si toute suite de cauchy de H est converge dans H.*

Exemple 1.1.2. *1. Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Hilbert. Plus généralement, tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.*

2. L'espace des suites $l^2 = \left\{x = (x_i)_{i>0}, x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$, est un espace de Hilbert.

Orthogonalité.

Définition 1.1.4. *Soit H un espace péhilbertien sur $\mathbb{K}$. On dit que deux éléments x et y de H sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, on note $x \perp y$.*

Définition 1.1.5. *On dit que W et V deux sous-espaces vectoriels de H sont orthogonaux si tout $x \in W$ est orthogonal à tout $y \in V$, ie :*

$$\forall x \in W, \forall y \in V, \langle x, y\rangle = 0.$$

Proposition 1.1.1. *Soit W un sous-espace vectoriel d'un hilbertien H, l'ensemble des $y \in H$ tels que $\forall x \in W, \langle x, y\rangle = 0$ est un sous-espace vectoriel de H noté $W^\perp$:*

$$W^\perp = \{y \in H, \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in W\}.$$

Proposition 1.1.2. *Soit H un espace préhilbertien alors :*

i) $0 \in W^\perp$.

ii) $W \cap W^\perp = \{0\}$.

iii) Si $W \subset V$ alors $V^\perp \subset W^\perp$.

iv) $W^\perp$ est un s.e.v fermé de H.

v) $(\overline{W})^{\perp} = W^{\perp}$.

Démonstration. i) Comme $\langle 0, a\rangle = 0$ pour tout $a \in W$, alors $0 \in W^{\perp}$.

ii) D'après i $\{0\} \subset W \cap W^{\perp}$. On suppose que $x \in W \cap W^{\perp}$, alors $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0$ d'après la définition du produit scalaire.

iii) Soit $x \in V^{\perp}$ et $a \in W$, alors $a \in V$ (car $W \subset V$), d'où $\langle x, a\rangle = 0$ pour tout $a \in W$, on aura $x \in W^{\perp}$, donc $V^{\perp} \subset W^{\perp}$.

iv) Soit $x, y \in W^{\perp}$, $a \in W$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors :

$$\langle \alpha x + \beta y, a\rangle = \alpha\langle x, a\rangle + \beta\langle y, a\rangle = 0,$$

alors $\alpha x + \beta y \in W^{\perp}$, et donc $W^{\perp}$ est un s.e.v de H. Montrons que $W^{\perp}$ est fermé : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{\perp}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans H, soit $a \in W$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 = \langle x_n, a\rangle = f_a(x_n),$$

où $f_a(.) = \langle ., a\rangle$, par la continuité de f_a on a :

$$0 = f_a\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right) = f_a(x) = \langle x, a\rangle,$$

pour tout $a \in W$. Ainsi $x \in W^{\perp}$ et $W^{\perp}$ est fermé.

v) Montrons que $(\overline{W})^{\perp} \subset W^{\perp}$: puisque $W \subset \overline{W} \Longrightarrow (\overline{W})^{\perp} \subset W^{\perp}$ d'après iii. Maintenant, montrons que $W^{\perp} \subset (\overline{W})^{\perp}$: soit $a \in W^{\perp}$, *soit* $x \in \overline{W}, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W$, telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x ($\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 = \langle x_n, a\rangle = f_a(x_n),$$

par la continuité de f_a on a :

$$0 = f_a\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right) = f_a(x) = \langle x, a\rangle,$$

pour tout $x \in \overline{W}$. Ainsi $a \in (\overline{W})^{\perp}$ *et* $W^{\perp} \subset (\overline{W})^{\perp}$, d'où $W^{\perp} = (\overline{W})^{\perp}$.

□

Théorème 1.1.3. *(**Théorème de Pythagore**). Si $x \perp y$ alors :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Projection Orthogonale.

Théorème 1.1.4. ***(Théorème de projection)****. Soit H un espace de Hilbert, F un sous espace fermé de H, $\forall x \in H/F$, $\exists y_0 \in F$ unique telque $\|x-y_0\| = \inf_{y \in F} \|x-y\|$, y_0 est appellé projection orthogonale de x sur F et noté par $P_F(x)$. La projection orthogonale ainsi définie la propriété caractéristique :*

$$\forall x \in H, (x - P_F(x)) \in F^{\perp}.$$

La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$,notée P_F, et la projection sur $F^{\perp}$ parallèlement à F, notée $P_{F^{\perp}}$, et on a $P_F + P_{(F)^{\perp}} = id_H$.

Proposition 1.1.3. *Soit H un espace préhilbertien et F un sous-espace de H, alors on a :*

1. *L'application $P_F : H \longrightarrow F$ est un opérateur linéaire continue.*
2. *Le noyau de P_F est $F^{\perp}$.*
3. *$(P_F)^2 = P_F$.*
4. *$P_F(x_n) \longrightarrow P_F(x)$, si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.*
5. *$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$.*

Définition 1.1.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de H, et $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et tous les éléments $x \in H$ se décomposent alors de manière unique en*

$$x = y + z \quad avec \;\; y \in F \;\; et \;\; z \in F^{\perp}.$$

Dans ce cas on dit que H est la somme directe de F et $F^{\perp}$ $(H = F \oplus F^{\perp})$.

Théorème 1.1.5. ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)*** *Soit H un espace de Hilbert et $L : H \longrightarrow \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ une forme linéaire continue, alors :*

$$\exists! x \in H, \forall y \in H, L(y) = \langle y, x \rangle.$$

De plus, $\|L\| = \|x\|$.

Bases hilbertiennes et espaces de Hilbert séparables.

Définition 1.1.7. *Une partie G de H est dite dense dans H si :*

$$\forall f \in H, \forall \epsilon > 0, \exists g \in G; \;\; \|f - g\| < \epsilon,$$

ou de manière équivalente $\overline{G} = H$ *c-à-d si tout* f *de* H *est une limite d'une suite d'éléments* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* G *dans* H : $\|f - g_n\| \longrightarrow 0$ *quand* $n \to \infty$.

Définition 1.1.8. *Une partie* F *de* H *est dite* ***totale*** *si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de* F *est dense dans* H.

Définition 1.1.9. *Un espace de Hilbert est dit* ***séparable*** *s'il contient une partie totale dénombrable (rappelons qu'une partie* D *est dite dénombrable s'il existe une bijection de* $\mathbb{N}$ *sur* D*).*

Définition 1.1.10. *Une famille* $(e_i)_{i\in I}$ *d'élḿents de* H *est dite* ***orthogonale*** *si pour tout* $i \neq j$ *on a* $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.

Définition 1.1.11. *Une famille orthogonale* $(e_i)_{i\in I}$ *d'élḿents de* H *est dite* ***orthonormale*** *si* $\|e_i\| = 1$ *pour tout* $i \in I$.

Exemple 1.1.3. *Dans* $\mathbb{R}^n$ *(ou* $\mathbb{C}^n$*) muni du produit scalaire standard, le système* $\{e_1, ..., e_n\}$ *où* $e_k = (\delta_{k,n})_{k\in\{1,2,...,n\}}$ *et* $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$ *est orthonormale.*

Définition 1.1.12. *(**Base hilbertienne**). Soient* H *un espace de Hilbert et* $(e_i)_{i\in I}$ *une suite d'éléments de* H*. On dit que* $(e_i)_{i\in I}$ *est une* ***base hilbertienne*** *de* H *si :*

i) $(e_i)_{i\in I}$ *est une famille orthonormale de* H*.*

ii) $(e_i)_{i\in I}$ *est totale .*

Théorème 1.1.6. *Un espace de Hilbert* H *est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Proposition 1.1.4. *Soit* H *un espace de Hilbert séparable et* $(e_n)_{n\in N}$ *une base hilbertienne de* H*. Alors pour tout* $x \in H$*, on a :*

1. $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$.
2. $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$ *(* ***égalité de parseval*** *).*

Convergence faible.

On rappelle qu'une suite d'éléments $(x_n)_{n\geq 0}$ d'un espace de Hilbert H converge vers $x \in H$ si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Définition 1.1.13. *Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit sa limite inférieure par :*

$$\liminf |x_n| = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} |x_{n_k}|\right).$$

La suite $I_n = \inf\limits_{k\geq n} x_n$ est une suite croissante, qui admet donc bien une limite (éventuellement infinie).

Définition 1.1.14. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement** vers x si*

$$\forall y\in H,\ \lim_{n\to\infty}\langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle.$$

On utilise alors la notation $x_n \rightharpoonup x$.

Théorème 1.1.7. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert H et x, y deux éléments de H, alors on a :*

a) $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\|x\| \leq \lim_{n\to\infty}\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|$.

b) $x_n \rightharpoonup x$ *et* $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n\| = \|x\| \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n - x\| = 0$.

c) $(x_n \rightharpoonup x)$ *et* $(y_n \rightharpoonup y) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$.

Démonstration. a) La preuve du premier point du théorème découle du théorème de Banach-Steinhaus 2.1.2. En effet, notons L_n l'application définie sur H par $L_n(y) = \langle y, x_n\rangle$. Il s'agit clairement d'une forme linéaire continue sur H. Par ailleurs, pour y fixé, la suite de terme général $(L_n)(y)$ est convergente. En conséquence, le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que l'application linéaire $L : y \longrightarrow < y, x >$ est continue et vérifie

$$\|L\| \leq \liminf \|L_n\|.$$

Mais, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, on a $\|L\| = \|x\|$ et $\|L_n\| = \|x_n\|_{\mathbb{H}}$, ce qui achève la démonstration de la première propriété.

b) Pour le deuxième point, il suffit d'écrire que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathcal{R}e < x, x_n > + \|x\|^2,$$

comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}e < x, x_n >= -2\|x\|^2.$$

Cela assure b.

c) Pour la démonstration de la derniére propriété. Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + |\langle x, y_n - y\rangle|.\end{aligned}$$

Comme $y_n \to y$ alors d'après a la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, on a :

$$|\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \leq C\|x_n - x\| + |\langle x, y_n - y\rangle|.$$

D'où le résultat.

□

1.2 Les espaces de Lebesgue L^p.

Généralités.

