الجمـــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشـــعبيـــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم العـالــي و الـبـحـث الـعـلـمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامعـة عمّـــار ثـلـيـــجـــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــــة الـعـلـــــوم
**FACULTE DES SCIENCES**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

## *Mémoire de MASTER*

**Domaine:** Mathématiques et Informatique
**Filière:** Mathématiques
**Option:** Analyse Mathématique

**Présenté par**:
Khedidja Bey

**THEME**

# Opérateurs Lipschitz p-sommants

*Soutenu publiquement devant le jury composé de:*

| | | |
|---|---|---|
| ***Mr. Ali Chetih*** | ***M.A.A*** | ***Président*** |
| ***Mr. Abdeljebar Bouregaa*** | ***M.A.B*** | ***Examinateur*** |
| ***Mr. Amar Bougataia*** | ***M.A.B*** | ***Examinateur*** |
| ***Dr. Zohra Bendaoud*** | ***M.C.A*** | ***Encadreur*** |
| ***Dr. Amar Belacel*** | ***M.C.B*** | ***Co-encadreur*** |

***Année Universitaire 2014/2015***

# Remerciements

*Je tiens à remercier avant tout, notre Dieu qui nous a éclairé la bonne voie et nous a aidé à la parcourir.*

*Mes premiers remerciements vont à mes encadreurs* ***Dr Z. Bendaoud*** *et* ***Dr A. Belacel****, qui ont encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Je les remercie très sincèrement pour leurs remarques, leurs précieux conseils, leurs aides et leurs disponibilité dans chaque étape de mon travail.*

*Je suis très reconnaissant envers monsieurs* ***A. Chettih****,* ***A. Bouregaa*** *et* ***A. Bouguotia*** *d'avoir accepté de rapporter ce mémoire et d'être membres de jury de soutenance.*

*Mes remerciements vont aussi aux membres du* ***laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées*** *de l'* ***Université de Amar Telidji-Laghouat*** *pour avoir été à notre écoute pour répondre aux questions posées.*

*Enfin, tous mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.*

## ***Dédicaces***

Je dédie ce travail à :
Mes très chers parents
A toute ma famille
A toutes mes amies
A tous mes amis
A tout ce qui s'intèresse au
dèveloppement du savoir.

# Table des matières

# Introduction générale

Ce mémoire est constitué de trois chapitres, qui sont liés entre eux, pour définir les opérateurs, plus précisément Les opérateurs p-sommants, et Les opérateurs Lipschitz p-sommants.

Le **chapitre 1** est consacré à un rappel sur quelques notions élémentaires, en particulier toutes les définitions et résultats qui seront utilisées dans le chapitre 2 et le chapitre 3.

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude de l'opérateur p-sommant sur l'espace de Banach, pour cela on a commencé par des définitions et propriétés élémentaires afin d'énoncer les théorèmes importants de Pietsch sur la domination et la factorisation, ainsi que trois exemples illustrant ces opérateurs.

Dans le **chapitre 3** on a donné une version non-linéaire naturelle d'un opérateurs p-sommant qu'on appelle un opérateur Lipchitz p-sommant sur un espace métrique. Une étude analogue à l'étude faite au chapitre 2 avec l'opérateur p-sommant. et le lien entre l'opérateur p-sommant est l'opérateur en question.

| Notations | Significations |
| --- | --- |
| $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ | Corps des scalaires |
| $\mathbb{R}_+$ | L'ensemble des scalaires réels positifs |
| $p^*$ | Le conjugué de $p$ ; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ |
| $E, F, G$ | Espaces de Banach |
| $X, Y, Z$ | Espaces métriques |
| $L(E, F)$ | Espace des opérateurs linéaires de $E$ dans $F$ |
| $\mathcal{L}(E, F)$ | Espace des opérateurs linéaires et bornés (continus) |
| $E^*$ | Dual topologique de l'espace $E$ |
| $E^\sharp$ | Dual Lipschtiz de l'espace $E$ |
| $\langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle = x^*(x)$ | Crochet de dualilé entre $E$ et $E^*$ |
| $L_p$ | Espace de Lebesgue |
| $B_E = \{x \in E; \\|x\\| \leq 1\}$ | Boule unité fermé de $E$ |
| $B_{E^*}$ | Boule unité fermé de $E^*$ |
| $B_{E^\sharp}$ | Boule unité fermé de $E^\sharp$ |
| $\Pi_p(E, F)$ | L'ensemble de tous les opérateurs p-sommants de $E$ dans $F$ |
| $\pi_p(T)$ | La borne inférieure des constantes vérifant l'inégalité (2.4) |
| $\Pi_p^L(X, Y)$ | L'ensemble de tous les opérateurs Lipschtiz p-sommants de $X$ dans $Y$ |
| $\pi_p^L(T)$ | La borne inférieure des constantes vérifant l'inégalité (3.1) |

TABLE 1 – Tableau des notations

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre on a donné les notions et les outils qu'on aura à utiliser dans ce mémoire. Dans la première section de ce chapitre on définit les espaces vectoriels, les espaces topologiques, les espaces métriques, les espaces normés, et les espaces de Banach qui vont jouer un rôle fondamentale dans toute la suite. Un autre outil puissant qu'on aura besoin c'est la topologie faible et faible-$*$ qui sera l'objet de la deuxième chapitre, enfin la dernière section va exposer des théorèmes de base de l'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs linéaires.

## 1.1 Espaces de Banach

**Définition 1.1.1** *Soit $E$ un ensemble quelconque, on définit sur $E$ une première loi interne $+$ :*

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

*qui vérifie :*

| | | |
|---|---|---|
| $\forall x, y \in E$ | $x + y \in E$ | *stabilité,* |
| $\forall x, y \in E$ | $x + y = y + x$ | *commutativité,* |
| $\forall x, y, z \in E$ | $(x + y) + z = x + (y + z)$ | *associativité,* |
| $\exists e \in E, \forall x \in E$ | $x + e = e + x = x$ | *élément neutre,* |
| $\forall x \in E, \exists \acute{x} \in E$ | $x + \acute{x} = \acute{x} + x = e$ | *élément symétrique.* |

*Une deuxième loi externe* $\cdot$ :

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

*qui vérifie :*

| | | |
|---|---|---|
| $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ | $\alpha \cdot x \in E$ | *stabilité,* |
| $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ | $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ | *associativité,* |
| $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ | $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$ | *distribution de* $\cdot$ *sur* $+$, |
| $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ | $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$ | *distribution de* $+$ *sur* $\cdot$, |
| $\forall x \in E$ | $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ | *élément unité.* |

*Le triplet* $(E, +, \cdot)$ *s'appelle* ***espace vectoriel*** *sur le corps* $\mathbb{K}$. *Les éléments de* $E$ *s'appellent des vecteurs. Les éléments de* $\mathbb{K}$ *s'appellent des scalaires.*

**Définition 1.1.2** *Un sous ensemble* $F$ *d'un espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$ *sur le corps* $\mathbb{K}$, *s'appelle* ***sous-espace vectoriel*** *et on le note par* $(F, +, \cdot)$ *s'il vérifie :*

| | | |
|---|---|---|
| *1.* $F \neq \varnothing$. | | |
| *2.* $\forall x, y \in F$ | $x + y \in F$ | *stable pour* $+$, |
| *3.* $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ | $\alpha \cdot x \in F$ | *stable pour* $\cdot$. |

**Exemple 1.1.1** *Voici des simples exemples :*
*1.* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *la droite numérique munie de l'addition et la multiplication habituelle présente un espace vectoriel.*
*2. Soit* $E$ *un espace vectoriel, et soit l'ensemble :*

$$\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}\}.$$

*On définit l'addition et la multiplication sur cet ensemble par :*

| | |
|---|---|
| $\forall x \in E$ | $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, |
| $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ | $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. |

*Le triplet* $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot)$ *est un espace vectoriel.*

**Définition 1.1.3** *Soit $E, I$ deux ensembles quelconque. On définit sur $E$ une* ***topologie*** *$\tau$ qui est une famille de sous-ensembles de $E$ qui vérifie :*
*1. $\varnothing, E \in \tau$.*
*2. Toute intersection finie d'éléments de $\tau$ est dans $\tau$ c-à-d :*

$$\cap_{i=1}^{n} O_i \in \tau.$$

*3. Toute réunion quelconque d'éléments de $\tau$ est dans $\tau$ c-à-d :*

$$\cup_{i \in I} O_i \in \tau.$$

*On appelle le couple $(E, \tau)$* ***espace topologique*** *dont les éléments sont appellés des ouverts.*

**Exemple 1.1.2** *Soit $E = \{a, b, c, d\}$ où*

$$\tau = \{E, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$$

*Le couple $(E, \tau)$ est un espace topologique.*

**Définition 1.1.4** *Soit $E$ un ensemble quelconque. On appelle* ***métrique*** *sur $E$ toute application définie par :*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

*qui vérifie :*

| | | |
|---|---|---|
| $\forall x, y \in E$ | $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ | *séparé,* |
| $\forall x, y \in E$ | $d(x, y) = d(y, x)$ | *symétrie,* |
| $\forall x, y, z \in E$ | $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ | *inégalité triangulaire.* |

*Le couple $(E, d)$ s'appelle espace* ***métrique****.*

**Exemple 1.1.3** *Si $E = \mathbb{R}$ l'application $d : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow |x - y| \in \mathbb{R}_+$ est une distance sur $\mathbb{R}$.*

**Remarque 1.1.1** *Les espaces métriques sont des espaces topologiques.*

**Définition 1.1.5** *Soient* $(E_1, d_1)$ *et* $(E_2, d_2)$ *deux espaces métriques. Une application* ***bijective*** $f : E_1 \to E_2$ *est nommée* ***isometrie*** *si, pour tous* $x$ *et* $y$ *de* $E_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

**Définition 1.1.6** *Soient* $(E, d)$ *et* $(F, d^{'})$ *des espaces métriques. Une application* $f$ *de* $E$ *dans* $F$ *est un* ***isomorphisme*** *si :*
*1.* $f$ *est bijective.*
*2.* $f$ *et sa réciproque* $f^{-1}$ *sont continues.*

**Définition 1.1.7** *On dit qu'un espace métrique complet* $\hat{E}$ *est un* ***complété*** *(ou une* ***complétion****) d'un espace métrique* $(E, d)$*si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
*1.* $E$ *est un sous-espace de* $\hat{E}$.
*2.* $\hat{E} = \bar{E}$.

**Définition 1.1.8** *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$. *On appelle* ***norme*** *sur* $E$ *une application définie de* $E$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *comme suit :*

$$x \longrightarrow \|x\|,$$

*telle que :*

$$\begin{array}{ll} 1. \forall x \in E & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ 2.\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ 3.\ \forall x, y \in E & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{array}$$

*Le couple* $(E, \|\cdot\|)$ *est appelé* ***espace normé****.*
*Si la condition 1) est suprimée, l'application qui à* $x$ *fait correspondre* $\|x\|$ *s'appelle* ***semi-norme****. Alors* $\|x\|$ *peut être nul sans que* $x$ *le soit.*

**Exemple 1.1.4** *On peut définir sur l'espace réel* $\mathbb{R}^n$ *les normes suivantes :*
*1.*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

*2.*

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2},$$

*3.*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|.$$

**Remarque 1.1.2** *Définissons l'application :*

$$\begin{array}{rcl} d : E\times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \to & d(x,y) = \|x-y\|, \end{array}$$

*Montrons que $d$ est une métrique sur $E$, pour tous $x$ et $y$ de $E$ :*
*1.* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
*2.* $d(x,y) = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$.
*3.* $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.

*Donc $d$ est une métrique sur $E$ que l'on appelle* ***métrique associée à une norme*** $\|\cdot\|$.

