الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيـــــة الـعـلــــــوم
FACULTE DES SCIENCE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: MOKHTARI TAHAR

<u>THEME</u>

Etude de la stabilité de certaines équations différentielles à retard

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. BELACEL Amar	***M.C.A***	***Président***
Mr. BELABBACI Chafika	***M.C.B***	***Examinateur***
Mr. RAHMOUNE Abita	***M.C.B***	***Examinateur***
Mr. BOUKEHILA Ahcene	***M.C.B***	***Encadreur***

Année Universitaire 2018/2019

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier vivement le bon dieu, de nous avoir donné la force pour suivre ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés, grâce à son aide que nous avons réalisé ce travail.
Je tiens à remercier membre du jury de ma mémoire. Merci à **A.Belacel** maitre de confference à l'université de LAGHOUAT, **C.Belabbaci** maitre de confference à l'université de LAGHOUAT et **A.Rahmoune** maitre de confference à l'université de LAGHOUAT. Je tiens à remercier et exprimer ma gratitude à mon encadreur monsieur **Boukehila Ahcene** maitre de confference à l'université de LAGHOUAT qui m'a prêté de son temps le plus précieux et m'a aidé par ses précieuses directives, ses conseils et ses orientations, ainsi que son soutien moral et scientifique afin de venir à bout de ce travail.
Je tiens à remercier monsieur **Benlmouaz Bilal** étudiant à l'université de LAGHOUAT pour son aide et son soutien, d'avoir donné de son temps.
Un grand merci à tous nos enseignants pour ces longues années d'études et qui nous ont formés et montrés le meilleur.
Je remercie toute la promotion de analyse mathématique USTAT pour les moments que nous avons partagés ensemble, ça reste un souvenir. Je tiens à remercier tous (toutes) mes amis (es) qui ont toujours étais présents pour moi, et particulièrement **Ben Adda.A , Aouissi A, Doumin.B, E.Mebarek,Doumin.A,Maamri.A ,Hadji.A,Aouissi.B**
Mes sincères remerciements à toute ma famille pour son soutien et ses encouragements, pour leur présence et particulièrement ma chère maman, sans elle je ne serai pas arrivé jusqu'ici. Merci pour ton amour ton écoute et tes conseils. Merci à mon père. Merci à tous

Mokhtari Tahar

Dédicaces

Tout d'abord Merci à **Allah** le tout puissant, qui a guidé mes pas depuis l'aube de ma vie.
Je dédie ce travail à L'homme de ma vie, la source de mes efforts, celui qui est toujours sacrifié pour me voir réussir, mon père **Mohamed** et a La lumière de mes jours, mon bonheur, maman **Sleia. Z** ,mon grand père **Ahmed** et ma grande mère **Maaroufi.M** et mes frères **Mostapha, Kouider et khaled**.
Et à toutes les personnes qui m'ont fourni le soutien pour la réalisation de ce travail.

Résumé

Ce mémoire est divisé en quatres chapitres structurés comme suit.

le premier chapitre est consacré à la stabilité de Lyapunov en donnant quelques résltats sur les équations diiférentielles à retards constant et dépendant de l'état.

Le second chapitre a pour but l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des équations différentielles à retards constant en outre , la dépendance Continue des Solutions par rapport aux données Initiales est discutée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles à retards dépendant de l'état.

Nons terminons notre travail par le quatrièmme chapitre en se basant sur l'étude de la stabilité d' une certaine équation différentielle de troisième ordre à retard. Nous établisons des théorème sur la stabiliés asymptotique ,et à la fin de ce chapitre on etudie la bornitude de la solution de l'équation envisagée.

Mots-clés : Equations differentielles à retard dépendant de l'état,stabilité de Lyaponov,asymptotiquement stable.

Abstract

Our work includes four chapters. The first chapter deals with the stability of lypunov , we give some results on the differential equations with delay variable delay In the second and third chapters , we establish both the existence and uniqueness of the . differential equations both with delay and variable delay We finish our work by studying both the stability of certain differential with delay and variable delay and asymptotic stability some examples are given.

Keywords : Delay differential equations,stability of lypunov,asymptoticaly stable .

ملخص

تنقسم هذه المذكرة الى اربعة فصول مشكلة على النحو التالى الفصل الاول يهتم باستقرار لابنوف واعطاء بعض النتائج على المعادلات التفاضلية بالتاخير الثابت والمتعلق بالحالة،اما الفصل الثاني فيهدف الى دراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلات التفاضلية بتأخر ثابت ،بالاضافة الى استقلالية الحلول واستمراريتها بالنسبة للمعطيات الابتدائية ومناقشتها. والفصل الثالث تمثل في دراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلات التفاضلية بالتاخر المتعلق بالحالة و تنهي عملنا بالفصل الرابع نركز فيه على دراسة استقرار معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة بالتاخر . قمناباعطاء مبرهنات على الاستقرار المقارب ، وفي الاخر من هذا الفصل درسنا محدودية حل المعادلة المقترحة

الكلمات المفتاحية استقرار لابنوف المعادلات التفاضلية بتأخر ثابت المعادلات التفاضلية بالتاخر المتعلق بالحالة

Table des matières

Introduction **4**

1 Notions de la stabilité de Lyaponov **5**
1.1 Notions de stabilité des systèmes dans le cas général 6
1.1.1 Fonctions de classe $\mathcal{K}$ et de classe $\mathcal{KL}$ 8
1.1.2 Théorie de la stabilté de Lyapunov 9
1.2 Quelques résultats sur les équations à retard 11
1.2.1 Introduction 11
1.2.2 Définitions et théorèmes de stabilité et bornitude de solutions 12

2 Equations Différentielles à Retard Constant **14**
2.1 Généralité 15
2.2 Existence et Unicité 17
2.2.1 Existence 17
2.2.2 Unicité 24
2.3 Dépendance Continue des Solutions par Rapport aux Données Initiales 26
2.4 Prolongement de la Solution 27

3 Equations Différentielles à Retard Dépendant de l'Etat **30**
3.1 Position du Problème 31
3.2 Existence et Unicité 34
3.2.1 Existence de la Solution 34
3.2.2 Unicité de la Solution 44

4 Etude de la stabilité et bornitude d'une certaine équation différentielle du troisième ordre non autonome avec retard **46**
4.1 position du problème 47
4.2 Hypothèses et résultats principaux sur la stbilité asymptotique . . 48
4.2.1 Exemple 1 61
4.2.2 Exemple 2 61

Conclusion **64**

Table des figures

1.1 *Stabilité de l'équilibre d'une bille* 7

Notations

$C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	l'éspace de Banach des fonctions continues de $[-h, 0]$à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
D	un ouvert de $\mathbb{R} \times C$.
$\dot{x}$	$\frac{dx}{dt}$.
$\vert.\vert$	désigne la norme euclidienne dans$\mathbb{R}^n$.
U	un ouvert de$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
V	une partie de$\mathbb{R} \times C$.
$C^0(V, \mathbb{R}^n)$	l'espace des fonctions continues et bornées.
$\Vert.\Vert$	est une norme quelconque.
$(C, \Vert.\Vert_c)$	l'espace de Banach des fonctions continues.
$\Vert.\Vert_c$	est la norme sur C définie par$\forall \phi \in C, \Vert\phi\Vert_c = \sup_{\theta \in [-r,0]} \Vert\phi(\theta)\Vert$.
Ω	un ouvert de$\mathbb{R} \times C$
.	représentela dérivation à droite
T	un opérateur compact.

Introduction

Ce mémoire présente sommairement la théorie de stabilité de certain équations différentielles avec et sans retard. L'analyse des équations différentielles à retard, a commencé dans les années (50) ; et l'une des premières approches est présenté par 'Krasovskii' (1977), qui généralise la deuxième méthode de 'Lyaponov'. Ensuite de nombreux auteurs, ont développé différents problèmes, concernant l'analyse de la stabilité des équations différentielles, avec un argument retardé. Parmi les équations différentielles à retard, on distingue ceux qui sont à retard constant et Dépendant de l'Etat . Ce mémoire est divisé en quatres chapitres structurés comme suit.

le **premier chapitre** est consacré à la stabilité de Lyapunov endonnant quelques résltats sur les équations diiférentielles à retards constant et dépendant de l'état. Le **second chapitre** a pour but l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des équations différentielles à retards constant en outre , la dépendance Continue des Solutions par rapport aux Données Initiales est discutée. Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles à retards dépendant de l'état. Nons terminons notre travail par le **quatrièmme chapitre** en se basant sur l'étude de la stabilité d' une certaine équation différentielle de troisième ordre à retard. Nous établisons des théorème sur la stabiliés asymptotique ,et à la fin de ce chapitre on etudie la bornitude de la solution de l'équation envisagée.

Chapitre 1

Notions de la stabilité de Lyaponov

1.1 Notions de stabilité des systèmes dans le cas général

Définition 1.1 *On considère le système (1.1) tel que*

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1.1}$$

$f : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en t, localement lipschitzienne en x avec $D \subset \mathbb{R}$. On dit que 0 *est un point d'équilibre du système(1. 1) si $f(t.0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.2 [7] *Le point d'équilibre* 0 *de (1.1) est*

- *Stable (s) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tel que*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{1.2}$$

- *Uniformément stable(U.S) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, indépendant de t_0 tel que(1.2) soit satisfaite.*
- *Instable sil n'est pas stable.*
- *Asymptotaquement stable(A.S) s'il est stable et il existe une constante positive $c = c(t_0) > 0$ tel que $x(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow \infty$,pour tout $\|x(t_0)\| < c$.*
- *Uniformément asymptotiquement stable (U.A.S) s'il est uniformément stable et il existe une constante positive c, indépendante de t_0 : telle que pour toute $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \longrightarrow 0$ lorsquet,$t \longrightarrow \infty$ uniformément en t_0 c'est à dire, pour tout $\eta > 0$, il existe $T = T(\eta) > 0$ tel que*

$$\|x(t)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta), \forall \|x(t_0)\| < c.$$

- *Globalement uniformément asymptotiqement stable(G.U.A.S), s'il est uniformément stable,$\delta(\epsilon)$ peut être choisi pour satisfaire à la condition $\lim_{\epsilon \longrightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$, et pour chaque couple de nombres positifs n et c, il existe*
  $T = T(n, \epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(t)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta), \forall \|x(t_0)\| < c.$$

- *Exponentiellement stable s'il existe des constantes positives c, k,et λ tel que*

$$\|x(t)\| < k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall \|x(t_0)\| < c. \tag{1.3}$$

- *Globalement exponentieliement stable si(1.3) est satisfaite quelle que soit la condition initiale $x(t_0)$. Ces concepts de stabilité d'un point d'équilibre peuvent être illustrés 1.1. La position A correspond à un point d'équilibre instable, la pasition B à un point d'équilibre stable et la position C à une position d'équilibre asymptotiquement stable.*

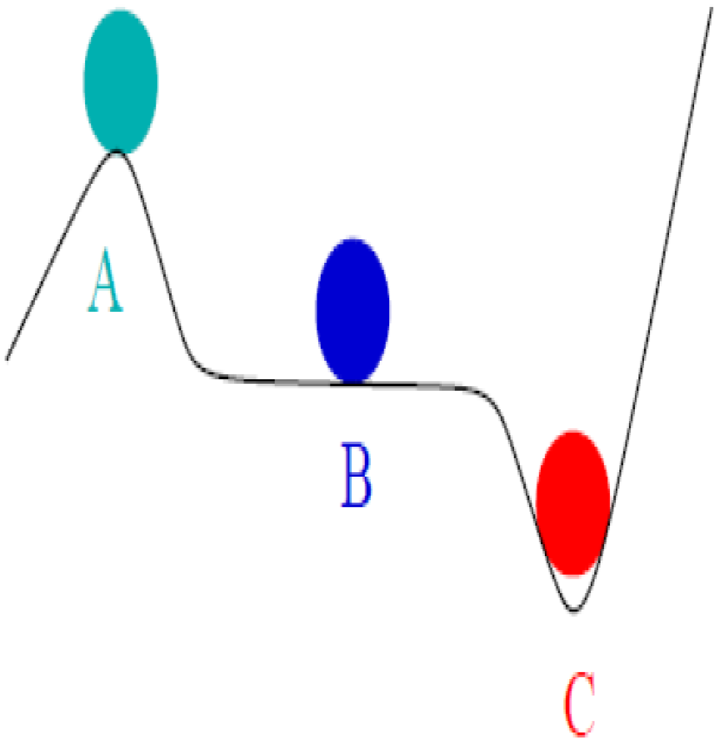

FIGURE 1.1 – *Stabilité de l'équilibre d'une bille*

Définition 1.3 [7] *Les solutions de(1.1) sont*

- *Uniformément bornées s'il existe une constante positive c, indépendante de $t_0 \geq 0$, tel que pour tout $a \in]0, c[$, il existe $\beta = \beta(a) > 0$, indépendante de t_0 satisfaisant*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \forall t \geq t_0. \tag{1.4}$$

- *Globalement uniformément bornées si(1.4) est satisfaite pour n'importe quelle valeur de a assez grande uniformément ultimement bornées s' il existe deux constantes positives b et c indépendante de $t_0 \geq 0$, telles qu'à chaque $a \in]0, c[$, est associée une constante positive $T = T(a, b) \geq 0$ indépendante de t_0 satisfaisant*

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq , \forall t \geq t_0 + T. \tag{1.5}$$

- *Globalement uniformément ultimement bornées si(1.5) est satisfaite pour n'uporte quelle valeur de a assez grande.*
  Nous appellerons la constante b la horne ultime.

1.1.1 Fonctions de classe $\mathcal{K}$ et de classe $\mathcal{KL}$

Définition 1.4 [7] *Une fonction continue* $\alpha : [0, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite de classe* $\mathcal{K}$ *si elle est strictement croissante et* $\alpha(0) = 0$*. Elle est dite de classe* $\mathcal{K}_\infty$ *si* $a = \infty$ *et* $\alpha(r) \longrightarrow \infty$ *lorsque* $r \longrightarrow \infty$*.*

Définition 1.5 [7] *Une fonction continue ,*$\beta : [0, a[\times[0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est dite de classe* $\mathcal{KL}$ *si, pour tout fixé, l'application* $\beta(r, s)$ *est de classe* $\mathcal{K}$*. par rapport a* r *et, pour tout* r *fixé, l'application* $\beta(r, s)$ *est décroissante par rapport à* s *et* $\beta(r, s) \longrightarrow 0$ *lorsque* $s \longrightarrow \infty$*.*

Lemme 1.1 [7] *Soit* α_1 *et* α_2 *des fonctions de classe* $\mathcal{K}$ *sur* $[0, a[, \alpha_3$ *et* α_4 *des fonctions de classe* $\mathcal{K}_\infty$ *et une fonction de classe* $\mathcal{KL}$*. Notons l'inverse de* α_i *par* α_i^{-1}*. Alors,*

* α_1^{-1} *est défini sur* $[0, \alpha_1(a)[$ *et appartient à la classe* $\mathcal{K}$*.*
* α_3^{-1}*est défini sur* $[0, \infty[$*et appartient à la classe* $\mathcal{K}_\infty$*.*
* $\alpha_1 \circ \alpha_2$ *de classe* $\mathcal{K}$*.*
* $\alpha_3 \circ \alpha_4$ *est de classe* $\mathcal{K}_\infty$*.*
* $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ *est de classe* $\mathcal{KL}$ *.*

Voici une reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$ *et* $\mathcal{KL}$

Proposition 1.1 [7] *Le point d'équilibre* $x = 0$ *de(1.1) est :*

1. *Uniformément stable si et seulement s'il existe une fonction* α *de classe* $\mathcal{K}$ *et une constante positive* c *indépendante de* t_0 *tel que :*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(_0t)\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condtion initiale* $x(t_0)$*.*

Proposition 1.2 [7] *Le point d'équilibre* $x = 0$ *de(1.1) est :*

1. *Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de classe* $\mathcal{K}$ *et une constante positive* c *indépendante de* t_0 *tel que*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(_0t)\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condtion initiale* $x(t_0)$*.*

1.1.2 Théorie de la stabilté de Lyapunov

Dans ce qui suit donnerons quelques défnitions et théorèmes concernant la stabilité au sens de Lyapunov. Les résultats que nous développerons aux chapitres 4 s'appuierons sur ces concepts pour démontrer les propriétés de stabilité asymptotique.

Définition 1.6 *Soit* 0 *l'origine de* $\mathbb{R}^n$*,* D *voisinage de* 0*. Siot* U *une fonction à valeurs réelles définie sur* D *telle que :*

1. $U(0) = 0$.
2. $U(x) > 0 \quad si x \neq 0$.

