

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
Université Amar Telidji



FACULTÉ DE SCIENCES
DÉPARTAMENT DE MATHEMATIQUES

Presenté pour obtenir le diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques appliquée

Option : Analyses Fonctionnelles

PRÉSENTÉ PAR : Fatma TAIBI

Thème

**ANALYSE MATHÉMATIQUES D'ÉCOULEMENT
POLY-PHASIQUE EN MILIEU POREUX**

Sous la direction de monsieur Mohamed Lamine MOSTEFAI,

Soutenu le 12/06/2025 Devant le jury :

Dr. Abdelbaki Choucha	MCA	Président	Université de Laghouat
Dr. Razik Belhouas	MAA	Examinator	Université de Laghouat
Dr. Mohamed Lamine Mostefai	MCA	Encadreur	Université de Laghouat

Année académique 2024/2025

DÉDICATION

*Je dédie sincèrement ce travail à mes chers parents, Abdelkader et Oumelkhir.
Mes frères et mes soeurs.*

*à toutes mes amies, mes proches, mes professeurs
et à tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce projet et
mon parcours universitaire .*

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord dire Alhamdoulillah pour m'avoir accordé la force et la patience nécessaires pour surmonter toutes les épreuves rencontrées au cours de ce modeste travail.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon travail et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à mon encadrant, Monsieur **Mohamed Lamine MOSTEFAI**, pour m'avoir permis d'effectuer ce travail sous sa direction, pour m'avoir offert la possibilité de travailler sur un sujet passionnant, mais aussi pour sa gentillesse et ses précieux conseils.

Je remercie également les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture et à l'évaluation de ce travail.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à ma famille ainsi qu'à tous mes enseignants qui ont contribué à mon apprentissage tout au long de notre parcours universitaire.

Je remercie toutes les personnes qui m'a aidés dans la réalisation de ce travail.

ملخص

أثبتنا وجود الحلول الضعيفة لنموذج تدفق ثنائي الطور رطب وغير رطب غير قابل للانضغاط وغير قابل للامتزاج في أوساط مسامية ذات ضغط شعري. هذا النموذج عبارة عن نظام مقترن يتضمن معادلة مكافئة للتشبع غير خطية و معادلة ناقصية قهرية للضغط - سرعة. في الحالة المنظمة. يتم الحصول على وجود الحل الضعيف و وحدانيته. نستخدم معامل التنظيم $\eta \rightarrow 0$ لإثبات وجود حلول ضعيفة.

الكلمات المفتاحية مسألة ناقصية - مكافاة غير خطية ، تدفق غير قابل للانضغاط ، ضغط شعري ، أوساط مسامية غير متجانسة .

ABSTRACT

We prove existence of weak solutions of a two-incompressible immiscible "wetting and non-wetting fluids" phase flow model in porous media with capillary pressure. This model is a coupled system which includes a nonlinear parabolic saturation equation and an elliptic pressure-velocity equation. In the regularized case, the existence and uniqueness of the weak solution are obtained. We let the regularization parameter $\eta \rightarrow 0$ to prove the existence of weak solutions.

Keywords : Nonlinear parabolic elliptic system, Incompressible flow, Capillary pressure, Heterogeneous Porous media.

RÉSUMÉ

Nous démontrons l'existence de solutions faibles d'un modèle d'écoulement à deux phases incompressibles, immiscibles, « fluides mouillants et non mouillants », en milieu poreux avec pression capillaire. Ce modèle est un système couplé qui comprend une équation de saturation parabolique non linéaire et une équation pression-vitesse elliptique. Dans le cas régularisé, l'existence et l'unicité de la solution faible sont obtenues. Nous posons le paramètre de régularisation $\eta \rightarrow 0$ pour démontrer l'existence de solutions faibles.

Mots clés : Système elliptique parabolique non linéaire, Écoulement incompressible, Pression capillaire, Milieux poreux hétérogènes.

Table des matières

Introduction Générale	10
1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle	11
1.1 Premières propriétés	11
1.2 Espaces de Sobolev	13
1.3 Théorème de Lax-Milgram	16
1.4 Les espaces comportant le temps	19
1.5 Quelques notions de convergence	20
1.6 Méthode de Galerkin	21
2 Modélisation mathématique d'écoulement diphasique en milieux poreux	26
2.1 Généralités sur les milieux poreux	26
2.2 Paramètres du milieu poreux	27
2.3 Équations fondamentales	29
2.4 Modélisation des réservoirs	32
3 Existence de solution faible pour les écoulements diphasiques en milieu poreux	36
3.1 Méthode de Lax-Milgram pour l'équation de la pression :	36
3.2 Méthode de Galerkin pour l'équation de saturation	39
Conclusion	46
Bibliographies	47

Notations

Dans tout ce qui suit, voici les principales notations utilisées :

- Ω : un domaine de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, \dots$
- $\Gamma = \partial\Omega$: frontière du domaine Ω
- $x = x = (x, y)$: variable d'espace dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- t, T : variable temporelle et temps final, en (s)
- $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$
- $\operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$
- $\phi = \phi(x)$: porosité du milieu poreux, en (-)
- $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$: tenseur de perméabilité absolue, en (Darcy)
- $i = w, o$: fluide mouillant ($w = \text{l'eau}$) et non mouillant ($o = \text{l'huile}$)
- $s_i = s_i(x, t)$: saturation de la phase i , ($i = w, o$), en (-)
- $p_i = p_i(x, t)$: pression de phase i , ($i = w, o$), en (Pa)
- $p = p(x, t)$: pression globale, en (Pa)

Les fonctions de la saturation :

- $k_{ri} = k_{ri}(s)$: perméabilité relative du fluide i , $i = o, w$
- $\lambda_i = \lambda_i(s)$: mobilité relative du fluide i , $i = o, w$
- $p_c = p_c(s)$: pression capillaire
- $\psi = \psi(s)$: diffusion capillaire, fonction non linéaire de s
- $f = f(s)$: fraction du flux, fonction non linéaire de s

Les espaces fonctionnels

- $L^p(\Omega) := \{f \mid f \text{ } \mathcal{L}^d\text{-mesurable dans } \Omega \text{ avec } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}$, $p \in [1, \infty)$
- $L^\infty(\Omega) := \{f \mid f \text{ } \mathcal{L}^d\text{-mesurable dans } \Omega \text{ avec } \|f(x)\| \leq C, \text{ } \mathcal{L}^d\text{-p.p. dans } \Omega, C \geq 0 \text{ constante}\}$
- $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$: espace des fonctions mesurables $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $1 \leq p < \infty$)
- $L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^p(\omega) \text{ pour tout compact } \bar{\omega} \subset \Omega\}$
- $W^{m,p}(\Omega) := \{w \in L^p(\Omega) \mid D^\delta w \in L^p(\Omega) \text{ pour } \delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in \mathbb{N}^d \text{ avec } |\delta| := \sum_i \delta_i \leq m\}$
- $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, espace de Sobolev d'ordre m

- $C^m(\bar{\Omega}) := \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\delta f \text{ est continue dans } \Omega, |\delta| = \sum_i \delta_i \leq m\}$
- $C_0^m(\Omega)$: espace des fonctions de $C^m(\Omega)$ à support compact dans Ω
- Pour X un espace de Banach, on note $L^p(0, T; X)$, l'espace défini par :
 $L^p(0, T; X) := \{f : (0, T) \rightarrow X \mid \text{mesurable avec } \int_0^T \|f\|_X^p dt < \infty\}$
- $D(\Omega) : C_c^\infty(\Omega)$, est l'espace des fonctions de classe ∞ à support compact.
- $D(0, 1)$ est l'espace de $C_c^\infty(0, 1)$

Introduction Générale

L'étude des écoulements multiphasiques en milieux poreux occupe une place centrale dans le domaine de la production pétrolière. Cette recherche se concentre sur l'écoulement simultané de plusieurs fluides, tels que l'eau et l'huile, ou encore l'eau, l'huile et le gaz, à travers des environnements poreux. Comprendre et modéliser ces écoulements est essentiel pour optimiser les taux de récupération des hydrocarbures et anticiper la dynamique des fluides au sein des réservoirs.

Dans les contextes réels, les milieux poreux sont souvent caractérisés par une forte hétérogénéité, une anisotropie marquée et des géométries complexes à plusieurs dimensions. Ces aspects rendent la modélisation particulièrement délicate, notamment lorsque les phénomènes physiques sont régis par des équations aux dérivées partielles non linéaires et dégénérées. Cette thèse s'intéresse à un problème type issu de l'industrie pétrolière : l'écoulement diphasique immiscible et incompressible dans un milieu poreux, modélisé par un système couplant une équation parabolique non linéaire dégénérée à une équation elliptique. Notre travail adopte une approche analytique rigoureuse fondée sur le cadre variationnel. Nous utilisons notamment le Lemme de Lax-Milgram pour garantir l'existence et l'unicité de solutions dans un cadre linéaire, ainsi que la méthode de Galerkin pour traiter le cas non linéaire et établir des résultats d'existence dans un cadre abstrait.

est structurée en plusieurs chapitres, chacun abordant successivement la modélisation, l'analyse fonctionnelle du problème, puis l'étude théorique des solutions à l'aide des outils mentionnés.

Chapitre 1

Quelques outils d'analyse fonctionnelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions théoriques essentielles utilisées tout au long de ce travail. Il présente les outils d'analyse fonctionnelle, les propriétés des espaces de Hilbert, ainsi que les résultats fondamentaux sur les formes bilinéaires et les méthodes d'approximation, notamment la méthode de Galerkin et Lax-Milgram, qui seront mobilisés dans l'étude du problème traité.

1.1 Premières propriétés

1.1.1 Produit scalaire

Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On appelle produit scalaire une forme bilinéaire (\cdot, \cdot) de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, positive et définie :

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in H, \quad (u, u) \geq 0 \quad \text{et} \quad (u, u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

1.1.2 Espace de Hilbert

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée.

Proposition 1.1. Soit H un espace de Hilbert et X un sous-ensemble de H qui engendre un sous-espace dense dans H . Alors :

$$\forall x \in H, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_n \in X.$$

Proposition 1.2. Tout produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

Théorème 1.1. Soit $f \in L_2(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} f \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. Alors, $f = 0$.

Théorème 1.2 (Hahn-Banach). Soit H un espace de Hilbert, $K \subset H$ un convexe fermé, et z un point de H qui n'appartient pas à K . Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare K et z au sens strict, c'est-à-dire qu'il existe h et x_0 dans H tels que

$$\forall x \in K, \quad (x - x_0, h) \leq 0 < (z - x_0, h).$$

$$\forall k \in K, \quad \langle x - k, h \rangle \geq \alpha.$$

Tout espace de Hilbert peut s'identifier à son dual, comme l'exprime le théorème suivant.

Théorème 1.3 (Riesz-Frechet). Soit $\varphi \in H'$ (dual topologique de H). Il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in H.$$

De plus, on a

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Définition 1.4 (Différentiabilité). Soit J une application de H dans \mathbb{R} . On dit que J est différentiable en u s'il existe $\varphi \in H'$ tel que l'on ait, pour h au voisinage de 0,

$$J(u + h) = J(u) + \langle \varphi, h \rangle + |h|\varepsilon(h),$$

où $\varepsilon : H \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Si un tel φ existe, on le note $J'(u)$. On peut l'identifier à un élément de H .