**Corollaire 1.1.1** *Tout espace vectoriel normé est un espace métrique.*

**Remarque 1.1.3** *L'inverse n'est pas vrai.*

**Définition 1.1.9** *Dans un espace métrique $(E,d)$, on appelle* ***suite de Cauchy*** *toute suite $(x_n)$ d'élément de $E$ ayant la propriété suivante :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{N} : (p \geq r \ \ et\ q \geq r) \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

**Définition 1.1.10** *Un espace vectoriel normé $E$ est dit* ***espace de Banach****, si il est* ***complet****. C'est-à-dire si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de $E$ est* ***convergente*** *dans $E$.*

**Exemple 1.1.5** *1. La droite réelle constitue un espace de Banach.*
*2. Soit $K$ un espace de Hausdorff compact. On désigne par :*

$$\mathcal{C}_K = \{f : K \to \mathbb{C}\},$$

*$\mathcal{C}_K$ est un espace de Banach dont la norme :*

$$\|f\| = \sup_{x\in K}|f(x)|.$$

*3. Soit $1 \leq p < \infty$ un nombre réel, l'espace formé par les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p < \infty.$$

*muni de la norme*

$$\|(x_n)_n\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

*est un espace de Banach qu'on le désigne par $l_p(\mathbb{R})$ ou $l_p$.*
*4. L'espace formé par les suites bornées est un espace de Banach noté $l_\infty(\mathbb{R})$ (ou $l_\infty$) dont la norme*

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|.$$

*6. Soit $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espace mesuré, $f$ une fonction $\Sigma$-mesurable. On définit suivant les valeurs du réel p les normes suivantes*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \big(\int_\Omega|f(t)|^p d\mu(t)\big)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C, |f(x)| \leq C, \quad p.p \quad sur \quad \Omega\} & p = \infty. \end{cases}$$

*Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Banach $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalences, modulo l'égalité presque partout, des fonctions $\Sigma$-mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$, $\Sigma$ est la tribu de Lebesgue et $\mu$ la mesure de Lebesgue.*

## 1.2 Opérateurs linéaires

**Définition 1.2.1** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*
*On appelle* ***opérateur*** *de $E$ dans $F$ toute application $u$ définie de $E$ dans $F$ par :*

$$\begin{aligned} u : D(u) \subset E \quad &\rightarrow \quad F \\ x \quad &\rightarrow \quad y = u(x) \end{aligned}$$

*L'ensemble $D(u)$ de tous les $x \in E$ pour lesquels l'opérateur $u$ est défini, s'appelle domaine de définition de l'opérateur $u$.*

**Définition 1.2.2** *L'opérateur $T$ est dite linéaire, si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ :*

$$\begin{aligned} u(x+y) &= u(x) + u(y), \\ u(\lambda x) &= \lambda u(x). \end{aligned}$$

*En d'autre terme, $u$ est **linéaire** si, et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

**Remarque 1.2.1** *Dans le cas $F = \mathbb{K}$, on trouve les **formes linéaires**.*

**Définition 1.2.3** *L'opérateur $u$ est **continu** au point $x_0$, si :*

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists \delta \geq 0 \text{ tel que : } \forall x \in E,\ \|x - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|u(x) - u(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

*Puisque la continuité de $u$ peut être caractérisée par les suites, $u$ est continu en $x_0$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tel que :*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x_0 \Longrightarrow u(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_F} u(x_0).$$

**Définition 1.2.4** *Un opérateur linéaire $u$ de $E$ dans $F$ est dit **borné** s'il est défini partout dans $E$ et transforme tout ensemble borné de $E$ en un ensemble borné de $F$.*

*La linéairité de u entraine l'équivalence de cette définition avec la précédente.*

**Théorème 1.2.1** *Soient $E$ et $F$ des espaces normés. Soit $u$ un opérateur linéaire de $E$ dans $F$. Alors*

$$u \text{ est continu} \Longleftrightarrow u \text{ est borné}.$$

*Donc on a,*

$$u \text{ est borné} \Longrightarrow \exists M \geq 0, \forall x \in E : \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

*La borne inférieure des nombres $M$ vérifiant l'inégalité précédente s'appelle norme de l'opérateur $u$ et se note $\|u\|$,*

$$\|u\| = \inf\{M \geq 0 : \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E\}.$$

*Pour plus de détails voir [10, p. 215-216].*

**Remarque 1.2.2** *Si $E$ et $F$ sont des espaces normés, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi. $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$.*

**Théorème 1.2.2** *Pour tout opérateur borné $u$ d'un espace normé dans un espace normé, on a :*

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

**Définition 1.2.5** *Soit $E$ un espace vectoriel normé. On appelle **dual topologique** de $E$ et on le note par $E^*$ l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de toutes les formes linéaires continues définies sur $E$. $E^*$ est un espace normé, et on définit la norme de $u \in E^*$ par l'une des formules équivalentes suivantes :*

*1.*
$$\|u\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|u(x)|}{\|x\|};$$

*2.*
$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)|;$$

*3.*
$$\|u\| = \sup_{\|x\| = 1} |u(x)|;$$

*4.*
$$\|u\| = \inf\{M > 0, |u(x)| \leq M\|x\|; x \in E\}.$$

*Cela permet d'écrire*
$$|u(x)| \leq \|u\| \cdot \|x\|.$$

*Pour des raisons qu'on va voir, on utilise souvent la notation*

$$u(x) = \langle x, u \rangle,$$

*(ou des notations voisines). Le dual de $E^*$ est appelé **bidual** de $E$ et noté par $E^{**}$, i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $E^*$.*

**Définition 1.2.6** *Soit l'injection canonique suivante :*

$$J_E : E \to E^{**}, \tag{1.2}$$

*qui à tout* $x \in E$ *associe* $J_E(x)$ *telle que*

$$\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle, \qquad x^* \in E^*$$

*cette application est une isométrie i.e,*

$$\|J_E(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E, \qquad \forall x \in E$$

*On dit que l'espace de Banach* $E$ *est réflexif si*

$$J_E(E) = E^{**} \qquad (J_E \quad bijection)$$

*Introduisons la notion d'espace réflexif [4, p. 39].*

Parmi les outils principales qu'on aura besoin la notion d'opérateur dual. Voir [10, p 223-224].

**Définition 1.2.7** *Soient* $E$ *et* $F$ *deux espaces de Banach,* $u$ *un opérateur linéaire borné de* $E$ *dans* $F$*, on appelle opérateur dual de* $u$ *et on le note par* $u^*$ *l'application :*

$$u^* : F^* \to E^*$$

*qui vérifie :*

$$\forall x \in E, \forall y^* \in F^* : \qquad\qquad \langle u(x), y^* \rangle = \langle x, u^* y^* \rangle.$$

***Théorème 1.2.3*** *Si* $u$ *est un opérateur borné, donc* $u^*$ *l'est aussi et on a*

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}. \tag{1.3}$$

## 1.3 Topologies faible et faible-$*$

Soit $(x_n)$ une suite de points d'un espace vectoriel normé $E$. Soit $f \in E^*$, il se peut arriver que $(f(x_n))$ converge cependant que $(x_n)$ ne converge pas, d'où les deux définitions suivantes, voir [3, p. 67].

On définit sur l'espace de Banach $E$, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ (est la topologie la moins fine sur $E$ rendant continues toutes les formes linéaires sur $E$). Soit $(x_n)_n$ une suite de

$E$, et $x \in E$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x$ si et seulement si pour tout $x^* \in E^*$

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_n \langle x^*, x_n\rangle.$$

De même, on définit sur l'espace de Banach $E^*$ la topologique faible-$*$, pour chaque $x \in E$ on considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle \end{array}$$

La topologie faible-$*$ notée $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur $E^*$ rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.
Soit $(x_n^*)_n$ une suite de $E^*$, et $x^* \in E^*$. On dit que $(x_n^*)_n$ converge $*$-faiblement vers $x^*$ si et seulement si pour tout $x \in E$

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_n \langle x_n^*, x\rangle.$$

## 1.4 Formules et inégalités

**L'inégalité de Hölder** Soient

$$a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n, p > 1$$

on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{p^*}\Big)^{1/p^*}. \tag{1.4}$$

Dans le cas continu, pour toute fonction $f \in L_p(\mu), g \in L_{p^*}(\mu)$ on a :

$$\int_\Omega |f(t)g(t)| d\mu(t) \leq \Big(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p} \Big(\int_\Omega |g(t)|^{p*} d\mu(t)\Big)^{1/p^*}. \tag{1.5}$$

**L'inégalité de Minkowski** Soient

$$a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n, p > 1$$

on a :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p}. \tag{1.6}$$

Dans le cas continu, pour toute fonction $f, g \in L_p(\mu), p > 1$ on a :

$$\Big(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega |g(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p}.$$

Pour la démonstration voir [10, p. 46].

## 1.5 Théorèmes fondamentaux

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Définition 1.5.1** *Soit $x, y \in E$ , on appelle segment joignant les deux points $x, y$ l'ensemble de tous les éléments de la forme*

$$\alpha x + \beta y, \qquad \alpha, \beta \geq 0, \qquad \alpha + \beta = 1.$$

**Définition 1.5.2** *Un ensemble $M \subset E$ est dit convexe, si $\forall x, y \in M$, le segment joingant ces deux points est inclu dans $M$.*

**Définition 1.5.3** *Soit $A \subset E$, on appelle enveloppe convexe de l'ensemble $A$ le plus petit convexe contenant $A$, et le note par $conv(A)$.*

**Théorème 1.5.1** ***(Théorème de Hahn-Banach forme analytique).*** *Soit*

$$p : E \to \mathbb{R}$$

*une application qui vérifie :*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \qquad \forall x \in E, \qquad \forall \lambda \geq 0.$$

$$p(x+y) \leq p(x)+p(y), \quad \forall x, y \in E.$$

*Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous espace vectoriel et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que*

$$g(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in G.$$

*Alors, il existe une forme linéaire $f$ définie sur $E$ qui prolonge $g$, i.e.*

$$g(x) = f(x), \qquad \forall x \in G.$$

*et telle que*

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in E.$$

*Pour la démonstration de ce théorème voir [4, p. 2].*

**Remarque 1.5.1** *Conçernant le dual topologique d'un espace normé, on peut introduire la norme moyennant le produit de dualité entre $E$ et $E^*$ de la manière suivante :*

$$\|x^*\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Les trois corollaires suivants ainsi que leurs démonstrations proviens de [4, p. 3-4].

**Corollaire 1.5.1** *Soit $G$ un sous espace vectoriel de $E$ et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme*

$$\|g\|_{G^*} = \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle|$$

*Alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge $g$ telle que :*

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}.$$

**Corollaire 1.5.2** *Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E^*$, tel que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \qquad \text{et} \qquad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

**Corollaire 1.5.3** *Pour tout $x \in E$ on a :*

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle|.$$

*c-à-d le sup est atteint.*

**Définition 1.5.4** *Soit $E$ un espace normé, on appelle* ***hyperplan*** *d'équation*

$$[f = \alpha]$$

*l'ensemble*

$$H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}.$$

*avec, $f$ est une forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Définition 1.5.5** *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan $H$ d'équation $[f = \alpha]$* ***sépare*** *$A$ et $B$ au sens*
*1.* ***large*** *si*

$$f(x) \leq \alpha; \quad \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha; \quad \forall x \in B$$

*2.* ***strict*** *si*

$$\exists \epsilon > 0, \quad f(x) \leq \alpha - \epsilon; \quad \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon; \quad \forall x \in B$$

Notons qu'un hyperplan est fermé si et seulement si sa fonction f est continue.