On dit que U *est définie positive dans* D*.*

Définition 1.7 *On considère le systèeme(1.1). Soit* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un voisinage de* 0 *et* $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et différentiable. La fonction* V *est dite :*

1. *Semi définie positive si :*
   — $V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.
   — $V(t, x) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D$.
2. *Définie positive si :*
   — $V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.
   — *Il existe une fonction* $W_i(x)$ *définie positive(voir la défnition 1.6) tel que :*
   $$W_1(x) \leq V(t, x), \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D$$
3. *Décrescente s'il existe une fonction* $W_2(x)$ *définie positive tel que* $V(t, x) \leq W_2(x), \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D$
4. *Radialement non bornée si :*$V(t, x) \longrightarrow \infty$ *quand* $\|x\| \longrightarrow \infty$
   $V(t, x)$ *est dite définie négative (semi-définie) si* $-V(t, x)$ *est définie positive(semi-définie)*

Lemme 1.2 [7] *Soit* $V : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue définie positive sur un domaine* $D \subset \mathbb{R}$ *qui contient l'origine. Soit* $B_r \subset D$ *avec* $r > 0$*. Alors, il existe des fonctions* α_1 *et* α_2 *de classe* $\mathcal{K}$*, défnies sur* $[0, r]$*, telles que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|),$$

pour tout $x \in B_r$*. Si* $D = \mathbb{R}$*, les fonctions* α_1 *et* α_2 *seront définies sur* $[0, \infty[$ *et l'inégalité précédente aura lieu pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*. Par ailleurs, si* $V(x)$ *est radialement non bornée alors* α_1 *et* α_2 *peuvent être choisies dans la classe* $\mathcal{K}$*.*

Remarque 1.1 *Soit $V(t,z)$ une fonction définie positive et décrescente sur D. D'après la définition et le lemme précedents il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}$ telles que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall x \in B_r \subset D.$$

Si de rlus $V(t,x)$ est radialement non bornée sur D alors les fonctions α_1 etα_2 sont de classe $\mathcal{K}$.

Définition 1.8 *(Fonction de Lyapunov)*
On considère le système(1.1) :

$$\dot{x} = f(t, x(t)).$$

Soit D un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable.

* *On dit que V est une fonction de Lyapunov si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*
  1. *V est définie positive.*
  2. *$V(t,x) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+, x \in D$.*

* *On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*
  1. *V est définie positive.*
  2. *$V(t,x) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+, x \in D - \{0\}$.*

Remarque 1.2 *$V(t,x)$ est aussi une fonction de Lyapunov (stricte) si elle est définie négative et sa dérivée stable est semi-définie positive (définie).*

Théorème 1.1 [7] *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système(1.1) et $D \subset \mathbb{R}$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable tel que*

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x),$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0,$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$, où $W_1(x)$ et $W_2(x)$ sont des fonctions continues définies positives sur D. Alors $x = 0$ est uniformément stable.

Théorème 1.2 [7] *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système(1.1) et $D \subset \mathbb{R}$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable tel que*

$$W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x),$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -W_3(x),$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$, où $W_1(x), W_2$ et $W_3(x)$ sont des fonctions continues définies positives sur D. Alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable. Si $D = \mathbb{R}^n$ et $W_1(x)$ est radialement non bornée, alors $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 1.3 [7] *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système(1.1) et $D \subset \mathbb{R}$ un domaine qui contient l'origine. Soit $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable tel que*

$$k_1\|x\| \leq V(t,x) \leq k_2\|x\|^a,$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -k_3\|x\|^a,$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in D$, où k_1, k_2, k_3 et a sont des constantes positives. Alors $x = 0$ est exponentiellement stable.
Si toutes les conditions sont vérifiées globalement, alors $x = 0$ est globelement exponentieliement stable.

Théorème 1.4 [22] *Soit $V(t,z)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+, \|x\| \geq \rho$ où $\rho > 0$ peut être assez grand, tel que*
i) $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|), \alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$*et* $\alpha_2 \in \mathcal{K}$,
ii) $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq 0$.
Alors les solutions de(1.1) sont uniformément bornées.

Théorème 1.5 [22] *Si en plus de la condition(i) du Théorème (1.4), $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$ où α_3 est continue et strictement positive, alors les solutions de(1.1) sont unaformément ultimement bornées.*

1.2 Quelques résultats sur les équations à retard

1.2.1 Introduction

Les équations à retard sont souvent plus réalistes pour décrire des phénomènes naturels comparés à elles même sans le retard. Tout d'abord,nous allons donner les définitions préliminaires et les critères de stabilité. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|.\|$est une norme quelconque. Pour $r > 0$ et $H > 0$, on définit
$C_H := \{\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}) : \|\phi\|_c \leq H\}$ avec $(C, \|.\|_c)$ l'espace de Banach des fonctions continues $\phi : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\|.\|_c$ est la norme sur C définie par

$$\forall \phi \in C, \|\phi\|_c = \sup_{\theta\in[-r,0]} \|\phi(\theta)\|.$$

Soit $x : [t_0 - r, t_0 + A] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue où $t_0 \geq 0$et $A > 0$.Pour t fixé dans $t_0, t_0 + A$, on définit la fonction :

$$x_t = x(t+\theta), \qquad -r \leq \theta \leq 0.$$

$x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ et c'est restriction de x à l'intervalle $[t-r,t]$ translaté à $[-r,0]$.Considérons,à présent

$$\dot{x} = f(t,x_t) \tag{1.6}$$

où $f : I \times C_H \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue, localement lipschitzienne en son second argument et tel que $f(t,0) = 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. De plus,
f satisfait à la condition :

$$\forall H_1 < H, \exists L(H_1) > 0, \|\phi\|_c < H_1 \Rightarrow \|f(t,\phi)\| < l(H_1).$$

Une fonction $x(t)$ est dite solution de(1.6) si elle est définie et continue sur $[t_0 - r, t_0 + A]$ vérifie $x(t) = \varphi(t)$ sur $[t_0 - r, t_0]$, est différentiable sur $[t_0, t_0 + A]$ et satisfait (1.6) sur $[t_0, t_0 + A]$.

Remarque 1.3 *Une application tel que f, difinie sur un ensemble de foctions, est parfois désigné sous le nom de fonctionnelle au lieu de fonction.*

1.2.2 Définitions et théorèmes de stabilité et bornitude de solutions

Définition 1.9 [10] *Le point d'équilibre* 0 *de (1.6) est*

* *Uniformément stable(U.S) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que*

$$\|\varphi\|_C < \delta \Rightarrow \|x(t,t_0,\varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

* *Uniformément asymptotiquement stble(U.A.S) s'il est uniformément stable et il existe une constante positive c lel que pour tout $\eta > 0$, il existe $T = T(\eta) > 0$ de telle sorte que*

$$\|\varphi\|_C < c \Rightarrow \|x(t,t_0,\varphi)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

* *Globalement uniformément asymptotiquement stable si la condition précédente est varie quel que soit $\varphi \in C$.*

Les définitions de stabilité et bornitude peuvent être données de la même maniére que pour les équations défférentielles ordinaires,i.e,en remplaçant la condition initialle x_0 et la solution $x(t,t_0,x_0)$ par φ et $x_t(t_0,\varphi)$, respectivement. De même, une fonctionnelle $V(.)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times C$ est dite définie positive s'il existe une fonction scalaire ω vérifiant $\omega(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et $\omega(0) = 0$, telle que $V(t,x_t) \geq \omega(\|x(t)\|), \forall x_t \in C, \forall t \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.6 [20] *Soit $V(t,x_t) : [t_0, +\infty[\times C_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonctionnelle continue satisfaisant une condition locale de Lipschitz.$V(t,0) = 0$, et telle que :*

(i) $W_0(\|x(t)\|) \leq V(t,x_t) \leq W_1(\|x(t)\|) + W_2(\|x(t)\|_2)$
où $\|x(t)\|_2 = (\int_{t-r}^{t} \|x(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}$

(ii) $\dot{V}_{(1.6)} \leq -W_3(\|x(t)\|)$,
où, $W_i(i = 0, 1, 2, 3)$ *sont de classe* $\mathcal{K}$*. Alors la solution nule de(1.6) est uniformément asymptotiquement stable.*

Théorème 1.7 [20] *Soit* $V(t, x_t) : [t_0, +\infty[\times C_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonctionnelle continue satisfaisant une condition locale de Lipschitz.*$H = \infty$ *, et telle que :*
(i) $W_0(\|x(t)\|) \leq V(t, x_t) \leq W_1(\|x(t)\|) + W_2(\int_{t-r}^{t} W_3(\|x(s)\|)ds)$
(ii) $\dot{V}_{(1.6)} \leq -W_3(\|x(t)\|) + M, pour M > 0,,$
où, $W_i(i = 0, 1, 2, 3)$ *sont de classe* $\mathcal{K}$*. Alors la solution nule de(1.6) sont uniformément bornées et uniformément ultimement bornées.*

Chapitre 2

Equations Différentielles à Retard Constant

Dans ce chapitre on expose la théorie générale des équations différentielles à retard constant ou indépendant de l'état.

2.1 Généralité

Dans ce premier paragraphe on, s'intérèsse à l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle à retard indépendant de l'état. On commençera d'abord par donner quelques définitions générales.

Définition 2.1 *Soit $h \geq 0$un nombre réel donné, on désignera par $C = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ l'éspace de Banach des fonctions continues de $[-h,0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme de la convergence uniforme*

$$\|\phi\|_{-h,0} = \sup_{\theta\in[-h,0]} |\phi(\theta)|, \forall\phi \in C \tag{2.1}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2 *Soient $\sigma \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ et $x \in ([\sigma - h, \sigma + \alpha], \mathbb{R})$. Pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$, on définie $x_t \in C$ par*

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \forall\theta \in [-h, 0].$$

Remarque 2.1 *Pour tout t fixé, la fonction x_t est obtenue en considérant la restriction de la fonction x sur l'intervalle $[t-h,t]$, translatée sur $[-h,0]$.*

Définition 2.3 *Soient D un ouvert de $\mathbb{R} \times C$et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. On appelle la relation*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{2.2}$$

une équation différentielle à retard sur D, où le symbole "$\cdot$" représente la dérivation à droite. On notera par $EDR(f)$ l'équation différentielle à retard (2.2) définie par f.

Définition 2.4 *Soit x une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.*

1. *On dit que x est solution de l'équation (2.2) s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$et $\alpha > 0$tels que $x \in C([\sigma - h, \sigma + \alpha), \mathbb{R}^n), (t, x_t) \in D$ et x vérifie l'équation (2.2) pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha)$.*
2. *Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\phi \in C$ donnés, x est dite solution du problème aux valeurs initiales*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi, \end{cases} \tag{2.3}$$

s'il existe $\alpha > 0$tel que x soit solution de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha)$et $x_\sigma = \phi$.

3. On désignera par $x(\sigma, \phi, f)$ la solution du problème (2.3) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha)$.

Remarque 2.2 *Lorsque $h = 0$, l'équation (2.2) se réduit à une équation différentielle ordinaire. Le lemme suivant réduit l'étude de l'existence et de l'unicité du probléme (2.3) à celle d'une équation intégrale.*

Lemme 2.1 *Soient $\sigma \in \mathbb{R}, \phi \in C$ et $f : D \subset \mathbb{R} \times c \longrightarrow \mathbb{R}^n$une fonction continue. Alors,$x(\sigma, \phi, f)$est une solution du probléme (2.3) en (σ, ϕ) si et seulement si $x(\sigma, \phi, f)$ est une solution de l'équation intégrale*

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds, \quad t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Preuve 2.1 *Condition nécessaire : Soit $x(\sigma, \phi, f)$ une solution du problème (2.3), alors*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t.x_t).t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases}$$

Par intégration, on obtient

$$\int_\sigma^t \dot{x}(s) = x(t) - x(\sigma) = \int_\sigma^t f(s, x_s)ds, t \geq \sigma.$$

Comme $x(\sigma) = x(\sigma + 0) = x\sigma(0) = \phi(0)$ on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s)ds, \quad t \geq \sigma \\ x_\sigma = \phi. \end{cases}$$

Condition suffisante : Soit $x(\sigma, \phi, f)$ une solution de l'équation intégrale (2.4). Alors,

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{x(t + h) - x(t)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x_s)ds.$$

Comme $f(t, x_t)$ est continue en t, en appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x(s))ds = f(t, x_t),$$

d'où le résultat.

2.2 Existence et Unicité

Notre objectif dans ce paragraphe est d'établir des conditions nécéssaires pour l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.3). L'idée est d'utiliser le Lemme 2.1 pour ramener l'existence de la solution à celle d'un point fixé d'un opérateur integral.

2.2.1 Existence

Commençons d'abord par donner un certain nombre de lemmes que nous utiliserons ultérieurement.

Lemme 2.2 *Si $x \in C([\sigma - h, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, alors x_t est une fonction continue en t, pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$.*

Preuve 2.2 *Comme x est continue sur$[\sigma - h, \sigma + \alpha]$, alors elle est uniformément continue c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $(t, s) \in [\sigma - h, \sigma + \alpha] \times [\sigma - h, \sigma + \alpha]$,*

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(s)| < \epsilon. \tag{2.5}$$

Soient $(u, v) \in [\sigma, \sigma + \alpha] \times [\sigma, \sigma + \alpha], |u - v| < \delta$, on a

$$(u + \theta, v + \theta) \in [\sigma - h, \sigma + \alpha] \times [\sigma - h, \sigma + \alpha] \tag{2.6}$$

pour tout $\theta \in [-h, 0]$. D'après (2.5) et (2.6) pour tout $(u, v) \in [\sigma, \sigma+\alpha] \times [\sigma, \sigma+\alpha]$,

$$|u + \theta - v + \theta| = |u - v| < \delta \Rightarrow |x(u + \theta) - x(v + \theta)| < \epsilon, \forall \theta \in [-h, 0].$$

Et par suite

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |x_u(\theta) - x_v(\theta)| < \epsilon, \forall \theta[-h, 0].$$

Le lemme suivant réduit l'étude de l'existence et de l'unicité à celle d'une équation intégrale avec condition initiale nulle.

Lemme 2.3 *Soient $(\sigma, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ et $\tilde{\phi} \in C([\sigma - h, +\infty), \mathbb{R}^n)$ la fonction définie par :*

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(\theta) = \phi(\theta), & -h \leq \theta < 0, \\ \tilde{\phi}(\theta + \sigma) = \phi(0), & t \geq 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Si x est une solution du problème (2.3) en (σ, ϕ)
alors $y(t) = x(t + \sigma) - \tilde{\phi}(t + \sigma), t \geq -h$, est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^\sigma f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, & t \geq 0 \\ y_0 = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve 2.3 *En effet, on a* $y(t) = x(t+\sigma) - \tilde{\phi}(t+\sigma)$*, pour* $t \in [-h, +\infty)$*, d'après(2.7) on obtient*

$$\begin{aligned} y_0(\theta) &= y(0+\theta) \\ &= x(\theta+\sigma) - \tilde{\phi}(\theta+\sigma) \\ &= x_\sigma(\theta) - \tilde{\phi}_\sigma(\theta) \\ &= \phi(\theta) - \phi(\theta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in [-h, 0]$*. D'ou,* $y_0 = 0$*.*
Montrons maintenant que y *satisfait la seconde équation de (2.8). D'après l'hypothèse on a :*

$$\int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds = \int_0^t f(\sigma+s, x_{\sigma+s})ds,$$

pour tout $t \geq 0$*, et*

$$\int_0^t f(\sigma+s, x_{\sigma+s})ds = \int_0^{t+\sigma} f(s+\sigma, x_{s+\sigma})ds - \int_t^{t+\sigma} f(s+\sigma, x_{s+\sigma})ds.$$

Alors, d'aprés le lemme 2.1 on a

$$\int_0^t f(\sigma+s, x_{\sigma+s})ds = \int_0^{t+\sigma} \dot{x}(s+\sigma)ds - \int_t^{t+\sigma} \dot{x}(s+\sigma)ds,$$

et par suite

$$\int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds = x(t+\sigma) - x_\sigma(0), \qquad t \geq 0.$$

D'autre part comme $x(t+\sigma) = y(t) + \tilde{\phi}(t+\sigma) = y(t) + \phi(0)$*, alors*

$$\int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds = y(t) + \phi(0) - \phi(0) \qquad t \geq 0.$$

D'où le résultat.