On dira que J est différentiable si elle admet une différentielle en tout point, et que J est C^1 si l'application $u \rightarrow J'(u)$ est continue.

Définition 1.5 (Continuité d'une forme bilinéaire). Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Alors a est continue si et seulement s'il existe une constante k_a telle que

$$|a(u, v)| \leq \|a\| \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

Définition 1.6 (Coercivité d'une forme bilinéaire). Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que a est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Proposition 1.3. En dimension finie, et dans le cas où une forme bilinéaire est symétrique ($a(u, v) = a(v, u)$), on retrouve la notion de forme symétrique définie positive. Le plus grand coefficient α est alors la plus petite valeur propre de la matrice associée, et la plus petite constante $\|a\|$ de la continuité est sa plus grande valeur propre.

Proposition 1.4. Soit H un espace de Hilbert, et a une forme bilinéaire et continue sur l'espace produit $H \times H$. Pour tout $u \in H$, on note Au l'élément de H qui s'identifie à la forme linéaire $a(u, \cdot)$:

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall v \in H.$$

L'application $u \mapsto Au$ est linéaire et continue. De plus, si $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, alors l'application A est une bijection.

Théorème 1.7 (Représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Soit f une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique $y \in H$ tel que :

$$\forall x \in H, \quad f(x) = \langle y | x \rangle.$$

Démonstration. Soit $F := \ker f$. Comme f est continue, F est un sous-espace fermé de H .

Existence : Si $F^\perp = \{0\}$, alors $(F^\perp)^\perp = H$, donc $F = H$ et par conséquent $f = 0$. On peut alors poser $y = 0$.

Sinon, soit $w \in F^\perp$ tel que $\|w\| = 1$. Alors $f(w) \neq 0$ (sinon $w \in F \cap F^\perp = \{0\}$, ce qui contredit $\|w\| = 1$).

$$x - \frac{f(x)}{f(w)}w \in \ker f = F$$

Donc :

$$\langle w \mid x - \frac{f(x)}{f(w)}w \rangle = 0$$

D'où, pour tout $x \in H$,

$$f(x) = f(x)\langle w \mid w \rangle = f(w)\langle w \mid x \rangle = \langle y \mid x \rangle$$

en posant $y = \overline{f(w)}w$.

Unicité : Soient $y_1, y_2 \in H$ tels que, pour tout $x \in H$,

$$\langle y_1 \mid x \rangle = f(x) = \langle y_2 \mid x \rangle.$$

Alors, en prenant $x = y_1 - y_2$, on obtient :

$$\langle y_1 - y_2 \mid y_1 - y_2 \rangle = 0,$$

d'où $y_1 = y_2$. □

Définition 1.8 (La densité). Soit H un espace de Hilbert. Un sous-espace $A \subset H$ est dit **dense dans** H si, pour tout $x \in H$, il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que

$$a_n \rightarrow x \quad \text{dans } H,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - x\|_H = 0.$$

Exemple 1.1.

$D(\Omega)$ est dense dans H^1

$L^p(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$

1.2 Espaces de Sobolev

Soit N un entier tel que $N \geq 1$. Dans tout ce chapitre, on désignera par Ω un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue. basé de [1]

Définition 1.9 (Rappels sur l'espace $L^2(\Omega)$). On définit l'espace $L^2(\Omega)$ comme

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, } \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

On le munit de la norme $\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$. On notera $L^2(\Omega)^N$ l'espace des champs de vecteurs dont chaque composante appartient à $L^2(\Omega)$.

Proposition 1.5. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

dont tout produit est tel que

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

où u et v sont des fonctions mesurables telles que $uv \in L^1(\Omega)$

Proposition 1.6. L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Remarque L'appartenance à L^2 exige seulement une intégrabilité quadratique (sans exigence de régularité). En revanche, il est considéré une partie de l'espace des distributions au sens de la forme $T_u(\varphi) = \int_{\Omega} u\varphi$ où $u \in L^2$ et $\varphi \in D(\Omega)$.

Définition 1.10 (Gradient). Soit u une fonction C^1 de Ω dans \mathbb{R} . On appelle gradient de u la fonction ∇u dans \mathbb{R}^N définie par :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Définition 1.11. On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions u de $L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $v = (v_1, \dots, v_N) \in L^2(\Omega)^N$ vérifiant

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i = 1, \dots, N.$$

On notera alors $v = \nabla u$. La fonction ∇u de Ω vers \mathbb{R}^N est ainsi définie comme l'unique fonction vectorielle à composantes dans $L^2(\Omega)$ telle que l'identité entre vecteurs de \mathbb{R}^N soit vérifiée pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. On notera $H^1(\Omega)^N$ l'espace des champs de vecteurs dont chaque composante est à intégrale composée de L^2 .

Proposition 1.7. L'espace $H^1(\Omega)$ est muni de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par :

$$\|u\|_1 = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

C'est un espace de Hilbert séparable.

Proposition 1.8. Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$, alors $\nabla u \in L^2(\Omega)$. De plus, si $u \in H^1(\Omega)$, et le gradient de u est au sens classique, alors ∇u est égal à sa définition en Sobolev.

Remarque Nous verrons que les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continues en dimension supérieure ou égale à deux, mais elles possèdent une certaine régularité en espace. La régularité H^1 exclut notamment les discontinuités franches aux travers d'une hypersurface.

Proposition 1.9. Si $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\nabla u = 0$ presque partout sur Ω , alors u est constant sur chaque composante connexe de Ω .

En dimension 1, une fonction peut s'écrire comme intégrale de sa dérivée, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 1.10. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Toute fonction $u \in H^1(I)$ admet un représentant continu, qui vérifie

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x_0) + \int_{x_0}^x \tilde{u}'(t) dt.$$

Cette fonction continue sur I est prolongeable par continuité aux extrémités de I .

Proposition 1.11. Soit u une fonction de $L^2(\Omega)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in H^1(\Omega)$,
- (ii) Il existe une constante C telle que

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

- (iii) Il existe une constante C telle que, pour tout $x, y \in \Omega$, pour tout $h \neq 0$ tel que $|x - y| < |h|$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|.$$

Proposition 1.12. L'espace $D(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.13. Pour tout $w \subset \Omega$, tout $u \in H_0^1$, il existe une suite (u_n) dans $D(\Omega)$ telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega), \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ dans } L^2(w)^N.$$

Corollaire 1.12. Soit (w_n) une suite de domaines fortement inclus dans Ω , et $u \in H^1(\Omega)$. Il existe une suite (u_n) dans $D(\Omega)$ telle que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega), \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ dans } L^2(w)^N.$$

Définition 1.13. On définit $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Noter que, d'après la proposition 1.9, on a $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

Proposition 1.14. On définit l'espace $H^p(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles au sens faible jusqu'à un certain ordre m sont dans $L^p(\Omega)$.

C'est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^2 \right)^{1/2}.$$

On peut définir de façon analogue les espaces $H^p(\mathbb{R}^N)$ pour $n = 3, 4, \dots$ mais nous n'utiliserons ici que le cas $N = 2$.

1.3 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.14. Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ un espace de Hilbert. Soient $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose que :

a est continue : $\exists \beta > 0$ tq :

$$|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H$$

a est coercive : $\exists \alpha > 0$ tq :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H$$

$L : H \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $L(u)$ est linéaire continue :

$$|L(v)| \leq \|L\|_{H'} \|v\|_H, \quad \forall v \in H$$

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$\text{Pour tout } v \in H, \quad a(u, v) = L(v)$$

Voici le plan de la démonstration :

- Montrer, via le théorème de Riesz, qu'il existe une application linéaire $A : H \rightarrow H$ telle que, pour tous $u, v \in H$, on a :

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle,$$

et que A est injective.

- Montrer que $\text{Im}(A)$ est fermé dans H .
- Montrer que $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$.
- En déduire que A est bijective, et, en écrivant $L = \langle x_0, \cdot \rangle$ grâce au théorème de Riesz, on conclure :

Démonstration. 1. Par continuité de a , pour $u \in H$, l'application $v \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire continue. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H$ tel que $a(u, v) = \langle w | v \rangle$ pour tout $v \in H$. Notons $w = Au$. $A : H \rightarrow H$ est clairement une application linéaire.

Par coercivité de a d'une part, et l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* d'autre part, on a :

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = \langle Au | u \rangle \leq \|Au\| \|u\|$$

on obtient ainsi, pour tout $u \in H$:

$$\alpha \|u\| \leq \|Au\|$$

Ainsi, si $Au = 0$, cette inégalité assure que $u = 0$, et montre l'injectivité de A , puisque A est linéaire.

2. Montrons que $\text{Im}(A)$ est fermé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Im}(A)$ une suite telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w \in H$. Montrons que $w \in \text{Im}(A)$.

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Av_n$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans H , c'est donc une suite de Cauchy :

$$\|u_n - u_m\| = \|Av_n - Av_m\|$$

De plus, l'inégalité (2) assure que :

$$\|v_n - v_m\| \geq \alpha \|v_n - v_m\|$$

Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est également. C'est une suite d'éléments de H , qui est complet, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, vers une limite $w \in H$.

Il reste à montrer que $w = Av$. Par continuité de a , on a :

$$\|Au\|^2 = \langle Au | Au \rangle = a(u, Au) \leq C \|u\| \|Au\|$$

Ainsi, on obtient :

$$\|Au\| \leq C \|u\|$$

ce qui montre la continuité de A . Ainsi, $Av_n \rightarrow Av$, mais on a également $u_n \rightarrow w$ par unicité de la limite, on obtient ainsi $w = Av$, soit $w \in \text{Im}(A)$. $\text{Im}(A)$ est donc fermé.

3. Soit $w \in \text{Im}(A)^\perp$. Pour tout $v \in \text{Im}(A)$, $\langle w | v \rangle = 0$, i.e. pour tout $v \in H$, $\langle w | Av \rangle = 0$. En particulier, pour $v = u$, on a $a(u, u) = 0$. Or, la coercivité de a assure que :

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = 0$$

Donc $u = 0$. Ainsi, on a $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$.

Par conséquent, on obtient que $\overline{\text{Im}(A)} = H$, mais comme $\text{Im}(A)$ est fermé, on a : $\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)} = H$, donc A est surjective, donc bijective (car aussi injective d'après la propriété précédente).