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ le sercle unité, $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité. On définit l'espace $L^p(\mathbb{T})$ par :

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T};\ \int_{\mathbb{T}} |f|^p dm < \infty\right\}.$$

Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Lebesgue des fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et dont la puissance 2-ième du module est integrable, et soit $L^\infty(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions définies et essentiellement bornées sur $\mathbb{T}$. Ces espaces muni des normes suivantes respectivement :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T}), \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}), \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = sup.ess_{\mathbb{T}}|f| = inf\left\{M \geq 0; |f| \leq M \ \ p.p.\right\},$$

sont des espaces de Banach. On note enfin $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$, pour $1 \leq p \leq q < \infty$, on a les inclutions topologiques :

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^{q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^{p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^{1}(\mathbb{T}).$$

Séries de Fourier.

Définition 1.2.1. ***(Coefficients de Fourier.)*** *On note $E := \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, la famille des fonctions $e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad e_n(\theta) := e^{in\theta}\ , \ \ \theta \in \mathbb{R}$. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on appelle n-ième coefficient de Fourier de f, le nombre complexe*

$$c_n(f) := \langle f, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} f\overline{e_n} dm = \int_0^{2\pi} f(z)e^{-in\theta} dm(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta.$$

La série formelle $S(f)$ (où $S(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ et la suite des sommes partielles $S_k(f) = \sum_{n=-k}^{k} c_n(f), k \in \mathbb{N}$) est appelée série de Fourier de f .
La série de Fourier de f est convergente si la suite des sommes partielles $(S_k(f))$ converge.

Remarque 1.2.1. *Lorsque $f \notin L^2(\mathbb{T})$ n'est pas en général égal à la somme de série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$.*

Théorème 1.2.1. *L'application $\psi \ : L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}),\ f \longmapsto (c_n(f)_{n\in\mathbb{Z}})$ est un isomorphisme isométrique donc linéaire et bijective et pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_{L^2} = \|c_n(f)\|_{l^2}$.*

Bases trigonométrique de $L^2(\mathbb{T})$.

Proposition 1.2.1. *$E = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Par conversion en intégrale de Riemann de l'intégrale de Lebesgue de la fonction continue $e_k\overline{e_l}$ sur l'intervalle $[0{,}2\pi]$, on a pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_k, e_l \rangle = \int_0^{2\pi} e_k\overline{e_l}\ dm = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}e^{-il\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta.$$

si $k \neq l$, la primitive de $e^{i(k-l)\theta}$ est $\frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)\theta}$, dont la variation entre 0 et 2π est nulle par la périodicité. Si $k = l$, la fonction $e^{i(k-l)\theta}$ est la constante 1 et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 d\theta = 1$.
Finallement,

$$\langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq l, \\ 1 & \text{if } k = l. \end{cases}$$

La famille E est donc orthonormée.

□

Théorème 1.2.2. *$E = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. On a donc le dévloppement :*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T}), \;\; f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)e_n, \; ie \lim_{k\longrightarrow\infty} \|f - S_k(f)\|_2 = 0.$$

Démonstration. Nous savons déjà que E est orthonormée, il reste à montrer qu'elle est totale dans $L^2(\mathbb{T})$. $E = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est totale dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \|.\|_\infty)$ car l'ensemble des combinaisons linéaires finie des éléments de E est l'ensemble des polynômes trigonométriques, et d'après le théorème de Stone-Weirstrass, pour tout fonction f continue et $2\pi - priodique$, il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f.
Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et notons encore f un de ses représentants. Il s'agit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une combinaison linéaire finie h_ϵ des e_n telle que $\|f - h_\epsilon\|_2 < \epsilon$. Par densité de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ *dans* $L^2(\mathbb{T})$, on peut trouver une fonction $g_\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g_\epsilon\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$. Comme E est totale dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on peut approcher à $\frac{\epsilon}{2}$ près (au sens cette fois de la distance associée à $\|\|_\infty$) par une combinaison linéaire finie h_ϵ des e_n :$\|g_\epsilon - h_\epsilon\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. En utilisant l'inclusion topologique de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ *dans* $L^2(\mathbb{T})$, on peut alors contrôler la norme L^2 de la fonction continue $g_\epsilon - h_\epsilon$:

$$\|g_\epsilon - h_\epsilon\|_2 \leq \|g_\epsilon - h_\epsilon\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalement en appliquant l'inégalité triangulaire dans L^2 on obtient :

$$\begin{aligned}\|f - h_\epsilon\|_2 &= \|f - h_\epsilon + g_\epsilon - g_\epsilon\|_2 \\ &\leq \|f - g_\epsilon\|_2 + \|g_\epsilon - h_\epsilon\|_2 \\ &\leq \|f - g_\epsilon\|_2 + \|g_\epsilon - h_\epsilon\|_\infty \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Comme f et ϵ étaient quelconques, E est bien totale dans $L^2(\mathbb{T})$. □

Théorème 1.2.3. ***(Bessel, Plancherel, Parseval).*** *Pour toutes f,g $\in L^2(\mathbb{T})$, on a :*

1. ***Inégalité de Bessel*** *: pout $J \subset \mathbb{Z}$*

$$\sum_{k\in J} \left| \int_0^{2\pi} f(z)e^{-i\theta k} dm(\theta) \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f|^2 dm.$$

2. ***Identité de Plancherel :***

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^{2\pi} f(z)e^{-ik\theta}\right|^2 dm(\theta)=\int_0^{2\pi}|f|^2dm.$$

3. ***Identité de Parseval :***

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(z)e^{-i\theta k}dm(\theta)\int_0^{2\pi}\overline{g(z)}e^{i\theta k}dm(\theta)=\int_0^{2\pi}f\overline{g}dm.$$

1.3 Espace de Hardy.

Nous introduisons maintenant un des deux espaces de fonctions holomorphes principaux que nous étudierons. L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ (resp. $H^\infty(\mathbb{T})$) est l'ensemble des fonctions $f\in L^2(\mathbb{T})$ (resp. $L^\infty(\mathbb{T})$) tel les coefficients de Fourier de signe négatif sont nuls, autrement dit,

$$H^2(\mathbb{T})=\left\{f\in L^2(\mathbb{T}):\ \ c_n(f)=0,\ pour\ n<0\right\},$$

$$H^\infty(\mathbb{T}):=\{f\in L^\infty(\mathbb{T}):\ \ c_n(f)=0,\ pour\ n<0\},$$

avec $c_n(f)=\int_{\mathbb{T}}f(e^{i\theta})e^{-in\theta}dm(\theta)$ est le n-ième coefficient de Fourier.
Soit $H^2(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$, $f\in\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, telle que sa norme $\|.\|_{H^2(\mathbb{D})}$ définie par :

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})}=\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta,$$

est finie.
On définit l'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ par :

$$H^\infty(\mathbb{D}):=\left\{f\in\mathcal{H}ol(\mathbb{D}):\sup_{z\in\mathbb{D}}f(z)<\infty\right\}.$$

Théorème 1.3.1. ***(La limite radiale)***. *Supposons que $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ une fonction dans $H^2(\mathbb{D})$, et f^* une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ tel que :*

$$f^*(e^{i\theta})=\sum_{n=0}^{+\infty}c_ne^{in\theta},$$

alors $\lim_{r\to1^-}f(re^{i\theta})=f^*(e^{i\theta})$ existe presque partout sur $\mathbb{T}$, de plus

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}=\|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$ d'après le théorème suivants :

Théorème 1.3.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi : & H^2(\mathbb{D}) \longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \\ & f \qquad \longmapsto \Phi(f) = f^*, \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique. Avec f^* sa la limite radial.

Remarque 1.3.1. *1. Compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$, dans la plupart des livres, on trouvera la notation H^2, laquelle désignera indifféremment $H^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{T})$ suivant le contexte.*

2. Puisque H^2 est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ défini par :

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \langle f^*, g^*\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(z)\overline{g^*(z)}d\theta.$$

Propriétés 1.3.1. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$:*

1. *L'espace de Hardy H^2 est isométriquement isomorphe à l^2, alors on a une autre écriture de la norme de $f \in H^2$:*

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. *On dit alors que f est dans l'espace de Hardy ssi la suite $(c_n)_n$ appartient à l^2. Autrement dit, on a :*

$$f \in H^2 \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} |c_n|^2 < \infty, \quad \left(c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right).$$

Définition 1.3.1. *On définit l'orthogonale de H^2 notée $(H^2)^\perp$ par :*

$$\begin{aligned} (H^2)^\perp &= \left\{g \in L^2(\mathbb{T}); \langle f, g\rangle = 0,\ \forall f \in H^2\right\} \\ &= \left\{g \in L^2(\mathbb{T}),\ c_n(g) = 0,\ n > 0\right\}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.1. *Soit $g \in (H^2)^{\perp}$ alors :*

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n \leq -1} c_n \overline{z}^n = c_{-1}\overline{z} + c_{-2}\overline{z}^2 + c_{-3}\overline{z}^3 + ... \\ &= \overline{z}(c_{-1} + c_{-2}\overline{z} + c_{-3}\overline{z}^2 + ...) \\ &= \overline{z}\left(\underbrace{\overline{\overline{c_{-1}} + \overline{c_{-2}}z + \overline{c_{-3}}z^2 + ...}}_{\in H^2}\right), \end{aligned}$$

alors $(H^2)^{\perp} = \overline{zH^2}$.

Définition 1.3.2. ***"Le noyau reproduisant"*** *Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des fonctions analytiques sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, est un espace de Hilbert à noyau reproduisant s'il existe une fonction $K_\lambda : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tel que :*

- *pour chaque $\lambda \in \Omega$, $K_\lambda(.) = K(\lambda, .)$ appartient à $\mathcal{H}$.*
- *$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $f \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \Omega$.*

Dorénavant, nous abrégerons espace de Hilbert à noyau reproduisant par RKHS (reproducing kernel Hilbert space).