Remarque 2.3 *Inversement, si* y *est une solution du probleme (2.8), alors on obtient la solution* x *du problème (2.3) par la transformation précédente (i.e.* $y(t) = x(t+\sigma) - \tilde{\phi}(t+\sigma), t \geq -h$*). Par conséquent l'existence et l'unicité du probleme (2.3) est équivalente à celle du probleme (2.8).*

Définition 2.5 *Soient* V *une partie de* $\mathbb{R} \times C$*, et* $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *l'espace des fonctions continues et bornées. Si* $f \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *on notera par* $\|f\| = \sup |f(t,\phi)|$*la norme de* f *dans* $C^0(V, \mathbb{R}^n)$*.*$C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *munie de cette norme est un espace de Banach.*

Définition 2.6 *Pour tout α, β on définie les ensembles suivants :*

$$I_\alpha = [0, \alpha],$$

$$B_\beta = \{\psi \in C : \|\psi\|_{-h,0} \leq \beta\},$$
$$\hat{A}(\alpha, \beta) = y \in C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n) : y_0 = 0, y_t \in B_\beta, \forall t \in I_\alpha.$$

Lemme 2.4 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times C, W \subseteq \Omega$un ensemble compact et $f_0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors ils existent un voisinage $V \subseteq \Omega$ de W tel que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, un voisinage $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^0)$ de f^0 et des constantes poisitives M, α et β tels que $f^0 \in (V, \mathbb{R}^n)$ et*

$$|f(\sigma, \phi)| < M, \qquad \forall(\sigma, \phi) \in V, \forall f \in U.$$

De plus on a pour tout $(\sigma^0, \phi^0) \in W$,

$$(\sigma^0 + t, \tilde{\phi}^0_{t+\sigma^0} + y_t) \in V, \forall t \in I_\alpha, y \in \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Preuve 2.4 *Soient $(\sigma, \phi) \in W$et α, γ, ϵ des constantes positives. Considérons l'ensemble*

$$V^\epsilon_{(\alpha,\gamma)}(\sigma, \phi) = (\sigma - \epsilon, \sigma + \alpha + \epsilon) \times \{\psi \in C : \|\psi - \phi\|_{-h,0} < \gamma + \epsilon\}$$

$V^\epsilon_{(\alpha,\gamma)}(\sigma, \phi)$est un voisinage de $(\sigma, \phi) \in W$ dan s l'ouvert Ω.
Etant donnée que f^0 est continue sur Ω et à fortiori sur le compact W alors il existe$M > 0$ tel que

$$|f^0(\sigma, \phi)| < M - \epsilon, \qquad \forall(\sigma, \phi) \in W.$$

D'autre part la continuité de f^0 en $(\sigma, \phi) \in W$ entraine l'existence d'un voisinage $V^\epsilon(\alpha, \gamma)(\sigma, \phi)$ de (σ, ϕ) tel que

$$|f^0(t, \psi)| < M - \epsilon, \forall(t, \psi) \in V^\epsilon(\alpha, \gamma)(\sigma, \phi).$$

La famille d'ouverts $\{V^\epsilon(\alpha, \gamma)(\sigma, \phi)\}_{(\sigma,\phi)\in W}$ forment donc un recouvrement de$W$, comme$W$ est compact il existe un sous-recouvrement fini de W qu'on notera $(\sigma^1, \phi^1), ..., (\sigma^m, \phi^m)$ tel que

$$W \subset \cup_{i=1}^m V^\epsilon_{(\alpha^i,\gamma^i)}(\sigma^i, \phi^i).$$

Posons $\bar{\alpha} = \max_{1\leq i\leq m} \alpha^i, \bar{\gamma} = \max_{1\leq i\leq m} \gamma^i$. Alors pour tout $(t, \psi) \in W$ on a

$$\|\psi - \phi^i\|_{-h,0} < \bar{\gamma} + \epsilon \qquad et \qquad t \in (-\epsilon, \alpha + \epsilon).$$

En faisant tendre ϱ vers 0 on obtient

$$\|\psi - \phi^i\|_{-h,0} < \bar{\gamma} + \epsilon \qquad et \qquad t \in [0, \alpha].$$

Il est alors clair que l'ensemble

$$V = \cup_{i=1}^{m}([\sigma^i, \sigma^i + \bar{\alpha}] \times \{\psi \in C : \|\psi - \phi^i|_{-h,0} \leq \bar{\gamma}\}),$$

est un voisinage de$W$*, et*

$$|f^0(\sigma, \phi)| < M, \forall(\sigma, \phi) \in V.$$

Finalement, on obtient $f^0 \in C0(V, \mathbb{R}^n)$*.Montrons maintenant l'existence d'un voisinage* $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *de* f^0 *tel que :*

$$|f(\sigma, \phi)| < M, \qquad \forall(\sigma, \phi) \in V \qquad \forall f \in U.$$

Il reste à montrer que :

$$(\sigma^0 + t, \tilde{\phi}^0_{\sigma^0+t} + y_t) \in V, \qquad \forall t \in I_\alpha, \qquad \forall y \in \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Soient $\epsilon > 0$*et choisissons* α, β *tel que*

$$0 < \beta < \bar{\gamma} + \epsilon, \qquad \alpha < \bar{\alpha},$$

et

$$\|\tilde{\phi}_{\sigma^0+t} - \phi^0\|_{-h,0} < \bar{\gamma} - \beta + \epsilon, \forall(\sigma^0, \phi^0) \in W, t \in I_\alpha.$$

Alors pour chaque $y \in \hat{A}(\alpha, \beta)$ *et* $t \in \alpha$ *on a*

$$\|y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t} - \phi^0\|_{-h,0} \leq \|y_t\|_{-h,0} + \|\tilde{\phi}_{\sigma^0+t} - \phi^0\|_{-h,0} < \bar{\gamma} + \epsilon.$$

En faisant tendre ϵ *vers* 0*, on obtient*

$$\|y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t} - \phi^0\|_{-h,0} < \bar{\gamma}, \forall t \in I_\alpha, \forall y \in \hat{A}(\alpha, \beta),$$

c'est à dire

$$(\sigma^0 + t, y_t + \tilde{\phi}_{\sigma^0+t}) \in V, \forall t \in I_\alpha, \forall y \in \hat{A}(\alpha, \beta).$$

D'où, le résultat.

Lemme 2.5 *Soient* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ *un ouvert,*$W \subseteq \Omega$ *un ensemble compact,* $f^0 \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}^n)$*,* U *un voisinage de* f^0*,* V*un voisinage de* W *et* M, α, β *des constantes positives. Considérons l'opérateur,*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

où

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = 0, \forall t \in [-h, 0],$$

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \forall t \in I_\alpha. \tag{2.9}$$

Alors, il existe un compact K *de* $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ *tel que l'application*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow K,$$

est continue. De plus si $M\alpha \leq \beta$ *alors*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Preuve 2.5 *Montrons d'abord que*

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \sigma, f, y)(\tau)| \leq M|t - \tau|, \forall t, \tau \in I_\alpha, \tag{2.10}$$

et

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \sigma, f, y)(\tau)| \leq M\alpha, \qquad \forall t \in I_\alpha. \tag{2.11}$$

Pour tout $t, \tau \in \alpha$ tel que $\tau > t$, la relation 2.9 nous donne

$$\begin{aligned} |T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \sigma, f, y)(\tau)| &= \left| \int_t^\tau f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds \right| \\ &\leq \int_t^\tau |f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)| ds \end{aligned}.$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.4 on a

$$(\sigma^0 + t, \tilde{\phi}^0_{t+\sigma^0} + y_t) \in V, \forall t \in I_\alpha, y \in \hat{A}(\alpha, \beta),$$

et

$$\int_t^\tau |f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)| < M, \qquad \forall f \in U.$$

Donc

$$\int_t^\tau |f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)| ds \leq M(\tau - t).$$

Finalement on obtient

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \sigma, f, y)(\tau)| \leq M|\tau - t|, \qquad \forall t, \tau \in I_\alpha$$

qui n'est autre que la relation (2.10). De nouveau, d'après le Lemme 2.4 on obtient

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t)| = \left| \int_t^\tau f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds \right| \leq M \int_0^t ds \leq M\alpha,$$

d'où la relation (2.11).
Considérons maintenant l'ensemble

$$K = \{g \in C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n) : |g(t) - g(\tau)| \leq M|t - \tau|, |g(t)| \leq M\alpha, g_0 = 0\}.$$

Montrons que K est compact dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Il est clair que K est un ensemble borné et fermé dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$, de plus la relation

$$\forall g \in K, |g(t) - g(\tau)| \leq M|t - \tau|, \forall t, \tau \in I_\alpha,$$

entraine que K est uniformément équicontinue. D'aprés le Théorème d'Ascoli K est relativement compact dans $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$. Comme K est fermé il est donc *compact. Etant donné que* $ImT \subseteq K$ *l'opérateur* T *définie par (2.9) prend ses valeurs dans* K*. Montrons maintenant que l'application*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow K,$$

est continue. Soit $\{(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n)\}_{n\geq 1}$ *une suite de* $W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta)$ *telle que* $(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n) \longrightarrow (\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)$ *dans* $W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta)$*. Puisque* K *est compact alors il existe une sous-suite qu'on notera simplement* $\{T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$*telle que* $T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k) \longrightarrow \lambda \in K$*. Or puisque* $(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n) \longrightarrow (\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)$ *et* f^k, f^0*sont continues alors*

$$f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s} + y^k_s) \longrightarrow f^0(\sigma^0 + s, \tilde{\phi}^0_{\sigma^0+s} + y^0_s), \forall s \in I_\alpha,$$

et comme f^k*,* f^0 *sont continues*$|f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s} + y^k_s| \leq M$*,le Théorème de la convergence dominée entraine que*

$$\lambda(t) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^t f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}_{\sigma^k+s} + y^k_s)ds = \int_0^t f^0(\sigma^0 + s, \tilde{\phi}_{\sigma^0+s} + y^0_s)ds.$$

D'où

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) = T(\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)(t), \qquad \forall t \in [-h, 0],$$

l'opérateur T *est donc continue. Montrons maintenant que si* $M\alpha \leq \beta$ *alors*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

Il suffit pour cela de montrer que $K \subseteq \hat{A}(\alpha, \beta)$*. Soit* $g \in K$*. On a pour chaque* $t \in I\alpha$*et* $\theta \in [-h, 0]$

$$|g_t(\theta)| = |g(t + \theta)| \leq M\alpha \leq \beta,$$

d'où

$$g_t \in B_\beta, \forall t \in I_\alpha.$$

De plus, par définition de K *on a*

$$g_0 = 0.$$

D'ou $K \subseteq \hat{A}(\alpha, \beta)$
. Le théorème suivant assure l'existence locale d'une solution de l'équation différentielle à retard (2.2).

Théorème 2.1 *(Existence). Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times C$ *et* $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$*.*

(i) Pour tout $(\sigma, \phi) \in \Omega$ *le problème (2.3) admet au moins une solution en* (σ, ϕ)*.*

(*ii*) *Plus généralement, si* $W \subseteq \Omega$ *est un compact, alors il existe un voisinage* $V \subseteq \Omega$ *de* W *tel que* $f^0 \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$*, et il existe un voisinage* $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *de* f^0 *et* $\alpha > 0$ *tels que, pour tout* $(\sigma, \phi) \subseteq W$*et* $f \subseteq U$*il existe au moins une solution* $x(\sigma, \phi, f)$ *du problème (2.3) en* (σ, ϕ) *sur l'intervalle* $[\sigma - h, \sigma + \alpha]$.

Preuve 2.6 *L'idée consiste à utiliser le Lemme 2.5 et de montrer que le problème (2.9) admet une solution en utilisant le Théorème du point fixe de Shauder. La preuve est divisée en deux étapes.*
Etape 1 : *Posons* $W = (\sigma, \phi)$*. Montrons que l'opérateur*

$$T(\sigma, \phi, f^0, .) : \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

définie par

$$T(\sigma, \phi, f^0, y)(t) = 0, \forall t \in [-h, 0],$$

$$T(\sigma, \phi, f^0, y)(t) = \int_0^t f^0(\sigma + s\tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, \qquad \forall t \in I_\alpha$$

est compact. D'après le Lemme 2.5, il existe un compact K *de* $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ *tel que l'opérateur*

$$T(\sigma, \phi, f^0, .) : \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow K,$$

est continu. L'opérateur T *est donc compact. Si on choisit* $\alpha > 0$ *tel que* $M\alpha \leq \beta$ *alors, d'après le Lemme 2.5 on a*

$$T(\sigma, \phi, f^0, .) : \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow \hat{A}(\alpha, \beta).$$

De plus, d'après la définition, il est clair que $\hat{A}(\alpha, \beta)$ *est un ensemble fermé, borné et convexe dans* $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$*. Par conséquant, d'après le Théorème du point fixe de Shauder il existe* $v \in C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$v = T(\sigma, \phi, f^0, v),$$

c'est à dire que

$$v(t) = 0, \forall t \in [-h, 0],$$

$$v(t) = \int_0^t f^0(\sigma + s\tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)ds, \qquad \forall t \in I_\alpha.$$

D'aprés la Remarque 2.3 la solution v *du problème intégral précédent n'est autre que la solution du problème (2.3).*
Etapes 2 : *Soit* $W \subseteq \Omega$*un ensemble compact et* $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$*. Alors d'après le Lemme 2.4 il existe un voisinage* $V \subseteq \Omega$*de* W *telle que* $f^0 \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$*, et il existe un voisinage* $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$*de* f^0 *et des constantes positives* α, β *et* M *tel que* $f|(\sigma, \phi)| < M$ *pour tout* $(\sigma, \phi) \in V$ *et* $f \in U$*. Considérons l'opérateur*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

où

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=0, \forall t\in[-h,0],$$

$$T(\sigma,\phi,f,y)(t)=\int_0^t f^0(\sigma+s\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds, \qquad \forall t\in I_\alpha.$$

D'aprés le Lemme 2.5 T est continue et il existe un ensemble compact K de $C([-h,\alpha],\mathbb{R}^n)$ tel que

$$T: W\times U\times \hat{A}(\alpha,\beta)\longrightarrow K.$$

T est donc un opérateur compact. De plus si on choisit $\alpha>0$ tel que $M\alpha\leq\beta$ alors d'aprés le Lemme 2.5 on a

$$T: W\times U\times \hat{A}(\alpha,\beta)\longrightarrow \hat{A}(\alpha,\beta)$$

Comme $\hat{A}(\alpha,\beta$ est un ensemble convexe borné et fermé et T compact. Alors d'aprés le Théorème du point fixe de Shauder, pour tout $(\sigma,\phi)\in W$ et $f\in U$ l'opérateur T admet un point fixe $y=y(\sigma,\phi,f)$ tel que

$$y(t)=0, \forall t\in[-h,0],$$

$$y(t)=\int_0^t f^0(\sigma+s\tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds, \qquad \forall t\in I_\alpha.$$

D'aprés la Remarque 2.3 la solution ainsi obtenue est donc une solution du problème (2.3) en (σ,ϕ) sur $[\sigma-h,\sigma+\alpha]$.

2.2.2 Unicité

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes pour avoir l'unicité de la solution.

Définition 2.7 *Soient Ω un ouvert de $R\times C$ et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que $f=f(t,\phi)$ est lipschitzienne en ϕ dans les compacts de Ω si pour tout compact K dans Ω, il existe une constante $L>0$ telle que*

$$|f(t,\phi_1)-f(t,\phi_2)|\leq L\|\phi_1-\phi_2\|_{-h,0}$$

à chaque foit que (t,ϕ_1) et (t,ϕ_2) sont dans K.

Théorème 2.2 *(Unicité). Soient $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times C$un ouvert et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que $f(t,\phi)$ soit lipschitzienne en ϕ sur tout compact de $\Omega.Si(\sigma,\phi)\subseteq\Omega$ alors le problème (2.3) admet une solution unique en (σ,ϕ).*

Preuve 2.7 *Soient x et y deux solutions de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, \sigma + \alpha]$ telles que $x_\sigma = y_\sigma = \phi$, c'est-à-dire que*

$$x(\sigma + \theta) - y(\sigma + \theta) = 0, \forall \theta \in [-h, 0].$$

On veut montrer que $x(t) = y(t)$, pour tout $t \in (\sigma, \sigma + \alpha]$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x(t) \neq y(t)$, pour certain point $t \in (\sigma, \sigma + \alpha]$. Alors,

$$s = \inf\{u \in [\sigma, \sigma + \alpha] : x(u) \neq y(u)\},$$

satisfait

$$\sigma \leq s < t \leq \sigma + \alpha,$$

et

$$x(s) = y(s).$$

Soit L le constant lipschitzienne de $f(t, \phi)$ dans tout ensemble compact de Ω contenant les trajectoires $(t, x_t), (t, y_t), t \in I_\alpha$. Comme x, y sont uniformément continues sur $[\sigma - h, t]$ il existe $\eta \in (0, \frac{1}{L})$ avec $s + \eta \leq t$ tel que (u, x_u) et (u, y_u) appartiennent à un ensemble compact
pour tout $u \in [s, s + \eta]$.
Pour chaque u, on aura

$$\begin{aligned} |x(u) - y(u) vert &= \left| \int_s^u (f(w, x_w) - f(w, y_w))dw \right| \\ &\leq \int_s^{s+\eta} |f(w, x_w) - f(w, y_w)|dw \\ &\leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} \|x_w - y_w\|_{-h,0} \\ &\leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} \max_{\theta \in [-h, 0]} |x(w + \theta) - y(w + \theta)|. \end{aligned}$$

Comme $x(s) = y(s)$, alors

$$|x(u) - y(u)| \leq L\eta \max_{w \in [s, s+\eta]} |x(w) - y(w)|.$$

De plus étant donné que $L\eta < 1$ alors

$$\max_{w \in [s, s+\eta]} |x(w) - y(w)| = 0$$

ce qui contrendit l'hypothèse $s = \inf\{u \in [\sigma, \sigma + \alpha] : x(u) \neq y(u)\}$. Par conséquent $x(t) = y(t)$, pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$.