De plus, A est une forme linéaire continue, donc, toujours d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $L(v) = a(u, v)$. Ainsi, le problème (1) se reformule ainsi :

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \forall v \in H, \langle Au - x_0 | v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Au = x_0$$

Comme A est bijectif, il existe un unique $u \in H$ vérifiant l'équation $Au = x_0$, i.e. le problème (1) admet une unique solution $u \in H$. □

Remarque. $A : H \rightarrow H$ est bien linéaire. En effet, soient $u_1, u_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $v \in H$, on a :

$$\begin{aligned} a(u_1, v) &= \langle Au_1 | v \rangle \\ a(u_2, v) &= \langle Au_2 | v \rangle \\ a(u_1 + \lambda u_2, v) &= \langle A(u_1 + \lambda u_2) | v \rangle \end{aligned}$$

De plus, les deux premières égalités assurent par bilinéarité de a que, pour tout $v \in H$,

$$a(u_1 + \lambda u_2, v) = \langle Au_1 + \lambda Au_2 | v \rangle$$

Donc, pour tout $v \in H$,

$$\langle A(u_1 + \lambda u_2) | v \rangle = \langle Au_1 + \lambda Au_2 | v \rangle$$

Ainsi, $A(u_1 + \lambda u_2) = Au_1 + \lambda Au_2$, ce qui montre la linéarité de A .

Application (Un problème elliptique 1D avec conditions de Dirichlet au bord)

Soient $f \in L^2(0, 1)$, $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ et $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\alpha(x) \geq \alpha_0$.

Le problème elliptique

$$\begin{cases} -(\alpha(x)u')' + \lambda u & = f \\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

admet une unique solution $u \in H_0^1(0, 1)$ (la dérivée est prise au sens des distributions).

Démonstration. Considérons $u, v \in \mathcal{D}(0, 1)$. On a ainsi :

$$-\int_0^1 (\alpha(x)u'(x))'v(x)dx + \lambda \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Une intégration par parties sur le terme de gauche assure que :

$$\int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (1.2)$$

La densité de $\mathcal{D}(0, 1)$ dans $H_0^1(0, 1)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ assure que l'on peut considérer la formule (4) pour $u, v \in H_0^1(0, 1)$, qui est un espace de Hilbert. Posons alors :

$$a(u, v) = \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^1 u(x)v(x)dx$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

On a ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \lambda \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (\|\alpha\|_{L^\infty} + \lambda) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Donc a est continue, de constante de continuité égale à $\|\alpha\|_{L^\infty} + \lambda$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 \alpha(x)v'(x)^2 dx + \lambda \int_0^1 v(x)^2 dx \\ &\geq \alpha_0 \|v'\|_{L^2}^2 + \lambda \|v\|_{L^2}^2 \\ &\geq \min(\alpha_0, \lambda) \|v\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Donc a est coercive, de constante de coercivité égale à $\min(\alpha_0, \lambda)$. Enfin, on a, par

l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

Donc L est continue, de constante de continuité égale à $\|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$. Par le théorème de Lax-Milgram, le problème :

$$\forall v \in H_0^1(0, 1), \quad a(u, v) = L(v)$$

équivalent au problème (1.1), admet donc une unique solution $u \in H_0^1(0, 1)$. \square

pour plus de détails voir [6]

1.4 Les espaces comportant le temps

Après avoir rappelé les espaces de Lebesgue et de Sobolev scalaires, nous rappelons ici les espaces fonctionnels dépendant du temps. Ces espaces, qui généralisent ceux définis précédemment, dépendent du temps et sont souvent utilisés dans des espaces de Banach, notamment pour les équations aux dérivées partielles évolutives (paraboliques, hyperboliques). Les notions X et L^p en espace de Banach relèvent de cette même théorie.

Définition 1.15. L'espace $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty.$$

et

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X < \infty \quad \text{pour } p = \infty.$$

Définition 1.16. L'espace $C(0, T; X)$ est formé des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ muni de la norme

$$\|u\|_{C(0, T; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Définition 1.17. Soit $u \in L^1(0, T; X)$. On dit que $v \in L^1(0, T; X)$ est la dérivée faible de u , et on écrit $v = u'$ si, et seulement si

$$\int_0^T \phi(t)u(t)dt = - \int_0^T \phi'(t)v(t)dt$$

pour toutes les fonctions test scalaires $\phi \in C_c^\infty(0, T)$.

Définition 1.18. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ se compose de toutes les fonctions $u \in L^p(0, T; X)$ tel que la dérivée au sens faible de u existe et appartient à $L^p(0, T; X)$. On munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T (\|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p) dt \right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty), \\ \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|u'(t)\|_X, & (p = \infty). \end{cases}$$

Nous écrirons $H^1(0, T; X)$ au lieu de $W^{1,2}(0, T; X)$.

Théorème 1.19 (Inégalité de Poincaré). Soit $u \in W^{1,p}(0, T; X)$, avec tout $1 \leq p \leq \infty$. Alors $u \in C(0, T; X)$ (après avoir probablement été redéfini sur un ensemble de mesure nulle) et

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds, \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Et en particulier :

$$\|u\|_{C(0,T;X)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$$

avec la constante C ne dépendant que de T .

Proposition 1.15 (Formule de Green). Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . Si $f, g \in H^1(\Omega)$, alors pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu_i d\sigma,$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Si $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx = - \int_{\Omega} (\Delta f) g dx + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial \nu} d\sigma,$$

où $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$ désigne la dérivée normale. voir [3]

1.5 Quelques notions de convergence

Dans la suite H est un espace de Hilbert.

Définition 1.20 (Convergence faible). Soit (u_n) une suite d'éléments de H . On dit que (u_n) converge faiblement vers u dans H , et on note $u_n \rightharpoonup u$, si

$$(u_n, v) \rightarrow (u, v), \quad \forall v \in H,$$

ou de façon équivalente, si

$$u_n \rightarrow u \quad \text{faiblement.}$$

Théorème 1.21 (Loi de Banach-Saks). Soit (u_n) une suite bornée dans un espace de Hilbert H . Alors on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers u .

Théorème 1.22 (Convergence dominée dans L^p). Soit (E, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré et soit $1 \leq p < +\infty$. On note $L^p = L^p(E, \mathcal{T}, \mu)$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que :

- $f_n \rightarrow f$ presque partout,
- il existe $F \in L^p$ tel que $|f_n| \leq F$ presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f \in L^p$ et $f_n \rightarrow f$ dans L^p , c'est-à-dire :

$$\int_E |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Proposition 1.16. Si tout sous-ensemble relativement compact d'un sous-espace donné dans H est un sous-ensemble borné dans H , on a

$$[\{u_n\} \text{ bornée}] \Rightarrow [(u_n, v) \rightarrow (u, v), \quad \forall v \in X].$$

1.6 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante. Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie.

On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ.

Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

On considère le problème variationnelle comme suit :

$$\begin{cases} \forall u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle_* \quad \forall v \in V \quad \text{avec } F \in V' \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour tout v dans l'espace de Hilbert V . Dans les applications concrètes, il est important de calculer des solutions approchées avec un certain degré de précision, et la dimension infinie de V constitue le principal obstacle. Toutefois, V peut souvent être écrit comme une réunion de sous-espaces de dimension finie, de sorte qu'il pourrait être raisonnable, en principe, d'obtenir des solutions approchées en "projetant" l'équation (1) sur ces sous-espaces. C'est l'idée de la *méthode de Galerkin*.

En principe, plus la dimension du sous-espace est grande, meilleure devrait être la précision de l'approximation. Plus précisément, l'idée consiste à construire une suite $\{V_k\}$ de sous-espaces de V vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) Chaque V_k est de dimension finie : $\dim V_k = k$,
- (b) $V_k \subset V_{k+1}$ (ceci n'est pas strictement nécessaire),
- (c) $\overline{\bigcup V_k} = V$.

Pour réaliser la projection, supposons que les vecteurs $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ engendrent V_k . On cherche alors une approximation de la solution \mathbf{u} sous la forme :

$$u_k = \sum_{j=1}^k c_j \psi_j \quad (1.4)$$

en résolvant le problème projeté :

$$a(u_k, v) = \langle F, v \rangle_* \quad \forall v \in V_k \quad (1.5)$$

Puisque $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ constitue une base de V_k , l'équation (1.6) équivaut à :

$$a(u_k, \psi_r) = \langle F, \psi_r \rangle_* \quad r = 1, \dots, k \quad (1.6)$$

En substituant l'expression (1.4) dans (1.6), on obtient un système de k équations linéaires :

$$\sum_{j=1}^k c_j a(\psi_j, \psi_r) = \langle F, \psi_r \rangle_* \quad r = 1, \dots, k \quad (1.7)$$

pour les coefficients inconnus c_1, \dots, c_k . En introduisant les vecteurs

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \langle F, \psi_1 \rangle_* \\ \langle F, \psi_2 \rangle_* \\ \vdots \\ \langle F, \psi_k \rangle_* \end{pmatrix}$$

et la matrice $A = (a_{rj})$ définie par :

$$a_{rj} = a(\psi_j, \psi_r), \quad j, r = 1, \dots, k,$$

on peut écrire (1.7) sous forme compacte :

$$A\mathbf{c} = \mathbf{F}$$

La matrice A est appelée matrice de rigidité et joue un rôle clé dans l'analyse numérique du problème.

Si la forme bilinéaire a est coercive, alors A est définie positive. En effet, soit $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$. Par linéarité et coercivité :

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} &= \sum_{r,j=1}^k a_{rj} \xi_r \xi_j = \sum_{r,j=1}^k a(\psi_j, \psi_r) \xi_r \xi_j \\ &= \sum_{r,j=1}^k a(\xi_j \psi_j, \xi_r \psi_r) \\ &= a\left(\sum_{j=1}^k \xi_j \psi_j, \sum_{r=1}^k \xi_r \psi_r\right) \geq \alpha \|v\|^2 \end{aligned}$$

avec $v = \sum_{j=1}^k \xi_j \psi_j \in V_k$.

Puisque $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ est une base de V_k , on a $v = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{\xi} = 0$. Donc A est strictement positive, et en particulier non singulier.

Ainsi, pour chaque $k \geq 1$, il existe une unique solution $u_k \in V_k$ du problème (6). Nous voulons montrer que $u_k \rightarrow u$ lorsque $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire la convergence de la méthode, et donner un contrôle de l'erreur d'approximation.

Pour cela, on prouve le lemme suivant, qui montre aussi l'importance des constantes de continuité M et de coercivité α de la forme bilinéaire a .

Lemme 1.23 (Céa). Supposons que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram soient vérifiées, et soit u la solution du problème (1). Si u_k est la solution du problème (4), alors :

$$\|u - u_k\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_k} \|u - v\|$$

Démonstration.

$$a(u_k, v) = \langle F, v \rangle_* \quad \forall v \in V_k$$

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle_* \quad \forall v \in V_k$$

En soustrayant les deux équations :

$$a(u - u_k, v) = 0, \quad \forall v \in V_k$$

En particulier, comme $v - u_k \in V_k$, on a :

$$a(u - u_k, v - u_k) = 0, \quad \forall v \in V_k$$

ce qui implique :

$$a(u - u_k, u - u_k) = a(u - u_k, u - v) + a(u - u_k, v - u_k) = a(u - u_k, u - v)$$

Par coercivité de a :

$$\alpha \|u - u_k\|^2 \leq a(u - u_k, u - u_k) \leq M \|u - u_k\| \|u - v\|$$

d'où :

$$\|u - u_k\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\| \quad (1.8)$$

Cette inégalité est valable pour tout $v \in V_k$, avec $\frac{M}{\alpha}$ indépendant de k . Elle reste donc vraie si l'on prend l'infimum à droite parmi tous les $v \in V_k$.