Théorème 1.3.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert qui admet un noyau reproduisant K_λ. Alors ce noyau est unique et déterminé uniquement par l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $K_\lambda(z) = K(\lambda, z)$ un noyau reproduisant de $\mathcal{H}$. Supposons que $\mathcal{H}$ admet un autre noyau reproduisant $\tilde{K}_\lambda(z) = \tilde{K}(\lambda, z)$. Alors, pour tout $z, \lambda \in \Omega$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| K_\lambda - \tilde{K}_\lambda \right\|^2 &= \left\langle K_\lambda - \tilde{K}_\lambda, K_\lambda - \tilde{K}_\lambda \right\rangle \\ &= \left\langle K_\lambda - \tilde{K}_\lambda, K_\lambda \right\rangle - \left\langle K_\lambda - \tilde{K}_\lambda, \tilde{K}_\lambda \right\rangle \\ &= K_\lambda(z) - \tilde{K}_\lambda(z) - K_\lambda(z) + \tilde{K}_\lambda(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.4. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de fonctions sur un ensemble Ω. Alors $\mathcal{H}$ admet un noyau reproduisant si et seulement si pour chaque $\lambda \in \Omega$, le fonctionnel linéaire $f \mapsto f(\lambda)$ est borné.*

Démonstration. Soit K_λ le noyau reproduisant de $\mathcal{H}$. En utilisant l'inégalité de Schwartz, pour chaque $\lambda \in \Omega$, nous avons

$$|f(\lambda)| = |\langle f, K_\lambda\rangle| \leq \|f\|\|K_\lambda\|\,,$$

par conséquent, l'évaluation en λ est bornée sur $\mathcal{H}$. Réciproquement, supposons que pour chaque $\lambda \in \Omega$, l'application $f \mapsto f(\lambda)$ est bornée. Alors, par le théorème de la représentation de Riesz, pour chaque $\lambda \in \Omega$, il existe une fonction $h_\lambda \in \mathcal{H}$ telle que

$$f(\lambda) = \langle f, h_\lambda\rangle\,.$$

On pose K_λ au lieu de h_λ. Alors, $\mathcal{H}$ admet un noyau reproduisant. □

Définition 1.3.3. *Soit Ω un ensemble et $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que K est hermitienne, si pour tout ensemble fini de points $(z_n)_1^N \subset \Omega$, et tout $(c_n)_1^N \subset \mathbb{C}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} c_i K\left(z_j, z_i\right) \in \mathbb{R}.$$

K est appelée définie positive si

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} c_i K\left(z_j, z_i\right) \geq 0.$$

Théorème 1.3.5. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant K. Alors K est définie positive.*

Démonstration. En effet, utilisons la définition 1.3.3 et les propriètès du produit scalaire on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} c_i K\left(z_j, z_i\right) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} c_i \left\langle K_{z_i}, K_{z_j}\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left\langle c_i K_{z_i}, c_j K_{z_j}\right\rangle \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{N} c_i K_{z_i}\right\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.6. *L'espace de Hardy H^2 est un RKHS c-à-d admet un noyau reproduisant donné par la formule :*

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \quad \lambda, z \in \overline{\mathbb{D}},$$

et

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle, f \in H^2,$$

de plus

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = \frac{1}{1-|\lambda|^2}.$$

Démonstration. Fixons $\lambda \in \Omega$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, alors par l'inégalité de cauchy-schwarz,

$$\begin{aligned}|f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n \lambda^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{H^2} \left(\frac{1}{1-|\lambda|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'évaluation en λ est une fonctionnelle bornée. Finalement, on note que

$$\begin{aligned}\langle f, k_\lambda \rangle = f(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = \langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda}^n z^n \rangle \\ &= \langle f, \frac{1}{1-\overline{\lambda}z} \rangle,\end{aligned}$$

d'où $k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$ et

$$k_\lambda(z) = K(\lambda, z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}.$$

□

Lemme 1.3.1. *Soit $g \in L^1(\mathbb{T})$, si $g(0) = \int_{\mathbb{T}} g dm$ alors :*

$$2\int_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{T}} |g(z) - g(0)|^2 dm(z) = \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^2 dm - |g(0)|^2.$$

$g(z)$ étant l'extension de Poisson de g.

Corollaire 1.3.2. *(Identité de Littlewood-Paley). Soit $f \in H^2$, alors*

$$\|f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z). \tag{1.5}$$

Démonstration. La preuve est immédiate, en remplaçant dans le lemme 1.3.1 $|\nabla g(z)|^2$ par $2\,|g'(z)|^2$. □

En posant $d\nu(z) = \log \frac{1}{|z|^2} dA(z)$, le produit scalaire sur H^2 s'exprime :

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)} d\nu(z), \quad \forall f, g \in H^2.$$

1.4 Espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$.

Le prochain espace à l'étude est l'espace de Dirichlet. Ce dernier possède plusieurs propriétés semblables à celles de H^2, mais elles sont de manière générale plus difficiles à obtenir. On pose :

$$dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1+|z|^2)^\alpha dA(z),\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Où $dA(z) = dxdy/\pi,\ z = x + iy$ $(dA(z) = rdrd\theta/\pi,\ z = re^{i\theta})$.
Les espaces de Dirichlet sont définis par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}),\ \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \right\}.$$

Ainsi lorsque $\alpha = 1, \mathcal{D}_1 = H^2$ est l'espace de Hardy classique et lorsque $\alpha = 0, \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ est l'espace de Dirichlet classique.

Définition 1.4.1. *On désigne par $A \lesssim B$, s'il existe une constante absolue c, telle que :*

$$A \leq cB.$$

$A \asymp B$ signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

Proposition 1.4.1. *Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$, si $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, alors :*

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n\geq 0} (1+n)^{1-\alpha} |c_n|^2.$$

Pour la preuve de la proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.4.1. *Soit n un entier positif et $0 < r < 1$, alors :*

$$\int_0^1 r^n (1-r)^\alpha dr \asymp \frac{1}{(1+n)^{1+\alpha}}.$$

Démonstration. Soit n un entier positif et $0 < r < 1$, on a :

1.
$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^n(1-r)^\alpha dr &\geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n(1-r)^\alpha dr \\
&\geq \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n dr = \frac{1}{n^\alpha}\left[\frac{r^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1-\frac{1}{n}} \\
&\gtrsim \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^n(1-r)^\alpha dr &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n(1-r)^{1-(1-\alpha)}dr + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 r^n(1-r)^\alpha dr \\
&\leq n^{1-\alpha}\int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n(1-r)dr + \frac{1}{n^\alpha}\int_{1-\frac{1}{n}}^1 dr \\
&= n^{1-\alpha}\int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n dr - n^{1-\alpha}\int_0^{1-\frac{1}{n}} r^{n+1}dr + \frac{1}{n^\alpha}\int_{1-\frac{1}{n}}^1 dr \\
&= n^{1-\alpha}\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} - n^{1-\alpha}\left(\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} + \frac{1}{n^{(1+\alpha)}} \\
&\leq n^{1-\alpha}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{1}{n^{(1+\alpha)}} \\
&\leq n^{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^2+3n+2}\right) + \frac{1}{n^{(1+\alpha)}} \\
&\leq \frac{2}{n^{\alpha+1}} \lesssim \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\square$

Démonstration. "de la Proposition 1.4.1"
Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dA_\alpha(z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\sum_{n\geq 1} c_n n z^{n-1}|^2 (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha r \frac{drd\theta}{\pi} \\
&= 2(\alpha+1) \int_0^1 \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 n^2 r^{2(n-1)} (1-r^2)^\alpha r dr \\
&= 2(\alpha+1) \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 n^2 \int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)^\alpha dr \\
&\asymp \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 n^2 \frac{1}{(2n)^{\alpha+1}} \asymp \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 n^2 \frac{1}{(n)^{\alpha+1}} \\
&\asymp \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 n^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient :

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n\geq 0} |c_n|^2 (n+1)^{(1-\alpha)}.$$

□

Remarque 1.4.1. *D'après la proposition précédente, on peut redéfinir l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ par :*

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}), \ \|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n\geq 0} (1+n)^{1-\alpha} |c_n|^2 < \infty \right\}.$$

Et, on pose,

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

Proposition 1.4.2. *$\mathcal{D}_\alpha$ est un RKHS sur $\mathbb{D}$, et pour tout $z, \lambda \in \mathbb{D}$ et $0 \leq \alpha \leq 1$:*

$$k_\lambda^\alpha(z) = \frac{1}{(1-\bar{\lambda}z)^{2-\alpha}},$$

et

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^\alpha \rangle, f \in \mathcal{D}_\alpha$$

Corollaire 1.4.1. *Soit $0 \leq \alpha \leq 1$, alors*

$$\|k_\lambda^\alpha\|^2 = \frac{1}{(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha}}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Chapitre 2

Opérateurs linéaires bornés.

Ce chapitre se concentre sur les propriétés fondamentales des opérateurs linéaires bornés, de leurs adjoints et des opérateurs compacts, qui jouent un rôle important dans les espaces de Hilbert.

2.1 Opérateurs linéaires bornés.

Définition 2.1.1. *Soient* $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ *deux e.v.n sur le corps* $\mathbb{K}$. *Un opérateur linéaire borné* $T : E \to F$ *est une application de* E *dans* F *qui vérifie :*

1. *Linéarité :* $\forall x, y \in E; \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.
2. *Bornitude :* $\exists M \geq 0; \forall x \in E \ : \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Remarque 2.1.1. *Pour un opérateur linéaire, l'image de* x *par* T *est notée par* Tx *au lieu de T(x).*

Notation 1. *On note par* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés définis de* E *vers* F, *et* $\mathcal{L}(E)$ *si* $E = F$.

Remarque 2.1.2. *Si* E *et* F *sont des espaces normés, alors l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *est un e.v.n sur le corps* $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.2. ***(Norme d'un opérateur)****. Soit* $T : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|_F)$ *un opérateur linéaire borné. On définie la norme d'un opérateur noté* $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *par :*

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F \\ &= \sup_{\|x\|_E \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}. \end{aligned}$$

Propriétés 2.1.1. ***(Propriétés de la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$).***

1. *Soit $M \geq 0$. Si :*
$$\forall x \in E, \|Tx\| \leq M\|x\|,$$
alors
$$\|T\| \leq M.$$
2. $\forall x \in E, \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$.
3. $\|T\| = min\{M \geq 0; \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in E\}$.