**Théorème 1.5.2** ***(Théorème de H-B première forme géométrique).*** *Soit $E$ un espace normé et $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. Supposons que $A$ est* ***ouvert****, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare $A$ et $B$ au sens large.*

**Théorème 1.5.3** ***(Théorème de représentation de Riesz).*** *Soient $1 < p < \infty$ et $\varphi \in (L^p)^*$. Alors il existe $u \in L^{p^*}$ unique telle que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \qquad \forall f \in L^p.$$

*De plus, on a*

$$\|u\|_{L^{p^*}} = \|\varphi\|_{(L^p)^*}.$$

Pour plus de détails voir [4, p. 61]

**Remarque 1.5.2** *Dans la suite on va noter $u(x)$ par $ux$.*

# Chapitre 2

# Opérateurs p-sommants

Dans ce chapitre on a défini les opérateurs p-sommants ($1 \leq p < \infty$) et étudié leurs propriétés (d'idéal et d'injectivité) fondamentales, les deux théorèmes de domination et de factorisation due à Pietsch.

## 2.1 Définitions et propriétés élémentaires

**Définition 2.1.1** *Soient $1 \leq p < \infty$ et $E$ un espace de Banach. Une suite $(x_k)$ dans $E$ est* ***fortement p-sommable*** *si la suite scalaire $(\|x_k\|)$ est dans $\ell_p$. On note par $\ell_p(E)$ l'ensemble de toutes ces suites dans $E$ dont la norme définie par*

$$\|(x_k)\|_p = \Big(\sum_k \|x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

**Définition 2.1.2** *Soient $1 \leq p < \infty$ et $E$ un espace de Banach. Une suite $(x_k)$ dans $X$ est* ***faiblement p-sommable*** *si les suites scalaires $(f(x_k))_k$ sont dans $\ell_p$ pour toute $f \in E^*$. On note par $\ell_p^{faible}(E)$ l'ensemble de toutes ces suites dans $X$ dont la norme définie par*

$$\|(x_k)\|_p^{faible} = \sup_{f \in B_{E^*}} \Big(\sum_k |f(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

*Dans le cas $p = \infty$*

$$\ell_p^{faible}(E) = \ell_\infty(E), \|(x_k)\|_{\ell_\infty}^{faible} = \|(x_k)\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|. \tag{2.3}$$

**Définition 2.1.3** *Supposons que $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $u : E \to F$ un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur $u$ est **p-sommant**, (ou **absolument p-sommant**), si il existe une constante $C > 0$, et pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ de $E$ on a*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

*On note par $\Pi_p(E, F)$, l'ensemble de tous ces opérateurs de $E$ dans $F$, et par $\pi_p(u)$ la borne inférieure des constantes $C$. vérifant (2.4).*

**Remarque 2.1.1** *1. De (1.1) et (2.2), la formule (2.4) peut s'écrit :*

$$\|(ux_k)_{k=1}^n\|_p \leq C \cdot \|(x_k)_{k=1}^n\|_p^{faible}. \tag{2.5}$$

*Donc les opérateurs p-sommants transforment des suites faiblement p-sommantes vers des suites fortement p-sommantes.*
*2. Si $p = \infty$, la formule (2.5) s'écrit :*

$$\|(ux_k)_{k=1}^n\|_\infty \leq C \cdot \|(x_k)_{k=1}^n\|_\infty^{faible},$$

*et de (2.3), on aura :*

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \|ux_k\| \leq C \cdot \sup_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|.$$

*On conclut que si $p = \infty$ l'ensemble $\Pi_\infty(E, F)$ sera identique à $\mathcal{L}(E, F)$.*

**Proposition 2.1.1** ***(La relation entre l'espace $\Pi_p(E, F)$ et l'espace $\mathcal{L}(E, F)$).*** *Soit $u : E \to F$ un opérateur linéaire. Si $u$ est p-sommant. Alors, $u$ continu.*

**Preuve.** Prenons le cas $n = 1$ dans (2.4). Soient

$$u \in \Pi_p(E, F) \text{ et } x \in E$$

donc

$$\|ux\| \leq \pi_p(u) \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} |x^*(x)|$$

en vertu du Corollaire 1.5.3, on constate que

$$\|ux\| \leq \pi_p(u) \cdot \|x\|$$

qui exprime la continuité de $u$ sur $E$. Avec l'inégalité intéressante

$$\|u\| \leq \pi_p(u). \tag{2.6}$$

**Proposition 2.1.2** *L'ensemble $\Pi_p(E,F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.*

**Preuve.** Montrons que $\Pi_p(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
1. $\Pi_p(E,F)$ est non vide, car $u=0$ (l'opérateur nul) on a

$$0 \leq C \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big( \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall C > 0.$$

2. Soient $u$ et $v$ deux opérateurs p-sommants, où il existe $C_1$ telle que

$$\Big( \sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

et il existe $C_2$ telle que

$$\Big( \sum_{k=1}^{n} \|vx_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Appliquant l'inégalité de Minkowski (1.6), on trouve

$$\begin{aligned} \Big( \sum_{k=1}^{n} \|(u+v)x_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \Big( \sum_{i=1}^{n} \|ux_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big( \sum_{k=1}^{n} \|vx_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

par conséquent

$$u+v \in \Pi_p(E,F).$$

3. Soient $u$ un opérateur p-sommant et $\alpha$ un réel quelconque, donc il existe $C$ telle que

$$\begin{aligned} \Big( \sum_{k=1}^{n} \|(\alpha u)x_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} &= |\alpha| \cdot \Big( \sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\alpha| C \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.8) \end{aligned}$$

par conséquent

$$(\alpha u) \in \Pi_p(E,F).$$

**Proposition 2.1.3** *$\pi_p$ est une norme sur l'espace $\Pi_p(E,F)$.*

**Preuve.** Pour tous $u$ et $v$ deux opérateurs p-sommants et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite d'éléments de $E$, on a
1.

$$\pi_p(u) \geq 0$$

(car les constantes $C$ sont positives).
2. Si $\pi_p(u) = 0$ donc

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = 0$$

c-à-d $u$ est nul. Si l'opérateur nul vérifie (2.4). Alors

$$0 \leq C \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} |x^*(x_k)|, \qquad \forall x \in E.$$

Il est clair que la borne inférieure des nombres $C$ est 0, donc

$$\pi_p(0) = 0.$$

3. Soit $\alpha$ un réel quelconque, on va montrer que $\pi_p(\alpha u) = |\alpha|\pi_p(u)$.
Comme $u \in \Pi_p(E, F)$, on a d'après l'inégalité (2.8)

$$\begin{aligned}
\pi_p(\alpha u) &= \inf(|\alpha| C) \\
&= |\alpha| \inf C \\
&= |\alpha| \pi_p(u).
\end{aligned}$$

4. Soient $u$ et $v$ deux opérateurs p-sommants, on a d'après l'inégalité (2.7)

$$\pi_p(u + v) \leq \pi_p(u) + \pi_p(v).$$

**Proposition 2.1.4** *Le couple* $(\Pi_p(E, F), \pi_p)$ *est un espace de Banach.*

**Preuve.** Montrons que si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy de $\Pi_p(E, F)$, alors elle converge dans le même espace.
On a
$\forall \epsilon > 0, \qquad \exists j_0, \qquad \forall i > j \geq j_0, \qquad \pi_p(u_j - u_i) \leq \epsilon.$
Donc, pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ d'éléments de $E$ on a

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|(u_j)x_k - (u_i)x_k\|^p\Big) \leq \epsilon^p \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big).$$

Si $i \to +\infty$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|(u_j)x_k - ux_k\|^p\Big) \leq \epsilon^p \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big). \tag{2.9}$$

Et puisque $\Pi_p(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$, on trouve $u_j \to u$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, et d'après l'inégalité (2.9)

$$u_j \to u \quad dans \quad \mathcal{L}(E,F).$$

**Théorème 2.1.1** ***(Théorème d'inclusion).*** *Si* $1 \leq p < q < \infty$. *Alors,*

$$\Pi_p(E,F) \subseteq \Pi_q(E,F).$$

*En plus*

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

**Preuve.** Soient $(x_k)_{k=1}^n \subset E$ et $\lambda_k = \|ux_k\|^{\frac{q}{p}-1}$, donc,

$$\|u\lambda_k x_k\|^p = \lambda_k^p \|ux_k\|^p = \|ux_k\|^q$$

par suite

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^q\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \|u\lambda_k x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.10}$$

si $u \in \Pi_p(E,F)$, on aurra

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u\lambda_k x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

De la formule (2.10), on trouve

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^q\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit d'autre part $\alpha = \frac{q}{q-p}$ et $\beta = \frac{q}{p}$. Comme

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1.$$

On peut appliquer l'inégalité de Hölder (1.2)

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^q\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(u)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^p)^{\frac{q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{q}\frac{1}{p}}\cdot\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^{p\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{p}{q}\frac{1}{p}}.\\
&\leq \pi_p(u)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^{\frac{q}{p}-1}\Big)^{\frac{pq}{q-p}}\cdot\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \pi_p(u)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^q\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot\|(x_k)\|_q^{faible}
\end{aligned}$$

multipliant les deux membres par

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^q\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

on trouve

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\leq\pi_p(u)\cdot\|(x_k)\|_q^{faible}, \tag{2.11}$$

donc

$$u\in\Pi_p(E,F),$$

et d'après (2.11) on a

$$\pi_q(u)\leq\pi_p(u).$$

## 2.2 Propriété d'idéal

**Théorème 2.2.1** ***(Théorème de composition).*** *Soit* $1\leq p<\infty$.
*1. Si* $u\in\mathcal{L}(E,F)$ *et* $v\in\Pi_p(F,G)$*. Alors*

$$vu\in\Pi_p(E,G)\quad et\quad \pi_p(vu)\leq\pi_p(v)\cdot\|u\|.$$

*2. Si* $u\in\Pi_p(E,F)$ *et* $v\in\mathcal{L}(F,G)$*. Alors*

$$vu\in\Pi_p(E,G)\quad et\quad \pi_p(vu)\leq\|v\|\cdot\pi_p(u).$$

**Preuve.** 1. Supposons que

$$v \in \Pi_p(F,G) \quad et \quad u \in \mathcal{L}(E,F) \quad et \quad (x_k)_{k=1}^n \subset E.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} \|(vu)x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(v) \cdot \sup_{y^* \in B_{F^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y^*(ux_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \\
&\leq \pi_p(v) \cdot \sup_{y^* \in B_{F^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |(u^*y^*)x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(v) \cdot \|u^*\| \cdot \sup_{y^* \in B_{F^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |\Big(\frac{(u^*y^*)x_k}{\|u^*\|}\Big)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
de \quad (1.3) \quad &\leq \pi_p(v) \cdot \|u^*\| \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Donc $vu \in \Pi_p(E,G)$, en plus

$$\pi_p(vu) \leq \pi_p(v) \cdot \|u\|.$$

2. Supposons que $u \in \Pi_p(E,F)$ puisque $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} \|(vu)x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \|v\| \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|v\| \cdot \pi_p(u) \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'après ce qui précéde, on tire que

$$vu \in \Pi_p(E,G) \text{ et } \pi_p(vu) \leq \pi_p(u) \cdot \|v\|.$$

On peut constater les deux propriétés importantes suivantes [12, p. 37-38].