Convergence de la méthode de Galerkin.

Puisque nous avons supposé que :

$$\overline{\bigcup V_k} = V$$

il existe une suite $\{w_k\} \subset V_k$ telle que $w_k \rightarrow u$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Le lemme de Céa donne, pour tout k :

$$\|u - u_k\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_k} \|u - v\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - w_k\|$$

□

Résolution du problème modèle par la méthode de Galerkin

Soit

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.9)$$

avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Cela implique la résolution du problème variationnel suivant :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx. \quad (1.10)$$

La solution est effectuée en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous considérons une base de Galerkin de $H_0^1(\Omega)$.

Lemme 1.24. Soit $H_0^1(\Omega)$, il existe une famille libre dénombrable $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, avec $w_i \in H_0^1(\Omega)$, telle que les combinaisons linéaires finies de w_i sont denses dans $H_0^1(\Omega)$. Une telle "suite" existe car $H_0^1(\Omega)$ est séparable (voir [1], p. 150). Ce lemme s'exprime de manière équivalente en posant $W_i = \text{Vect}\{w_1, w_2, \dots, w_i\}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ (espace de Galerkin).

Remarque

Le lemme reste valable si l'on remplace $H_0^1(\Omega)$ par un espace de Banach séparable de dimension infinie.

Première étape :

Montrons l'existence d'une solution dans un espace de dimension finie.

Lemme 1.25. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le problème variationnel suivant :

$$\text{trouver } u_i \in W_i \text{ tel que } \forall v \in W_i, \quad \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u_i) v dx \quad (1.11)$$

admet au moins une solution.

Proposition 1.17. Nous équipons W_i d'un produit scalaire hérité de $L^2(\Omega)$:

$$[u, v] = \int_{\Omega} u v dx, \quad (1.12)$$

et nous identifions W_i , de dimension finie, à son dual via ce produit scalaire.

L'application bilinéaire définie par :

$$(u, v) \mapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (1.13)$$

est une forme bilinéaire sur W_i . D'après le théorème de Riesz, il existe une application linéaire $A_i \in \mathcal{L}(W_i)$ telle que :

$$a(u, v) = [A_i(u), v]. \quad (1.14)$$

Comme W_i est de dimension finie, cette application est continue. De même, il existe une application $F_i : W_i \rightarrow W_i$ telle que :

$$\int_{\Omega} f(u) v dx = [F_i(u), v], \quad (1.15)$$

obtenue en posant $F_i = \Pi_i \circ f$, où Π_i est la projection orthogonale de L^2 sur W_i . Cette application non linéaire est continue, car composée d'applications continues (nous utilisons ici le théorème de Carathéodory).

Le problème (1.2) peut donc être reformulé sous la forme :

$$\forall v \in W_i, \quad [A_i(u_i), v] = [F_i(u_i), v]. \quad (1.16)$$

Définissons l'application P_i par :

$$P_i : W_i \rightarrow W_i, \quad u \mapsto P_i(u) = A_i(u) - F_i(u). \quad (1.17)$$

L'équation (1.6) devient alors :

$$P_i(u_i) = 0. \quad (1.18)$$

Pour résoudre ce problème, nous appliquons le lemme suivant.

Lemme 1.26. Soit E un espace euclidien de dimension finie et soit $P : E \rightarrow E$ une application continue telle qu'il existe $p > 0$ pour lequel tout point x sur la sphère de rayon p satisfait $P(x) \cdot x \geq 0$. Alors, il existe un point x_0 , avec $\|x_0\| \leq p$ et $P(x_0) = 0$.

Démonstration. Nous devons calculer $[P_i(u), u]$ sur une sphère. En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$[P_i(u), u] = \int_{\Omega} P_i(u) u dx = a(u, u) - \int_{\Omega} f(u) u dx \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_{\Omega} \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} |\Omega|^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.19)$$

Ainsi, on montre que $P_i(u)$ satisfait les hypothèses et le problème admet donc une solution $u_i \in H_0^1(\Omega)$. \square

Deuxième étape : Estimation a priori

Lemme 1.27. La suite u_i est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Nous répétons le calcul précédent :

$$a(u_i, u_i) = \int_{\Omega} f(u_i)u_i \, dx \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} |\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

□

Troisième étape : Passage à la limite

Lemme 1.28. Toute sous-suite faiblement convergente de (u_i) converge vers une solution du problème (1.1).

Soit (u_i) une sous-suite telle que $u_i \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème de Rellich, on a donc

$$u_i \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.}$$

Par conséquent, le théorème de Carathéodory implique

$$f(u_i) \rightarrow f(u) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.}$$

Fixons a_j . La suite (W_i) est croissante pour tout $i \geq j$, avec $w_j \in W_i$. Par conséquent, en multipliant (1.2) par la fonction test w_j , on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla w_j \, dx = \int_{\Omega} f(u_i)w_j \, dx,$$

avec

$$\nabla u_i \rightharpoonup \nabla u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faiblement.}$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla w_j \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_j \, dx.$$

Comme $f(u_i) \rightarrow f(u)$ dans $L^2(\Omega)$ fortement, on a également

$$\int_{\Omega} f(u_i)w_j \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f(u)w_j \, dx.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w_j \, dx = \int_{\Omega} f(u)w_j \, dx.$$

Cette équation étant linéaire par rapport à w_j , elle reste vraie pour les combinaisons linéaires finies des w_j :

$$\forall w \in \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f(u)w \, dx.$$

Enfin, $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ étant dense dans $H_0^1(\Omega)$, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, il existe $z_i \in W_i$ tel que $z_i \rightarrow w$ dans $H_0^1(\Omega)$ fortement. En appliquant (1.13) avec $w = z_i$ et en passant à la limite lorsque $i \rightarrow +\infty$, on conclut sans difficulté que u est solution du problème (1.1).

Chapitre 2

Modélisation mathématique d'écoulement diphasique en milieux poreux

Ce chapitre est dédié à la modélisation mathématique de l'écoulement diphasique en milieux poreux. Nous commençons par rappeler les propriétés générales des milieux poreux ainsi que les principaux paramètres physiques intervenant dans leur description. Ensuite, nous introduisons les équations fondamentales régissant l'écoulement de deux fluides immiscibles et incompressibles, telles que l'eau et l'huile, en tenant compte de la pression capillaire. Enfin, nous décrivons un modèle mathématique représentatif des réservoirs pétroliers dans le cadre d'un processus de récupération secondaire.

2.1 Généralités sur les milieux poreux

2.1.1 Définition d'un milieu poreux

Un milieu poreux est généralement défini comme un solide de forme complexe contenant des espaces appelés pores. Ces pores peuvent être interconnectés et abriter une ou plusieurs phases fluides, qui peuvent s'écouler et échanger de la matière et/ou de l'énergie avec le solide et/ou entre elles. La partie solide, appelée matrice, peut être déformable, mais elle doit conserver une certaine cohésion. Cela exclut, par exemple, les lits fluidisés où des particules solides sont maintenues en suspension par un écoulement de fluide interstitiel. Les milieux poreux se caractérisent par une grande diversité, tant en termes de structure (forme et taille des grains et des pores de la matrice), de composition (propriétés physico-chimiques des matériaux constituants) que d'échelles spatiales (allant de plusieurs dizaines de kilomètres cubes pour les réservoirs d'hydrocarbures et les nappes phréatiques, à quelques millimètres cubes pour certaines membranes filtrantes). Ces milieux jouent un rôle majeur dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. Parmi les domaines où ils sont particulièrement présents, on peut citer le génie pétrolier, le génie chimique et électrochimique, l'hydrogéologie, la géothermie, le génie thermique, le génie civil, la médecine, la biochimie, et bien d'autres. Selon la matrice solide, on distingue :

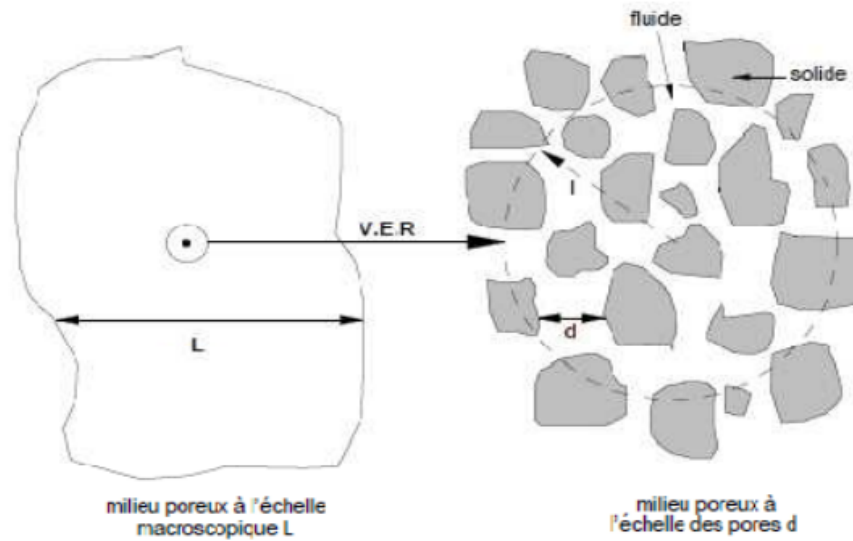


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du volume élémentaire représentatif

- **Non consolidée** : La phase solide est constituée de grains ou de fibres qui ne sont pas liés entre eux (par exemple, graviers, sable, limon, billes de verre ou d'acier, et autres matériaux divers).
- **consolidée** : Ici, la matrice solide est compacte et ne peut être divisée en grains ou fibres. Cela comprend des matériaux tels que les roches calcaires, les grès, les argiles, le bois, la céramique, les poudres frittées, ainsi que les tissus végétaux et animaux.

2.1.2 Notion de Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)

Le Volume Élémentaire Représentatif (VER) est un concept fondamental pour la modélisation des écoulements de fluides en milieux poreux. Il représente le plus petit volume du milieu poreux qui capture les propriétés moyennes du système, telles que la porosité, la perméabilité et les saturations en fluides, c'est un élément de volume du milieu suffisamment grand pour contenir un grand nombre de pores (ou, si on se place à l'échelle d'homogénéisation ou à l'échelle gigascopique, un grand nombre de zones hétérogènes élémentaires), de telle sorte qu'on puisse y définir des propriétés moyennes globales avec l'assurance que l'effet de fluctuation sera négligeable, mais aussi suffisamment petit pour que les variations de paramètres d'un domaine au domaine voisin puissent être approchées par des fonctions régulières sans introduire d'erreur inacceptable à l'échelle considérée.

2.2 Paramètres du milieu poreux

2.2.1 Porosité

Le paramètre principal décrivant un milieu poreux est la porosité. Considérons un échantillon de roche de volume total . Ce volume est constitué d'un volume solide et d'un volume de vides contenant un ou plusieurs fluides.