Théorème 2.1.1. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est borné.*
2. *T est continue sur E.*
3. *T est continue en 0.*

Théorème 2.1.2. *(**Théorème de Banach-steinhaus, (démonstration 1.1.7-a)** Soit E et F deux espace normés et $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires et continues définie sur E dans F, si la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un opérateur T(x), alors cet opérateur est linéaire et continu de plus, on a*

$$\|T\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf_{k\geq n} \|T_k\|.$$

Définition 2.1.3. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. L'unique application linéaire $T^* \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que pour tous $x \in E, y \in F$ on ait :*

$$\langle T(x), y\rangle_F = \langle x, T^*(y)\rangle_E,$$

*est appelée **adjoint** de T, de plus on a $\|T\| = \|T^*\|$.*

Proposition 2.1.1. *Soient E et F des espaces de Hilbert. L'application $T \longrightarrow T^*$ est , antilinéaire et isométrique de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$. De plus, $\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$*

i) $(T^*)^* = T$.

ii) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

iii) $(TS)^* = S^*T^*$.

Démonstration. Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, $\forall x \in E,\ y \in F,\ T_1$ *et* $T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, (T_1 + \lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)(x), y\rangle \\
&= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\
&= \langle x, T_1^*(y)\rangle + \langle x, T_2^*(y)\rangle \\
&= \langle x, (T_1^* + \overline{\lambda} T_2^*)(y)\rangle,
\end{aligned}$$

ainsi T est antilinéaire. Elle est isométrique d'aprés la définition 2.1.3.
Montrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ *et* $y \in F$, on a $\langle Tx, y\rangle = \langle (T^*)^*x, y\rangle$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \langle x, T^*y\rangle \\
&= \overline{\langle T^*y, x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (T^*)^*x\rangle} \\
&= \langle (T^*)^*x, y\rangle.
\end{aligned}$$

□

Tout d'abord on rapelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier, $\|TT^*\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2$. D'autre part, en utilisant encore une fois de plus un corollaire d'Hahn-Banach et la définition de la norme opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|TT^*\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T^*T(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle T^*T(x), y\rangle| \\
&\geq \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^*T(x), x\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x), T(x)\rangle| \\
&= \|T\|^2.
\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Enfin, pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a $\langle (TS)^*x, y\rangle = \langle S^*T^*x, y\rangle$. On a, par défintion de l'adjoint,

$$\begin{aligned}\langle (TS)^*x, y\rangle &= \langle x, TSy\rangle \\ &= \langle T^*x, Sy\rangle \\ &= \langle S^*T^*x, y\rangle.\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs x, y, on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

2.2 Opérateurs compacts.

Les opérateurs compacts constituent une classe importante d'opérateurs linéaires continues. Dans toute cette section, H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert, et l'on note $\overline{B}_{H_1}$ et $\overline{B}_{H_2}$ leur boule unité fermée respectivement.

Définition 2.2.1. *On dit qu'une application linéaire T de H_1 dans H_2 est compacte si l'image de la boule unité fermée de H_1 par T est relativement compacte dans H_2. Rappelons qu'une partie $G \subset H_2$ est relativement compacte si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G, il existe un sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans H_2.*

Notation 2. *On note $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2. Dans le cas $H_1 = H_2 = H$, on note $\mathcal{K}(H)$.*

Proposition 2.2.1. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de H_1 dans H_2. On dit que l'opérateur T est compact si, pour tout $B \subset H_1$,*

$$B \text{ est borné dans } H_1 \implies T(B) \text{ est relativement compact dans } H_2.$$

Définition 2.2.2. *En d'autres termes, T est un opérateur compact si, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H_1, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente.*

Proposition 2.2.2. *Tout opérateur linéaire compact est continu, i.e. $\mathcal{K}(H_1, H_2) \subset \mathcal{L}(H_1, H_2)$.*

Démonstration. Soit T un opérateur linéaire compact de H_1 dans H_2. Soit $\overline{B}_{H_1} = \{x \in H_1,\ \|x\| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de H_1. L'ensemble $\overline{B}_{H_1}$ étant borné, son image par T est relativement compacte donc bornée alors il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \overline{B}_{H_1}, \quad \|Tx\|_{H_2} \leq C.$$

On en déduit que

$$\forall x \in H_1 \ , \quad \|Tx\|_{H_2} = \|x\|_{H_1} \|T\left(\frac{x}{\|x\|_{H_1}}\right)\|_{H_2} \leq C\|x\|_{H_1}.$$

L'opérateur T est donc continu. □

Proposition 2.2.3. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T compact.*
2. *TT^* compact.*
3. *T^* compact.*
4. *T^*T compact.*

Théorème 2.2.1. *Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Banach, et soient $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $T \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Si T est compact, ou bien si S est compact, alors l'application $T \circ S$ est compacte : $T \circ S \in \mathcal{K}(H_1, H_3)$.*

Démonstration. Si S est compact, alors, pour tout borné $M \subset H_1$, $S(M)$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $T(S(M))$ est compact. Il résulte que $TS(M) \subset \overline{TS(M)}$ est relativement compacte. Si T est compact, alors, pour tout borné $M \subset H_1$, $S(M)$ est aussi borné et donc $TS(M)$ est relativement compacte. □

Définition 2.2.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On dit que T est un opérateur de rang fini si $Im(T)$ est de dimension fnie. Le rang de T est la dimension de son image.*

Proposition 2.2.4. *Un opérateur de rang fini est compact.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_{H_1} : \|Tx\| \leq \|T\|$. Alors, $T(B_{H_1})$ est borné dans H_2, et par conséquent, $\overline{T(B_{H_1})}$ aussi. De plus, $Im(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, donc, $\overline{T(B_{H_1})} \subset \overline{Im(T)} = Im(T)$. Enfin, $T(B_{H_1})$ est fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $Im(T)$, il est un compact de $Im(T)$. D'où, il résulte $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. L'espace $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. □

Théorème 2.2.2. *Soit T un opérateur de H_1 dans H_2, a image $T(H_1)$ de dimension finie. Alors T est compact.*

Démonstration. En effet, puisque l'opérateur T transforme tout ensemble G de H_1 à un ensemble borné $T(G)$ dans un espace de dimension finie $T(H_1)$ ce qui implique que $T(G)$ est précompact. $\square$

Corollaire 2.2.1. *Toute limite dans $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

Théorème 2.2.3. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Alors :*
$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ si et seulement s'il existe une suite $(T_n)_n \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, T_n est de rang fini, qui converge vers T dans $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ *et* $\epsilon > 0$. Comme $\overline{T(B_{H_1})}$ est compact alors, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ et $\{y_1, y_2, ..., y_{N_\epsilon}\} \in H_2$ tels que

$$T(B_{H_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} B_{H_2}(y_i, \epsilon). \tag{2.1}$$

On pose $F_\epsilon = Vect\,\{y_1, y_2, ..., y_{N_\epsilon}\}$ est un espace vectoriel de dimension fnie, donc un fermé de l'espace de Hilbert H_2. Soit $P_\epsilon \in \mathcal{L}(H_2)$ la projection orthogonale de H_2 sur F_ϵ. Soit $T_\epsilon = P_\epsilon \circ T$. Comme $T_\epsilon(H_1) = P_\epsilon \circ T(H_1) \subset F_\epsilon$, T_ϵ est de rang fini, et d'après 2.1, pour tout $x \in B_{H_1}$,

$$\|Tx - T_\epsilon x\| = \|Tx - P_\epsilon(Tx)\| = \inf_{y \in\ F_\epsilon} \|Tx - y\| \leq \epsilon.$$

D'où $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$. Réciproquement, un opérateur de rang fini étant compact et l'ensemble des opérateurs compacts étant un fermé de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, une limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est bien un opérateur compact. $\square$

Définition 2.2.4. ***"Opérateur de Hilbert-Schmidt"***. *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H. Un opérateur linéaire $T : H \longrightarrow H$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (ou simplement HS) si :*

$$\sum_{k \geq 1} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

Le réel $\|T\|_{HS}^2 = \sum_{k \geq 1} \|Te_n\|^2$ est appelé la norme de Hilbert-Schmidt de T.

Théorème 2.2.4. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Démonstration. Soit une base hilbertienne (e_k) de $\mathcal{H}$. on pose $c = \sum_k \|Te_k\|^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k>N_\varepsilon} \|Te_k\|^2 \leqslant \varepsilon^2$. On pose $F_\varepsilon = \operatorname{Vect}\{y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon}\}$, et $P_\varepsilon : H_2 \to H_2$ la projection orthogonale sur F_ε. Alors $T_\varepsilon = P_\varepsilon \circ T$ est de rang fini et

$$\|T - T_\varepsilon\|^2 \leqslant \|T - T_\varepsilon\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k>N_\varepsilon} \|Te_k\|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Ainsi T est limite d'opérateurs de rang fini il est donc compact. $\square$

Chapitre 3

Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et Dirichlet.

Dans ce chapitre, nous explorerons les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et de Dirichlet. Dans la première partie, nous examinerons ces opérateurs dans le cadre des espaces de Hardy, en soulignant leurs caractéristiques comme la compacité et la bornitude. Dans la seconde partie, cette analyse sera élargie à l'espace de Dirichlet, où nous examinerons également les caractéristiques des opérateurs de composition, telles que leur bornitude et leur compacité.

3.1 Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy.

Définition 3.1.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, l'opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ de symbole φ est défini par :*

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{D}) \\ f \quad &\longmapsto C_\varphi(f) = f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, l'opérateur C_φ est un opérateur linéaire.*

Démonstration. Soient $f, g \in H^2$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}(C_\varphi(af+bg))(z) &= ((af+bg)\circ\varphi)(z)\\ &= (af+bg)(\varphi(z))\\ &= (af)(\varphi(z)) + (bg)(\varphi(z))\\ &= af(\varphi(z)) + bg(\varphi(z))\\ &= a(C_\varphi(f))(z) + b(C_\varphi(g))(z)\\ &= (aC_\varphi(f) + bC_\varphi(g))(z),\end{aligned}$$

alors $\forall z \in \mathbb{D}, \quad (C_\varphi(af+bg))(z) = (aC_\varphi(f) + bC_\varphi(g))(z).$ □

Théorème 3.1.1. *Soient $\varphi, \psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ deux fonctions holomorphes, si C_φ et C_ψ sont des opérateurs de composition, alors :*

$$C_\varphi C_\psi = C_{\psi\circ\varphi}.$$

Démonstration. Notons que,

$$(C_\varphi C_\psi f)(z) = (C_\varphi(f\circ\psi))(z) = (f\circ\psi\circ\varphi)(z) = (C_{\psi\circ\varphi} f)(z), \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

Donc

$$C_\varphi C_\psi = C_{\psi\circ\varphi}.$$

□

Théorème 3.1.2. ***"Principe de Subordination de Littlewood (1925)"*** *[16] Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, et $\varphi(0) = 0$, pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a :*

$$\|C_\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Remarque 3.1.1.