2.3 Dépendance Continue des Solutions par Rapport aux Données Initiales

Le théorème suivant assure la dépendance continue des solutions par rapport aux données initiales.

Théorème 2.3 *(Dépendance continue). Soient* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ *un ouvert,* $(\sigma^0, \phi^0) \in \Omega f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *et* x^0 *une solution de l'EDR(*f^0*) en* (σ^0, ϕ^0) *qu'on suppose qu'elle existe et est unique sur* $[\sigma^0 - h, b]$*. Considérons l'ensemble compact définie par :* $W^0 = (t, x_t^0) : t \in [\sigma^0, b]$ *et soit* $V^0 \subseteq \Omega$ *un voisinage de* W^0 *tel que* $f^0 \in C^0(V^0, \mathbb{R}^n)$*. Si*$\{(\sigma^k, \phi^k, f^k)\}_{k\geq 1}$ *, est une suite telle que* $\sigma^k \longrightarrow \sigma^0, \phi^k \longrightarrow \phi^0$ *et* $\|f^k - f^0\|_{V^0} \longrightarrow 0$ *quand* $k \longrightarrow \infty$*, alors il existe* k^0 *tel que la solution* $x^k = x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ *de l'EDR(*f^k*) en* (σ^k, ϕ^k) *pour* $k \geq k^0$ *existe et est définie sur l'intervalle* $[\sigma^k - h, b]$ *et* $x^k \longrightarrow x^0$ *uniformément sur* $[\sigma^0 - h, b]$*.*

Remarque 2.4 *Comme les solutions* x^k *ne sont pas toutes nécéssairement définies sur* $[\sigma^0 - h, b]$*, alors par :* $x^k \longrightarrow x^0$ *uniformément sur* $[\sigma^0 - h, b]$*, on veut dire que pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un* $k_1(\epsilon)$ *tel que pour tout* $k \geq k_1(\epsilon), x^k$ *est définie sur* $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$ *et* $x^k \longrightarrow x^0$ *uniformément sur* $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$*.*

Preuve 2.8 *Soit* $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$*. Posons* $W = W^0 \cup \{(\sigma^k, \phi^k) : k \geq k^0\}$*. On a* $\sigma^k \longrightarrow \sigma^0, \phi^k \longrightarrow \phi^0$*, alors* $(\sigma^k, \phi^k) : k \geq k^0$ *est compact, d'où* W *est compact. Comme* $(\sigma^0, \phi^0) \in W^0 \subset \Omega$ *et* $\sigma^k \longrightarrow \sigma^0, \phi^k \longrightarrow \phi^0$*, pour* k^0 *suffisamment grand choisissons* α, β *tel que* V^1 *soit un voisinage de* $\{(\sigma^k, \phi^k) : k \geq k^0\}$ *et* $V^1 \subset V^0$*. Il existe alors un voisinage* $V = V^1 \cup V^0 \subset V^0 \subset \Omega$ *de* W *telle que* $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$*.*
D'après le Théorème 2.1, comme $W \subseteq \Omega$ *compact, pour* $k \geq k^0$ *il existe un voisinage* $U \subseteq C^0(V, \mathbb{R}^n)$ *de* f^0 *et* $\alpha > 0$ *tels que, pour tout* $(\sigma^k, \phi^k) \in W$ *et* $f \in U$*il existe une solution* $x^k(\sigma^k, \phi^k, f^k)$ *du problème (2.3) en* (σ^k, ϕ^k) *définie sur l'intervalle* $[\sigma^k - h, \sigma^k + \alpha]$*, où* α *est indépendante de* k*. Considérons l'opérateur*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta) \longrightarrow C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n),$$

tel que

$$T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) = 0, \forall t \in [-h, 0],$$

$$yk(t) = T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)(t) = \int_t^0 f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s)ds, \forall t \in I_\alpha.$$

Alors, d'après le Lemme 2.5, il existe un compact K *de* $C([-h, \alpha], \mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$T : W \times U \times \hat{A}(\alpha, \beta)K,$$

est continue. On a $y^k(t) = x^k(\sigma^k + t) - \tilde{\phi}^k(\sigma^k + t) \in K$ *qui est compact, alors la suite* $\{y^k\}_{k\geq k^0}$ *contient une sous suite* $\{y^n\}_{n\geq k^0}$ *qui converge uniformément vers un* y *dans* $[-h, \alpha]$*. D'après le Lemme 2.5* T *est continue, d'où*

$$y^n = T(\sigma^n, \phi^n, f^n, y^n) \longrightarrow T(\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0) = y^0,$$

où, $y^0(t) = x^0(\sigma^0+t) - \tilde{\phi}^0(\sigma^0+t)$. *La suite* $\{y^k\}_k$ *converge uniformément vers* y^0 *sur* $[-h, \alpha]$. *Par conséquent* x^k *converge uniformément vers* x^0 *sur* $[\sigma^0-h, \sigma^0+\alpha]$. *Si* $x^k \longrightarrow x^0$ *uniformément sur* $[\sigma^0-h, b]$, *montrons que pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $k^1(\epsilon)$ *telle que* x^k *est définie sur* $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$ *pour* $k \geq k^1(\epsilon)$ *et* $x^k \longrightarrow x^0$ *uniformément sur* $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$. *On a* x^k *est définie sur* $[\sigma^k - h, b]$ *et converge uniformément vers* x^0 *sur* $[\sigma^0 - h, b]$ *alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $k^0(\epsilon)$ *tel que*

$$\forall k \geq k_0(\epsilon) \Rightarrow |x^k - x^0| \leq \epsilon. \tag{2.12}$$

D'aute part $\sigma^k \longrightarrow \sigma^0$ *sur* $\mathbb{R}$ *entraine pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $k_0'(\epsilon)$ *telque*

$$\forall k \geq k_0(\epsilon) \Rightarrow |\sigma^k - \sigma^0| \leq \epsilon$$

donc

$$\sigma^k \leq \sigma^0 + \epsilon,$$

il en résulte que

$$[\sigma^0 - h + \epsilon, b] \subseteq [\sigma^k - h, b] \qquad \text{et} \qquad [\sigma^0 - h + \epsilon, b] \subseteq [\sigma^0 - h, b]. \tag{2.13}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, *choisissons* $k_1(\epsilon) = \max(k_0(\epsilon), k_0'(\epsilon))$, *dans ce cas (2.12) et (2.13) sont satisfaites pour* $k \geqslant k_1(\epsilon)$. *Par conséquent pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $k_1(\epsilon)$ *telle que* x^k *est définie sur* $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$ *pour* $k \geqslant k_1(\epsilon)$ *et* $x^k \longrightarrow x^0$ *uniformément sur* $[\sigma^0 - h + \epsilon, b]$.

2.4 Prolongement de la Solution

Dans le paragraphe 2 on a montré que sous certaines conditions sur f l'EDR(f) admet une solution locale. Dans ce paragraphe on établit des conditions suffisantes pour avoir une solution maximale.

Définition 2.8 *On Suppose que la fonction* f *dans l'équation (2.2) est continue et soit* x *une solution de cette équation définie sur l'intervalle* $[\sigma - h, a), a > \sigma$. *On dit que* $\hat{x}$ *est un prolongement de* x *s'il existe* $b > a$ *tel que* $\hat{x}$ *soit définie sur* $[\sigma - h, b)$, *coïncide avec* x *sur* $[\sigma - h, a)$ *et vérifie l'équation (2.2) sur* $[\sigma, b)$.

Définition 2.9 *On dira que* x *est une solution maximale sur* $[\sigma-h, a), a > 0$ *si* x *n'admet pas de prolongement sur cet intervale. On dira dans ce cas que* $[\sigma - h, a)$ *est l'intervale d'existence maximal de la solution* x. *Le théorème suivant nous donne une caratérisation importante de la solution maximale.*

Théorème 2.4 *(Prolongement). Soient* Ω *un ensemble ouvert de* $\mathbb{R} \times C$ *et* $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. *Si* x *est une solution maximale de l'équation (2.2) sur* $[\sigma - h, b)$, *alors pour tout compact* W *dans* Ω, *il existe* t_W *tel que* $(t, x_t) \notin W$ *pout tout* $t_W \leqslant t < b$.

Preuve 2.9 *Supposons $b < \infty$ et considérons d'abord le cas $h = 0$. Comme W est compact d'après l'étape 2 du Théorème 2.1 il existe $\alpha > 0$ tel que l'équation (2.2) admet une solution en tout point $(c, y) \in W$ sur $[c, c+\alpha]$. Supposons maintenant le contraire c'est à dire qu'il existe une suite $(t_k, x_{t_k}) \in W, y \in \mathbb{R}^n et (b, y) \in W$ telle que $t_k \longrightarrow b^-, x_{t_k} \longrightarrow y$ quand $k \longrightarrow \infty$. D'aprés le Théorème 2.1 il existe un voisinage $V \subseteq \Omega$ de W contenant (b, y) tel que f est bornée dans V. La solution x est alors uniformément continue sur $[\sigma, b)$ et $x(t) \longrightarrow y$ quand $t \longrightarrow b^-$. La solution $x(t)$ admet dans ce cas un prolongement sur un certain intervalle $[\sigma, b+\alpha)$ ce qui contredit l'hypothèse de départ. Considérons maintenant le cas $h > 0$ et supposons qu'il existe une suite des nombres réels $t_k \longrightarrow b^-$ quand $k \longrightarrow \infty$ et une fonction $\psi \in C$ tellesque*

$$(t_k, x_{t_k}) \in W, (b, \psi) \in W, (t_k, x_{t_k}) \longrightarrow (b, \psi), \tag{2.14}$$

quand $k \longrightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\sup_{\theta\in[-h,-\epsilon]} |x_{t_k}(\theta) - \psi(\theta)| \right) = 0. \tag{2.15}$$

Puisque $x_{t_k}(\theta) = x(t_k + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0]$ et $t_k \longrightarrow b^-$ quand $k \longrightarrow \infty$, alors comme x est continue, $\lim_{k\longrightarrow\infty} xtk(\theta) = \lim_{k\longrightarrow\infty} x(t_k + \theta) = x(b + \theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0)$. Par conséquent, d'après (2.15) on obtient $x(b + \theta) = \psi(\theta)$ pour tout $\theta \in [-h, 0)$. Donc $(tk, x_{t_k}) \longrightarrow (b, x_b)$ quand $k \longrightarrow \infty$. (2.14) entraine que $(t_k, x_{t_k}) \longrightarrow (b, x_b) \in W$. D'après le Théorème 2.1 il existe $\alpha' > 0$ tel que l'équation (2.2) admet une solution en (b, x_b) sur $(b, b + \alpha')$. Ce qui contrendit l'hypothèse.

Corollaire 2.1 *Supposons que Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $fC(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Soient x une solution maximale de l'équation (2.2) sur $[\sigma - h, b)$ et W l'adhérence de l'ensemble $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$ dans $\mathbb{R} \times C$. Si W est compact alors il existe une suite $\{t_k\}$ de nombres réels, $t_k \longrightarrow b^-$ quand $k \longrightarrow \infty$ telle que (t_k, x_{t_k}) tend vers $\partial\Omega$ quand $k \longrightarrow \infty$. Si $h > 0$, alors il existe $\psi \in C$ tel que $(b, \psi) \in \partial\Omega$ et $(t, x_t) \longrightarrow (b, \psi)$ quand $t \longrightarrow b^-$.*

Preuve 2.10 *Si W est compact d'après le Théorème 2.4, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(t_k, x_{t_k}) \in \Omega, (t_k, x_{t_k}) \notin W$ pour tout $t_{k_0} \leq t_k < b$ et $t_k \longrightarrow b^-$ quand $k \longrightarrow \infty$, et donc la limite de (t_k, x_{t_k}) tend vers $\partial\Omega$ quand $k \longrightarrow \infty$. D'où, la première partie du corollaire. Si $h > 0$, supposons qu'il existe une suite des nombres réels $t_k \longrightarrow b^-$ quand $k \longrightarrow \infty$ et une fonction $\psi \in C$ telles que*

$$(t_k, x_{t_k}) \in W, (b, \psi) \in W, (t_k, x_{t_k}) \longrightarrow (b, \psi), \tag{2.16}$$

quand $k \longrightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\sup_{\theta\in[-h,-\epsilon]} |x_{t_k}(\theta) - \psi(\theta)| \right) = 0 \tag{2.17}$$

Puisque $x_{t_k}(\theta) = x(t_k + \theta)$ *pour tout* $\theta \in [-h, 0]$ *et* $t_k \longrightarrow b^-$ *quand* $k \longrightarrow \infty$, *et comme* x *est continue,*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x_{t_k}(\theta) = \lim_{k \longrightarrow \infty} x(t_k + \theta) = x(b + \theta)$$

pour tout $\theta \in [-h, 0)$. *Par conséquent, d'après (2.17) on obtient* $x(b + \theta) = \psi(\theta)$ *pour tout* $\theta \in [-h, 0)$. *Donc* $(t_k, x_{t_k}) \longrightarrow (b, x_b)$ *quand* $k \longrightarrow \infty$. *D'après (2.16) on déduit que* $(t_k, x_{t_k}) \longrightarrow (b, x_b) \in W$. *Le Théorème 2.1 entraine l'existence d'un* $\alpha^{'} > 0$ *tel que l'équation (2.2) admet une solution en* (b, x_b) *sur* $(b, b + \alpha^{'})$. *Ce qui contredit l'hypothèse.* x *est donc une solution maximale de l'équation (2.2) sur* $[\sigma - h, b)$. *D'où* $(t_k, x_{t_k}) \longrightarrow (b, x_b) \in \Omega \setminus W$. *Comme* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times C$, *on obtient* $(b, x_b) \in \partial\Omega$ *et* $(t, x_t) \longrightarrow (b, x_b)$ *quand* $t \longrightarrow b^-$.

Théorème 2.5 *Soient*Ω *un ouvert de* $\mathbb{R} \times C, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction complètement continue; c'est à dire que* f *est continue et envoie tout ensemble fermé borné de* Ω *dans un ensemble borné de* $\mathbb{R}^n$, *et* x *est une solution maximale de l'équation (2.2) sur* $[\sigma - h, b)$. *Alors, pour chaque ensemble fermé borné* U *dans* Ω, *il existe* t_U *tel que* $(t, x_t) \notin U$ *pour* $t_U \leq t < b$.