2.2.2 La porosité totale

La porosité totale, ϕ est le rapport entre le volume des vides et le volume total du milieu poreux :

$$\phi = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}}.$$

Par définition, la porosité d'un échantillon poreux varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide), c'est-à-dire :

$$0 \leq \phi \leq 1.$$

La porosité totale, ϕ , est le rapport entre le volume des vides et le volume total du milieu poreux :

$$\phi = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}}.$$

Par définition, la porosité d'un échantillon poreux varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide), c'est-à-dire :

$$0 \leq \phi \leq 1.$$

(La porosité est une variable adimensionnelle, exprimée en %).

On considère souvent que la porosité est :

- **faible** si $\phi < 5\%$,
- **médiocre** si $5\% < \phi < 10\%$,
- **moyenne** si $10\% < \phi < 20\%$,
- **bonne** si $20\% < \phi < 30\%$,
- **excellente** si $\phi > 30\%$.

De façon générale, la porosité est une fonction décroissante de la profondeur. Une partie de l'eau contenue dans un milieu poreux est liée au matériau et ne peut pas circuler. Cette eau peut être considérée comme une partie du solide d'un point de vue hydrodynamique, ce qui conduit à la définition de la porosité cinématique ou efficace :

$$\phi_c = \frac{V_p}{V_0} = \frac{\text{Volume des vides occupés par un fluide mobile}}{\text{Volume total}}.$$

En général, la porosité efficace varie entre 0,25 et 0,45 selon le milieu poreux.

2.2.3 Porosité Surfactive

La porosité étant une notion tridimensionnelle, elle peut être transposée en une porosité surfactive en deux dimensions :

$$\phi_s = \frac{A_p}{A_0} = \frac{\text{Surface des pores}}{\text{Surface totale}}.$$

Si le milieu est homogène (indépendance par rapport à z), l'aire des pores sur une section est donnée par $\phi_s A_0$. Le volume des pores est alors :

$$V_p = \int A_p(z) dz = A_0 \phi_s \int dz = \phi_s V_0.$$

Par conséquent, sous hypothèse d'homogénéité et d'isotropie :

$$\phi_s = \phi.$$

2.2.4 Porosité Linéique

En une dimension, on peut définir la porosité linéique par :

$$\phi_l = \frac{L_p}{L_0} = \frac{\text{Longueur occupée par les pores}}{\text{Longueur totale}}.$$

Si le matériau est homogène et isotrope, on montre que :

$$\phi = \phi_s = \phi_l.$$

L'égalité $\phi = \phi_s = \phi_l$ est valable uniquement sous hypothèse d'homogénéité et d'isotropie du milieu. Dans les matériaux naturels hétérogènes ou anisotropes, ces relations peuvent ne pas être strictement valides.

2.2.5 Perméabilité

La perméabilité intrinsèque $K[L^2]$ est une propriété intrinsèque du milieu poreux, indépendamment des caractéristiques du fluide. Elle est une fonction de l'espace et est définie par maille. Elle est homogène à une surface.

2.3 Équations fondamentales

2.3.1 Écoulement en régime saturé

Cette équation exprime que les pores du milieu poreux sont entièrement occupés par les deux fluides, on dira qu'on est en *régime saturé* :

$$s_w + s_o = 1, \quad \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T)$$

tel que :

$$\begin{aligned} s_w &: \text{saturation d'eau, phase mouillante (wetting phase),} \\ s_o &: \text{saturation de l'huile, phase non mouillante (nonwetting phase).} \end{aligned}$$

Dans ce travail, on pose que :

$$s_o = s, \quad s_w = 1 - s.$$

2.3.2 Loi de conservation de la masse

L'équation de continuité exprime le principe de conservation de la masse. Elle découle du fait que la variation de la masse d'un fluide contenu dans un volume élémentaire du milieu poreux correspond à la différence entre les quantités de fluide entrant et sortant durant un même intervalle de temps.

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) + q.$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &: \text{vitesse du fluide, } [LT^{-1}], \\ \rho &: \text{masse volumique du fluide, } [ML^{-3}], \\ \phi &: \text{porosité du milieu poreux,} \\ q &: \text{source extérieure ou puits.} \end{aligned}$$

Notons que q est négatif pour les puits et positif pour les sources.

L'équation de conservation de la masse pour deux fluides (w : l'eau (*water*), o : l'huile (*oil*)) s'écrit :

$$\frac{\partial(\phi(x)\rho_i s_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) = \rho_i q_i, \quad i = w, o.$$

En supposant que l'écoulement est incompressible, c'est-à-dire que la densité ρ_i est constante, et que la porosité ϕ ne dépend que de la variable spatiale x , on peut écrire :

$$\phi(x)\rho_i \frac{\partial s_i}{\partial t} + \rho_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i = \rho_i q_i, \quad i = w, o.$$

Enfin, en exprimant la conservation de la masse pour chaque fluide $i = w, o$, nous obtenons :

$$\phi(x) \frac{\partial s_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V}_i = q_i, \quad \text{dans } \Omega_T,$$

en supposant des sections d'écoulement uniformes. Ici, \mathbf{V}_i représente la vitesse de filtration de la phase i , ϕ la porosité du milieu, et l'hypothèse d'incompressibilité implique que ϕ ne dépend que de la variable d'espace x .

2.3.3 Loi de Darcy généralisée et perméabilité relative

La loi de Darcy décrit le mouvement d'un fluide dans un milieu poreux. Pour un écoulement monophasique, elle s'exprime comme : pour chaque fluide $i = w ; o$:

$$\mathbf{V}_i = -k_i K(x) (\nabla p_i - \rho_i g).$$

Dans cette expression, $K(x)$ désigne le tenseur des perméabilités absolues du réservoir Ω , tandis que p_i représente la pression de la phase i . La mobilité de cette phase, notée k_i , traduit les effets de résistance opposés à l'écoulement d'un fluide en présence de l'autre. De plus, ρ_i correspond à la masse volumique du fluide i , et g à l'accélération gravitationnelle. La mobilité k_i est définie par :

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i},$$

où k_{ri} désigne la perméabilité relative de la phase i . Celle-ci traduit l'influence de la présence d'un fluide sur l'écoulement de l'autre. Elle est une fonction croissante de la saturation s_i , dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 .

Dans ce travail, nous adoptons les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_w(s) = \frac{k_{rw}(1-s)}{\mu_w}, \\ \lambda_o(s) = \frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}. \end{cases}$$

2.3.4 Loi de capillarité

Lorsqu'il y a coexistence de deux fluides non miscibles, une interface se forme entre eux, engendrant une différence de pression appelée pression capillaire. Cette pression capillaire dépend de la saturation et s'exprime par la relation suivante

$$p_c(s) = p_o - p_w, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où :

- $p_c(s)$ est la pression capillaire, fonction de la saturation s ;
- p_o et p_w représentent respectivement les pressions des phases huile (*oil*) et eau (*water*).

2.3.5 La pression globale

Dans le cas d'un écoulement diphasique incompressible, la pression globale est définie par la relation suivante :

$$p = p_o - \int_0^s \frac{\lambda_w(a)}{\lambda_w(a) + \lambda_o(a)} p_c(a) da,$$

où :

- p est la pression globale,
- p_o est la pression de la phase huile,
- $\lambda_w(a)$ et $\lambda_o(a)$ sont respectivement les mobilités des phases eau et huile,
- $p_c(a)$ est une pression capillaire de référence.

Remarque

On peut réécrire l'expression de la pression globale comme suit :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_o - \int_0^s \frac{\lambda_w(a)}{\lambda_w(a) + \lambda_o(a)} p_c(a) da \\ &= p_o - \int_0^s \frac{\lambda_w(a) + \lambda_o(a) - \lambda_o(a)}{\lambda_w(a) + \lambda_o(a)} p_c(a) da \\ &= p_o - (p_o - p_w) + \int_0^s \frac{\lambda_o(a)}{\lambda_o(a) + \lambda_w(a)} p_c(a) da \\ &= p_w + \int_0^s \frac{\lambda_o(a)}{\lambda_o(a) + \lambda_w(a)} p_c(a) da. \end{aligned}$$

Lemme 2.1. La pression globale p vérifie l'équation suivante :

$$(\lambda_o + \lambda_w) \nabla p = \lambda_o \nabla p_o + \lambda_w \nabla p_w.$$

Démonstration. Nous définissons la pression globale p par la relation :

$$\nabla p := \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} \nabla p_o + \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \nabla p_w,$$

où λ_o et λ_w désignent respectivement les mobilités relatives des phases huile et eau. En multipliant chaque membre de cette égalité par $\lambda_o + \lambda_w$, on obtient :

$$(\lambda_o + \lambda_w) \nabla p = \lambda_o \nabla p_o + \lambda_w \nabla p_w,$$

ce qui conclut la démonstration. □

2.3.6 Condition initiale et conditions aux bords

Sur la frontière $\partial\Omega$, nous considérons les conditions suivantes :

Condition initiale :

$$p(x, 0) = p_0(x) \text{ et } s(x, 0) = s_0(x), \quad \text{pour } x \in \Omega.$$

Conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$p = 0, \quad s = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T).$$

2.4 Modélisation des réservoirs

2.4.1 Le système à résoudre

Pour obtenir le système gouvernant l'écoulement de l'huile et de l'eau, nous réécrivons les équations de conservation pour chaque phase mouillante et non-mouillante en y introduisant les équations de Darcy (2.3.3), ce qui donne :

$$\phi \frac{\partial s_o}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K \frac{k_{ro}(s_o)}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g) \right) = q_o, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K \frac{k_{rw}(s_w)}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g) \right) = q_w, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (2.2)$$

En posant $s_o = s$ et $s_w = 1 - s$, on obtient :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K \frac{k_{ro}(s)}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g) \right) = q_o, \quad (2.3)$$

$$\phi \frac{\partial(1-s)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K \frac{k_{rw}(1-s)}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g) \right) = q_w. \quad (2.4)$$

En utilisant les mobilités définies par :

$$\lambda_w(s) = \frac{k_{rw}(1-s)}{\mu_w}, \quad \lambda_o(s) = \frac{k_{ro}(s)}{\mu_o}, \quad (2.5)$$

on peut réécrire :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x) \lambda_o(s) (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g})) = q_o, \quad (2.6)$$

$$-\phi \frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x) \lambda_w(s) (\nabla p_w - \rho_w g)) = q_w. \quad (2.7)$$

En additionnant ces deux équations et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$-\nabla \cdot (K(x) [(\lambda_w(s) \nabla p_w + \lambda_o(s) \nabla p_o) - (\lambda_w(s) \rho_w + \lambda_o(s) \rho_o) g]) = q_w + q_o. \quad (2.8)$$

D'après le lemme 2.1, cette équation peut être reformulée sous la forme :

$$-\nabla \cdot (K(x) [\lambda(s) \nabla p - \xi(s) g]) = q_w + q_o, \quad (2.9)$$

où :

$$\lambda(s) = \lambda_w(s) + \lambda_o(s), \quad \xi(s) = \lambda_w(s)\rho_w + \lambda_o(s)\rho_o. \quad (2.10)$$

La deuxième équation du modèle s'obtient en utilisant la relation :

$$\mathbf{V}_o = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \mathbf{V}_o - \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} \mathbf{V}_w + \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} (\mathbf{V}_o + \mathbf{V}_w). \quad (2.11)$$

L'équation de conservation de l'huile s'écrit :