1. *Le principe de subordination de Littlewood implique alors que tout opérateur de composition $C_\varphi : H^2 \longrightarrow H^2$ est continu, et une contraction $\|C_\varphi\| \leq 1$ si $\varphi(0) = 0$.*
2. *Si $\varphi(0) = a \neq 0$, il suffit de considérer l'automorphisme du disque unité, pour chaque point $p \in \mathbb{D}$, (transformation de Möbius) :*

$$\alpha_p(z) = \frac{p - z}{1 - \bar{p}z},$$

qui transforme $\mathbb{D}$ en lui même, il échange p avec l'origine et il est son propre inverse. Posons $p = \varphi(0)$. La fonction holomorphe $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ prend $\mathbb{D}$ en lui même et fixe l'origine. Par la propriété d'auto-inverse de α_p ($\alpha_p^{-1}(z) = \alpha_p(z)$), nous avons $\varphi = \alpha_p \circ \psi$ et cela se traduit par l'équation de l'opérateur $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$. On a vu que C_ψ est borné (Contractante), et on sait que le produit des opérateurs bornés est toujours borné. Il reste donc à montrer que les opérateurs de composition sont bornés quand le symbole est un automorphisme du disque unité (C_{α_p}), ce qui se prouve par changement de variable, et on a le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Pour tout $p \in \mathbb{D}$, l'opérateur C_{α_p} est borné dans $H^2(\mathbb{D})$, de plus :*

$$\|C_{\alpha_p}\| \leq \left(\frac{1+|p|}{1-|p|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Supposons que f est holomorphe dans une partie du disque fermé, $R\mathbb{D} = \{|z| < R\}$, pour certain $R > 1$. Comme

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty,$$

en passant à la limite à l'intérieur de l'intégrale de sorte que :

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta.$$

Par un simple changement de variable on a :

$$\begin{aligned}
\|f \circ \alpha_p\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(\alpha_p\left(e^{i\theta}\right)\right)\right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 \left|\alpha_p'\left(e^{it}\right)\right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 \frac{1-|p|^2}{|1-\bar{p}e^{it}|^2} dt \\
&\leq \frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^2 dt\right) \\
&= \frac{1+|p|}{(1-|p|)} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.1.3. *[16] Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ avec $\varphi(0) \neq 0$, alors C_φ est un opérateur borné dans $H^2(\mathbb{D})$, et*

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration. Il a été indiqué précédemment que $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$, où $p = \varphi(0), \psi$ fixé. D'après le lemme précédent et le principe de subordination de Littlewood, qui montrent que les deux opérateurs sont bornés dans $H^2(\mathbb{D})$, d'où C_φ est le produit d'opérateurs bornés de $H^2(\mathbb{D})$. Comme $\|C_\psi\| \leq 1$, on déduit que :

$$\|C_\varphi\| \leq \|C_\psi\| \left\|C_{\alpha_p}\right\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

□

Lemme 3.1.2. *[16] Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, si C_φ est un opérateur de composition et k_λ le noyau reproduisant, alors :*

$$C_\varphi^* k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}.$$

Démonstration. Pour tout f dans H^2, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle f, C_\varphi^* k_\lambda \right\rangle &= \langle C_\varphi f, k_\lambda\rangle \\
&= \langle f\circ\varphi, k_\lambda\rangle \\
&= f(\varphi(x)) \\
&= \left\langle f, k_{\varphi(\lambda)} \right\rangle.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\langle f, C_\varphi^* k_\lambda\rangle = \langle f, k_{\varphi(\lambda)}\rangle, \quad \forall f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Ce qui implique que $C_\varphi^* k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}$. □

Proposition 3.1.2. *[16] Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}} \leq \|C_\varphi\|.$$

Démonstration. En utilisant le lemme précédent avec $\lambda = 0$, on obtient :

$$C_\varphi^* k_0 = k_{\varphi(0)},$$

comme $\|k_\lambda\|_{H^2}^2 = \frac{1}{1-|\lambda|^2}$ alors $\left\|k_{\varphi(0)}\right\|_{H^2}^2 = \frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}$ et $\|k_0\|_{H^2} = 1$. D'autre part

$$\left\|k_{\varphi(0)}\right\|_{H^2} = \left\|C_\varphi^* k_0\right\| \leq \|C_\varphi^*\| \, \|k_0\|_{H^2} \, ,$$

par conséquent $\|C_\varphi^*\| = \|C_\varphi\| \geq \frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}}$. □

Corollaire 3.1.1. *[16] Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, la norme de l'opérateur de composition C_φ est égale à 1 si et seulement si $\varphi(0) = 0$.*

Démonstration. — Si $\varphi(0) = 0$, alors $1 \leq \|C_\varphi\| \leq 1$, alors on a : $\|C_\varphi\| = 1$.
— Si $\|C_\varphi\| = 1$, alors $|\varphi(0)|^2 \leq 0$, donc on a : $\varphi(0) = 0$.

□

Théorème 3.1.4. *Un opérateur T sur H^2 dans lui même est un opérateur de composition si et seulement s'il existe une fonction φ holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, telle que*

$$T^* k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}.$$

Théorème 3.1.5. *Si $f_n(z) = z^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, T est un opérateur de composition de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si, $Tf_n = (Tf_1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Compacité des opérateurs de composition.

Théorème 3.1.6. *[16] Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, si $\|\varphi\|_\infty < 1$ alors C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Pour chaque entier positif n, on définit l'opérateur :

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) \varphi^k \quad \left(f \in H^2(\mathbb{D})\right)$$

ainsi T_n envoi $H^2(\mathbb{D})$ à l'ensemble engendré par les n premières puissances de φ. D'après la comparaison des normes de $H^2(\mathbb{D})$ et $H^\infty(\mathbb{D})$, T_n est donc borné et de rang fini sur $H^2(\mathbb{D})$.

On affirment que $\lim_{n\to+\infty} \|C_\varphi - T_n\| = 0$. Cela résulte du calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\|(C_\varphi - T_n)(f)\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k(f)\varphi^k \right\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(f)| \left\|\varphi^k\right\| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(f)| \|\varphi\|_\infty^k \\
&\leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\varphi\|_\infty^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1-\|\varphi\|_\infty^2}} \|f\|.
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé respectivement : l'inégalité triangulaire, la comparaison des normes de $H^2(\mathbb{D})$ et $H^\infty(\mathbb{D})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et enfin la somme de la série géométrique, l'hypothèse que $\|\varphi\|_\infty < 1$. Ainsi

$$\|C_\varphi - T_n\| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1-\|\varphi\|_\infty^2}} \longrightarrow 0.$$

$\square$

Théorème 3.1.7. *C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H^2 si et seulement si φ satisfait la condition suivante,*

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1-|\varphi(e^{it})|^2} \right] dt < \infty. \tag{3.1}$$

Démonstration. On pose

$$\{e_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{z^n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

une base orthonormée de H^2, alors C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H^2 si et seulement si,

$$\begin{aligned}\infty > 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi e_n\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left|\varphi\left(e^{it}\right)\right|^{2n} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\left|\varphi\left(e^{it}\right)\right|^{2n}}{1-\left|\varphi\left(e^{it}\right)\right|^{2}} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\left|\varphi\left(e^{it}\right)\right|^{2}} dt,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 3.1.2. *On sait que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact (théorème 2.2.4) alors si la fonction holomorphe φ : $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ satisfait la condition 3.1, l'opérateur C_φ est compact.*

Théorème 3.1.8. *Soit φ une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *C_φ un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.*
2. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H^2(\mathbb{D})$ et converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{D}$, alors $\|C_\varphi f_n\| \to 0$.*

Démonstration. - On suppose que C_φ est compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H^2(\mathbb{D})$ telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément. La suite des fonctions $f_n \circ \varphi$ admet par compacité de l'opérateur C_φ, une sous-suite qui converge dans $H^2(\mathbb{D})$. Puisque $\{\varphi(z)\}$ est un ensemble compact pour tout $z \in \mathbb{D}$, il vient que $f_n(\varphi(z)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la limite de la sous-suite est la fonction nulle. Cet argument peut-être appliqué à toute suite extraite de la suite $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même tend simplement vers la fonction nulle. En outre, la fonction φ étant continue, la suite $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 , on en déduit $f_n \circ \varphi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $H^2(\mathbb{D})$.
- Réciproquement, soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normale, on peut donc en extraire une suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction g de $H^2(\mathbb{D})$. La suite des fonctions $g_{n_k} - g$ est alors bornée dans $H^2(\mathbb{D})$ et converge uniformément vers la fonction nulle. On en déduit que la $g_{n_k}\circ \varphi - g \circ \varphi \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$ dans $H^2(\mathbb{D})$. On a ainsi montré que l'opérateur de composition C_φ est compact. $\square$

Définition 3.1.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On définit la fonction de comptage de Nevanlinna de φ pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}$ par :*

$$N_\varphi(z) := \begin{cases} \sum_{w\in\varphi^{-1}(\{z\})} \log\left(\frac{1}{|w|}\right) & ; z \in \varphi(\mathbb{D}), \\ 0 & ; z \notin \varphi(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Théorème 3.1.9. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors :*

$$\|C_\varphi f\|_2^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w). \tag{3.2}$$

Démonstration. Appliquant l'identité de Littlewood-Paley 1.5 à la fonction $f \circ \varphi$,

$$\begin{aligned} \|f\circ\varphi\|_2^2 - |f(\varphi(0))|^2 &= 2\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= 2\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z). \end{aligned}$$

La fonction φ est localement univalente sur $\mathbb{D}$, sauf sur un nombre dénombrable de points où la dérivée de φ s'annule.