**Corollaire 2.2.1** ***(Propriété d'idéal).*** *Si*

$$u \in \mathcal{L}(F,F_0) \quad et \quad w \in \mathcal{L}(E_0,E),$$

*alors,*

$$v \in \Pi_p(E,F) \Rightarrow uvw \in \Pi_p(E_0,F_0).$$

## 2.3 Propriété d'injectivité

**Corollaire 2.3.1** ***(Propriété d'injectivité).*** *Si $F$ un sous-espace de $F_0$ et soit l'isométrie*

$$i : F \to F_0.$$

*Alors,*

$$u \in \Pi_p(E, F) \Leftrightarrow iu \in \Pi_p(E, F_0).$$

*En plus,*

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u).$$

**Preuve.** *- Le premier sens est immédiatement tiré d'après la composition et on a :*

$$\pi_p(iu) \leq \pi_p(u). \tag{2.12}$$

*- Soit $iu \in \Pi_p(E, F_0)$, donc pour toute suite $(x_k)_{k=1}^n \subset E$, on a :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|(iu)x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(iu) \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

*Mais, comme*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|(iu)x_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

*Donc*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(iu) \cdot \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

*c-à-d*

$$u \in \Pi_p(E, F).$$

*En plus, on a*

$$\pi_p(u) \leq \pi_p(iu). \tag{2.13}$$

*De* (2.13) *et* (2.12) *on trouve*

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u).$$

## 2.4 Exemples

Soient $K$ un compact et la fonctionnelle $\delta_k$ définit, pour tout $k \in K$, par

$$\begin{array}{rcl} \delta_k : C(K) & \to & \mathbb{K} \\ f & \to & \langle \delta_k, f \rangle = f(k) \end{array}$$

On remarque que $\delta_k \in C(K)^*$.
Soient $\mu$ une mesure de probabilité sur $K$ et $1 \leq p < \infty$.
1. L'opérateur suivant constitue un exemple de base pour les opérateurs p-sommants.
Soit $\varphi \in L_p(K, \mu)$, l'opérateur de multiplication suivant

$$\begin{array}{rcl} M_\varphi : C(K) & \to & L_p(K, \mu) \\ f & \to & M_\varphi(f) = f\varphi \end{array}$$

Cet opérateur est p-sommant, avec

$$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p.$$

En effet, soit $(f_k)_{k=1}^n \in C(K)$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|(M_\varphi(f_k))_{k=1}^n\|_p & = & \Big(\sum_{k=1}^n \|M_\varphi(f_k)\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & = & \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\varphi\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & = & \Big(\sum_{k=1}^n \int_K |\varphi(t)|^p |f_k(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & = & \Big(\int_K \sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & = & \Big(\int_K \sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \sup_{t \in K} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_K |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \|\varphi\|_p \sup_{\delta_t \in C(K)*} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \|\varphi\|_p \cdot \|(f_k)_{k=1}^n\|_p^{faible}. \end{array}$$

Donc l'opérateur en question est p-sommant et on a

$$\pi_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_p.$$

Mais, d'après l'inégalité (2.6), on a

$$\pi_p(M_\varphi) \geq \|M_\varphi\|_p \geq \|\varphi\|_p.$$

Par conséquent

$$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p.$$

2. Comme cas particulier, l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} J_p : C(K) & \to & L_p(K,\mu) \\ f & \to & J_p(f) = f\varphi \end{array}$$

est p-sommant et de plus

$$\pi_p(J_p) = 1.$$

En effet, il suffit de prendre $\varphi = 1$ dans l'exemple précédent.
3. L'opérateur d'inclusion suivant

$$\begin{array}{rcl} i_p : L_\infty(K,\mu) & \to & L_p(K,\mu) \\ f & \to & i_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant et on

$$\pi_p(i_p) = 1.$$

## 2.5 Théorèmes de Domination et Factorisation de Pietsch

On rappelle qu'une mesure de probabilité sur un espace compact $K$ est une mesure positive de Radon $\mu \in C(K)^*$ telle que $\mu((K) = 1$.

**Théorème 2.5.1** ***(Théorème de Domination).*** *Soient* $1 \leq p < \infty$ *et* $u \in L(E,F)$. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. u absolument p-sommant.*
*2. Il existe une mesure de probabilité* $\mu$ *sur* $B_{E^*}$ *et une conctante* $C > 0$ *telles que pour tout* $x \in E$ *:*

$$\|ux\| \leq C\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}; \qquad \forall x \in E. \tag{2.14}$$

La démonstration est provienne de [2, p.28-30]

**Preuve.** $1 \Rightarrow 2)$ Soient

$$u \in \Pi_p(E,F) \quad et \quad \pi_p(u) = 1.$$

On considère les deux sous-ensembles suivants de $C(B_{E^*})$ (l'espace des fonctions faible-$*$ continues sur $B_{E^*}$) :

$$S_1 = \{f \in C(B_{E^*}), \sup_{x^* \in B_{E^*}} f(x^*) < 1\},$$

et

$$S_2 = conv\{f \in C(B_{E^*}), f(x^*) = |x^*(x)|^p, \|ux\| = 1\}.$$

Montrons que $S_1$ est convexe. Soient

$$f_1, f_2 \in S_1 \quad et \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \{\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2\}(x^*) &\leq \alpha \sup_{x^* \in B_{E^*}} f_1(x^*) + (1-\alpha) \sup_{x^* \in B_{E^*}} f_2(x^*) \\ &\leq \alpha + 1 - \alpha \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc, $S_1$ est convexe, de plus il est ouvert.
Soit, d'autre part $f \in S_2$, donc il existe une suite $(x_k)_{k=1}^n \in E$ et des scalaires positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ avec

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad \|ux_k\| = 1, \quad \text{pour tout } k = 1, .., n$$

tels que

$$f(x^*) = \textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k |x^*(x_k)|^p \qquad \text{(en vertu de la convexité)}$$

donc

$$\begin{aligned} \sup_{x^* \in B_{E^*}} f(x^*) &= \sup_{x^* \in B_{E^*}} \sum_{k=1}^n \lambda_k |x^*(x_k)|^p \\ &= \sup_{x^* \in B_{E^*}} \sum_{k=1}^n |x^*(\lambda_k^{\frac{1}{p}} x_k)|^p \\ &\geq 1 \cdot \sum_{k=1}^n \lambda_k \|u \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n\|^p \\ de \quad (2.4) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \|ux_n\|^p \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction $f$ n'appartient pas à $S_1$, ce qui fait que les deux sous-ensembles $S_1$ et $S_2$ sont disjoints. Par la application du Théorème Hahn-Banach (1.5.2), il vient qu'il existe $\lambda > 0$ et une mesure de Radon $\mu$ sur $B_{E^*}$ telles que :

$$\int_{B_{E^*}} f(x^*)d\mu(x^*) \leq \lambda \quad ,\forall f \in S_1 \quad et \quad \int_{B_{E^*}} f(x^*)d\mu(x^*) \geq \lambda \quad ,\forall f \in S_2.$$

Comme d'une part, $S_1$ contient toutes les fonctions négatives, la mesure $\mu$ doit être positive, ce qui nous permet d'assurer qu'elle est une mesure de probabilité.
D'autre part, $S_1$ contient la boule unité ouverte de $C(B_{E^*})$, donc

$$\int_{B_{E^*}} f(x^*)d\mu(x^*) \leq \sup_{x^* \in B_{E^*}} f(x^*), \qquad \forall f \in S_1.$$

par conséquence $\lambda \geq 1$.
D'après ce qui précède, on peut dire que si $x \in E$ et $\|ux\| = 1$

$$\int_{B_{E^*}} |x(x^*)|^p d\mu(x^*) \geq 1 = \|ux\|^p.$$

ce qui entraîne (2.14).
$2 \Rightarrow 1$) Soit $(x_k)_{k=1}^n \subset E$ donc

$$\|ux\| \leq C\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^p d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall k = 1, ..., n.$$

Ce qui entraîne

$$\|ux\|^p \leq C^p\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^p d\mu(x^*)\Big), \qquad \forall k = 1, ..., n.$$

Par sommation des membres de la suite, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \|ux\|^p \leq C^p \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^p d\mu(x^*)\Big), \forall k = 1, ..., n.$$

et puisque la somme est finie

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\|ux\|^p &\leq C^p\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{B_{E^*}}|x^*(x_k)|^p d\mu(x^*)\Big)\\
&\leq C^p\int_{B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^p d\mu(x^*)\Big)\\
&\leq C^p\sup_{x^*\in B_{E^*}}\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^p\int_{B_{E^*}}d\mu(x^*)\\
&\leq C^p\sup_{x^*\in B_{E^*}}\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^p\mu(B_{E^*})\\
&\leq C^p\sup_{x^*\in B_{E^*}}\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^p.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n}\|ux\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq C\Big(\sup_{x^*\in B_{E^*}}\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= C\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

ce qui implique que $u$ est p-sommant.

**Lemme 2.5.1** *Soient* $(\Omega,\sum,\mu)$ *un espace mesuré, tel que*

$$\mu(\Omega)<\infty \quad et \quad 1<p<q<\infty.$$

*1. Si* $f\in L_q(\mu)$*. Alors,*

$$f\in L_p(\mu) \quad et \quad \|f\|_p\leq\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q. \tag{2.15}$$

*2. Si* $f\in L_\infty(\mu)$*. Alors,*

$$f\in L_p(\mu) \quad et \quad \|f\|_p\leq\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty.$$

**Preuve.** Soit $r = \frac{q}{q-p}$ et puisque

$$\frac{1}{r} + \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1$$

1. Par l'application de l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \Big( \int_\Omega |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big( \int_\Omega 1 \cdot |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big( \int_\Omega (1)^r d\mu \Big)^{\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{p}} \cdot \Big( \int_\Omega |f|^{p\cdot\frac{q}{p}} d\mu \Big)^{\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{p}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{rp}} \Big( \int_\Omega |f|^q d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q.
\end{aligned}$$

2. Si on pose $q = \infty$, il découle

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty.$$

**Remarque 2.5.1** *Par la suite on va donner une deuxième démonstration du Théorème d'Inclusion en basant sur le Théorème de Pietsch et le lemme précédent.*
*Soient* $u \in \Pi_p(E,F)$ *et* $1 \leq p < q < \infty$ *donc*

$$\begin{aligned}
\|ux\| &\leq \pi_p(u)\Big( \textstyle\int_{B_{E^*}} |x(x^*)|^p d\mu(x^*) \Big)^{\frac{1}{p}} \\
\text{De} \quad (2.15) &\leq \pi_p(u)\Big( \textstyle\int_{B_{E^*}} |x(x^*)|^q d\mu(x^*) \Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

*Par conséquent* $u \in \Pi_p(E,F)$, *et de plus*

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

*Citons quelques conséquences du Théorème de Domination de Pietsch.*

**Théorème 2.5.2** ***(Théorème de Factorisation).*** *Soient l'injection isométrique*

$$\begin{aligned}
i : E &\to C(B_{E^*}) \\
x &\to i(x) = x^*(x)
\end{aligned}$$

*et l'application identique*

$$j_p : C(B_{E^*}) \to L_p(B_{E^*}, \mu)$$

*avec $\mu$ une mesure de probabilité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*1. $u \in \Pi_p(E, F)$.*
*2. Il existe une mesure de probabilité sur $B_{E^*}$ et une application bornée*

$$w : \overline{(j_p i)(E)} = G \to F$$

*telle que*

$$w j_p i = u.$$

*Dans ce cas $w$ est choisie telle que*

$$\|w\| = \pi_p(u).$$

**Preuve.** $1 \Rightarrow 2)$ *Soit $u \in \Pi_p(E, F)$, on doit démontrer l'existence de l'application $w$ définie ci-dessus.*
*Soit $x, y \in E$ tel que*

$$(j_p i)x = (j_p i)y = f \in (j_p i)(E)$$

*donc*

$$\begin{array}{rcl} \|ux - uy\| & = & \|u(x-y)\| \\ (De \quad (2.5.1)) & \leq & \pi_p(u)(\int_{B_{E^*}} |x^*(x-y)|^p d\mu(x^*))^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \pi_p(u)(\int_{B_{E^*}} |(j_p i)(x-y)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \pi_p(u)\|(j_p i)(x) - (j_p i)(y)\|_p \\ & = & 0. \end{array}$$