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V}_o = q_o. \quad (2.12)$$

En injectant la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K \frac{\lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} [(\lambda_o \nabla p_o + \lambda_w \nabla p_w) - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w) g] \right) \\ - (\rho_o - \rho_w) K \frac{\lambda_o \lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} g + \frac{\lambda_o \lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} K (\nabla p_o - \nabla p_w) = q_o. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En utilisant $\nabla p_o - \nabla p_w = p'_c(s) \nabla s$, on introduit :

$$\varphi(s) = \int_0^s \frac{\lambda_o(a) \lambda_w(a)}{\lambda_o(a) + \lambda_w(a)} p'_c(a) da. \quad (2.14)$$

Finalement, le système complet s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = q_w + q_o, & \text{dans } \Omega_T, \\ u = -K(\lambda(s) \nabla p - \xi(s) g), & \text{dans } \Omega_T, \\ \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (u f(s) + \gamma(s) K g) - \nabla \cdot (K \nabla \varphi(s)) = q_o, & \text{dans } \Omega_T. \end{cases} \quad (2.15)$$

avec les conditions aux limites et la condition initiale :

$$s = 0, \quad p = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega_T, \quad (2.16)$$

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.17)$$

2.4.2 Hypothèses sur les données

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H1) La fonction $\varphi \in C(\mathbb{R})$ satisfait $\varphi(0) = 0$. Elle est strictement croissante par morceaux et lipschitzienne avec une constante de Lipschitz L_φ . De plus, φ^{-1} est Hölderienne, c'est-à-dire qu'il existe $H_\varphi > 0$ et $\alpha \in (0, 1]$ tels que :

$$|s_1 - s_2| \leq H_\varphi |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)|^\alpha.$$

Enfin, on suppose que $\varphi(s) = s$ pour tout $s < 0$ et que $\varphi(s) - \varphi(1) = s - 1$ pour tout $s > 1$.

(H2) Les fonctions $\lambda, \xi, \gamma, f \in C([0, 1])$ sont lipschitziennes avec des constantes de Lipschitz notées respectivement $L_\lambda, L_\xi, L_\gamma$ et L_f .

— λ est strictement positive et bornée telle que :

$$0 < \lambda \leq \lambda(s).$$

— ξ et γ sont convexes. En outre, γ satisfait :

$$\gamma(0) = \gamma(1).$$

De plus, g est un vecteur constant de \mathbb{R}^d .

— f est une fonction croissante qui satisfait :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

(H3) Les fonctions λ, ξ, γ, f sont constantes en dehors de l'intervalle $(0, 1)$, c'est-à-dire que :

$$f(s) = f(0) \quad \text{pour tout } s < 0, \quad \text{et} \quad f(s) = f(1) \quad \text{pour tout } s > 1.$$

(H4a) Ω est un domaine polygonal ouvert, borné et connexe de \mathbb{R}^d avec $d \in \mathbb{N}^*$, et sa frontière est donnée par $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

(H4b) La perméabilité K est une fonction constante par morceaux définie dans Ω à valeurs dans $M_d(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices $d \times d$ à coefficients réels. Plus précisément, il existe une famille finie $(\Omega_i)_{i \in \{1, \dots, I\}}$ d'ouverts connexes et polyédriques de \mathbb{R}^d , telle que :

$$\Omega = \bigcup_{i \in \{1, \dots, I\}} \Omega_i, \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j.$$

Sur chaque sous-domaine Ω_i , on suppose que $K|_{\Omega_i}(x) = K_i \in M_d(\mathbb{R})$. L'interface entre deux sous-domaines Ω_i et Ω_j est notée $\Gamma_{i,j}$, avec :

$$\Gamma_{i,j} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j.$$

On suppose également que chaque matrice K_i est définie positive et qu'il existe deux constantes positives K_{\min} et K_{\max} telles que les valeurs propres de K_i soient contenues dans l'intervalle :

$$[K_{\min}, K_{\max}], \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}.$$

(H5) $s_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\phi \in L^\infty(\Omega)$ telles que :

$$0 < \phi_{\min} \leq \phi(x) \leq \phi_{\max}, \quad \forall x \in \Omega.$$

(H6) $q_o, q_w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et vérifient :

$$q_o + q_w \geq 0 \quad \text{dans } \Omega_T.$$

2.4.3 Existence et unicité d'une solution faible

Définition et Théorème (Solution faible) [2].

Un couple de fonctions (s, p) est une solution faible du problème (2.15)–(2.17) si :

- (i) $s \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$;
- (ii) $\varphi(s) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$;
- (iii) $p \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$;
- (iv) pour tout $\psi, \chi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ avec $\psi_t \in L^\infty(\Omega_T)$ et $\psi(\cdot, T) = 0$, les fonctions s et p satisfont les égalités intégrales :

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_\Omega \phi s \psi_t \, dx dt - \int_\Omega \phi s_0 \psi(x, 0) \, dx \\
 - \int_0^T \int_\Omega (u f(s) \\
 + \gamma(s) K g) \cdot \nabla \psi \, dx dt \\
 + \int_0^T \int_\Omega K \nabla \varphi(s) \cdot \nabla \psi \, dx dt = \int_0^T \int_\Omega q_o \psi \, dx dt.
 \end{aligned}$$

$$- \int_0^T \int_\Omega u \cdot \nabla \chi \, dx dt = \int_0^T \int_\Omega (q_w + q_o) \chi \, dx dt,$$

où u est donné par (2.15).

Remarque Dans le prochain chapitre on va négliger le terme de gravité g , car on a supposé que l'écoulement est horizontale.

Chapitre 3

Existence de solution faible pour les écoulements diphasiques en milieu poreux

Les écoulements diphasiques en milieux poreux sont régis par un système couplé d'équations aux dérivées partielles (EDP), comprenant une équation elliptique linéaire pour la pression et une équation non linéaire parabolique dégénérée pour la saturation.

Dans ce chapitre, nous présentons deux approches clés : La méthode de Lax-Milgram pour l'équation de pression. La méthode de Galerkin pour l'équation de saturation.

Ces méthodes exploitent la structure variationnelle des équations et garantissent la stabilité et la convergence des solutions approchées.

3.1 Méthode de Lax-Milgram pour l'équation de la pression :

3.1.1 Formulation Variationnelle

Considérons l'équation de pression :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = q_w + q_o \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

La formulation variationnelle de l'équation de pression est donnée par :

$$a(p, \chi) = L(\chi),$$

Soit $\chi \in H_0^1(\Omega)$ une fonction test s'annulant sur $\partial\Omega_D$. En multipliant l'équation (3.1) par χ et en intégrant sur le domaine Ω , on obtient :

$$-\int_{\Omega} \chi \nabla \cdot (K\lambda(s_w)\nabla p) dx = \int_{\Omega} (q_w + q_o)\chi dx$$

Appliquons la formule de Green au terme de gauche :

$$-\int_{\Omega} \chi \nabla \cdot (K\lambda(s_w)\nabla p) dx = \int_{\Omega} (K\lambda(s_w)\nabla p) \cdot \nabla \chi dx - \int_{\partial\Omega} \chi ((K\lambda(s_w)\nabla p) \cdot \vec{n}) ds$$

Les termes aux limites se simplifient :

- Sur $\partial\Omega_D$: $\chi = 0$ par définition de l'espace $H_0^1(\Omega)$
- Sur $\partial\Omega_N$: $\nabla p \cdot \vec{n} = 0$ par la condition de Neumann

On obtient ainsi la formulation faible du problème :

$$\int_{\Omega} (K\lambda(s_w)\nabla p) \cdot \nabla \chi \, dx = \int_{\Omega} (q_w + q_o)\chi \, dx \quad \forall \chi \in H_0^1(\Omega)$$

donc on définit :

- La forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a(p, \chi) = \int_{\Omega} (K\lambda(s_w)\nabla p) \cdot \nabla \chi \, dx$$

- La forme linéaire $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L(\chi) = \int_{\Omega} (q_w + q_o)\chi \, dx$$

On va vérifier les conditions de le théorème de Lax-Milgram :

3.1.1.1 Linéarité de la Forme Bilinéaire :

On doit vérifier que $a(p, \chi)$ est linéaire par rapport à chaque argument :

- **Linéarité par rapport à χ** : Pour p fixé et $\chi_1, \chi_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$a(p, \chi_1 + \chi_2) = \int_{\Omega} K\lambda(s)\nabla p \cdot \nabla(\chi_1 + \chi_2) \, dx = a(p, \chi_1) + a(p, \chi_2)$$

$$a(p, \alpha\chi) = \alpha a(p, \chi)$$

- **Linéarité par rapport à p** : Pour χ fixé et $p_1, p_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$a(p_1 + p_2, \chi) = \int_{\Omega} K\lambda(s)\nabla(p_1 + p_2) \cdot \nabla \chi \, dx = a(p_1, \chi) + a(p_2, \chi)$$

$$a(\beta p, \chi) = \beta a(p, \chi)$$

3.1.1.2 Continuité de la Forme Bilinéaire :

On montre que $a(p, \chi)$ est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a(p, \chi)| \leq \int_{\Omega} |K\lambda(s)| |\nabla p \cdot \nabla \chi| \, dx \leq \|K\lambda(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \chi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, $a(p, \chi)$ est continue avec $C = \|K\lambda(s)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

3.1.1.3 Coercivité de la Forme Bilinéaire :

En utilisant la positivité de K et $\lambda(s)$:

$$a(p, p) = \int_{\Omega} K\lambda(s)|\nabla p|^2 dx \geq \alpha_0 \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par l'inégalité de Poincaré :

$$\|p\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_p \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Donc :

$$a(p, p) \geq \frac{\alpha_0}{C_p} \|p\|_{H^1(\Omega)}^2 = \alpha \|p\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

D'où la coercivité de $a(p, p)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

3.1.1.4 Linéarité de L :

Pour tout $\chi_1, \chi_2 \in H_0^1(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} L(\alpha\chi_1 + \beta\chi_2) &= \int_{\Omega} (q_w + q_o)(\alpha\chi_1 + \beta\chi_2) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} (q_w + q_o)\chi_1 dx + \beta \int_{\Omega} (q_w + q_o)\chi_2 dx \\ &= \alpha L(\chi_1) + \beta L(\chi_2). \end{aligned}$$

3.1.1.5 Continuité de la Forme Linéaire L

On a $q_w + q_o \in L^2(\Omega)$;

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on prend :

$$|L(\chi)| \leq \int_{\Omega} |q_w + q_o| |\chi| dx \leq \|q_w + q_o\|_{L^2(\Omega)} \|\chi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, et comme $\chi \in H_0^1(\Omega)$ et Ω est borné, $\exists C_p > 0$ tel que :

$$\|\chi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla \chi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\chi\|_{H^1(\Omega)}.$$

En combinant ces résultats, on obtient la majoration :

$$|L(\chi)| \leq \underbrace{\|q_w + q_o\|_{L^2(\Omega)} C_p}_{=C_L} \|\chi\|_{H^1(\Omega)},$$

où $C_L = C_p \|q_w + q_o\|_{L^2(\Omega)}$ est la constante de continuité.