Donc l'ensemble $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D}\backslash\mathbf{Z}$ peut s'écrire comme une union des rectangles disjoints $\mathbf{R}_j$ où sur chaque rectangle φ est biholomorphe. On note par ψ_j l'inverse de la restriction de φ sur $\mathbf{R}_j$.
Par la formule de changement de variable usuel, si $w = \varphi(z)$, alors

$$dA(w) = |\varphi'(z)|^2 dA(z),$$

pour tout j on a :

$$\int_{\mathbf{R}_j} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} |f'(w)|^2 \log\frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w).$$

Par sommation sur j, où χ_j est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(\mathbf{R}_j)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z) &= \sum_j \int_{\mathbf{R}_j} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= \sum_j \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} |f'(w)|^2 \log\frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \sum_j \chi_j(w) \log\frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w), \end{aligned}$$

si $w \in \varphi(\mathbb{D}) \backslash \varphi(z)$ chaque point de $\varphi^{-1}(\{z\})$ est de multiplicité 1 , donc

$$\sum_j \chi_j(w) \log \frac{1}{|\psi_j(w)|} = N_\varphi(w),$$

pour $w \in \varphi(\mathbb{D})$ presque partout, alors on a :

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 \, |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \, N_\varphi(w) dA(w).$$

□

Théorème 3.1.10. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Pour tout $w \in \mathbb{D} \backslash \{\varphi(0)\}$, on a :*

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|.$$

Démonstration. Soit $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $\psi(0) \neq 0$, si $\{z_j\}_{i \in J}$ est l'ensemble de zéros de ψ, alors $\psi(0) \leq \prod_{j \in J} |z_j|$ donc, on a :

$$\log(\psi(0)) \leq \log \left(\prod_{j \in J} |z_j| \right) = \sum_{j \in J} \log |z_j| \,,$$

d'où

$$N_\psi(0) = \sum_{j \in J} \log \frac{1}{|z_j|} \leq \log \left(\frac{1}{|\psi(0)|} \right). \tag{3.3}$$

Maintenant, on considère la fonction :

$$\psi(z) = \frac{w - \varphi(z)}{1 - \bar{w}\varphi(z)} = \alpha_w(\varphi).$$

Puisque φ est holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et $w \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(0) \neq w$, alors $\psi(0) \neq 0$, l'inégalité 3.3 devient :

$$N_\psi(0) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|,$$

comme $\psi(z) = 0$ si et seulement si $\varphi(z) = w$, on a l'inégalité :

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|.$$

□

Théorème 3.1.11. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, alors C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si*

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.

1. Supposons que

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

On montre que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{D}$. D'après le théorème de la convergence faible 3.1.8, il suffit de montrer que :

$$\|C_\varphi f_n\| \to 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, de l'hypothèse de N_φ on choisit $0 < r < 1$ tel que :

$$N_\varphi(w) < \varepsilon \log \frac{1}{|w|} \text{ quand } r \leq |w| < 1.$$

Comme $f_n \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, on peut choisir n_ε tel que $|f_n| < \sqrt{\varepsilon}$ sur $r\mathbb{D} \cup \{\varphi(0)\}, \forall n > n_\varepsilon$. Alors pour tout n, par la formule de changement de variable sur H^2 suivante on a :

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|^2_{H^2} &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 \mid \varphi'(z) \mid^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} \mid f'(w) \mid^2 N_{\varphi,1}(w) dA(w).\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f_n\|^2 &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\left(\| f(z)\|^2 - \|f(0)\|^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\|f_n\|^2 - |f_n(\varphi(0))|^2\right) \\ &\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Où dans l'avant-dernière ligne, nous avons utilisé la formule 3.2 deux fois : la première fois avec $f(z) = z$, et la deuxième avec f_n, et dans la dernière ligne nous avons utilisé le fait que $\|f_n\| \leq 1$ pour chaque n. Donc :

$$\|C_\varphi f_n\| \to 0.$$

Ce qui montre la compacité de C_φ.

2. On suppose que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ et on montre que :

$$N_\varphi(w) = o\left(\log \frac{1}{|w|}\right) \text{ quand } |w| \to 1^-,$$

qui est équivalent à :

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{1-|w|} = 0.$$

Pour $a \in \mathbb{D}$, le noyau reproduisant normalisé est :

$$f_p(z) = \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-\bar{p}z}.$$

Comme $\|f_p\| = 1, \forall p$, et $f_p \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ quand $|p| \to 1^-$, on obtient :

$$\lim_{|p|\to 1^-} \|C_\varphi f_p\| = 0.$$

Puisque $\alpha_p(z) = \frac{p-z}{1-\bar{p}z}$ est un automorphisme spéciale de $\mathbb{D}$, pour tout $p \in \mathbb{D}$, alors :

$$N_\varphi\left(\alpha_p(w)\right) = N_{\alpha_p \circ \varphi}(w), \forall w \in \mathbb{D}.$$

Appliquant la formule de changement de variable 3.2 et l'inégalité de la moyenne suivante :

$$N_\varphi(z) \leq \frac{2}{r^2} \int_{D(z,r)} N_\varphi(w) dA(w), \quad \forall D(z,r) \subset D(0, \frac{1}{2}), \tag{3.4}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_p\|^2 &\geq 2 \int_{\mathbb{D}} \left|f_p'(w)\right|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\
&= 2 \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|p|^2\right)|p|^2}{|1-\bar{p}w|^4} N_\varphi(w) dA(w) \\
&= \frac{2|p|^2}{1-|p|^2} \int_{\mathbb{D}} \left|\alpha_p'(w)\right|^2 N_\varphi(w) dA(w).
\end{aligned}$$

Posons $W = \alpha_p(w)$, on a :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_p\|^2 &\geq \frac{2|p|^2}{1-|p|^2}\int_{\mathbb{D}} N_\varphi\left(\alpha_p(W)\right) dA(W)\\
&= \frac{2|p|^2}{1-|p|^2}\int_{\mathbb{D}} N_{\alpha_p\circ\varphi}(W) dA(W)\\
&\geq \frac{2|p|^2}{1-|p|^2}\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} N_{\alpha_p\circ\varphi}(W) dA(W).
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité :

$$N_\psi(0) \leq \frac{1}{r^2}\int_{r\mathbb{D}} N_\psi(z) dA(z), \quad \psi(0) \neq 0;\ 0 < r < |\psi(0)|, \tag{3.5}$$

à l'intégrale précédent, avec

$$\psi = \alpha_p \circ \varphi,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_p\|^2 &\geq 4\frac{2|p|^2}{1-|p|^2} N_{\alpha_p\circ\varphi}(0)\\
&= \frac{8|p|^2}{1+|p|}\frac{N_\varphi(p)}{1-|p|}.
\end{aligned}$$

On notera que dans la première ligne de l'équation précédente, l'application de l'inégalité de la moyenne 3.4 sur le disque $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ nécessite que :

$$|\alpha_p(\varphi(0))| > \frac{1}{2},$$

mais $|\alpha_p(\varphi(0))| \to 1$ quand $|p| \to 1^-$, alors cela reste vrai pour tout p. Par conséquent, pour toutes ces p,

$$\|C_\varphi f_p\|^2 \geq c\frac{N_\varphi(p)}{1-|p|}, \text{ où } c \text{ est constant.}$$

Comme la compacité de C_φ implique que $\|C_\varphi f_p\| \to 0$ quand $|p| \to 1^-$, alors la dernière inégalité donne l'estimation souhaitée de la fonction N_φ.

□

Théorème 3.1.12. *Supposons φ une fonction univalente de $\mathbb{D}$ dans lui même, ensuite C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si,*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty.$$

Démonstration. soit $w \in \varphi(\mathbb{D})$, et soit z l'antécédent de w par φ. Comme φ est univalente, alors $N_\varphi(w) = -\log|z|$. Maintenant, si $|w|$ tend vers 1, alors $|z|$ aussi par continuité de φ et compacité de $\bar{\mathbb{D}}$. Dans ce cas, $-\log|w|$ est équivalent à $1-|w|$ et $-\log|z|$ à $1-|z|$. D'après le théorème précédent, l'opérateur C_φ est compact si et seulement si :

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{-\log|w|} = \lim_{|z|\to 1^-} \frac{-\log|z|}{-\log|w|} = 0.$$

Soit, si et seulement si

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} = 0.$$

□

Le théorème suivant donne une autre caractérisation de la bornitude de l'opérateur de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, ceci utilise la fonction de comptage de Nevanlinna.

Théorème 3.1.13. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, alors C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si,*

$$\sup_{w\in\mathbb{D}} \frac{N_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w|}} < \infty.$$

Démonstration. $\Leftarrow$) Supposons que $\sup_{w\in\mathbb{D}} \frac{N_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w|}} < \infty$, (Supposons que $\varphi(0) = 0$ sans perte de généralité), on utilise la formule de changement de variable 3.2, on a :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f)\|_2^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\
&= |f(0)|^2 + C\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log\frac{1}{|w|} dA(w) \\
&\leq \max\{1, C\}\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Donc C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$. $\Rightarrow$) Supposons que C_φ est borné dans $H^2(\mathbb{D})$. D'après la preuve de théorème 3.1.11, on a :

$$\|C_\varphi f_p\|^2 \geq c\frac{N_\varphi(p)}{1-|p|}, \text{ où } c \text{ est constant },$$

tel que :

$$f_p(z) = \frac{\sqrt{1-p^2}}{1-\bar{p}z}.$$

Comme $\|C_\varphi f_p\|^2 < \infty$, on a donc,

$$\sup_{p\in\mathbb{D}} \frac{N_\varphi(p)}{1-|p|} < \infty.$$

Ce qui terminer la preuve. □

3.2 Opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$.

Définition 3.2.1. *Pour une fonction holomorphe φ à partir de disque unité dans lui-même, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on définit l'opérateur de composition sur $\mathcal{D}_\alpha$ par :*

$$\begin{aligned} C_\varphi : \mathcal{D}_\alpha &\longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \\ f &\longmapsto f\circ\varphi. \end{aligned}$$

Définition 3.2.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On définit la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ par :*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) := \begin{cases} \sum_{z=\varphi(w),w\in\mathbb{D}} (1-|w|)^\alpha, & z \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}, \\ 0, & z \notin \varphi(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Pour $0 < \alpha \leq 1$, où chaque w est compté avec sa multiplicité. Notons que $N_{\varphi,\alpha}(z) = 0$ lorsque $z \notin \varphi(\mathbb{D})$.