*Donc*

$$ux = uy.$$

*Alors, on peut définir l'application $w$ de $\overline{(j_p i)(E)}$ dans $F$ par :*

$$wf = ux$$

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & F \\
i(E) \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "\subseteq"'] & G \arrow[u, "w"'] \arrow[d, "\subseteq"] \\
C(B_{E^*}) \arrow[r, "j_p"] & L_p(\mu)
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 2.1 – Diagramme de factorisation d'un opérateur p-sommant

*et on a*

$$u = wj_p i \quad et \quad \|wf\|_F \leq \pi_p(u)\|f\|_p. \tag{2.16}$$

*Il vient de la dérnière inégalité que l'application $w$ est bornée.*

2 $\Rightarrow$ 1) *Supposons qu'il existe une mesure $\mu$ de probabilité sur $B_{E^*}$ et une application $w$ telle que*

$$u = wj_p i.$$

*Mais, comme on a démontrer que*

$$j_p \in \Pi_p(C(B_{E^*}), L_p(B_{E^*}, \mu)) \quad et \quad \pi_p(j_p) = 1.$$

*Il vient de la propriété d'idéal des opérateurs p-sommants que $\Pi_p(E, F)$ et*

$$\pi_p(u) \leq \|w\|. \tag{2.17}$$

*D'après l'inégalité* (2.16) *et* (2.17), *il découle que*

$$\|w\| = \pi_p(u).$$

***Remarque 2.5.2*** *A l'aide du diagramme illustré par la figure (2.2), on peut décomposer un opérateur p-sommant autrement :*

$$i_F u = \hat{u} i_p v.$$

*avec*

$$l_\infty^{B_{F^*}} = \{f : B_{F^*} \to \mathbb{K} : \quad \sup_{x^* \in B_{F^*}} |f(x^*)| < \infty\},$$

*et* $\quad v = j_\infty i,$ *et* $\quad \|u\| = 1$ *et*

$$\pi(u) = \|\hat{u}\|. \tag{2.18}$$

*Voir [1, p. 17].*

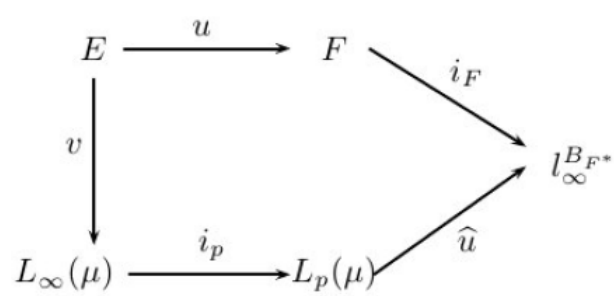


FIGURE 2.2 – Deuxième diagramme de factorisation d'un opérateur p-sommant

*Le Théorème de composition 2.2.1 fait la composition des opérateurs p-sommants et les opérateurs bornés. La Proposition suivante établie la composition des opérateurs p-sommants et q -sommants.*

***Proposition 2.5.1*** *Soient* $1 \leq p, q < \infty$ *et* $u \in \Pi_p(E, F)$ *et* $v \in \Pi_q(F, G)$ *et*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

*1. Si* $s \geq 1$. *Alors,*

$$vu \in \Pi_s(E, G) \quad et \quad \pi_s(vu) \leq \pi_p(u)\pi_q(v).$$

*2. Si* $s \leq 1$. *Alors*

$$vu \in \Pi_1(E, G) \quad et \quad \pi_1(vu) \leq \pi_p(u)\pi_q(v).$$

*La démonstration de cette proposition provienne de [2, p. 35-38].*

**Preuve.** *1. Si $s \geq 1$.*
*Comme $u \in \Pi_p(E,F)$, donc il existe d'après le Théorème de Factorisation* (2.5.2)*, une application bornée $w$ sur $G = \overline{(j_p i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu)$, telle que*

$$u = wj_p i.$$

*Soit $y^* \in F^*$, donc*

$$y^* w = \overline{(j_p i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu) \rightarrow \mathbb{K},$$

*cette application est continue. Moyennant le Corollaire* (1.5.1) *du Théorème de Hahn-Banach, on constate qu'on peut prolonger cette application sur tout l'espace $L_p(B_{E^*}, \mu)$ par une application $g$ et telle que*

$$\|g\|_{p^*} = \|y^* w\|_{p^*} \leq \pi_p(u)\|y^*\|. \tag{2.19}$$

*Remarquons d'une part que*

$$g \in L_{p^*}(B_{E^*}, \mu),$$

*et d'autre part*

$$\begin{array}{rcl} w^* : F^* & \rightarrow & G^* \subset L_{p^*}(B_{E^*}, \mu). \\ y^* & \rightarrow & w^* y^* = g. \end{array}$$

*On peut conclure que pour tous $x \in E$*

$$\begin{aligned} y^*(ux) &= ((wj_p i)x)^*(y) \\ &= w^* y^*((j_p i)x) \\ &= \int_{B_{E^*}} x^*(x) g(x^*) d\mu(x^*) \qquad \forall x \in E. \end{aligned} \tag{2.20}$$

*Remarquons que*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow 1 = \frac{s}{p} + \frac{s}{q}$$

*et*

$$\begin{aligned}
\frac{p^*}{s^*}+\frac{p^*}{q} &= \frac{\frac{p}{p-1}}{\frac{s}{s-1}}+\frac{\frac{p}{p-1}}{q}\\
&= \frac{p(s-1)}{s(p-1)}+\frac{p}{q(p-1)}\\
&= \frac{p(s-1)}{s(p-1)}+\frac{p}{(p-1)}(\frac{1}{s}-\frac{1}{p})\\
&= \frac{ps}{s(p-1)}-\frac{p}{s(p-1)}+\frac{p}{s(p-1)}-\frac{1}{p-1}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

*En se basant sur l'inégalité de Hölder, l'inégalité* (2.19) *implique*

$$\begin{aligned}
|y^*(ux)| &\leq \int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^{\frac{s}{p}}|x^*(x)|^{\frac{s}{q}}|g(x^*)|d\mu(x^*)\\
&\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^{\frac{sp*}{q}}|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p^*}}\\
&\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^{\frac{sp*}{q}}|g(x^*)|^{\frac{(p^*)^2}{q}}|g(x^*)|^{\frac{(p^*)^2}{s^*}}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p^*}}\\
&\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x)|^s|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}}
\end{aligned}$$

*Soit la suite* $(x_k)_{k=1}^n \in E$, *et on pose*

$$z_k = x_k\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{-\frac{1}{p}};\qquad k=1,2,3...,n.$$

*Avec cette notation, le système précédent s'écrit*

$$\begin{aligned}
|(uz_k)^*y| &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(z_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(z_k)|^s|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}}\\
&\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{-s}{(p)^2}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{-s}{qp}}\Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

*Ce qui implique*

$$\begin{aligned}|y^*(uz_k)| &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{q}{s^*}} \int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\\ &\times \Big(\int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{-sp}{(p)^2} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

*Mais, par hypothèse on a*

$$\begin{aligned}\frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{q}{p} = \frac{q}{s} - 1\\ &\Rightarrow \quad \frac{-sq}{(p)^2} = \frac{-s}{q}(\frac{q}{s} - 1) = -\frac{q}{p} + \frac{s}{p} \qquad (2.21)\\ &\Rightarrow \quad \frac{-sq}{(p)^2} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p} = -\frac{q}{p} + \frac{s}{p} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p} = 0.\end{aligned}$$

*Donc*

$$|y^*(uz_k)|^q \leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{q}{s^*}} \int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*).$$

*Par sommation des deux membres, on aboutit à*

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=1}^{n} |y^*(uz_k)|^q\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \int_{B_{E^*}} |x^*(x_k)|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}} \Big(\int_{B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^s\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*} + \frac{1}{q}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^s\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|g\|_{p^*} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^s\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

*Comme* $v \in \Pi_p(F,G)$ *on a*

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n}\|(vu)x_k\|^s\Big)^{\frac{1}{s}} &= \Big(\sum_{k=1}^{n}\|(vu)z_k\|^s\big(\int_{B_{E^*}}|x^*(x_k)|^{\frac{s}{p}}d\mu(x^*)\big)\Big)^{\frac{1}{s}} \\
((1.4)\frac{s}{p}+\frac{s}{q}=1) &\leq \Big(\sum_{k=1}^{n}\|(vu)z_k\|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{k=1}^{n}\int_{B_{E^*}}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v)\sup_{y^*\in B_{F^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|y^*(uz_k)|^q d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v)\sup_{y^*\in B_{F^*}}\Big(\|g\|_{p^*}\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\sup_{y^*\in B_{F^*}}\|g\|_{p^*} \\
&\quad \times\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s}}\sup_{y^*\in B_{F^*}}\|g\|_{p^*} \\
(2.19) &\leq \pi_q(v)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s}}\pi_p(u).
\end{aligned}$$

*Ce qui exprime que*

$$vu \in \Pi_s(E,G) \quad et \quad \pi_s(vu) \leq \pi_p(u)\pi_q(v).$$

*2. Si* $s \leq 1$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p^*}$$

*c'est-à-dire*

$$1 \leq q \leq p^* < \infty.$$

*Par l'application du Théorème d'Inclusion* (2.1.1)*, on tire que*

$$v \in \Pi_{p^*}(E,G) \quad et \quad \pi_{p^*}(v) \leq \pi_q(v).$$

*D'autre part on a* $p + p^* = 1$*. On applique la première partie de cette démonstration avec*

$$p^* = q \quad et \quad s = 1.$$

*On trouve*

$$v \in \Pi_1(E, G).$$

*D'après la dernière inégalité*

$$\pi_1(vu) \leq \pi_p(u)\pi_q(v).$$

# Chapitre 3

# Opérateurs Lipschitz p-sommants

## 3.1 Définitions et propriétés élémentaires

En 2009, **Farmer** et **Johnson** dans leurs article [9] ont introduit la notion des opérateurs Lipschitz p-sommants. Sachant qu'avant cette date l'étude des opérateurs p-sommants a été faite sur des espaces normés.
Dans ce chapitre, on va utiliser les notations standard peut être trouver dans [12] et [9]. Soient $X, Y, Z$ et $W$ des espaces métriques. On note par $\|x-y\|$ la distance entre $x$ et $y$ dans $X$ et $\|Tx - Ty\|$ la distance entre $Tx$ et $Ty$ dans $Y$.