Preuve. Dans le cas $h = 0$, U est fermé borné dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, donc U est compact dans Ω. Le résultat découle du Théorème 2.4. Considérons maintenant le cas $h > 0$. Supposons le contraire, dans ce cas il existe une suite réelle $(t_k)_k k, t_k \longrightarrow b^-$ quant $k \longrightarrow \infty$ elle que $(t_k, x_{t_k}) \in U$ pour tout k. Comme $h > 0$, il en résulte que l'ensemble $\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}$ est borné. Par conséquent, puisque $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est complètement continue, il existe une constante M telle que $|f(\tau, \phi)| \leq M$ pour tout $(\tau, \phi) \in \overline{\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}}$. L'équation intégrale (2.4) donne

$$|x(t + \tau) - x(t)| = \left| \int_t^{t+\tau} f(s, x_s) ds \right| \leq M\tau$$

pour tout $t, t + \tau < b$. Par suite, x est uniformément continue sur $[\sigma - h, b)$. D'après le Théorème d'Ascoli l'ensemble $\overline{\{(t, x_t) : \sigma \leq t < b\}}$ est compact dans Ω. Ce qui contrendit le Théorème 2.4

Chapitre 3

Equations Différentielles à Retard Dépendant de l'Etat

3.1 Position du Problème

Beaucoup de modèles intervenants en dynamique des populations dans lesquels on tient compte de l'effet de la réponse de rétro-action font appel à un retard non pas constant mais fonctionnel. Dans beaucoup de cas on est ammené à considérer des équations à retard fonctionnelle du type :

$$\dot{x}(t) = g(x(t - r(x_t))), \tag{3.1}$$

où $g : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$, avec $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $r : U \subseteq C \longrightarrow [-h, 0]$ le retard fonctionnelle défini sur un ouvert U de $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ à valeur dans $[-h, 0]$, où $h > 0$.
En utilisant les notations du chapitre 1 sur les équations diffirentielles à retard indépendant de l'état, l'équation (3.1) peut être ré-écrire sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \qquad t > 0, \tag{3.2}$$

a laquelle on associe la donnée initiale

$$x_0 = \phi \in C,$$

où,

$$f = g \circ ev \circ (id \times (-r)), \tag{3.3}$$

et ev est l'application d'évaluation définie par

$$ev : C \times [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(\psi, s) \longrightarrow ev(\psi, s) = \psi(s).$$

La difficulté principale à laquelle on est confrontée quand on étudie les équations différentielles à retard dépendant de l'état du type (3.2) est que les
résultats classiques sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles à retard indépendant de l'état ne peuvent pas s'appliquer. En effet, le Théorème 2.2 du chapitre 1 impose que f soit localement lipschitzienne
sur U. Si on suppose donc que g et r sont localement lipschitzienne, la relation (3.3) imposerai que l'application d'évaluation ev est également localement lipschitzienne. Voyons maintenant ce que implique une telle hypothèse.
En effet, on a alors dans un voisinage de $C \times [-h, 0]$

$$|ev(\phi, s) - ev(\psi, t)| \leq L(\|\phi - \psi\|_{-h,0} + |s - t|),$$

ce qui donne, puisque $ev(\phi, s) = \phi(s)$,

$$|\phi(s) - \psi(t)| \leq L(\|\phi - \psi\|_{-h,0} + |s - t|).$$

Si $\phi = \psi$, on obtient

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq L|s - t|.$$

Il en résulte que ϕ est localement lipschitzienne. On est donc amené à changer l'espace des phases $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Une idée pour contourner cette difficulté serai alors d'imposer que g et r soient de classe C^1. Dans ce cas pour obtenir que f soit également de classe C^1 il faudrait, d'après la relation (2.3) que l'application d'évaluation ev soit également de classe C^1. Or si ev est de classe C^1 alors

$$D_2 ev(\phi,s)1 = \dot{\phi}(s),$$

où $D_2 ev(\phi,s)$ est la dérivée partielle de ev par rapport à s. On obtient alors que ϕ est de classe C^1. On est donc amené à reformuler le problème de valeur initiale (2.2) dans le nouvel espace $C^1 = C^1([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Munissons C^1 de la norme

$$\|\phi\|^1_{-h,0} = \|\phi\|_{-h,0} + \|\dot{\phi}\|_{-h,0}$$

C^1 muni de cette norme est un espace de Banach. Dans ce cas l'application ev est continument différentiable. Si on suppose donc que g et r sont continuments différentiables alors l'application $f = g\circ ev\circ(id\times(-r))$ sera également continument différentiable de U dans $\mathbb{R}^n$. Considérons l'équation (2.2), avec $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continument différentiable où $U \subset C^1$ est un ouvert. Une solution x de l'équation (2.2) est donc une application $x : [-h,t_e) \longrightarrow \mathbb{R}^n, 0 < te \leq +\infty$ continument différentiable et telle que la courbe $[0,t_e) \ni t \longmapsto x_t \in C^1$ soit elle même continument différentiable. En partculier la continuité en $t=0$ entraine

$$\dot{\phi}(0) = f(\phi),$$

relation qui n'est pas satisfaite par tous les éléments ϕ de U. La relation précédente nous force donc à chercher la solution non pas dans un ouvert U de C^1 mais dans l'ensemle

$$X = X_f = \{\phi \in U : \dot{\phi}(0) = f(\phi)\}. \tag{3.4}$$

Définissons l'application linéaire et continue $p : C^1 \ni \phi \longmapsto \dot{\phi}(0) \in \mathbb{R}^n$. Il clair que $X = (p-f)^{-1}(0)$. On est donc amené à formuler le problème (3.2) comme suite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t), \quad t > 0, \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour avoir un semiflot sur X avec des propriétés de différentiabilité il faut imposer des hypothèses supplémentaires sur f. Dans la suite du chapitre on supposera que :

(H1) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continûment différentiable sur l'ouvert $U \subset C^1$.

(H2) Chaque dérivée $Df(\phi), \phi \in U$, admet un prolongement linéaire continu $Def(\phi) : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

(H3) Pour tout $\phi \in U$ il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ et $L \geq 0$ tels que pour tout $\varphi, \psi \in V, |f(\varphi) - f(\psi)| \leq L\|\varphi - \psi\|_{-h,0}$.

Proposition 3.1 *Si (H1), (H2) sont vérifées et $X \neq 0$ alors X définie par (3.4) est une sous-variété de codimension n dans U et dans C^1.*

Preuve. On a $X = (p - f)^{-1}(0)$. Il suffit d'établir que chaque dérivée est surjective, dans ce cas le noyau fermé est de codimension n dans C^1. Soit $\phi \in X$. Montrons que $(p - Df(\phi))(C^1) \subset \mathbb{R}^n$ contient une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $b_1, b_2, ..., b_n$ une base de $\mathbb{R}^n$. On a $\det(b_1, b_2, ..., b_n) \neq 0$ si et seulement si $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sont linéairement indépendant et comme det est une application continue, alors il existe un voisinage $(b_k + V)_{k=1}^n$de $(b_k)_{k=1}^n$, et choisissons V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ assez petit tels que les n composants du vécteur $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{k=1}^n (b_k + V)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.
D'après l'hypothèse (H2) et puisque $D_e f(\phi)$ est continue en $0 \in C$, il existe un voisinage W de $0 \in C$ tel que

$$D_e f(\phi)(W) \subset V. \tag{3.6}$$

Soit $\epsilon > 0$ assez petit, définissons l'ensemble $W = \{\chi \in C : \|\chi\| < \epsilon\}$ et posons

$$b_1 = (\frac{\epsilon}{2h}, 0, ..., 0), b_2 = (0, \frac{\epsilon}{2h}, 0, ..., 0), ..., b_n = (0, ..., 0, \frac{\epsilon}{2h}),$$

qui est une base de Rn telle que $|bk| = \frac{\epsilon}{2h}$ pour tout $k \in 1, 2, ..., n$. Définissons maintenant les fonctions

$$\chi_1(\theta) = (\frac{\epsilon}{2h}\theta, 0, ..., 0), \chi_2(\theta) = (0, \frac{\epsilon}{2h}\theta, 0, ..., 0), ..., \chi_n(\theta) = (0, ..., 0, \frac{\epsilon}{2h}\theta)$$

On a $\|\chi_k\| = \sup_{\theta \in [-h,0]} \frac{\epsilon}{2h}|\theta| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$,c'est à dire que $\chi_k \in W$
$p(\chi_k) = \dot{x}k(0) = b_k$ pour tout $k \in 1, 2, ..., n$. D'après la relation (3.6)
et puisque $\chi_k \in W$ pour tout $k \in 1, 2, ..., n$, on a

$$D_e f(\phi)(\chi_k) \in V.$$

Etant donné que $D_e f(\phi)$ est linéaire et $(-\chi_k) \in W$ il vient,

$$-D_e f(\phi)(\chi_k) = D_e f(\phi)(-\chi_k) \in V.$$

Par suite,

$$(p - D_e f(\phi))(\chi_k) = p(\chi_k) - D_e f(\phi)(\chi_k) = b_k - D_e f(\phi)(\chi_k) \in b_k + V,$$

pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Finalement on obtient que

$$((p - D_e f(\phi))(\chi_1), (p - D_e f(\phi))(\chi_2), ..., (p - D_e f(\phi))(\chi_n) \in \prod_{k=1}^n (b_k + V),$$

est une base de $\mathbb{R}^n$. D'où le résultat.

3.2 Existence et Unicité

3.2.1 Existence de la Solution

Dans tout le reste de ce chapitre on supposera que f satisfait les hypothèses (H1)-(H2)-(H3). Commençons d'abord par donner une formulation intégrale adéquate au problème (2.5).

Lemme 3.1 *Soient $T > 0$ et $\phi \in X$. Alors, $x \in C^1([-h,T],\mathbb{R}^) = C^1([-h,T])$ est une solution du probléme (3.5) si et seulement si $x_s \in U$ pour tout $s \in [0,T]$ et x est une solution du problème intégral*

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s)ds, & t \in [0,T], \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases} \tag{3.7}$$

Preuve. Condition nécessaire : Soit $x \in C^1([-h,T])$ une solution du problème (3.5), alors $x_t \in U$ pour tout $t \in [0,T]$ et

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t), & t \in [0,T], \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases}$$

Par intégration, on obtient

$$\int_0^t \dot{x}(s) = x(t) - x(0) = \int_0^t f(x_s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Comme $x(0) = \phi(0)$ on a

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s)ds, & t \in [0,T]. \\ x_0 = \phi \in X. \end{cases}$$

Condition suffisante : Soit $x \in C^1([-h,T])$ une solution de l'équation intégrale (3.7). Alors,

$$\dot{x} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x_s)ds.$$

Comme $f(x_t)$ est continue en t, en appliquant le théorème de lamoyenne, on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x_s)ds = f(x_t).$$

D'où le résultat. Pour $T > 0$, on désignera par $C_0^1([-h,T],\mathbb{R}^n) = C_0^1([-h,T])$ le sousespace fermé des applications $y \in C^1$, qui sont nulles sur $[-h,0]$. Posons

$$x = y + \hat{\phi},$$

telle que

$$\begin{cases} \hat{\phi}(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0), \\ \hat{\phi}(t) = \phi(t) + t\dot{\phi}(0), \quad t \in [0, \infty). \end{cases} \tag{3.8}$$

Le lemme suivant réduit l'étude de l'existence locale de la solution du problème intégral (3.7) à celle d'une équation intégrale avec condition initiale nulle.

Lemme 3.2 *Posons $x = y + \hat{\phi}$. Alors $x \in C^1([-h, T])$ est une solution du problème intégral (3.7) associé à (3.5) si et seulement si $y \in C_0^1([-h, T])$ est une solution du problème intégral*

$$\begin{cases} y(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(\phi))ds, \quad t \in [0, T], \\ y_0 = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

Preuve. Condition nécessaire : Soit $x \in C^1([-h, T])$ une solution du problème (3.7) tel que $x = y + \hat{\phi}$. On a alors l'équation suivante en y

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) - \hat{\phi} &= \int_0^t f(x_s)ds - t\dot{\phi}(0) \\ &= \int_0^t f(y_s + \hat{\phi}_s)ds - t\dot{\phi}(0) \\ &= \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0))ds \\ &= \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(\phi))ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$. De plus $y(t) = x(t) - \phi(t) = \phi(t) - \phi(t) = 0$ pour tout $t \in [-h, 0]$, d'où $y_0 = 0.y \mid_{[0,T]}$est de classe C^1 telle que

$$\dot{y}(t) = f(y_t + \hat{\phi}_t) - \dot{\phi}(0), \quad \forall t \in (0, T],$$

avec

$$\dot{y}(0) = f(y_0 + \hat{\phi}_0) - \dot{\phi}(0) = f(\phi) - \dot{\phi}(0) = 0.$$

Par conséquent $y \in C_0^1([-h, T]) \subset C^1([-h, T])$. Condition suffisante : Soit $y \in C_0^1([-h, T])$ une solution du problème intégral (3.9) avec $x = y + \hat{\phi}$, d'où pout tout $t \in [0, T]$

$$y(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - f(\phi))ds = \int_0^t f(x_s)ds - t\dot{\phi}(0),$$

d'après (3.8) on obtient

$$x(t) = y(t) + \hat{\phi}(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s)ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$. D'après le Théorème de la moyenne on déduit que $x \in C^1([-h, T])$.

Remarque 3.1 *D'après les lemmes 3.1 et 3.2, l'existence de la solution du probleme (3.5) est équivalente à celle du probleme intégral (3.9).*

Lemme 3.3 *Soit l'application linéaire continue*

$$E_T : C^1([-h,0]) \longrightarrow C^1([-h,T]),$$

définie par

$$\begin{cases} E_T\phi(t) = \phi(t) & pour t \in [-h,0), \\ E_T\phi(t) = \phi(0) + t\dot{\phi}(0) & pour t \in [0,T]. \end{cases}$$

Alors pour tout $\phi \in C^1([-h,0])$,

$$\|E_T\phi\|^1_{-h,t} \leq (1+T)\|\phi\|^1_{-h,t}.$$

Preuve. Soit $\phi \in C^1([-h,0])$, on a

$$E_T\phi : [-h,T]_{t \longmapsto E_T\phi(t).} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Etant donné que

$$E_T\phi = \hat{\phi} \mid_{[-h,T]}, \forall \phi \in C^1,$$

on a

$$\|ET\phi\|^1_{-h,T} = \max_{t\in[-h,T]} |\hat{\phi}(t)| + \max_{t\in[-h,T]} |\dot{\hat{\phi}}(t)| \tag{3.10}$$

D'après (3.8) on a

$$|\hat{\phi}(t)| = |\phi(t)| \leq \|\phi\|_{-h,0}, \quad \forall t \in [-h,0),$$

$$|\hat{\phi}(t)| = |\phi(0) - t\dot{\phi}(0)| \leq \|\phi\|_{-h,0} + T\|\dot{\phi}\|_{-h,0}, \quad \forall t \in [0,T],$$

ce qui donne, pour tout $t \in [-h,T]$

$$|\hat{\phi}(t)| \leq \|\phi\|_{-h,0} + T\|\dot{\phi}\|_{-h,0} \tag{3.11}$$

De plus

$$|\dot{\hat{\phi}}(t)| \leq \|\phi\|_{-h,0}, \quad t \in [-h,T] \tag{3.12}$$

Les relations (3.10), (3.11) et (3.12) entraînent que

$$\begin{aligned} \|E_T\phi\|_{-h,T} &\leq \|\phi\|_{-h,0} + \|\dot{\phi}\|_{-h,0} + T\|\dot{\phi}\|_{-h,0} \\ &\leq \left(\|\phi\|_{-h,0} + \|\dot{\phi}\|_{-h,0}\right) + T\left(\|\phi\|_{-h,0} + \|\dot{\phi}\|_{-h,0}\right) \\ &= (1+T)\|\phi\|^1_{-h,0}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.
L'hypothèse (H3) entraine le lemme suivant.

Lemme 3.4 *Soit $\psi \in X$, il existent $r(\psi) > 0$ et $L \geq 0$ tels que*

$$V_\psi = \psi + (C^1([-h,0]))r(\psi),$$

est une partie de U et

$$|f(\phi) - f(\chi)| \leq L\|\phi - \chi\|_{-h,0}, \qquad \forall \phi, \chi \in V_\psi, \tag{3.13}$$

où $(C^1([-h,0]))r(\psi)$ est la boule ouverte dans $C^1([-h,0])$, centrée en 0 et de rayon $r(\psi)$.

Proposition 3.2 *Soit $\psi \in X$, pour tout $\epsilon > 0$, il existent $T = T(\epsilon) \in (0, \frac{1}{2L+1}]$ et $r = r(\epsilon) \in (0, r(\psi)]$ tels que pour tout $\phi \in \psi + (C^1([-h,0]))r$ et pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\hat{\phi}_t \in \psi_t + (C^1([-h,0]))_\epsilon,$$

où $r(\psi)$ est donné par le Lemme 3.4.

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$, comme $\hat{\psi}$ et$\dot{\hat{\psi}}$ sont uniformément continues sur $[-h,1]$, alors il existe $T = T(\epsilon) \in (0, \frac{1}{2L+1}]$ tel que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|\hat{\psi}_t - \hat{\psi}_0\|^1_{-h,0} \leq \min\left\{r(\psi), \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

En particulier, puisque $\hat{\psi}_0 = \psi$ on a

$$\|\hat{\psi}_t - \psi\|^1_{-h,0} \leq \min\left\{r(\psi), \frac{\epsilon}{2}\right\}. \tag{3.14}$$

Donc,

$$\hat{\psi}_t \in V_\psi \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.15}$$

Pour $\phi \in V_\psi$ et $t \in [0,T]$ on

$$\|\hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t\|^1_{-h,0} \leq \|\hat{\phi} - \hat{\psi}\|^1_{-h,T} = \|E_T\phi - E_T\psi\|^1_{-h,T},$$

d'où puisque E_T est linéaire

$$\|\hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t\|^1_{-h,0} \leq \|E_T(\phi - \psi)\|^1_{-h,T}.$$

D'après le Lemme 3.3, on obtient

$$\|\hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t\|^1_{-h,0} \leq (1+T)\|(\phi - \psi)\|^1_{-h,T}. \tag{3.16}$$

Les relations (3.14) et (3.16) entraînent que

$$\|\hat{\phi}_t - \psi\|^1_{-h,0} \leq \|\hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t\|^1_{-h,0} + \|\hat{\phi}_t - \psi\|^1_{-h,0}$$

$$\leq (1+T)\|(\phi-\psi)\|^1_{-h,T} + \frac{\psi}{2}.$$

On peut donc choisir $r = r(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2(1+T)}$. Dans ce cas on a pour tout $\phi \in \psi + (C^1([-h,0]))_r$ et tout pour $t \in [0,T]$,

$$\|\hat{\phi}_t - \psi\|^1_{-h,0} \leq \epsilon.$$

Le corollaire suivant ramène l'existence de la solution du problème (3.9) dans une boule de $C^1_0([-h,T])$.