Par convention, on considère $N_{\varphi,\alpha}(z) = 0$ lorsque $z = \varphi(0)$.

Remarque 3.2.1. *Si $\alpha = 1$, alors $N_{\varphi,1}$ est comparable à la fonction de comptage de Nevanlinna de H^2 que nous avons définis précédemment, ie :*

$$N_{\varphi,1}(z) = N_\varphi(z) = \sum_{z=\varphi(w),w\in\mathbb{D}} \log\frac{1}{|w|}, \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}.$$

Notons que $-\log|w| \asymp 1-|w|,\ |w| \to 1^-$.

Lemme 3.2.1. *Soient $0 \leq \alpha \leq 1$, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{D}$ on a :*

$$\int_{\mathbb{D}} (f\circ\varphi)(z)\,|\varphi'(z)|^2\,dA_\alpha(z) = (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} f(z)N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z). \tag{3.6}$$

Démonstration. On suppose que φ n'est pas constante. L'ensemble $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D}\backslash\mathbf{Z}$ peut s'écrire comme une union des rectangles disjoints $\mathbf{R}_j$ où sur chaqu'un φ est biholomorphe. On note par ψ_j l'inverse de la restriction de φ sur $\mathbf{R}_j$.
Par la formule de changement de variable usuel, avec $z = \psi_j(w)$, pour tout j on a :

$$\int_{\mathbf{R}_j} (f \circ \varphi)(z) \left|\varphi'(z)\right|^2 dA_\alpha(z) = (1+\alpha) \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} f(w) \left(1 - |\psi_j(w)|^2\right)^\alpha dA(w).$$

Par sommation sur j, on déduit que :

$$\int_{\mathbb{D}\backslash\mathbf{Z}} (f \circ \varphi)(z) \left|\varphi'(z)\right|^2 dA_\alpha(z) = (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_j \chi_j(w) \left(1 - |\psi_j(w)|^2\right)^\alpha\right) dA(w).$$

Où χ_j est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(\mathbf{R}_j)$.
L'ensemble $\mathbf{Z}$ est dénombrable donc il est de mesure nulle, donc le premier membre de l'équation égale à

$$\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z) \left|\varphi'(z)\right|^2 dA_\alpha(z).$$

Et aussi si $w \in \varphi(\mathbb{D})/\varphi(\mathbf{Z})$ on a

$$\sum_j \chi_j(w) \left(1 - |\psi_j(w)|^2\right)^\alpha = \sum_{w \in \varphi(\mathbb{D}), \varphi(z) = w} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha = N_{\varphi,\alpha}(w).$$

□

Théorème 3.2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < \alpha \leq 1$,*

1. *C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha \Longleftrightarrow N_{\varphi,\alpha} = O(1 - |z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$.*
2. *C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha \Longleftrightarrow N_{\varphi,\alpha} = o(1 - |z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$.*

Démonstration. 1. $\Leftarrow$) Soit $N_{\varphi,\alpha} = O(1 - |z|)^\alpha, |z| \to 1^-$, d'après le changement de variable 3.6 On a

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f)\|_\alpha^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} \left|(f' \circ \varphi)(z)\right|^2 \left|\varphi'(z)\right|^2 dA_\alpha(z) \\
&= |f(0)|^2 + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\lesssim |f(0)|^2 + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} \left|f'(z)\right|^2 \left(1 - |z|^2\right)^\alpha dA(z) \\
&\asymp \|f\|_\alpha^2.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Supposons maintenant que C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$. On considère la fonction test donnée par

$$F_\lambda(z) = \frac{(1-|\lambda|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\bar{\lambda}z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Et

$$\begin{aligned}\|F_\lambda\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &= \left\|\sum_n \bar{\lambda} z^n\right\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \left(1-|\lambda|^2\right)^{2-\alpha} \\ &\asymp \left(\sum_n (1+n)^{1-\alpha}|\lambda|^{2n}\right)\left(1-|\lambda|^2\right)^{2-\alpha} \\ &\asymp 1.\end{aligned}$$

Nous avons, par l'inégalité de la moyenne suivante :

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{2}{r^2}\int_{D(z,r)} N_{\varphi,\alpha}(w)dA(w), \ \ \forall D(z,r) \subset D(0,\frac{1}{2}), \tag{3.7}$$

on a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\alpha\left(C_\varphi\left(F_\lambda\right)\right) &= \int_{\mathbb{D}} |\left(F_\lambda(\varphi(w))'\right|^2 dA_\alpha(w) \\ &= (1+\alpha)\int_{\mathbb{D}} \left|F'_\lambda(z)\right| N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z) \\ &\asymp \left(1-|\lambda|^2\right)^{2-\alpha}\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\bar{\lambda}z|^4}dA(z) \\ &\gtrsim \left(1-|\lambda|^2\right)^{2-\alpha}\int_{D\left(\lambda,\frac{1-|\lambda|}{2}\right)} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\bar{\lambda}z|^4}dA(z) \\ &\gtrsim \left(1-|\lambda|^2\right)^{-2-\alpha}\int_{D\left(\lambda,\frac{1-|\lambda|}{2}\right)} N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z) \\ &\gtrsim \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1-|\lambda|^2)^\alpha}.\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1-|\lambda|^2)^\alpha} \lesssim \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \left\|C_\varphi\left(F_\lambda\right)\right\|^2_\alpha \lesssim \left\|C_\varphi\right\|^2 \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \left\|F_\lambda\right\|^2_\alpha \lesssim \left\|C_\varphi\right\|^2 < \infty.$$

2. $\Leftarrow$) Soit $N_{\varphi,\alpha} = o(1-|z|)^\alpha, |z| \to 1^-$. Soit $(f_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{D}_\alpha$ converge faiblement vers 0. Il suffit de montrer que $\left\|C_\varphi\left(f_n\right)\right\|_\alpha \to 0$ *quand* $n \to \infty$. La convergence faible de f_n à 0 implique que $f_n \to 0$ et $f'_n \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe $\rho_\varepsilon \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tel que

$$N_{\varphi,\alpha} \leq \varepsilon(1-|z|)^\alpha, \text{ pour } \rho_\epsilon < |z| < 1.$$

Par changement variable on a

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi\left(f_n\right)\right\|_\alpha &= \left|f_n(\varphi(0))\right|^2+\int_{\mathbb{D}}\left|\left(f_n^{\prime} \circ \varphi\right)(z)\right|^2\left|\varphi^{\prime}(z)\right|^2 d A_\alpha(z) \\
&\asymp \left|f_n(0)\right|^2+(1+\alpha) \int_{\mathbb{D}}\left|f_n^{\prime}(z)\right|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) d A(z) \\
&\leq \left|f_n(0)\right|^2+\int_{\rho_\epsilon \mathbb{D}}\left|f_n^{\prime}(z)\right|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) d A(z)+\varepsilon \int_{\varphi(\mathbb{D}) | \rho_\epsilon \mathbb{D}}\left|f_n^{\prime}(z)\right|^2(1-|z|)^\alpha d A(z) \\
&\leq \left|f_n(0)\right|^2+\int_{\rho_\epsilon \mathrm{D}}\left|f_n^{\prime}(z)\right|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) d A(z)+\varepsilon .
\end{aligned}$$

Nous avons $f_n^{\prime} \rightarrow 0$ uniformément sur le disque fermé $\rho_\epsilon \overline{\mathbb{D}}$, donc $\left\|C_\varphi\left(f_n\right)\right\|_\alpha \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow$) Supposons que pour $\beta>0$ et la suite $\left(\lambda_n\right)_n \subset \mathbb{D}$ tel que $\left|\lambda_n\right| \rightarrow 1^{-}$et

$$N_{\varphi, \alpha}\left(\lambda_n\right) \geq \beta\left(1-\left|\lambda_n\right|\right)^\alpha .$$

On a la fonction test

$$f_n(z)=\frac{\left(1-\left|\lambda_n\right|^2\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\left(1-\overline{\lambda_n} z\right)}, \quad z \in \mathbb{D} .$$

C'est une suit bornée dans $\mathcal{D}_\alpha$ converge faiblement vers 0 . En effet, elle est convergente uniformément vers 0 sur les compacts, on a

$$\left(1-\left|\lambda_n\right|^2\right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq 2\left(1-\left|\lambda_n\right|^2\right)^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) / 2} .$$

D'autre part, par le changement de variable 3.6 et inégalité de la moyenne 3.7, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left\|f_n \circ \varphi\right\|_\alpha^2 \asymp \int_{\mathbb{D}} \mid\left(f_n(\varphi(w))^{\prime}\right|^2 d A_\alpha(w) \\
& \asymp\left(1-\left|\lambda_n\right|^2\right)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi, \alpha}(z)}{\left|1-\overline{\lambda_n} z\right|^4} d A(z) \\
& \geq c_1\left(1-\left|\lambda_n\right|^2\right)^{-2-\alpha} \int_{D\left(\lambda_n, \frac{1-\left|\lambda_n\right|}{2}\right)} N_{\varphi, \alpha}(z) d A(z) \\
& \geq c_2 \frac{N_{\varphi, \alpha}\left(\lambda_n\right)}{\left(1-\left|\lambda_n\right|^2\right)^\alpha} \\
& \geq c_2 \beta .
\end{aligned}$$

Où c_1, c_2 sont indépendants de n. Donc C_φ n'est pas compact, contradiction.

$\square$

Application aux théorème 3.2.1.

Théorème 3.2.2. *[22] Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Soit $0 < \alpha \leq 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq n_0$ on a :*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{8e^4}{\alpha+1}\mathcal{D}_\alpha\left(\varphi^{n+1}\right), \quad \frac{1}{n} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n-1}.$$

Corollaire 3.2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < a \leq 1$, on a :*

1. *Si $\sup_{n\geq 1} \mathcal{D}_\alpha\left(\varphi^n\right) < \infty$, alors C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$.*
2. *Si $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{D}_\alpha\left(\varphi^n\right) = 0$, alors C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$.*

En conséquence, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.2.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :*

1. *Si $\mathcal{D}_\alpha\left(\varphi^n\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$.*
2. *Si $\mathcal{D}_\alpha\left(\varphi^n\right) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$.*

3.3 Opérateurs de composition dans les classes de Schatten.

Dans cette section, nous détaillons les valeurs singulières d'un opérateur compact, qui agit sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Nous présentons aussi les classes de Schatten S_p.