**Définition 3.1.1** *On dit que l'application $f : X \to Y$ est de* ***Lipschitz*** *s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\|,$$

*pour tous $x, y \in X$. La constante $C$ s'appelle* ***nombre de Lipschitz*** *et notée par $Lip(f)$, où $Lip(f)$ donnée par*

$$Lip(f) = \sup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}.$$

**Proposition 3.1.1** *[9, Proposition 1.2.2] Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont de Lipschitz. Alors $g \circ f : X \to Z$ est de Lipschitz et*

$$Lip(g \circ f) \leq Lip(f) \cdot Lip(g).$$

**Preuve.** Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont de Lipschitz. Alors pour tous $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} \|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)\| &= \|g(f(x)) - g(f(y))\| \\ &\leq Lip(g) \cdot \|(f)(x) - (f)(y)\| \\ &\leq Lip(g) \cdot Lip(f) \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

D'où $g \circ f$ est de Lipschitz et

$$Lip(g \circ f) \leq Lip(f) \cdot Lip(g).$$

**Définition 3.1.2** *Soient $1 \leq p < \infty$ et $X$ un espace vectoriel topologique métrisable complet. Des suites $(x_k)$ et $(y_k)$ de $X$ sont* ***fortement p-sommables*** *si les suites scalaires $(\|x_k\|)$ et $(\|y_k\|)$ sont dans $\ell_p$. On note par $\ell_p(X)$ l'ensemble de toutes ces suites dans $X$ dont la métrique définie par*

$$\|(x_k) - (y_k)\|_p = \Big( \sum_k \|x_k - y_k\|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 3.1.3** *Soient $1 \leq p < \infty$ et $X$ un espace vectoriel topologique métrisable complet. Des suites $(x_k)$ et $(y_k)$ de $X$ sont* ***faiblement p-sommables*** *si les suites scalaires $(<f, x_k>)_k$ et $(<f, y_k>)_k$ sont dans $\ell_p$ pour toute $f \in X^\sharp$. On note par $\ell_p^{faible}(X)$ l'ensemble de toutes ces suites dans $X$ dont la métrique définie par*

$$\|(x_k) - (y_k)\|_p^{faible} = \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_k |f(x_k) - f(y_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Supposons que $u : X \to Y$ est de Lipschitz entre deux espaces topologiques métrisables complets $X$ et $Y$, l'application

$$\hat{u} : (x_k)_k \to \hat{u}(x_k) = (ux_k)_k,$$

définie de $\ell_p^{faible}(X)$ dans $\ell_p^{faible}(Y)$ est de Lipschitz, et on peut dire la même chose si $u$ est définie de $\ell_p(X)$ dans $\ell_p(Y)$. Dans les deux cas la norme est $Lip(u)$. En effet, montrons que $u : X \to Y$ est de Lipschitz si et seulement si, $\hat{u} : \ell_p^{faible}(X) \to \ell_p^{faible}(Y)$ est de Lipschitz. A cet effet, supposons que $u$ est de Lipschitz et soient $(x_k)$ et $(y_k)$ de $\ell_p^{faible}(X)$. On a

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}(x_k) - \hat{u}(y_k)\| &= \|\hat{u}(x_k) - \hat{u}(y_k)\|_p^{faible} \\
&= \|(ux_k)_k - (uy_k)_k\|_p^{faible} \\
&= \sup_{g \in B_{Y^\sharp}} \Big( \sum_n |g(ux_k) - g(uy_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq Lip(g \circ u) \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_n |f(x_k) - f(y_k)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq Lip(u) \cdot \|(x_k) - (y_k)\|_p^{faible}.
\end{aligned}$$

D'où, $\hat{u}$ est de Lipschitz et

$$Lip(\hat{u}) \leq Lip(u). \tag{3.1}$$

Inversement, supposons que $\hat{u} : \ell_p^{faible}(X) \to \ell_p^{faible}(Y)$ est de Lipschitz. Soient $(x_k)$ et $(y_k)$ sont de $\ell_p^{faible}(X)$ on a ensuite

$$\|(ux_k)_k - (uy_k)_k\|_p^{faible} = \|\hat{u}(x_k) - \hat{u}(y_k)\|_p^{faible} \leq Lip(\hat{u}) \cdot \|(x_k) - (y_k)\|_p^{faible}.$$

En particulier, si $k = 1$, alors :

$$\sup_{g \in B_{Y^\sharp}} |g(ux) - g(uy)| \leq Lip(\hat{u}) \sup_{f \in B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|$$

si et seulement si,

$$\|ux - uy\|_p^{faible} \leq Lip(\hat{u}) \cdot \|x - y\|_p^{faible}.$$

et, $u$ est de Lipschitz avec,

$$Lip(u) \leq Lip(\hat{u}). \tag{3.2}$$

De (3.1) et (3.2), on a

$$Lip(u) = Lip(\hat{u}).$$

De la même façon on peut montrer que $u : X \to Y$ est de Lipschitz si et seulement si $\hat{u} : \ell_p(X) \to \ell_p(Y)$ est de Lipschitz.

**Définition 3.1.4** *Soit $1 \leq p < \infty$. Une application de Lipschitz $T : X \to Y$ est dite **Lipschitz p-sommant** s'il existe une conctante $C$ telle que pour toute $(x_k), (y_k)$ de $X$ et tous réels positifs $a_k$, on a*

$$\sum a_k \|Tx_k - Ty_k\|^p \leq C^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum a_k |f(x_k) - f(y_k)|^p, \tag{3.3}$$

*où $B_{X^\sharp}$ la boule unité qui est un espace de Hausdorff compact de $X^\sharp$, et $X^\sharp$ le dual Lipschitz :*
*$X^\sharp = \{f : X \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$, pour certaines $C > 0, f(0) = 0\}$; tel que $X^\sharp$ est un espace de Banach de toutes les fonctions à valeurs réelles avec la semi-norme $Lip(\cdot)$. Si on pose $a_i = 1$ en raison de la densité des nombres, la définition est la même. On note par $\pi_p^L(T)$ la borne inférieure des conctantes $C$ pour lesquelles l'inégalité (3.3) est vérifiée et par $\Pi_p^L(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications Lipschitz p-sommants de $X$ dans $Y$.*

**Proposition 3.1.2** *L'ensemble $\Pi_p^L(X, Y)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.*

**Preuve.** Il est facile.

**Proposition 3.1.3** *$\pi_p^L$ est une semi-norme sur l'espace $\Pi_p^L(X, Y)$.*

**Proposition 3.1.4** *[9, Proposition 1.2.3] Soient $\hat{X}, \hat{Y}$ les complétés de $X, Y$ successivement. Si $T : X \to Y$ est une application de Lipschitz, alors $T$ a une extension $\hat{T} : \hat{X} \to \hat{Y}$ telle que*

$$Lip(T) = Lip(\hat{T}).$$

**Preuve.** Puisque les fonctions de Lipschitz sont continues et $X$ dense dans $\hat{X}$ il y a au plus une extension de Lipschitz. Pour montrer qu'une extension existe, on observe que si $(x_k)$ est une suite de Cauchy de $X$, alors la condition de Lipschitz implique que $(T(x_k))$ est de Cauchy de $Y$. Aussi si $(x_k)$ et $(y_k)$ sont deux suites de Cauchy dans $X$ avec la même limite dans $\hat{X}$ alors $\|x_k - y_k\| \to 0$ d'où $\|T(x_k) - T(y_k)\| \to 0$ donc $\lim T(x_k) = \lim T(y_k)$ dans $Y$, ainsi, on peut définir $\hat{T}(\lim x_k) = \lim T(x_k)$ pour toute $(x_k)$ suite de Cauchy on a $Lip(\hat{T}) = Lip(T)$ car :

$$\begin{aligned}
\|\hat{T}(\lim x_k) - \hat{T}(\lim y_k)\| &= \|\lim T(x_k) - \lim T(y_k)\| \\
&= \lim \|T(x_k) - T(y_k)\| \\
&\leq Lip(T) \cdot \lim \|x_k - y_k\| \\
&= Lip(T) \cdot \|\lim x_k - \lim y_k\|
\end{aligned}$$

Pour deux suites $(x_k)$ et $(y_k)$ de $X$.

Une application de cette proposition donne la proposition suivante :

**Proposition 3.1.5** *Supposons que $1 \leq p < \infty$, et $\hat{X}, \hat{Y}$ les complétés de $X, Y$ successivement.*
*Si $T : X \to Y$ est Lipschitz p-sommant, alors $\hat{T} : \hat{X} \to \hat{Y}$ l'est aussi avec*

$$\pi_p^L(T) = \pi_p^L(\hat{T}),$$

*où $\hat{T}$ : extension de $T$ par densité.*

**Preuve.** Pour chaque $(x_k), (y_k) \subset X$, et tous $a_k > 0$,

$$\sum_k a_k \|Tx_k - Ty_k\|^p \leq (\pi_p^L(T))^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_k a_k |f(x_k) - f(y_k)|^p \Big).$$

Soit $(\hat{x_k}), (\hat{y_k})$ deux suites de $\hat{X}$. Alors il existe $(x_k^{(n)}), (y_k^{(n)})$ avec

$$\lim_n \|\hat{x_k} - x_k^{(n)}\| = 0$$

et,

$$\lim_n \|\hat{y_k} - y_k^{(n)}\| = 0.$$

Par définition,

$$\hat{T}(\hat{x_k}) = \hat{T}(\lim_n x_k^{(n)}).$$

Similaire,

$$\hat{T}(\hat{y_k}) = \hat{T}(\lim_n y_k^{(n)}).$$

Donc, on a

$$
\begin{aligned}
\sum a_k \|\hat{T}\hat{x_k} - \hat{T}\hat{y_k}\|^p &= \sum a_k \|\lim_n [Tx_k^{(n)} - Ty_k^{(n)}]\|^p \\
&= \lim_n \sum a_k \|Tx_k^{(n)} - Ty_k^{(n)}\|^p \\
&\leq \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_i \lim_n a_k |f(x_k^{(n)}) - f(y_k^{(n)})|^p \Big) \\
&= \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_i a_k |\hat{f}(\hat{x_k}) - \hat{f}(\hat{y_k})|^p \Big) \\
&\leq \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{\hat{g} \in B_{\hat{X}^\sharp}} \Big( \sum_k a_k |\hat{g}(\hat{x_k}) - \hat{g}(\hat{y_k})|^p \Big).
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\pi_p^L(\hat{T}) \leq \pi_p^L(T)$ et par extension, $\pi_p^L(T) = \pi_p^L(\hat{T}|_X) \leq \pi_p^L(\hat{T})$.
Donc, $\hat{T}$ est Lipschitz p-sommant avec $\pi_p^L(T) = \pi_p^L(\hat{T})$ et cela conclut la preuve de la proposition.

## 3.2 Propriété d'idéal

Avant qu'on énonce et prouve la propriété d'idéal pour les applications Lipschitz p-sommants, on a le résultat qui trouve dans la Proposition 3.1.1 et dans [13, Proposition 1.2.2].

Dans la théorie linéaire une conséquence de la Définition 2.1.3 est que $\pi_p$ satisfait la propriété d'idéal pour les opérateurs p-sommants, i.e., si $v : X \to Y$ est un opérateur p-sommant entre deux espaces de Banach $X$ et $Y$, alors pour tous espaces de Banach $X_0$ et $Y_0$ et tous $u \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$ et $w \in \mathcal{L}(X_0, X)$, l'opérateur $uvw : X_0 \to Y_0$ est p-sommant avec :

$$\pi_p(uvw) \leq \|u\| \cdot \pi_p(v) \cdot \|w\|.$$

Cette propriété avec sa démonstration peut être trouver dans le Chapitre 2, Corollaire 2.2.1 et [12] par Diestel et al. comme propriété des opérateurs p-sommants. Dans le cas non-linéaire, il ya aussi la version de la propriété d'idéal. Cela a été observé par Farmer et Johnson dans leurs article [9] comme une conséquence immédiate de la Définition 3.1.3 qu'on affirme maintenant et à prouver.