Corollaire 3.1 *Soient $\psi \in X$ et posons*

$$\epsilon = \frac{r(\epsilon)}{2}, \quad T \in (0, T(\epsilon)], r \in (0, r(\epsilon)],$$

$$\phi \in X_{\psi,r} = X \cap (\psi + (C^1([-h,0]))r) et y \in (C^1_0([-h,T]))_\epsilon. \tag{3.17}$$

Alors,

$$y_t + \hat{\phi}_t \in V_\psi = \psi + (C^1([-h,0]))_{r(\psi)}, \forall t \in [0,T],$$

où $r(\psi), T(\epsilon)$ et $r(\epsilon)$ sont donnés par le Lemme 3.4 et la Proposition 3.2 respectivement.

Preuve. Soit l'application linéaire continue

$$j_T : C^1([-h,T]) \longrightarrow C([0,T], C^1([-h,0]))),$$

définie par $j_T(y)(t = y_t$. On a puisque $y \in (C^1_0([-h,T]))_\epsilon$

$$j_T(y) : [0,T] \ni t \longmapsto y_t \in c^1([-h,0]),$$

$$\|y_t\|^1_{-h,0} \leq \|y_t\|^1_{-h,T} < \epsilon. \tag{3.18}$$

De plus d'après la Proposition 3.2

$$j_T(E_T(\phi)) : [0,T] \ni t \longmapsto \hat{\phi}_t \in C^1([-h,0]),$$

$$\hat{\phi}_t \in \psi + (C^1([-h,0]))_\epsilon. \tag{3.19}$$

Les relations (3.18) et (3.19) entraînent que

$$\|y_t + \hat{\phi}_t - \psi\|^1_{-h,0} \leq \|y_t\|^1_{-h,0} + \|\hat{\phi}_t - \psi\|^1_{-h,0} < 2\epsilon,$$

mais d'après (3.17) on a $2\epsilon = r(\psi)$ d'où

$$y_t + \hat{\phi} t \in V_\psi, \forall s \in [0,T]. \tag{3.20}$$

Corollaire 3.2 *Soient* $(\phi, y) \in X_{\psi,r} \times (C_0^1([-h,T]))_\epsilon$ *et définissons l'application*

$$\begin{cases} R_{T_r}(\phi, y)(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0))ds, & s \in [0,T] \\ R_{T_r}(\phi, y)(t) = 0, & t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{3.21}$$

alors $R_{T_r}(\phi, y) \in C_0^1([-h,T])$*, autrement dit*

$$R_{T_r} : X_\psi, r \times (C_0^1([-h,T]))_\epsilon \longrightarrow C_0^1([-h,T]).$$

où ϵ, T *et* r *sont donnés par le Corollaire 3.1.*

Preuve. Notons $R_{T_r}(\phi, y) = z$. La restriction $z \mid [0,T]$ est de classe C^1 avec

$$z(t) = f(y_t + \hat{\phi}_t) - \dot{\phi}(0), \quad (0,T], \tag{3.22}$$

et d'après le théorème de la moyenne, la dérivée en $t = 0$ est

$$f(y_0 + \hat{\phi}_0) - \dot{\phi}(0) = f(0 + \phi) - \dot{\phi}(0) = 0,$$

d'où

$$\dot{z}(0) = 0.$$

et

$$R_{T_r} : X_{\psi,r} \times (C_0^1([-h,T]))_\epsilon \longrightarrow C_0^1([-h,T]).$$

Le Théorème suivant ramène la solution du problème (3.9) à celui d'un point fixe de l'application R_{T_r} .

Théorème 3.1 *La solution sur* $[0,T]$ *du problème intégral (3.9) est le point fixe de l'application* R_{T_r} *, où* T *est celui du Corollaire 3.1. Avant de démontrer le Théorème 3.1 nous aurons besoin de certains résultats préliminaires. Montrons d'abord que* R_{T_r} *est une application contractante par rapport à la deuxième variable.*

Proposition 3.3 *Soit* $\psi \in X$*, pour tout* $\phi \in X_{\psi,r}, y, w \in (C_0^1([-h,T]))_\epsilon$ *ona*

$$\|R_{T_r}(\phi, y) - R_{T_r}(\phi, w)\|_{-h,T}^1 \leq \frac{2L}{2L+1}\|y - w\|_{-h,T}^1,$$

où ϵ, T *et* r *sont donnés par le Corollaire 3.1 et* L *est la constante lipschitzienne de* f*.*

Preuve. Posons $z = R_{T_r}(\phi, y)$ et $v = R_{T_r}(\phi, w)$. On a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|z - v\|_{h,T}^1 = max_{t \in [-h,T]}|z(t) - v(t)| + max_{t \in [-h,T]}|\dot{z}(t) - \dot{v}(t)|. \tag{3.23}$$

En utilisant (3.21) on arrive à

$$\begin{aligned}|z(t)-v(t)| &= \left|\int_0^t (f(y_s+\hat{\phi}_s)-f(w_s+\hat{\phi}_s))ds\right| \\ &\leq \int_0^T \mid f(y_s+\hat{\phi}_s)-f(w_s+\hat{\phi}_s) \mid ds \\ &\leq T \max_{s\in[0,T]} |f(ys+\hat{\phi}_s)-f(w_s+\hat{\phi}_s).\end{aligned}$$

De plus, d'après (3.13)

$$|z(t)-v(t)| \leq TL \max_{s\in[0,T]} \|y_s-w_s\|^1_{-h,0}.$$

D'autre part, il est clair que

$$\max_{s\in[0,T]} \|y_s-w_s\|^1_{-h,0} \leq \|y-w\|^1_{-h,T},$$

ce qui entraîne

$$|z(t)-v(t)| \leq TL\|y-w\|^1_{-h,T}. \tag{3.24}$$

D'après (3.13), (3.22) on obtient,

$$|\dot{z}(t)-\dot{v}(t)| = f(yt+\hat{\phi}_t)-f(w_t+\hat{\phi}_t) \leq L\|y_t-w_t\|^1_{-h,0},$$

et puisque $\dot{y}(u)=\dot{w}(u)=0$ pour tout $u\in[-h,0]$,

$$\|y_t-w_t\|^1_{-h,0} = \max_{\theta\in[-h,0]} \mid \int_0^{t+\theta} (\dot{y}(s)-\dot{w}(s))ds \mid$$

$$\leq \int_0^T |\dot{y}(s)-\dot{w}(s)|ds \leq T \max_{u\in[0,T]} |\dot{y}(u)-\dot{w}(u)| \leq T\|y-w\|^1_{-h,T}.$$

D'ou

$$|\dot{z}(t)-\dot{v}(t)| \leq TL\|y-w\|^1_{-h,T}. \tag{3.25}$$

En combinant (3.23), (3.24) et (3.25) on obtient,

$$\|z-v\|^1_{-h,T} \leq 2TL\|y-w\|^1_{-h,T}.$$

Comme $T \leq \dfrac{1}{2L+1}$, on obtient le résultat désiré.

Proposition 3.4 *Soient $\psi \in X$ et $\delta > 0$, il existent $T = T(\delta) \in (0, T(\epsilon)]$ et $r = r(\delta) \in (0, r(\epsilon)]$ tels que*

$$\forall\phi \in X_{\psi,r}, \|R_{T_r}(\phi,0)\|^1_{-h,T} \leq \delta, \tag{3.26}$$

où $\epsilon = \epsilon(\delta) > 0$.

Preuve. Soit $\epsilon(\delta) \in (0, \min r(\psi), \frac{\delta}{3L})$. La Proposition 3.2 permet de choisir $T_1 = T(\epsilon(\delta))$ et $r_1 = r(\epsilon(\delta))$ de sorte que

$$\hat{\phi}_t \in \psi + (C^1([-h,0]))_{\epsilon(\delta)} \subset \psi + (C^1([-h,0]))r(\psi) = V_\psi,$$

pour tout $\phi \in \psi(C^1([-h,0]))r^1$ et $t \in [0, T1]$. L'inégalité $\epsilon(\delta) < \frac{\delta}{3L}$ permet de choisir $T = T(\delta) \in (0, T_1]$ et $r = r(\delta) \in (0, r_1]$ suffisamments petits tels que,

$$T\Bigg(Lr(\psi) + |f(\psi)| + \mid \dot{\psi}(0) \mid +r\Bigg) + L(1+T)r + L_\epsilon(\delta) + r < \delta. \tag{3.27}$$

Soient $\phi \in X_\psi, r, z = R_{T_r}(\phi, 0)$ et $t \in [0, T]$, on a d'une part

$$|z(t)| \leq \int_0^T \mid f(\hat{\phi}_s) \mid ds + T \mid \dot{\phi}(0) \leq T\Bigg(\sup_{\chi in V_\psi} |f(\chi)| + \dot{\phi}(0)\Bigg). \tag{3.28}$$

D'autre part puisque $\phi \in X_{\psi,r}$

$$\mid \dot{\phi}(0) \mid \leq \mid \dot{\phi}(0) - \dot{\psi}(0) \mid + \mid \dot{\psi}(0) \mid \leq \|\phi - \psi\|^1_{-h,0} + \mid \dot{\psi}(0) \mid \leq r + \mid \dot{\psi}(0) \mid . \tag{3.29}$$

De plus (3.13) entraine pour tout $\chi \in V_\psi$

$$\begin{aligned} |f(\psi)| &\leq |f(\chi) - f(\psi)| + |f(\psi)| \\ &\leq L\|\chi - \psi\|^1_{-h,0} + |f(\psi)| \leq Lr(\psi) + |f(\psi)|. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En combinant (3.28), (3.29) et (3.30) il vient,

$$|z(t)| \leq T\Bigg(Lr(\psi) + |f(\psi)| + \mid \dot{\psi}(0) \mid +r\Bigg). \tag{3.31}$$

D'un autre cot

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &= f(\hat{\phi} t) - \dot{\phi}(0) \\ &\leq \mid f(\hat{\phi}_t) - f(\hat{\psi}_t \mid + \mid f(\hat{\psi}_t) - f(\hat{\psi}_0) \mid + \mid f(\hat{\psi}_0) - \dot{\phi}(0) \mid \\ &= \mid f(\hat{\phi}_t) - f(\hat{\psi}_t \mid + \mid f(\hat{\psi}_t) - f(\hat{\psi}_0) \mid + \mid \dot{\psi}_0 - \dot{\phi}(0) \mid \\ &\leq L\|\hat{\phi}_t - \hat{\psi}_t\|^1_{-h,0} + L\|\hat{\phi}_0 - \hat{\psi}_0\|^1_{-h,0} + \|\phi - \psi\|^1_{-h,0}. \end{aligned}$$

En combinant la dernière inégalité avec (3.16) et puisque $\hat{\psi}_t \in \psi + (C^1([-h,0]))_\epsilon(\delta)$ on arrive à

$$|\dot{z}(t)| \leq L(1+T)\|\phi - \psi\|^1_{-h,0} + L \in (\delta) + \|\phi - \psi\|^1_{-h,0}.$$

De plus comme $\phi \in X_{\psi,r}$ alors

$$|\dot{z}(t)| \leq L(1+T)r + L\epsilon(\delta) + r. \tag{3.32}$$

Finalement les inégalités (3.27), (3.31) et (3.32) entraînent

$$\|z\|^1_{-h,0} \leq T\Bigg(Lr(\psi) + |f(\psi)| + \dot{\psi}(0) + r\Bigg) + L(1+T)r + L\epsilon(\delta) + r < \delta.$$

Les Propositions 3.3 et 3.4 entrainent le corollaire suivant.

Corollaire 3.3 *Pour tout* $\epsilon > 0$*, posons* $\lambda = \frac{2L}{2L+1} + \frac{1}{2}(1 - \frac{2L}{2L+1}) \in (0,1)$*,* $\delta = \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{2L}{2L+1})$ *,* $T = T(\delta)$ *et* $r = r(\delta)$*. Alors l'application* R_{T_r} *envoie l'ensemble* $X_{\psi,r} \times \overline{(C_0^1([-h,T])}_{\lambda\epsilon}$ *de* $X \times C_0^1([-h,T])$ *dans une boule fermée* $\overline{(C_0^1([-h,T])}_{\lambda\epsilon}$ *de* $(C_0^1([-h,T])\epsilon$*.*

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$, en utilisant la Proposition 3.4 pour $\delta = \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{2L}{2L+1})$ et en appliquant la Proposition 3.3 sachant que $\phi \in X_{\psi,r} \subset X_{\psi,r(\psi)}, y \in \overline{(C_0^1([-h,T])}_{\lambda\epsilon}, r \leq r(\epsilon)$ et $T \leq T(\epsilon)$, on a

$$\begin{aligned}
\|R_{T_r}(\phi,y)|_{-h,T}^1 &\leq \|R_{T_r}(\phi,y) - R_{T_r}(\phi,0)|_{-h,T}^1 + \|R_{T_r}(\phi,0)|_{-h,T}^1 \\
&\leq \frac{2L}{2L+1}\|y\|_{-h,T}^1 + \delta \\
&\leq \frac{2L}{2L+1}\lambda\epsilon + \delta \\
&\leq \frac{2L}{2L+1}\epsilon + \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{2L}{2L+1}).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\|R_{T_r}(\phi,0)|_{-h,T}^1 \leq \lambda\epsilon.$$

Proposition 3.5 *L'application* R_{T_r} *est de classe* C^1*.*

Preuve.Définissons d'abord les applications linéaires continues suivantes

$$E_T : C^1([-h,0]) \longrightarrow C^1([-h,T]),$$

$$E_T\phi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-h,0) \\ \phi(0) + t\dot{\phi}(0), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

$$j_T : C^1([-h,T]) \longrightarrow C([0,T], C^1([-h,0]))),$$

$$j_T(y)(t) = y_t.$$

$$j_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow C^1([0,T]),$$

$$j_n\xi(t) = \xi.$$

$$I_T : C([0,T]) \longrightarrow C^1([0,T]),$$

$$I_T(y)(t) = \int_0^t y(s)ds.$$

$$E^T : C^1([0,T]) \longrightarrow C^1([-h,T]),$$

$$E^T z(t) = \begin{cases} z(t), & t \in [0,T], \\ z(0) + t\dot{z}(0), & t \in [-h,0). \end{cases}$$

Considérons l'ensemble ouvert

$$U_T = \eta \in C([0,T], C^1([-h,0])) : \eta(t) \in Upourtout \quad t \in [0,T],$$

et l'opérateur de classe C^1

$$f_T : U_T \ni \eta \longmapsto f \circ \eta \in C([0,T]).$$

R_{t_r} est alors une composition des 9 applications linéaires et continues suivantes :

$$X \times C_0^1([-h,T]) \ni (\phi, y) \longmapsto (\phi, y) \in C^1([-h,0]) \times C_0^1([-h,T]),$$

$$C^1([-h,0]) \times C_0^1([-h,T]) \ni (\phi, y)$$
$$\longmapsto (E_T\phi, y, p\phi) \in C^1([-h,T]) \times C_0^1([-h,T]) \times \mathbb{R}^n,$$
$$C^1([-h,T]) \times C^1([-h,T]) \times \mathbb{R}^n \ni (v, w, \xi)$$
$$\longrightarrow (v + w, \xi) \in C^1([-h,T]) \times \mathbb{R}^n,$$
$$j_T \times id : C^1([-h,T]) \times \mathbb{R}^n \longmapsto (C[0,T], C^1([-h,0])) \times \mathbb{R}^n,$$
$$f_T \times id : (C[0,T], C^1([-h,0])) \times \mathbb{R}^n \longmapsto C([0,T]) \times \mathbb{R}^n,$$
$$id \times j_n : C([0,T]) \times \mathbb{R}^n \longmapsto C([0,T]) \times C^1([0,T]),$$
$$C([0,T]) \times C^1([0,T]) \ni (a,b) \longmapsto a - b \in C([0,T]),$$
$$I_T : C([0,T]) \longmapsto C^1([0,T]),$$
$$E_T : C^1([0,T]) \longmapsto C^1([-h,T]).$$

D'où le résultat.
Preuve du Théorème 3.1.D'après la Proposition 3.3 le Corollaire 3.3 et la Proposition 3.5, l'application R_{t_r} est de classe C^1 et envoie la partie $X_{\psi,r} \times \overline{(C_0^1([-h,T])_{\lambda\epsilon}}$ de $X \times C_0^1([-h,T])$ dans la boule fermée $\overline{(C_0^1([-h,T])_{\lambda\epsilon}}$ où $\lambda = \frac{2L}{2L+1} + \frac{1}{2}(1 - \frac{2L}{2L+1})$. De plus RTr est contractante par rapport à la deuxième variable. Le Théorème (1.3) du chapitre 1 entraîne alors que l'application

$$Y_{T_r} : X_{\psi,r} \longrightarrow C_0^1([-h,T]),$$

définie par
$Y_{T_r}(\phi) = y = y^{(\phi)} \in (C_0^1([-h,T]))_{\lambda\epsilon}$ et $R_{T_r}(\phi, y) = y^{(\phi)}$,
est de classe C^1. D'où pour tout $\phi \in X_{\psi,r}$ on a $y^\phi \in (C_0^1([-h,T]))_{\lambda\epsilon}$ est un point fixe de l'application R_{T_r} et satisfait

$$y(t) = R_{T_r}(\phi, y)(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}_s) - \dot{\phi}(0)ds,$$

avec $y_0 = 0$. Pour tout $\phi \in X_{\psi,r}, y^\phi$ est une solution locale du problème intégral (3.9)
Le Théorème 3.1 entraine le résultat d'existence suivant.