Les valeurs singuliéres des opérateurs compacts.

Définition 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact, on définit les valeurs singulières de T par*

$$\lambda_n(|T|) = \sqrt{\lambda_n\left(T^*T\right)}, n \in \mathbb{N}^*,$$

i.e. ; les valeurs singulières de T sont les valeurs propres de l'opérateur $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ (est un opérateur compact défini positif), listées par ordre décroissant en module. En particulier, $\lambda_1(T) = \|T\|$.

Proposition 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur compact. Alors, il existe dans $\mathcal{H}$ deux systémes $\left(\varphi_n\right)_n$ et $\left(\psi_n\right)_n$ orthonormaux tels que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left\langle ., \varphi_n\right\rangle \psi_n,$$

où $(s_n)_n$ *est la suite des valeurs singulières de* T*.*

Corollaire 3.3.1. *Soit* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *un opérateur compact, on a*

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle \cdot, \psi_n \rangle \varphi_n.$$

Démonstration. En effet, on a $\forall f, g \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\langle Tf, g \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle f, \varphi_n \rangle \langle \psi_n, g \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n \right\rangle \\ &= \langle f, T^* g \rangle .\end{aligned}$$

Donc, $T^* g = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n$. □

Définition 3.3.2. *On dit qu'un opérateur compact* T *défini sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *est de Schatten de classe* p*,* $0 < p < \infty$*, autrement dit* $T \in S_p$*, si la suite des valeurs singulières qui lui associée* $(s_n)_n$ *est dans* l_p *(i.e. ;* $\sum_n |s_n|^p < \infty$ *).*
Pour tout opérateur T *de* S_p*, on pose*

$$\|T\|_{S_p} = \left(\sum_{n \geq 1} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(s_n)_n\|_{l_p} .$$

Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$*, on pose* $S_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1) := S_p(\mathcal{H}_1)$*.*

Proposition 3.3.2. *([17]) Soient* T *un opérateur compact sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *et* $p \geq 1$*. Alors,* $T \in S_p$ *si seulement si,*

$$(T^*T)^{\frac{p}{2}} \in S_{\frac{p}{2}}.$$

De plus,

$$\|T\|_{S_p}^p = \|T^*T\|_{S_{\frac{p}{2}}}^{\frac{p}{2}} .$$

Proposition 3.3.3. *La classe* S_p *est un idéal dans l'algèbre des opérateurs bornés. De plus, si* A *et* B *sont deux opérateurs bornés et* $T \in S_p$*. Alors,*

$$\|ATB\|_{S_p} \leq \|A\| \|T\|_{S_p} \|B\|.$$

Classes de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Définitions.

Définition 3.3.3. *L'espace de Bergman pondéré ou à poids noté A^p_α où bien $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ pour $-1 < \alpha < +\infty$, c'est l'espace des fonctions analytiques, p-integrables par rapport à la mesure dA_α*

$$A^p_\alpha = L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) = \left\{ f : f \text{ analytiques sur } \mathbb{D}, \|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Un exposé détaillé sur les espaces de Bergman peut être trouvé dans Hedenmalm-Korenblum-Zhu [21] and Zhu [20].

Définition 3.3.4. ***(L'opérateur de Toeplitz).***
Soit $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz avec le symbole ψ est l'opérateur T_ψ défini par

$$\begin{aligned} T_\psi : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto T_\psi f = P(\psi f), \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2.

Définition 3.3.5. *Soit $\alpha > -1$ et soit ψ une fonction positive dans $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. L'opérateur de Toeplitz T_ψ avec symbole ψ agissant sur l'espace de Bergman A^2_α est défini par*

$$T_\psi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\psi(w) f(w)}{(1 - \bar{w} z)^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), \quad f \in A^2_\alpha.$$

Les opérateurs de Toeplitz de la classe de Schatten sur les espaces de Bergman.

Théorème 3.3.1. *Soit $\psi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ une fonction non négative sur $\mathbb{D}$, et soit $\alpha > -1$ et $0 < p < \infty$. Alors, $T_\psi \in S_p(A^2_\alpha)$ si et seulement si la fonction*

$$\widehat{\psi}_r(z) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^{2+\alpha}} \int_{\Delta(z,r)} \psi(w) dA_\alpha(w), \quad 0 < r < 1,$$

appartient à $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.
Ici, $d\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{-2} dA(z)$ est la mesure hyperbolique dans $\mathbb{D}$, et $\Delta(z, r) = w : |\sigma_z(w)| < r$ est le disque pseudo-hyperbolique de centre z et de rayon r.
Nous allons utiliser ce résultat pour notre étude des opérateurs de composition de la classe de Schatten sur les espaces de type Dirichlet.

Une caractérisation de l'appartenance à la classe de Schatten S_p pour $0 < p < \infty$ de l'opérateur de composition dans l'espace de Hardy H^2 a été obtenue par D. Luecking et K. Zhu [19]. Leur résultat est le suivant : soit $0 < p < \infty$ et soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique. Alors, $C_\varphi \in S_p\left(H^2\right)$ si et seulement si

$$\frac{N_\varphi(z)}{\log \frac{1}{|z|}} \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda).$$

Ensuite, nous allons étendre ce résultat à tous les espaces de type Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.

Théorème 3.3.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique, $0 < \alpha < 1$ et $0 < p < \infty$. Alors, $C_\varphi \in S_p(\mathcal{D}_\alpha)$ si et seulement si*

$$\frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha} \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda).$$

Pau et Paleaz dans [12] montre cette résultat utilisant une relation bien connue entre les opérateurs de composition et de Toeplitz ainsi le théorème 3.3.1, en effet, supposons que $\varphi(0) = 0$, cette hypothèse simplifie ainsi l'étude de l'opérateur de composition C_φ sur l'espace $\mathcal{D}_\alpha$. Si $\varphi(0) = a \neq 0$, on peut redéfinir φ à l'aide d'une transformation de Möbius α_p telle que $\alpha_p(0) = 0$, et ainsi réécrire C_φ en termes d'un opérateur de composition C_ψ où $\psi = \alpha_p \circ \varphi$. Étant donné que C_{α_p} est inversible, il suffit alors d'étudier C_ψ.
Pour établir un lien avec les opérateurs de Toeplitz, considérons une application linéaire $U_\alpha : D_\alpha \to A^2_\alpha$ est définie par $U_\alpha f(z) = f'(z)$. Cette application est unitaire, et on a $U_\alpha C_\varphi U^*_\alpha = D_\varphi$ sur A^2_α, où D_φ est un opérateur de composition pondéré défini par $D_\varphi f(z) = f(\varphi(z))\varphi'(z)$.
Par conséquent, l'étude de l'appartenance à S_p de $C_\varphi : \mathcal{D}_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha$ est la même que celle de $D_\varphi : A^2_\alpha \to A^2_\alpha$.
Le résultat suivant montre la relation entre D_φ et un certain opérateur de Toeplitz agissant sur l'espace de Bergman A^2_α.

Lemme 3.3.1. *Supposons que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ soit analytique avec $\varphi(0) = 0$, et soit*

$$\psi(z) = \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.8}$$

Alors $D^*_\varphi D_\varphi = T_\psi$ dans A^2_α.

Pour conclure, on utilise le théorème 3.3.1, qui caractérise les opérateurs de Toeplitz dans les classes de Schatten, montrant que $T_\psi \in S_{p/2}\left(A^2_\alpha\right)$ si et seulement si $\psi \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$, où ψ

est la fonction définie en 3.8. En combinant ces résultats, on en déduit que $C_\varphi \in S_p\left(\mathcal{D}_\alpha\right)$ si et seulement si $D_\varphi \in S_p\left(A^2_\alpha\right)$, ce qui équivaut à $T_\psi \in S_{p/2}\left(A^2_\alpha\right)$. Finalement, par le théorème 3.3.1, cela revient à dire que $\frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1-|z|^2)^\alpha} \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$.

Bibliographie

[1] R.A. M. Avendano, P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math., vol. 237, Springer, New York, 2007.

[2] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).

[3] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[4] C. C. Cowen and B. D. MacCluer. Composition operators on spaces of analytic functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[5] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[6] P. A. Fuhrmann, Linear systems and operators in Hilbert space, McGraw-Hill 1981.

[7] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea Publishing Company, Kew York, 1957.

[8] J. Ph. Labrousse, Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice(1970)

[9] J .E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. 23 (1925),481-519.

[10] K. Kellay and P. Lefèvre, Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions, J. Math. Anal. Appl.386 (2012), 718-727.

[11] H. O. Kim, Averages of Nevanlinna counting functions of holomorphic self-maps of the unit disk, Hokkaido Math. J. 33 (2004), no. 3, 697-706.

[12] J. Pau, P. A. Pérez, Composition operators acting on weighted Dirichlet spaces. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), no. 2, 682-694.

[13] Wa. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.

[14] D. Sarason, Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk, John Wiley, Sons Inc., New York, 1994.

[15] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator. Annals of Math. 125 (1987) 375–404.

[16] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Springer Verlag, New York 1993.

[17] K. Zhu, Operator theory in function spaces, volume 139 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1990.

[18] N. Zorboska, Composition operators on weighted Dirichlet spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), no. 7, 2013 2023.

[19] D. Luecking, K. Zhu, Composition operators belonging to the Schatten ideals, Amer. J. Math. 114 (1992), 1127–1145.

[20] K. Zhu, Operator theory in function spaces. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 138. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[21] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman spaces. Graduate Texts in Mathematics, 199. Springer-Verlag, New York, 2000.

[22] Z. Bendaoud, F. Korrichi, L. Merghni, A. Yagoub, Estimates of generalized Nevanlinna counting function and applications to composition operators, extracta Mathematicae, Vol-30(2), (2015), 221-234, (14 page).