D'où la continuité de L sur $H_0^1(\Omega)$.

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, donc on peut conclure qu'il existe une unique solution faible $p \in H_0^1(\Omega)$ du problème.

3.2 Méthode de Galerkin pour l'équation de saturation

3.2.1 Existence de solutions faibles cas non dégénéré

Remarquons que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (K \nabla \varphi(s)) &= -\nabla \cdot (K \varphi'(s) \nabla s). \\ \text{et } \nabla \varphi(s) &= \varphi'(s) \nabla s \end{aligned}$$

alors

Le coefficient de **dissipation** $\varphi'(u)$ est remplacé par

$$\varphi'_\eta(u) = \varphi'(u) + \eta \quad \text{avec } \eta > 0 \quad \text{une constante.}$$

Considérons alors le problème régularisé : trouver deux fonctions u_η et p_η solutions du système régularisé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot u_\eta = q_w + q_o, & \text{dans } \Omega_T, \\ u_\eta = -K \lambda(s_\eta) \nabla p_\eta, & \text{dans } \Omega_T, \\ \phi \frac{\partial s_\eta}{\partial t} + \nabla \cdot (u_\eta f(s_\eta)) - \nabla \cdot (K \varphi'_\eta(s_\eta) \nabla s_\eta) = q_o, & \text{dans } \Omega_T, \\ \text{avec les conditions aux limites et initiales (CL) + (CI) correspondants.} & \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Définition 3.1. On appelle solution faible du problème (3.2) un couple (u_η, p_η) de fonctions vérifiant toutes les conditions où (u, p) est remplacé par (u_η, p_η) .

Théorème 3.2. Sous les hypothèses , le problème ((3.2)) admet au moins une solution faible.

Bien que les solutions possibles dépendent de η , mais pour simplifier, nous notons simplement (u, p) au lieu de (u_η, p_η) .

Démonstration. Pour prouver l'existence d'une solution du système ((3.2)), nous allons faire usage de la méthode d'approximation de Galerkin. Comme nous ne savons pas a priori que les solutions cherchées sont bornées, nous sommes obligés de prolonger par continuité les fonctions coefficients du système ((3.2)) hors de leur domaines "naturels" de définition. On pose donc

$$\begin{aligned} \bar{p}(s) &= p(s) \quad , s = u \\ \bar{\alpha}(u) &= \alpha(u) \quad \text{si } u \in [0, 1], & \alpha(u) &= 0 \quad \text{si } u \leq 0 \text{ ou } u \geq 1; \\ \bar{f}(u) &= f(u) \quad \text{si } u \in [0, 1], & f(u) &= 0 \quad \text{si } u \leq 0, \quad f(u) = f(1) \quad \text{si } u \geq 1; \\ \bar{\lambda}(u) &= \lambda(u) \quad \text{si } u \in [0, 1], & k(u) &= 0 \quad \text{si } u \leq 0 \text{ ou } u \geq 1. \end{aligned}$$

□

3.2.2 Méthode de Galerkin pour l'équation de saturation

Nous supposons ici que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$. Soit $\{v_n\}_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$, orthogonale pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Soit H_N le sous-espace engendré par les N premières fonctions de cette base, $H_N = [v_1, v_2, \dots, v_N]$. Nous chercherons une solution approchée de l'équation de saturation sous la forme suivante :

$$s_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(t) v_i(x), \quad (x, t) \in \Omega_T,$$

avec les fonctions ξ_i , $i = 1, \dots, N$, de classe C^1 sur $[0, T]$. Ainsi, $s_N \in C^1([0, T]; H_N)$. La fonction s_N doit vérifier la même identité intégrale que s mais sur H_N et la "condition initiale" :

$$(G_N) \begin{cases} \int_{\Omega} \phi \frac{ds_N}{dt} \psi_N dx - \int_{\Omega} f(s_N) \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_N dx \\ \quad + \int_{\Omega} K \varphi_\eta(s_N) \nabla s_N \cdot \nabla \psi_N dx \\ \quad + \int_{\Gamma_s} f(s_N) \psi_N q_s d\gamma = 0, \quad \forall \psi_N \in H_N, \\ s_N(0) = P_N(s_0), \quad P_N = \text{projection orthogonale sur } H_N, \end{cases} \quad (3.3)$$

où la projection P_N sur H_N est prise par rapport au produit scalaire de L^2 . Pour vérifier l'identité intégrale dans (G_N) , il suffit de la vérifier sur les fonctions de base de H_N , c'est-à-dire pour $\psi_N = v_i$, $i = 1, \dots, N$. Avec ce choix de fonctions ψ_N , le problème (G_N) est équivalent aux problèmes de Cauchy pour le système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{d\xi}{dt} = F(\xi), \quad \xi(t) = (\xi_i(t))_{i=1}^N,$$

où F est une fonction continue par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^N$. Le théorème de Cauchy-Peano garantit l'existence locale d'une solution de classe C^1 en temps définie sur un intervalle $[0, T_N]$ avec $0 < T_N \leq T$. Pour montrer que $T_N = T$, nous utilisons le théorème d'explosion en temps fini des équations différentielles ordinaires. Pour montrer qu'il n'y a pas d'explosion en temps fini, il est nécessaire d'établir des estimations d'énergie sur s_N , indépendantes de N . Ce théorème d'explosion en temps fini garantit alors que nous avons $T_N = T$.

3.2.3 Estimations d'énergie

Prenons dans (G_N) comme fonction test $\psi_N = s_N$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi \frac{d}{dt} \|s_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} K \varphi_\eta(s_N) \|\nabla s_N\|^2 dx \\ \leq \int_{\Omega} |f(s_N) \mathbf{u} \cdot \nabla s_N| dx \end{aligned}$$

Or,

$$|f(s)| \leq 1; \quad |k(s)| \leq \bar{k} = \max_{[0,1]} |k|; \quad \varphi_\eta(s) \geq \eta, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(s_N) \mathbf{u} \cdot \nabla s_N dx \right| &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \int_{\Omega} f(s_N) \mathbf{u} \cdot \nabla s_N dx \right| &\leq \bar{k} \int_{\Omega} |\nabla s_N| dx \leq \bar{k} |\Omega|^{1/2} \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \int_{\Gamma_s} f(s_N) q_s s_N d\gamma \right| &\leq \|q_s\|_{L^2(\Gamma_s)} \|s_N\|_{L^2(\Gamma_s)} \leq C \|q_s\|_{L^2(\Gamma_s)} \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité a été obtenue en utilisant la continuité de l'application trace. Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\phi_* \frac{d}{dt} \|s_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \gamma(t) \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)},$$

avec

$$\gamma(t) = \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \bar{k}|\Omega|^{1/2} + C\|q_s\|_{L^2(\Gamma_s)},$$

et nous avons par hypothèse $\sup_{t \in [0, T]} \gamma(t) \leq \bar{\gamma}$. Rappelons maintenant l'inégalité de Cauchy en " ε " : pour tous réels positifs a et b , nous avons

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Pour $a = \gamma$, $b = \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}$ et $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\gamma \|\nabla s_N\|_{L^2} \leq \frac{\gamma^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant cette estimation dans l'inégalité (30), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|s_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\eta}{2} \|\nabla s_N\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\bar{\gamma}^2}{2\eta}.$$

En intégrant sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec $t \leq T_n \leq T$, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \|s_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\eta}{2} \int_0^t \|\nabla s_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{\bar{\gamma}^2}{2\eta} T + \frac{1}{2} \|s_N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Mais, $s_N(0) = P_N s_0$ avec P_N l'opérateur de projection sur H_N dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Ainsi, $\|P_N\|_{(L^2)'} = 1$, ce qui implique que

$$\|s_N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|P_N\|_{L^2} \|s_0\|_{L^2} = \|s_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, nous avons prouvé que

$$\|s_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \int_0^t \|\nabla s_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{\gamma^2}{\eta} T + \|s_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \in [0, T_n].$$

Cette estimation montre que les normes des solutions approchées s_N dans $L^2(\Omega)$ sont bornées indépendamment de N . Ainsi, les solutions sont globales, c'est-à-dire $T_N = T$. L'estimation (32) montre également que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sup_{t \in [0, T]} \|s_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

$$\eta \|s_N\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C, \tag{3.4}$$

avec C une constante positive indépendante de N . Pour la compacité de la suite des solutions approchées dans un espace adéquat, nous avons besoin d'établir une estimation uniforme (indépendante de N) de $\partial_t s_N$. Soit $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Comme $s_N \in C^1(0, T; H_N)$, alors nous avons $s_N(t) \in H_N$ et $\frac{ds_N}{dt} \in H_N$. Pour $t \in]0, T[$, décomposons $\psi(t)$ à l'aide de P_N , la projection orthogonale sur H_N dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$:

$$\psi(t) = P_N \psi(t) + Q_N \psi(t), \quad Q_N = \text{id}_{H_0^1} - P_N$$

où $\text{id}_{H_0^1}$ est l'application identité de $H_0^1(\Omega)$. L'opérateur adjoint tP_N est un opérateur linéaire continu sur H' de norme ≤ 1 , ce qui nous donne :

$$\left\langle \phi \frac{ds_N}{dt}(t), \psi(t) \right\rangle_{H',H} = \left\langle \phi \frac{ds_N}{dt}(t), P_N\psi(t) + Q_N\psi(t) \right\rangle_{H',H} = \left\langle \phi \frac{ds_N}{dt}(t), P_N\psi(t) \right\rangle_{H',H}.$$

Nous pouvons alors utiliser l'équation (G_N) intégrée en temps. En utilisant les hypothèses et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \phi_* \left| \int_0^T \left\langle \frac{ds_N}{dt}, P_N\psi \right\rangle dt \right| &\leq \|\mathbf{u}\|_{L_t^2(L_x^2)} \|\nabla(P_N\psi)\|_{L_t^2(L_x^2)} \\ &\quad + k_\infty(\bar{\varphi} + \eta) \|\nabla s_N\|_{L^2(L^2)} \|\nabla(P_N\psi)\|_{L_t^2(L_x^2)} \\ &\quad + k_\infty \bar{k} \|\nabla(P_N\psi)\|_{L_t^1(L_x^1)} + \|q_s\|_{L_t^\infty(L^2(\Gamma_s))} \|P_N\psi\|_{L_t^2(L^2(\Gamma_s))}. \end{aligned}$$

Nous avons $\|P_N\|_{H_0^1} \leq 1$. Alors,

$$\left| \int_0^T \left\langle \phi \frac{ds_N}{dt}, \psi \right\rangle dt \right| \leq C \|\psi\|_{L^2(H_0^1)}, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

où C est une constante indépendante de N , qui peut dépendre de η . En conclusion, nous avons :

$$\left\{ \frac{ds_N}{dt} \right\}_{N=1}^\infty \text{ reste bornée dans } L^2\left(0, T; (H_0^1(\Omega))'\right). \quad (3.5)$$

3.2.4 Passage à la limite par rapport à N à $\eta > 0$ fixé

Nous devons utiliser un résultat de compacité de Jacques Simon[7] (page 85, Corollaire 4) dont voici une traduction :

Proposition 3.1 (Simon). Soient X , B et Y trois espaces de Banach avec X s'injectant compactement dans B et l'injection de cet espace dans Y continue. On note :

$$X \hookrightarrow_{\text{compact}} B \hookrightarrow_{\text{continue}} Y.$$

— Soit F un sous-ensemble borné dans $L^q(0, T; X)$ avec $1 \leq q < \infty$, tel que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \mid f \in F \right\}$$

peut être borné dans $L^1(0, T; Y)$. Alors, F est relativement compact dans $L^q(0, T; B)$.