Proposition 3.6 $x_{(\phi)} - y_{(\phi)} + \hat{\phi}|[-h, T]$ *est une solution locale du problème (3.5).*

Preuve. L'application

$$S_{T_r} : X_{\psi,r} \longrightarrow C^1([-h, T]),$$

définie par

$$S_{T_r}(\phi) = x^{(\phi)} = y^{(\phi)} + \hat{\phi}|[-h, T] = Y_{T_r}(\phi) + E_{T_r}\phi,$$

est de classe C^1. Donc pour tout $\phi \in X_{\psi,r}, t \in [0, T]$ on a $x = x^{(\phi)} \in C^1([-h, T])$ et d'après le Corollaire 3.2 $x^{(\phi)}$ satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = y(t) + \hat{\phi}(t) = \int_0^t (f(y_s + \hat{\phi}s) - \dot{\phi}(0))ds + \hat{\phi}(t) = \phi(0) + \int_0^t f(x_s)ds,$$

avec

$$x(t) = \phi(t), \forall t \in [-h, 0].$$

C'est à dire que $x^{(\phi)}$ est une solution locale du problème intégral (3.7). Par conséquent, pour tout $\phi \in X_{\psi,r}, t \in [0, T]$, le Corollaire 3.1 entraine alors que l'application $x = x^{(\phi)} \in C^1([-h, T])$ est une solution locale du problème (3.5).

3.2.2 Unicité de la Solution

Dans ce paragraphe on voudrai montrer l'unicité de la solution du problème (3.5).

Proposition 3.7 *Si* $x : [-h, t_x) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $y : [-h, t_y) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont deux solutions de l'équation (3.5) avec* $x_0 = y_0$ *et* $t_{\leq} t_y$. *Alors* $x(t) = y(t)$ *pour tout* $t \in [-h, tx)$.

Preuve. Soit $x : [-h, t_x) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $y : [-h, t_y) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équation (3.5) avec $x_0 = y_0$ et $t_x \leq t_y$, c'est-à-dire que

$$\forall \theta \in [-h, 0], x(\theta) - y(\theta) = 0.$$

Il suffit de montrer que $x(t) = y(t)$, pour tout $t \in (0, t_x)$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x(t) \neq y(t)$, pour certain point $t \in (0, t_x)$. Alors,

$$s = \inf\{u \in [0, t_x) : x(u) \neq y(u)\},$$

satisfait

$$0 \leq s < t < t_x$$

et

$$x(s) = y(s)$$

par conséquent

$$x_s = y_s. \tag{3.33}$$

D'après l'hypothèse (H3) il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_s et $L \geq 0$ tel que,

$$|f(\varphi)f(\chi)| \leq L\|\varphi - \chi\|_{-h,0} \text{ pour tout } \varphi, \chi \in V.$$

Comme $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ sont uniformément continues sur $[-h, t]$ il existe $\eta \in (0, \frac{1}{L})$ avec $s + \eta < t$ tel que x_u et y_u appartient à V pour tout $u \in [s, s + \eta) \subset [-h, t]$. On aura alors pour tout u

$$\begin{aligned}
|x(u) - y(u)| &= \left| \int_s^u (f(x_w) - f(y_w))dw \right| \leq \int_s^{s+\eta} |f(x_w) - f(y_w)|dw \\
&\leq L\eta \max_{w \in [s,s+\eta]} \|x_w - y_w\|_{-h,0} \\
&= L\eta \max_{w \in [s,s+\eta]} \max_{\theta \in [h,0]} |x(w + \theta) - y(w + \theta)|
\end{aligned}$$

(3.33) donne alors

$$|x(u) - y(u)| \leq L\eta \max_{w \in [s,s+\eta]} |x(w) - y(w)|.$$

Comme $L\eta < 1$ on obtient

$$\max_{w \in [s,s+\eta]} |x(w) - y(w)|.$$

ceci contredit l'hypothèse $s = \inf\{u \in [0, t_x) : x(u) \neq y(u)\}$.

Chapitre 4

Etude de la stabilité et bornitude d'une certaine équation différentielle du troisième ordre non autonome avec retard

4.1 position du problème

Dans ce chapitre,nous étudions la stabilité asymptotique des solutions de l'équation différentielle à retard du type

$$(q(t)(p(t)x^{'}(t))^{'})^{'}+a(t)x^{''}(t)+b(t)x^{'}(t)+c(t)f(x(t-r))=0, \qquad (4.1)$$

et la bornitude de

$$(q(t)(p(t)x^{'}(t))^{'})^{'}+a(t)x^{''}(t)+b(t)x^{'}(t)+c(t)f(x(t-r))=e(t), \qquad (4.2)$$

où $r>0$, et les fonction $p(t),q(t),a(t),b(t),c(t),e(t)$ et $f(x)$ sont continues en $t\in[0,+\infty[$ et $x\in\mathbb{R}$.En outre , il est supposé que les dérivées $p^{'}(t),q^{'}(t),a^{'}(t),b^{'}(t),c^{'}(t),f^{'}(t)$, existent et sont continues pour tout t,x avec $f(0)=0$. En plus, il est également supposé que la fonction $f(x(t-r))$ satisfait une condition de Lipschitz en $x(t-r)$ .Alors la solution est unique.
En 1974, Hara [41] a étudié le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle sans retard sous la forme :

$$x^{'''}+a(t)x^{''}(t)+b(t)x^{'}(t)+c(t)f(x)=e(t), \qquad (4.3)$$

et a montré que toutes les solutions de l'équation (4.3) sont uniformément bornées et vérifient $x(t)\longrightarrow 0, x^{'}(t)\longrightarrow 0$ et $x^{''}(t)\longrightarrow 0$ quand $t\longrightarrow\infty$.
En 2005, A.I.Sadek [69], a considéré l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre suivante, avec un retard constant r assurant la stabilité du système

$$x^{'''}+a(t)x^{''}(t)+b(t)x^{'}(t)+c(t)f(x(t-r))=0. \qquad (4.4)$$

Il est tout à fait clair que nos deux équations se réduisent aux équations étudiées par Omeike [16], Sadek [1] en posant $p(t)=q(t)=1$. Le résultat suivant a été prouvé.

Théorème 4.1 [1]
On suppose que $a(t),b(t)$, et $c(t)$ sont continument différentiables sur $[0,+\infty[$ et que les conditions suivantes sont satisfaites :

S_1 $0<a_0\leq a(t)\leq A, 0<b_0\leq b(t)\leq B$ *et* $0<c_0\leq c(t)\leq C$ *; pour tout* $t\in[0,+\infty[$.
S_2 $0<f_0\leq\frac{f(x)}{x}$ *avec* $x\neq 0$ *et* $f(0)=0, |f^{'}(x)|\leq f_1\leq 1$ *pour tout* x
S_3 $a_0b_0-C>0$.
S_4 $b_0(t)+\mu a_0^{'}(t)-\dfrac{1}{\mu}c^{'}(t)<\frac{a_0b_0-C}{2}$, *tel que* $\mu=\frac{a_0b_0+C}{2b_0}$.
S_5 $\int_0^\infty|c^{'}(t)|<\infty, c^{'}(t)\longrightarrow 0$ *lorsque* $t\longrightarrow\infty$.

Alors la solution nulle de (4.4) est uniformément asymptotiquement stable, pourvu que

$$r<\min\left\{\frac{2c_0f_0}{f_1C},\frac{a_0b_0-C}{(1+a_0)b_0f_1C},\frac{a_0b_0-C+4a_0C(1-f_1)}{2f_1C(1+2\mu+2a_0^2+a_0)+(a_0b_0-C)C}\right\}.$$

4.2 Hypothèses et résultats principaux sur la stbilité asymptotique

Tout au long de cette partie, nous utilisons les notations suivantes

$$A(t) = \frac{a(t)}{p(t)q(t)}, B(t) = \frac{b(t)p(t) - a(t)p^{'}(t)}{p^2(t)}.$$

On suppose qu'il existe des constantes positives $a_0, b_0, c_0, a_1, n, m, \mu, \delta_0, \delta_1, C, L, M, N$, telles que les fonctions qui apparaissent dans l'équation (4.1) vérifient les conditions suivantes :

i) $0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1, t \geq 0$,
ii) $-L \leq p^{'}(t) \leq 0, -L \leq q^{'}(t) \leq 0, t \geq 0$,
iii) $f(0) = 0, 0 < \delta_0 \leq \frac{f(x)}{x}$ avec $x \neq 0et|f^{'}(x)| \leq \delta_1$.

Nos résultats principaux sont les théorèmes suivants.

Théorème 4.2 *En plus des hypothéses $i) - iii)$, supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

$C_1)$ $m \leq p(t) \leq M, 0 < m \leq q(t)M$ *et* $p^{''}(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$.
$C_2)$ $0 < n \leq c(t) \leq b(t) \leq N, -N \leq b^{'}(t) \leq c^{'}(t) \leq 0, t \geq 0$.
$C_3)$ $p(t)c(t))^{'} \leq (q(t)c(t))^{'} \leq 0, t \geq 0$.
$C_4)$ $\frac{M}{a_0} < \alpha < \dfrac{1}{M\delta_1}$.
$C_5)$ $\frac{1}{2}a^{'}(t) \leq d_0 < n(1 - \alpha M\delta_1)$.

Alors la solution nulle de (4.1) est uniformément asymptotiquement stable, pourvu que

$$r < \min\left\{\frac{2c_2m^2}{N\delta_1(1+\alpha+m^2)}, \frac{2c_3}{\alpha\delta_1 N}\right\},$$

où $c_2 = \frac{1}{M}[n(1 - \alpha M\delta_1) - d_0] > 0$, *et* $c_3 = \frac{1}{M}(\frac{\alpha a_0}{M} - 1) > 0$.

Théorème 4.3 *En plus des hypothéses $i) - iii)$, supposons que :*

$H_1)$ $0 < b_0 \leq b(t) \leq N$ *et* $0 < c_0 \leq c(t) \leq C$ *; pour tout* $t \geq 0$.
$H_2)$ $0 < m \leq q(t) \leq p(t) \leq M$, *pour tout* $t \geq 0$.
$H_3)$ $(p(t)c(t))^{'} \leq (q(t)c(t))^{'}$ *pour tout* $t \geq 0$.
$H_4)$ $a_0b_0 > \frac{M^3C\delta_1}{m}$.
$H_5)$ $\dfrac{MC\delta_1}{b_0} < \mu < \frac{a_0}{M}, \mu = \frac{a_0b_0 + M^2C\delta_1}{2b_0M}$.
$H_6)$ $B^{'}(t) + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t) < \frac{1}{2M}(\frac{a_0b_0}{M^2} - \frac{MC\delta_1}{m})$ *pour tout* $t \in [0, \infty)$, *tel que* $\rho = \frac{\mu}{\delta_1}$.
$H_7)$ $\int_0^t |[q(s)c(s)]^{'}|ds \leq E < \infty$.

Alors la solution nulle de (4.1) est uniformément asymptotiquement stable, à condition que

$$r < \min\left\{\frac{c_1m^2}{M\delta_1C(1+\mu+\mu m^2)}, \frac{2(a_0m - \mu M^2)}{CMm^2\delta_1}\right\}$$

où $c_1 = \frac{a_0 b_0}{M^2} - \frac{MC\delta_1}{m}$.

Remarque 4.1 *Lorsque* $p(t) = q(t) = 1$, *les conditions* $(H_4), (H_6)$ *et* (H_7) *du Théorème 4.3 sont une extension des conditions* $(S_3), (S_4)$ *et* (S_5) *du Théorème de [1] pour* $M = m = 1$. *Dans la condition (iii) du Théoème 4.3 on suppose que* $|f^{'}(x)| \leq \delta_1$, *mais dans l'hypoth'ese (S2) du Théoréeme [1] on a* $|f^{'}(x)| \leq f_1 \leq 1$ *ce qui est particulièrement limité.*
Considérons dans l'espace des phases x, y, z *le système différentiel équivalent à l'équation(4.1) :*

$$\begin{aligned} x^{'} &= \frac{1}{p(t)} y, \\ y^{'} &= \frac{1}{q(t)} z, \\ z^{'} &= -A(t)z - B(t)y - c(t)f(x) + c(t)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(c)} f^{'}(x(s))ds. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Preuve du Théoréme 4.2 :
On définit la fonction de Lyapunov $W(t, x_t, y_t, z_t)$ comme suit

$$W(t, x_t, y_t, z_t) = \exp(-\frac{\theta(t)}{\nu}) V(t, x_t, y_t, z_t), \tag{4.6}$$

où

$$\begin{aligned} V(t, x_t, y_t, z_t) &= p(t)c(t)F(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)f(x)y \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{a(t)}{p(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right\} + \lambda \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds, \end{aligned} \tag{4.7}$$

et $F(x) = \int_0^x f(u)du$,ν et λ étant des constantes positives qui seront déterminées plus tard.
Notons que $\theta(t) = \int_0^x D(s)ds$ avec

$$D(t) = \frac{\alpha M}{2}\left[\frac{2a_1 p^{'2}(t) - a_2 p(t) p^{'}(t)}{p^3(t)} - a_3 c^{'}(t)\right] \geq 0,$$

où $a_2 = \frac{1}{\alpha M} a_1 + 2n(1 - \alpha M \delta_1) + N$, et $a_3 = \frac{N}{nm} + \frac{a_1 L}{nm^2}$.
On remarque que puisque $p(t)$ et $q(t)$ sont des fonctions continues et bornées, alors $\theta(t)$ est convergente pour tout $t \geq 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^t D(s)ds &= \alpha M \int_0^{(t)} \left[\frac{a_1 p^{'2}(s)}{p^3(s)} - \frac{a_2 p^{'}(s)}{2p^2(s)} - \frac{a_3}{2} c^{'}(s)\right] \geq 0 \\ &\leq a_1 \alpha M \int_0^{(t)} (\frac{-p^{'}(s)}{p^2(s)})(-\frac{p^{'}}{p(s)})ds + \frac{\alpha a_2 M}{2m} + \frac{\alpha a_3 MN}{2} \\ &\leq \frac{\alpha a_2 ML}{m^2} + \frac{\alpha a_2 M}{2m} + \frac{\alpha a_3 MN}{2} \leq \omega < \infty. \end{aligned}$$

A partir de la définition de V dans (4.7), nous observons que la fonction ci-dessus peut étre réécrite comme suit

$$V + V_1 + V_2 + \lambda \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds,$$

où

$$V_1 = p(t)c(t)F(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)f(x)y,$$

et

$$V_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{a(t)}{b(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right\}.$$

Tout d'abord considérons

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{a(t)}{b(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right\} \\ &= \frac{\alpha}{2}(z + \frac{y}{\alpha})^2 + \frac{1}{2}y^2(\frac{a(t)}{b(t)} - \frac{1}{\alpha}). \end{aligned}$$

Grace à $(i), (C_1)$ et (C_4) nous avons

$$\frac{a(t)}{p(t)} - \frac{1}{\alpha} \geq \frac{a_0}{M} - \frac{1}{\alpha} > 0.$$