**Proposition 3.2.1** ***(Propriété d'idéal dans le cas non-linéaire).*** *Soient $T : X \to Y$ est Lipschitz p-sommant, $A : W \to X$ et $B : Y \to Z$ deux applications de Lipschitz, alors $BTA : W \to Z$ est Lipschitz p-sommant et on a,*

$$\pi_p^L(BTA) \leq Lip(A) \cdot \pi_p^L(T) \cdot Lip(B).$$

**Preuve.** Soient $(x_k)$ et $(y_k)$ de $W$ et $a_k$ des scalaires positifs tels que $a_k = 1$ pour chaque $k$. Comme $T$ est Lipschitz p-sommant et $B$ est de Lipschitz implique que

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum \|BTAx_k - BTAy_k]\|_Z^p \\
&\leq Lip(B)^p \cdot \sum \|TAx_k - TAy_k\|_Y^p \\
&\leq Lip(B)^p \cdot \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum |f(Ax_k) - f(Ay_k)|^p \\
&= Lip(B)^p \cdot \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum |f \circ A(x_k) - f \circ A(y_k)|^p.
\end{aligned}$$

Puisque, par définition, $f \in X^\sharp$ et $A : W \to X$ sont de Lipschitz, alors $f \circ A$ est de Lipschitz par la Proposition 3.1.1, avec $Lip(f \circ A) \leq Lip(f) \cdot Lip(A)$ et $f \circ A(0) = 0$. Donc $f \circ A \in W^\sharp$. Puisque $Lip(f) \leq 1$, on trouve par normalisation que

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq Lip(B)^p \cdot \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \left( \big(Lip(f \circ A)\big)^p \sum \left| \frac{f \circ A(x_k)}{Lip(f \circ A)} - \frac{f \circ A(y_k)}{Lip(f \circ A)} \right|^p \right) \\
&\leq Lip(B)^p \cdot \pi_p^L(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \left( Lip(f)^p Lip(A)^p \sum \left| \frac{f \circ A(x_k)}{Lip(f \circ A)} - \frac{f \circ A(y_k)}{Lip(f \circ A)} \right|^p \right) \\
&\leq Lip(B)^p \cdot \pi_p^L(T)^p \cdot Lip(A)^p \cdot \sup_{g \in B_{W^\sharp}} \sum |g(x_k) - g(y_k)|^p.
\end{aligned}$$

Donc, $BTA$ est Lipschitz p-sommant, et

$$\pi_p^L(BTA) \leq Lip(B) \cdot \pi_p^L(T) \cdot Lip(A).$$

Farmer et Johnson, dans leurs article [9] ont montré que la Définition 3.1.3 de Lipschitz p-sommant est l'analogue 'précise' de la Définition 2.1.3 en raison de la proposition suivante qui a été prouvé par Farmer et Johnson dans [9, théorème 2].

**Proposition 3.2.2** *Supposons que* $1 \leq p < \infty$*. Soit* $T : X \to Y$ *un opérateur linéaire entre les espaces de Banach* $X$ *et* $Y$*. Alors,* $T$ *est p-sommant si, et seulement s'il est Lipschitz p-sommant et*

$$\pi_p^L(T) = \pi_p(T).$$

**Preuve.** Supposons que $T$ est p-sommant. Alors, quel que soit le nombre naturel $n$ et le choix de $x_1, ..., x_n$ de $X$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^p \leq \pi_p(T)^p \cdot \sup_{f \in B_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^p.$$

Puisque $T$ est linéaire, alors pour $(z_k)_{k=1}^n$ et $(y_k)_{k=1}^k$ de $X$ avec $x_k = z_k - y_k$ et on prend $a_k = 1$ pour chaque $k$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|Tz_k - Ty_k\|^p &= \sum_{k=1}^{n} \|T(z_k - y_k)\|^p \\
&\leq (\pi_p(T))^p \cdot \sup_{f \in B_{X^*}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |f(z_k - y_k)|^p \Big) \\
&= (\pi_p(T))^p \cdot \sup_{f \in B_{X^*}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(y_k)|^p \Big) \\
&\leq (\pi_p(T))^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(y_k)|^p \Big)
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} \|Tz_k - Ty_k\|^p \leq (\pi_p(T))^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_{k=1}^{k} |f(z_k) - f(y_k)|^p \Big).$$

Cela montre que $T$ est Lipschitz p-sommant et

$$\pi_p^L(T) \leq \pi_p(T). \tag{3.4}$$

Réciproquement, si $T$ est Lipschitz p-sommant, alors $T$ est p-sommant d'après le Théorème 2 dans [9] avec

$$\pi_p(T) \leq \pi_p^L(T). \tag{3.5}$$

De (3.4) et (3.5), on obtient

$$\pi_p(T) = \pi_p^L(T)$$

**Remarque 3.2.1** *On observe également que les opérateurs dans [12, Exemple 2.9(a)-(e)] sont des opérateurs linéaires bornés et p-sommants, alors par la Proposition 3.2.2 tous ces opérateurs sont également Lipschitz p-sommants. On observe aussi de la Proposition 3.2.2 que les opérateurs de multiplication l'on trouve dans [12, Exemple 2.9(a)]) ;* $M_\varphi : C(K) \to L_p(\mu) : f \mapsto f \cdot \varphi$ *et [12, Exemple 2.9(c)];* $M_\varphi : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu) : f \mapsto f \cdot \varphi$ *aussi satisfait* $\pi_p^L(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$*. Similaire, l'opérateur d'inclusion qui trouvé dans [12, Exemple 2.9(b)];* $j_p : C(K) \to L_p(\mu)$ *où* $K$ *est un espace séparé compact (espace de Hausdorff) et* $\mu$ *est une mesure de Borel positive sur* $K$*, et [12, Exemple 2.9(d)];* $i_p : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$ *pour tout espace mésuré* $\sigma$*-funi* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *aussi satisfait* $\pi_p^L(j_p) = \mu(K)^{1/p}$ *et* $\pi_p^L(i_p) = \mu(\Omega)^{1/p}$ *respectivement. Enfin, pour les opérateurs diagonals trouvés dans [12, Exemple 2.9(e)];* $D_\lambda : \ell_\infty \to \ell_p : (a_n) \mapsto (\lambda_n a_n)$ *où* $\lambda_n$ *est un membre du* $\ell_p$ *aussi satisfait* $\pi_p^L(D_\lambda) = \|\lambda\|_p$*.*

## 3.3 Propriété d'injectivité

Maintenant, on donne le théorème principal.

**Théorème 3.3.1** *Supposons que* $1 \leq p < \infty$*, et soient* $X, Y$ *deux espaces vectoriels topologiques métrisables complets. Une application* $u : X \to Y$ *est Lipschitz p-sommant si et seulement si* $\hat{u} : \ell_p^{faible}(X) \to \ell_p(Y)$ *est Lipschitz. Dans ce cas* $\pi_p^L(u) = Lip(\hat{u})$*.*

**Preuve.** Supposons d'abord que $u$ est Lipschitz p-sommant. Alors pour tout $(x_k), (y_k)$ de $X$ et tous réels positifs $a_k$ tels que $a_k = 1$ pour chaque $k$, on a

$$\sum_k \|ux_k - uy_k\|^p \leq (\pi_p^L(u))^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big( \sum_k |f(x_k) - f(y_k)|^p \Big).$$

Soient $(x_k)$ et $(y_k)$ de $\ell_p^{faible}(X)$, alors on a,

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}(x_k) - \hat{u}(y_k)\|_p &= \Big(\sum_k \|ux_k - uy_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^L(u) \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big(\sum_k |f(x_k) - f(y_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p^L(u) \cdot \|(x_k) - (y_k)\|_p^{faible}.
\end{aligned}$$

Donc, $\hat{u} : \ell_p^{faible}(X) \to \ell_p(Y)$ est de Lipschitz et

$$Lip(\hat{u}) \leq \pi_p^L(u). \tag{3.6}$$

Inversement, supposons que $\hat{u} : \ell_p^{faible}(X) \to \ell_p(Y)$ est de Lipschitz. Alors pour toutes suites finies $(x_k), (y_k)$ dans $X$ on a :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_k \|ux_k - uy_k\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &= \|\hat{u}(x_k) - \hat{u}(y_k)\|_p \\
&\leq Lip(\hat{u}) \cdot \|(x_k) - (y_k)\|_p^{faible} \\
&= Lip(\hat{u}) \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big(\sum_k |f(x_k) - f(y_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où, $u$ est Lipschitz p-sommant et

$$\pi_p^L(u) \leq Lip(\hat{u}). \tag{3.7}$$

De (3.6) et (3.7), on a

$$\pi_p^L(u) = Lip(\hat{u})$$

Du théorème ci-dessus, on a montré que $\Pi_p^L(X, Y) = \mathcal{L}ip(\ell_p^{faible}(X), \ell_p(Y))$ isométriquement isomorphiquement.

On a maintenant la propriété d'injectivité suivante d'une application Lipschitz p-sommant.

**Théorème 3.3.2** *Soient $X, Y$ et $Y_0$ espaces vectoriels topologiques métrisables complets. Si $u : Y \to Y_0$ est une application isométrique, alors $v \in \Pi_p^L(X, Y)$ si et seulement si $uv \in \Pi_p^L(X, Y_0)$. Dans ce cas, on a aussi :*

$$\pi_p^L(uv) = \pi_p^L(v).$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "uv"] \arrow[dr, "v"'] & & Y_0 \\ & Y \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – Diagramme explicatif

**Preuve.** Soit $\widehat{uv} : \ell_p^{faible}(X) \to \ell_p(Y_0)$ . Afin d'appliquer le Théorème 3.3.2, on montre que $\widehat{uv}$ est Lipschitz. Pour réaliser cet objectif :
soit $(x_k)_k, (y_k)_k \in \ell_p^{faible}(X)$ avec $x = (x_k)_k$, et $y = (y_k)_k$. Puisque $u$ est isométrique et $v$ est Lipschitz p-sommant, on a

$$\begin{aligned}
\|\widehat{uv}x - \widehat{uv}y\|_p &= \Big(\sum_k \|uvx_k - uvy_k\|_{Y_0}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\sum_k \|vx_k - vy_k\|_{Y}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^L(v) \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big(\sum_k |f(x_k) - f(y_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \pi_p^L(v) \cdot \|x - y\|_p^{faible}.
\end{aligned}$$

D'où, $\widehat{uv}$ est Lipschitz et $Lip(\widehat{uv}) \leq \pi_p^L(v)$.
D'après le Théorème 3.3.2, on conclut que $uv$ est Lipschitz p-sommant et

$$\pi_p^L(uv) = Lip(\widehat{uv}) \leq \pi_p^L(v). \tag{3.8}$$

Inversement, supposons que $uv \in \Pi_p^L(X, Y_0)$, on montre que $v \in \Pi_p^L(X, Y)$. Soient $(w_k)$ et $(z_k)$ de $X$, et puisque $u$ est isométrique, on a :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_i \|vw_k - vz_k\|_Y^p\Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(\sum_i \|uvw_k - uvz_k\|_{Y_0}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^L(uv) \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \Big(\sum_k |f(w_k) - f(z_k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où, $v$ est Lipschitz p-sommant et

$$\pi_p^L(v) \leq \pi_p^L(uv). \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), on a

$$\pi_p^L(v) = \pi_p^L(uv).$$

## 3.4 Théorèmes de Pietsch

**Théorème 3.4.1** *[9, Théorème 1] Soient $1 \leq p < \infty$ et $T : X \to Y$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour $T$ et $C \geq 0$.*
*1. $T$ est Lipschitz p-sommant.*
*2. Il existe une probabilité $\mu$ sur $B_{X^\sharp}$ telle que :*

$$\|Tx - Ty\|^p \leq C^p \cdot \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f).$$

*(**Pietsch Domination**).*
*3. Pour certaines (ou toute) application isométrique $J$ de $Y$ dans l'espace 1-injectif $Z$, il existe une factorisation :*

$$\begin{tikzcd}
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "I_{\infty,p}"] & & L_p(\mu) \arrow[d, "B"] \\
X \arrow[u, "A"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[r, "J"] & Z
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.2 – Diagramme de factorisation d'un opérateur Lipschitz p-sommant

*avec une probabilité $\mu$ et $Lip(A) \cdot Lip(B) \leq C$. (**Pietsch Factorisation**).*

On a besoin à cette remarque pour démontrer le théorème précédent.