— Soit F un sous-ensemble borné dans $L^\infty(0, T; X)$, tel que $\frac{\partial F}{\partial t}$ peut être borné dans $L^r(0, T; Y)$ avec $r > 1$. Alors, F est relativement compact dans $C(0, T; B)$.

Rappelons les injections classiques suivantes :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_{\text{compact}} L^2(\Omega) \hookrightarrow_{\text{continue}} (H_0^1(\Omega))'.$$

Il est alors possible d'utiliser la proposition précédente avec $q = 2$, $X = H_0^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$ et $Y = (H_0^1(\Omega))'$. Ainsi, l'injection

$$\left\{ v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \mid v' = \frac{dv}{dt} \in L^2\left(0, T; (H_0^1(\Omega))'\right) \right\}$$

dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ est compacte, voir [1],[6]. Pour $\eta > 0$ fixé, en utilisant les estimations (3.2.3) et (3.5), nous voyons que la suite des solutions approchées $\{s_N\}_{N=1}^\infty$ est relativement compacte dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Ainsi, pour extraire une sous-suite, nous supposons que

$$s_N \rightarrow s \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et p.p. dans } \Omega_T.$$

Alors,

$$s_N \rightarrow s \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible, } s_N \rightarrow s \text{ dans } L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))') \text{ faible.}$$

Nous obtenons :

$$s_N \rightarrow s \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)).$$

Nous pouvons alors passer à la limite dans la formulation faible (G_N). En effet, soit $\psi_k \in H_N$, k fixé, $k \leq N$, et soit $\psi = \psi(t) \in \mathcal{D}([0, T])$. Multiplions (G_N) et intégrons de 0 à T . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \phi \frac{ds_N}{dt}, \psi_k \right\rangle \psi(t) dt - \int_{\Omega_T} f(s_N) \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_k \psi(t) dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} K \varphi_\eta(s_N) \nabla s_N \cdot \nabla \psi_k \psi(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_s} f(s_N) \psi_k q_s \psi(t) d\gamma dt. \end{aligned}$$

En gardant k fixé, faisons tendre N vers l'infini. Alors, nous avons :

(a) puisque $\partial_t s_N \rightharpoonup \partial_t s$ dans $L^2(0, T; V')$ (avec $V = H_0^2(\Omega)$); donc,

$$\int_0^T \left\langle \phi \frac{ds_N}{dt}, \psi_k \psi \right\rangle_{V', V} dt \rightarrow \int_0^T \left\langle \phi \frac{ds}{dt}, \psi_k \psi \right\rangle_{V', V} dt.$$

(b) Comme $s_N \rightarrow s$ p.p. dans Ω_T et f continue, nous avons $f(s_N) \rightarrow f(s)$ p.p. dans Ω_T et $|f(\cdot)| \leq 1$. Après avoir utilisé le théorème de convergence dominée, nous pouvons passer à la limite et nous obtenons :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_T} f(s_N) \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_k \psi(t) dx dt = \int_{\Omega_T} f(s) \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_k \psi(t) dx dt.$$

(c) D'une part, nous avons $\nabla s_N \rightharpoonup \nabla s$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ faible. D'autre part, nous avons $\varphi_\eta(s_N) \rightarrow \varphi_\eta(s)$ p.p. dans Ω_T et φ_η bornée, donc (en notant par d la dimension de l'espace ambiant de Ω) :

$$K \varphi_\eta(s_N) \nabla \psi_k \psi(t) \rightarrow K \varphi_\eta(s) \nabla \psi_k \psi(t) \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega))^d \text{ fortement,}$$

puisque

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega_T} K \varphi_\eta(s_N) \nabla s_N \cdot \nabla \psi_k \psi(t) dx dt = \int_{\Omega_T} K \varphi_\eta(s) \nabla s_N \cdot \nabla \psi_k \psi(t) dx dt.$$

(d) Pour passer à la limite dans le terme "frontière" $\int_0^T \int_{\Gamma_s} f(s_N) \psi_k q_s \psi(t) d\gamma dt$, nous utilisons le fait que (par exemple) $H^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $H^{3/4}(\Omega)$ et la

continuité de l'application trace de cet espace dans $H^{1/4}(\Gamma)$. Pour Γ régulier, ces résultats sont donnés, par exemple, dans [4]. Nous en déduisons que nous avons :

$$s_N \rightarrow s \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)) \text{ fortement et p.p. sur } (0, T) \times \Gamma.$$

Ce résultat nous permet de passer à la limite et de voir que nous avons :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Gamma_s} f(s_N) \psi_k q_s \psi(t) d\gamma dt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} f(s) \psi_k q_s \psi(t) d\gamma dt.$$

Enfin, pour $\psi \in H_0^1(\Omega)$, en posant $\psi_k = P_k \psi$, projection orthogonale de ψ sur l'espace engendré par les fonctions v_1, \dots, v_k , nous voyons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \psi$ dans $H_0^1(\Omega)$ car la famille $\{v_k\}_k$ est totale dans cet espace. Ceci permet de remplacer dans les passages à la limite précédents ψ_k par n'importe quelle fonction ψ de $H_0^1(\Omega)$. Enfin, une conclusion est obtenue en utilisant le fait que les fonctions $\{\phi(t)\psi(x)\}$ avec $\psi(t) \in \mathcal{D}(]0, T[)$ et $\psi(x) \in H_0^1(\Omega)$ sont denses dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

En résumé, nous avons montré l'existence d'une fonction s_η , telle que

$$s_\eta \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ avec } \partial_t s \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

vérifiant

$$\begin{aligned} & \langle \phi \partial_t s_\eta, \psi \rangle_{L^2(0, T; (H_0^1)'), L^2(0, T; H_0^1)} - \int_{\Omega_T} f(s_\eta) \mathbf{u} \cdot \nabla \psi dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} K \varphi_\eta(s_\eta) \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_s} f(s_\eta) \psi q_s d\gamma dt = 0 \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

3.2.5 Passage à la limite par rapport à η

Les hypothèses sur φ (φ^{-1} est höldérienne d'ordre $\theta \in [0, 1]$) permettent d'extraire une sous-suite $\{u_\eta\}$ telle que

$$\begin{aligned} s_\eta & \rightharpoonup s \text{ dans } L^2(\Omega_T), \text{ fort,} \\ s_\eta & \rightharpoonup s \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort,} \\ \nabla \varphi(s_\eta) & \rightharpoonup \nabla \varphi(s) \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible,} \\ \partial_t s_\eta & \rightharpoonup \partial_t s \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)^*) \text{ faible pour } \eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ces convergences permettent de passer à la limite dans la formulation faible. En effet, pour $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on a

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t s_\eta, \psi \rangle_{L^2(H_0^1)^*, L^2(H_0^1)} - \int_{\Omega_T} f(s_\eta) \vec{u}_\eta \cdot \nabla \psi dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} \varphi(s_\eta) \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi dx dt + \eta \int_{\Omega_T} \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi dx dt \\ & - \int_{\Omega_T} \lambda(s_\eta) \vec{g} \cdot \nabla \psi dx dt + \int_{\Gamma_T} f(s_\eta) \psi \psi_s d\gamma dt = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les convergences faibles et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, le passage à la limite dans chacun des termes fournit successivement :

$$(a) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \langle \partial_t s_\eta, \psi \rangle = \langle \partial_t s, \psi \rangle$$

$$(b) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} f(s_\eta) \vec{u}_\eta \cdot \nabla \psi \, dxdt = \int_{\Omega_T} f(s) \vec{u} \cdot \nabla \psi \, dxdt$$

$$(c) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \varphi(s_\eta) \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi \, dxdt = \int_{\Omega_T} \varphi(s) \nabla s \cdot \nabla \psi \, dxdt$$

$$(d) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \lambda(s_\eta) \vec{g} \cdot \nabla \psi \, dxdt = \int_{\Omega_T} \lambda(s) \vec{g} \cdot \nabla \psi \, dxdt$$

$$(e) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_T} f(s_\eta) \psi \psi_s \, d\gamma dt = \int_{\Gamma_T} f(s) \psi \psi_s \, d\gamma dt$$

(f) Passage à la limite dans le terme $\eta \int_{\Omega_T} \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi \, dxdt$. Supposons d'abord que $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Posons $\Sigma_T = \Gamma \times [0, T]$. On peut écrire :

$$\int_{\Omega_T} \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi \, dxdt = - \int_{\Omega_T} s_\eta \Delta \psi \, dxdt + \int_{\Sigma_T} s_\eta \partial_{\vec{n}} \psi \, d\gamma dt.$$

On a $0 \leq s_\eta \leq 1$ dans Ω_T et $\{s_\eta\}$ bornée dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$. Donc,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \int_{\Omega_T} \nabla s_\eta \cdot \nabla \psi \, dxdt = 0.$$

Pour conclure, on utilise la densité de $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ dans l'espace $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

On termine la démonstration d'existence de la solution faible au sens de la définition et théorème (2.4.3)

Pour plus des détails voir [5]

Conclusion

Dans ce travail, on a modélisé et analysé mathématiquement un modèle de récupération d'hydrocarbures par l'injection d'un fluide (l'eau).

Le premier chapitre est un préliminaire, qui comporte des résultats utilisés tout au long de ce travail.

Le deuxième chapitre nous avons établi la formulation mathématique du problème d'écoulement diphasique des fluides en milieu poreux. Ce problème se compose d'une équation parabolique dégénérée de convection-diffusion en saturation, couplée à une équation elliptique uniforme en pression.

Dans le dernier chapitre on a prouvé l'existence des solutions faibles des équations couplées gouvernant les écoulements diphasiques en milieux poreux. Les approches de Lax-Milgram (pour l'équation de pression) et de Galerkin (pour l'équation de saturation) ont démontré leur efficacité pour traiter les défis mathématiques et physiques inhérents à ce problème complexe.

Bibliographie

- [1] Haim Brezis and Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.
- [2] Guy Chavent and Jérôme Jaffré. *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation : single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media*, volume 17. Elsevier, 1986.
- [3] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [4] Jacques-Louis Lions and Enrico Magenes. Problemes aux limites non homogenes. ii. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 11, pages 137–178, 1961.
- [5] Mohamed Lamine Mostefai, Abdelbaki Choucha, Salah Boulaaras, and Mufda Alrawashdeh. Two-phase incompressible flow with dynamic capillary pressure in a heterogeneous porous media. *Mathematics*, 12(19) :3038, 2024.
- [6] Sandro Salsa. *Partial differential equations in action*, volume 1. Springer, 2015.
- [7] Jacques Simon. Compact sets in the space $l^p(o, t; b)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146 :65–96, 1986.