**Remarque 3.4.1** *Supposons que $X$ est un ensemble, $(Y, \|\cdot\|)$ est un espace métrique et $f : X \to Y$ est une fonction injective. $f$ et $\|\cdot\|$ définissent une métrique sur $X$ comme suit $(a, b) \to \|f(a) - f(b)\|$. Cette métrique nous permet d'identifier isométriquement $X$ avec le sous-espace métrique $(f(X), \|\cdot\|)$ de $(Y, \|\cdot\|)$ et $f$ est une isométrie.*

**Preuve. (Théorème de Pietsch-cas non linéaire).**
$2 \Rightarrow 3$) Puisque chaque espace $X$ intégre dans un espace $C(K)$, ona le diagramme commutatif suivant en prenant $K = B_{X^\sharp}$ :

$$\begin{tikzcd}
C(B_{X^\sharp}) \arrow[r, "J_\infty"] & L_\infty(\mu) \arrow[rr, "I_{\infty,p}"] & & I_{\infty,p}AX \arrow[r, hook] \arrow[d, "B_1"] & L_p(\mu) \arrow[dl, "B"] \\
& X \arrow[ul, "i_X"] \arrow[u, "A"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[r, "J"] & Z &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.3 – Deuxième diagramme de factorisation d'un opérateur p-sommant

avec $B_1 \circ I_\infty \circ A = J \circ T$. On a en mesure d'etendre $B_1$ à $B$ parce que $Z$ est un 1-injectif avec $Lip(B_1) = Lip(B)$. Ainsi $B_1 = B_{|I_{\infty,p}AX}$. Comme $i_X$ et $J_\infty$ sont de Lipschitz et la composition des applications de lipschitz est de Lipschitz par la Proposition 3.1.1. Alors $A$ est aussi de Lipschitz, puisque $J$ est une isometrie et par la condition 2), on a pour touts $x, y \in X$ :

$$\begin{aligned}
\|B_1 I_{\infty,p}Ax - B_1 I_{\infty,p}Ay\|_Z^p &= \|JTx - JTy\|_Z^p = \|Tx - Ty\|^p \\
&\leq C^p \cdot \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f)
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $f$ est de Lipschitz, $f \in B_{X^\sharp}$ donc $Lip(f) \leq 1$ et $I_{\infty,p} \circ A$ est injectif, alors par la Remarque 3.4.1 on a :

$$\begin{aligned}
\|B_1 I_{\infty,p}Ax - B_1 I_{\infty,p}Ay\|_Z^p &\leq C^p \cdot Lip(f)^p \cdot \|x - y\|_X^p \\
&\leq C^p \cdot \|x - y\|_X^p \\
&= C^p \cdot \|I_{\infty,p}Ax - I_{\infty,p}Ay\|_{L_p(\mu)}^p.
\end{aligned}$$

Donc $B_1$ est de Lipschitz et $Lip(B_1) \leq 1$. Aussi :

$$Lip(A) = Lip(J_\infty i_X) \leq Lip(J_\infty) Lip(i_X) \leq 1.$$

Puisque $B_1$ a une extension, i.e., $B_1$ etend à $B_1 = B_{|\infty,p}$ avec $Lip(B_1) = Lip(B)$ on a :

$$Lip(A) \cdot Lip(B) \leq C.$$

$3 \Rightarrow 1$) Puisque $I_{\infty,p}$ est Lipschitz p-sommant avec $\pi_p^L(I_{\infty,p}) = 1$ par la Remarque 3.2.1 et $J$ est une isometrie, alors par la condition 3) et propriété d'ideal (cas non-linéaire) on a :

$$\begin{aligned}
\pi_p^L(T) &= \pi_p^L(JT) = \pi_p^L(B_1 \circ I_{\infty,p} \circ A) \\
&\leq Lip(B_1) \cdot \pi_p^L(I_{\infty,p}) \cdot Lip(A) \\
&= Lip(B_1) \cdot \pi_p(I_{\infty,p}) \cdot Lip(A) \\
&= Lip(B_1) \cdot Lip(A) \\
&= Lip(B) \cdot Lip(A) \leq C.
\end{aligned}$$

$1 \Rightarrow 2$) Supposons que $\pi_p^L(T) = 1$. Soit $Q$ un cône convexe dans $C(B_{X^\sharp})$ composé de tous combinations linéaires positives de la forme $\|Tx - Ty\| - C^p \cdot |f(x) - f(y)|^p$, comme $x$ et $y$ vont sur $X$. Maintenant dit condition 1) que $Q$ est disjointe de cône positif $P = \{F \in C(B_{X^\sharp}) : F(f) > 0, \forall f \in B_{X^\sharp}\}$. $P$ est clairement ouvert et convexe de $C(B_{X^\sharp})$. En effet, $P$ est ouvert car $P = \cup_F F^{-1}(0, \infty)$ o'ù $F \in C(B_{X^\sharp})$. $P$ est convexe il est un cône et ainsi $Q \cap P = \varnothing$, autrement $g_M \in Q$ pour certaines ensemble fini $M \subset X$ et $g_M(f) > 0$ pour tout $f \in B_{X^\sharp}$ o'ù

$$g_M = \sum_{x,y \in M} \|Tx - Ty\|^p - C^p \cdot |f(x) - f(y)|^p.$$

En effet au contraire, si $g_M \in Q$ pour certaines ensemble fini $M \subset X$ et $g_M(f) > 0$ pour tout $f \in B_{X^\sharp}$, alors

$$\sum_{x,y \in M} \|Tx - Ty\|^p - C^p \cdot |f(x) - f(y)|^p > 0,$$

de sorte

$$\sum_{x,y \in M} \|Tx - Ty\|^p > C^p \cdot \sum_{x,y \in M} |f(x) - f(y)|^p.$$

D'où

$$\sum_{x,y \in M} \|Tx - Ty\|^p > C^p \cdot \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum_{x,y \in M} |f(x) - f(y)|^p$$

contrairement à $T$ étant Lipschitz p-sommant. Donc, $P \cap Q = \varnothing$. d'où, par le Théorème de séparation et Théorème de représentation de Riesz, il y a une mesure de Baire $\mu$ finie et signé sur $B_{X^\sharp}$ et $c$ un nombre réel de sorte que pour tous $G \in Q$ et $F \in P$,

$$\int_{B_{X^\sharp}} G d\mu \leq c < \int_{B_{X^\sharp}} F d\mu.$$

Car $0 \in Q$ alors $c \geq 0$. Aussi, car toutes les fonctions constantes positives appartiennent à $P$, alors $c < 0$ de telle sort que $c = 0$. Comme $\int_{B_{X^\sharp}} d\mu$ est positif sur le cône positif, la mesure signé $\mu$ est positive qu' on peut supposer par changement d'echelle est une mesure de probabilité. D'où

$$\int_{B_{X^\sharp}} G d\mu \leq 0 < \int_{B_{X^\sharp}} F d\mu$$

de sorte que

$$\int_{B_{X^\sharp}} \|Tx - Ty\|^p - C^p \cdot |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \leq 0.$$

Donc

$$\|Tx - Ty\|^p \leq C^p \cdot \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f).$$

## 3.5 Théorème d'inclusion

Le résultat du théorème de l'inclusion dans le cas linéaire et sa preuve est trouvé dans [12, Inclusion Theorem 2.8] et dans le chapitre 2 Théorème 2.1.1.

Maintenant on donne et prouve le théorème de l'inclusion dans le cas non-linéaire.

**Théorème 3.5.1** *Soit $1 \leq p \leq q < \infty$. Si $T : X \to Y$ est Lipschitz p-sommant, alors $T$ Lipschitz q-sommant et*

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T).$$

**Preuve.** Soit $\pi_p^L(T) \leq \infty$, alors par le Théorème de Pietsch 3.4.1, pour quelque mesures de probabilités $\mu$ sur $B_{X^\sharp}$, on a

$$\|Tx - Ty\|^p \leq (\pi_p^L(T))^p \cdot \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f).$$

Par la décroissance de $L_p$-métriques on a par conséquent

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &\leq \pi_p^L(T) \cdot \Big( \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p^L(T) \cdot \Big( \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^q d\mu(f) \Big)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

D'où

$$\|Tx - Ty\|^q \leq (\pi_p^L(T))^q \cdot \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^q d\mu(f).$$

Cela montre que $T$ est Lipschitz q-sommant par le Théorème de Pietsch 3.4.1, et

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T).$$

Une conséquence immédiate de théorème de l'inclusion est que tout application $T : X \to Y$ est Lipschitz 1-sommant pour $1 \leq p < \infty$, alors $T$ est Lipschitz p-sommant et

$$\pi_p^L(T) \leq \pi_1^L(T).$$

# Bibliographie


[1] S. A. Abdillah. *Extensions au cadre Banachique de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt. Thèse de Doctorat.* l'Université de Bordeaux 1, 26-11-2012.

[2] A. Baflah. *Les opérateurs p-sommants, Mémoire de master.* Université de Laghouat, 2014.

[3] J. Bass. *Cours de mathématiques. Tome 3. Topologie, intégration, Distributions, Equations intégrales, Analyse harmonique.* Masson et $C^{ie}$, Boulevard siant-Germain, Paris, $VI^0$, 1971.

[4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications.* 2$^e$ *tirage.* Masson, Paris, 2 edition, 1987.

[5] E. Burroni. *La topologie des espaces métriques.* Ellipses, Paris, 2005.

[6] A. Doneddu. *Analyse. Tome 8.* Librairie vuibert, 63, Boulevard siant-Germain, 75005 Paris, 1985.

[7] M. Hazi. *Espaces toplogiques en général et espaces métriques en particulier.* Office des publication universitaires, Place Ben Aknoun (Alger), 12 1993.

[8] M. Hazi. *Introduction aux espaces normés.* Office des publication universitaires, Place Ben Aknoun (Alger), 7 1994.

[9] W.B. Johnson J.D. Farmer. Lipschitz p -summing operators. *Proceedings of the american mathematical society*, 137(9) :2989–2995, 2009.

[10] Fomine S. Kolmogorov A. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Édition Mir·Moscou, 2 edition, Décembre 1973.

[11] B. Ndumba. *Extension of results about p-summing operators to Lipschitz p-summing maps and their respective relatives, Mémoire de magistère.* University of Pretoria, South Africa, July 2013.

[12] A. Tonge T. Diestel, H. Jarchow. *Absolutly summing operators.* Combridge university press, 1995.

[13] N. Weaver. *Lipschitz algebras.* World scientific Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1999.

# ملخص

في هذَا العمل قدمنَا تعريف المؤُثرَات $p-$ جمعية و المؤُثرَات ليبشيز $p-$ جمعية $(1 \leq p \leq \infty)$ و درسنَا خصَائِصهَا الأَسَاسية، بَالإِضَافة إِلَى مبرهنتي الهيمنة و التفكيك لِلعَالِم الآلمَاني بيتش بَالنسبة لكل مؤُثر و درسنَا العلَاقَات التي تربط بينهمَا.
**كلمَات مفتَاحية:** المؤُثرَات $p-$ جمعية ، مؤُثرَات ليبشيز $p-$ جمعية ، مبرهنة التركيب ، مبرهنة الإِحتوَاء ، مبرهنة الهيمنة و التفكيك.

# Résumé

Dans ce travail, on a donné les définitions des opérateurs p-sommants et les opérateurs Lipschitz p-sommants $(1 \leq p < \infty)$ et étudié leurs propriétés fondamentales (propriété d'idéal et d'injectivité), les deux théorèmes de domination et de factorisation due Pietsch pour chaque opérateur. On a étudié le lien entre les opérateurs p-sommants et les opérateurs Lipschitz p-sommants.
**Mots clés**:Opérateur p-sommant, opérateur Lipschtiz p-sommant, Propriété d'Idéal et d'Injectivité Théorèmes de Composition, Domination et Factorisation, Inclusion.

# Abstract

In this work, we gave the definition of p-summing operators and Lipschtiz p-summing operators $(1 \leq p < \infty)$ and studied their important properties (injectivity and ideal properties) , Pietsch's domination and factorization theorems for each operator. We introduced the relationship between them.
**Keywords**: P-summing operators, Lipschitz p-summing operators, Properties of Injectivity and Ideal Theorems of Composition, Domination-Factorization, Inclusion.