Donc il existe une constante positive telle que

$$V_2 \geq \delta_2(y^2 + z^2). \tag{4.8}$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses du théorème 4.2, et étant donné que $n \leq b(t) \leq p(t)B(t)$, nous obtenons après quelques réarrangements

$$V1 = p(t)c(t)F(x) + \frac{\alpha}{2}q(t)B(t)\left\{y + \frac{c(t)f(x)}{B(t)}\right\}^2 - \frac{\alpha q(t)f^2(x)c^2(t)}{2B(t)}.$$

Notons que

$$\frac{1}{2}f^2(x) = \int_0^x f(u)f'(u)du \leq \delta_1 \int_0^x f(u)du.$$

Les conditions $(i) - (iii)$, (C_1) et (C_2), nous donnent

$$-\frac{\alpha c^2(t)q(t)f^2(x)}{2B(t)} \geq -\alpha Mp(t)c(t)\frac{c(t)}{p(t)B(t)}\frac{f^2(x)}{2} \geq -\alpha M\delta_1 p(t)c(t)\int_0^x f(u)du.$$

D'où

$$V_1 \geq p(t)c(t)\int_0^x (1 - \alpha M\delta_1)f(u)du \geq \delta_4 F(x).$$

et

$$\delta_4 = nm(1 - \alpha M\delta_1) > nm(1 - \frac{1}{M\delta_1}M\delta_1) = 0.$$

Ainsi à partir de (iii), on obtient,

$$v_1 \geq \frac{\delta_4\delta_0}{2}x^2. \tag{4.9}$$

Il est clair que, à partir de (4.7),(4.8) et (4.9), nous avons

$$V(t, x_t, y_t, z_t) \geq \delta_2 y^2 + \delta_2 z^2 + \frac{\delta_4\delta_0}{2}x^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{mt} y^2(\xi)d\xi ds.$$

Par conséquent, la positivité de $\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi$ entraine qu'il existe une constante positive suffisamment petite k, de sorte que

$$V(t, x_t, y_t, z_t) \geq k(x^2 + y^2 + z^2) = k\|X(t)\|^2, \tag{4.10}$$

ou $k = \min\{\delta_2, \frac{\delta_4\delta_0}{2}\}$et $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Nous pouvons donc trouver une fonction continue $W_0(\|X(t)\|)$ telle que

$$W_0(\|X(t)\|) \geq 0 \quad et \quad W_0(\|X(t)\|) \leq W(t, X_t).$$

Puisque $f'(x) \leq \delta_1$ alors $f(x) \leq \delta_1 x$ et cela implique que $F(x) \leq \delta_1\frac{x^2}{2}$. Selon les hypothèses du théorème, nous obtenons

$$B(t) \leq \frac{N}{M} + \frac{a_1 L}{m^2},$$

par conséquent, il est facile de montrer que

$$V \leq \delta_5(x^2 + y^2 + z^2) + \delta_6\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}[x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)]d\xi ds,$$

où

$$\delta_5 = \frac{1}{2}\max\{NM\delta_1(1+\alpha), \alpha M(\frac{N}{m} + \frac{a_1 L}{m^2}) + \alpha MN\delta_1 + \frac{a_1}{m}\alpha + 1, \alpha + 1\}$$

et

$$\delta_6 = \max\{1, \lambda\}.$$

Comme $0 \leq \frac{\theta(t)}{\nu} \leq \frac{\omega}{\nu}$ alors

$$\eta_1(x^2 + y^2 + z^2) \leq \exp(-\frac{\omega}{\nu})V \leq W = exp(-\frac{\theta(t)}{\nu})V \leq V,$$

où $\eta_1 = k\exp(-\frac{\omega}{\nu})$. Donc l'existence d'une fonction continue
$W_1(\|X(t)\|)+W_2(\|X_t\|_2)$ qui satisfait l'inégalité $W(t, X_t) \leq W_1(\|X(t)\|)+W_2((\int_{t-r}^{t}\|X(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}})$,

est facilement vérifiée. Par conséquent, la première condition du Théoréme 1.6 est satisfaite.
Pour la dérivée temporelle de la fonctionnelle $V(t, x_t, y_t, z_t)$, le long des trajectoires du systéme (4.5), nous avons

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) &= (p(t)c(t))^{'}F(x) + \frac{\alpha}{2}q^{'}(t)B(t)y^2 + \alpha(q(t)c(t))^{'}f(x)y \\ &+ \left[\frac{\alpha}{2}q(t)B^{'}(t) - \frac{a(t)p^{'}(t)}{2p^2(t)} + G(t) + \lambda r\right] \\ &+ \left[\frac{1}{q(t)} - \alpha A(t)\right]z^2 \\ &+ c(t)(y + \alpha z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

où

$$G(t) = \frac{a^{'}(t)}{2p(t)} + \alpha c(t)\frac{q(t)}{p(t)}f^{'}(x) - B(t).$$

Commme $q^{'}c = (qc)^{'} - qc^{'}$,nous obtenouns ce qui suit :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}q^{'}(t)B(t)y^2 &= \frac{\alpha}{2}\frac{q^{'}(t)c(t)}{c(t)}B(t)y^2 \\ &= \frac{\alpha}{2c(t)}(q(t)c(t))^{'}B(t)y^2 - \frac{\alpha}{2c(t)}q(t)c^{'}(t)B(t)y^2,\end{aligned}$$

par conséquent ,nous avons

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) &= (p(t)c(t))^{'}F(x) + \frac{\alpha}{2c(t)}(q(t)c(t))^{'}B(t)y^2 + \alpha(q(t)c(t))^{'}f(x)y \\ &+ \left[\frac{\alpha q(t)B^{'}(t)}{2} - \frac{\alpha q(t)c^{'}(t)B(t)}{2c(t)} - \frac{a(t)p^{'}(t)}{2p^2(t)} + G(t) + \lambda r\right]y^2 \\ &+ \left[\frac{1}{q(t)} - \alpha A(t)\right]z^2 \\ &+ c(t)(y + \alpha z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Maintenant, nous vérifions

$$H(t, x, y) = (p(t)c(t))^{'}F(x) + \frac{\alpha}{2c(t)}(q(t)c(t))^{'}B(t)y^2 + \alpha(q(t)c(t))^{'}f(x)y \leq 0,$$

pour tout x, y et $t \geq 0$. Si $(q(t)c(t))^{'} = 0$, alors

$$H(t, x, y) = (p(t)c(t))^{'}F(x) \leq 0.$$

Si $(q(t)c(t))' < 0$, la quantité entre crochets ci-dessous peut être écrite comme suit,

$$\begin{aligned}H(t,x,y) &= (q(t)c(t))'\left[\frac{p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'}F(x)+\frac{\alpha}{2c(t)}B(t)y^2+\alpha f(x)y\right]\\&= (q(t)c(t))'\left[\frac{p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'}F(x)+\frac{\alpha B(t)}{2c(t)}\left\{y+\frac{c(t)f(x)}{B(t)}\right\}^2-\frac{\alpha c(t)f^2(x)}{2B(t)}\right]\end{aligned}$$

l'hypothèse (C_3) implique que $\frac{p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'}\geq 1$ d'où

$$H(t,x,y)\leq (q(t)c(t))'\int_0^x\left[1-\frac{\alpha c(t)}{B(t)}f'(u)\right]f(u)du.$$

De (c1)et (c2)nous obtenons $c(t)\leq MB(t)$,ainsi

$$\begin{aligned}H(t,x,y) &\leq (q(t)c(t))'\int_0^x(1-\alpha M\delta_1)f(u)du\\&\leq (q(t)c(t))'\frac{\delta_4}{nm}F(x)\leq 0.\end{aligned}$$

Donc, en combinant les deux cas, nous avons $H(t,x,y)\leq 0$ pour tout $t\geq 0$, x et y. Selon les hypothéses du théorème,nous obtenons

$$B(t)\frac{N}{M}+\frac{a_1L}{dm^2},$$

et

$$\begin{aligned}B'(t) &= \frac{b'(t)p^2(t)-(b(t)+a'(t))p(t)p'(t)-a(t)p(t)p''(t)+2a(t)p'^2}{p^3(t)}\\&\leq \frac{2a_1p'^2(t)-[2n(1-\alpha M\delta_1)+N]p(t)p'(t)}{p^3(t)},\end{aligned}$$

par conséquent, il est facile de voir que

$$\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)c'(t)B(t)}{2c(t)}-\frac{a(t)p'(t)}{2p^2(t)}$$

$$\leq\frac{\alpha M}{2}\left[\frac{2a_1p'(t)-a_2(t)p(t)p'(t)}{p^3(t)}-a_3c'(t)\right]=D(t),$$

et

$$\begin{aligned}G(t) &\leq \frac{1}{p(t)}\left[d_0+b(t)(\alpha\frac{c(t)}{b(t)}q(t)\delta_1-1)\right]\\&\leq \frac{1}{M}\left[d_0+n(\alpha M\delta_1-1)\right]=-c_2<0\end{aligned}$$

En conséquence (4.11) devient

$$\dot{V}_{(4.5)}(t,x_t,y_t,z_t) \leq [D(t)c_2+\lambda r]y^2 - c_3z^2 - \lambda\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi$$
$$+ c(t)(y+\alpha z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds.$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz $|uv| \leq \frac{1}{2}$ et $|f^{'}(x)| \leq \delta_1$,nous obtenons

$$c(t)y\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds \leq \frac{\delta_1 Nr}{2}y^2 + \frac{N\delta_1}{2m^2}\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi,$$

et

$$\alpha c(t)z\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds \leq \alpha N\frac{\delta_1 r}{2}z^2 + \frac{\alpha N\delta_1}{2m^2}\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.$$

D'où

$$\dot{V}_{(4.5)}(t,x_t,y_t,z_t) \leq -\left[c_2 - D(t) - r(\lambda+\frac{\delta_1 N}{2})\right]y^2 - \left[c_3 - \alpha\frac{\delta_1 Nr}{2}\right]z^2$$
$$+\left[\frac{\delta_1 N}{2m^2}(1+\alpha)-\lambda\right]\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.$$

Si on prend $\frac{\delta_1 N}{2m^2}(1+\alpha) = \lambda$ la dernière inégalité devinent

$$\dot{V}_{(4.5)}(t,x_t,y_t,z_t) \leq -\left[c_2 - D(t) - \frac{\delta_1 N}{2}(\frac{1+\alpha}{m^2}+1)r\right]y^2$$
$$-\left[c_3 - \alpha\frac{N\delta_1 r}{2}\right]z^2.$$

Par (4.6),(4.10) et en prenant $\nu = k$ nous avons

$$\dot{W}_{(4.5)}(t,x_t,y_t,z_t) = \exp(-\frac{\theta(t)}{k}(\frac{d}{dt}V(t,x_t,y_t,z_t) - \frac{D(t)}{k}V(t,x_t,y_t,z_t))$$
$$\leq \exp(-\frac{\theta(t)}{k}[-(c_2 - \frac{\delta_1 N}{2}(\frac{1+\alpha}{m^2}+1)r)y^2 - (c_3 - \alpha\frac{\delta_1 Nr}{2})z^2].$$

Par conséquent, si

$$r < \min\left\{\frac{2c_2m^2}{\delta_1 N(1+\alpha+m^2)}, \frac{c_3}{\alpha\delta_1 N}\right\},$$

on a

$$\dot{W}_{(4.5)}(t,x_t,y_t,z_t) \leq -\beta(y^2+z^2), \quad pour \beta > 0.$$

Posons $W_3(\|X\|) = \beta(y^2+z^2)$. W_3 est définie positive, en effet,
si $\|X\| = 0$,cela implique que $x = y = z = 0$,et donc $W_3(0) = 0$.

Inversement, si $W_3(\|X\|) = \beta(y^2 + z^2) = 0$, alors $y = z = 0$ et le système (4.5)se réduit à

$$x^{'} = 0,$$
$$y^{'} = 0,$$
$$z^{'} = -c(t)f(x) = 0.$$

La condition (C_2) entraine $f(x) = 0$, et par (iii) on conclut que f ne s'annule que pour $x = 0$. D'où, la seule solution du système (4.5) pour lequel $W_3(\|X\|) = 0$ est la solution $x = y = z = 0$. Ainsi, en vertu de ce qui précède, nous concluons que la deuxième condition du Théorème 1.6 est satisfaite, donc la solution nulle de l'équation (4.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Preuve du Théorème 4.3

On considère la fonction de Lyapunov $U(t, x_t, y_t, z_t)$ définie comme suit

$$U(t, x_t, y_t, z_t) = \exp(-\frac{\eta(t)}{\beta})\chi(t, x_t, y_t, z_t), \tag{4.12}$$

où

$$\begin{aligned}\chi(t, x_t, y_t, z_t) &= \mu p(t)c(t)F(x) + q(t)c(t)f(x)y + \frac{1}{2}z^2 \\ &+ \mu yz + \frac{q(t)}{2}\Big(\mu A(t) + B(t)\Big)y^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds,\end{aligned} \tag{4.13}$$

telle que $F(x) = \int_0^x f(u)du$. β et λ sont des constantes positives qui seront déterminées plus tard et $\eta(t) = \int_0^t |[q(s)c(s)]^{'}|ds < \infty$.On peut réécrire (4.13)comme suit

$$\begin{aligned}\chi(t, x_t, y_t, z_t) &= \mu p(t)c(t)F(x) + q(t)c(t)f(x)y + \frac{q(t)c(t)}{2\rho}y^2 + \frac{1}{2}\Big(z + \mu y\Big)^2 \\ &+ \frac{q(t)}{2}\Big(B(t) + \mu A(t) - \frac{c(t)}{\rho} - \frac{\mu^2}{q(t)}\Big)y^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds.\end{aligned}$$

Un calcule simple montre que

$$\begin{aligned}\chi(t, x_t, y_t, z_t) &= \mu\Big(p(t)c(t)F(x) - q(t)c(t)\Big)F(x) + \mu q(t)c(t)F(x) + q(t)c(t)f(x)y \\ &+ \frac{q(t)c(t)}{2\rho}y^2 + \frac{1}{2}\Big(z + \mu y\Big)^2 + \frac{q(t)}{2}\Big(B(t) + \mu A(t) - \frac{c(t)}{\rho} - \frac{\mu^2}{q(t)}\Big)y^2 \\ &+ \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds.\end{aligned}$$

Puisque $p(t) \geq q(t)$ et que l'intégrale $\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi$ est positive, alors

$$\chi(t, x_t, y_t, z_t) \geq \mu q(t)c(t)\Psi(t) + \frac{q(t)}{2}\left(B(t) + \mu A(t) - \frac{c(t)}{\rho} - \frac{\mu^2}{q(t)}\right)y^2 + \frac{1}{2}\left(z + \mu y\right)^2.$$

où $\Psi(t) = F(x) + \frac{1}{\mu}f(x)y + \frac{1}{2\mu\rho}y^2$.Par (iii) on obtient

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= F(x) + \frac{1}{2\mu\rho}(y + \rho f(x))^2 - \frac{\rho}{2\mu}f^2\\ &\geq \int_0^x \left(1 - \frac{\rho}{\mu}f^{'}(u)\right)f(u)du \geq 0.\end{aligned}$$

Soit $R(t) = B(t) - \frac{c(t)}{\rho} + \mu(A(t) - \frac{\mu}{q(t)})$. En utilisant la condition (H_5) on a $R(t) > 0$ et grace aux conditions (H_1) er (H_2) on obtient

$$\chi(t, x_t, y_t, z_t) \geq \mu m c_0\Psi(t) + \frac{m}{2}\left(B(t) + \mu A(t) - \frac{c(t)}{\rho} - \frac{\mu^2}{q(t)}\right)y^2 + \frac{1}{2}\left(z + \mu y\right)^2 \geq 0.$$

D'où il existe une constante positive k_1 telle que

$$\chi(t, x_t, y_t, z_t) \geq k_1(x^2 + y^2 + z^2). \tag{4.14}$$

Par conséquent, de la meme maniére que la preuve du théorème précédent, on déduit que

$$W_0(\|X(t)\|) \leq U(t, X_t) \leq W_1(\|X(t)\|) + W_2(\|X(t)\|)_2.$$

Soit $\dot{\chi}_(5.5)(t, x_t, y_t, z_t) = \dot{\chi}_(5.5)$ la dérivée temporelle de la fonction $\chi_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t)$, le long des trajectoires du systéme (4.5)

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_{(4.5)} &= \mu(p(t)c(t))^{'}F(x) + \frac{1}{2\rho}(q(t)c(t))^{'}y^2 + (q(t)c(t))^{'}f(x)y + \left(\frac{\mu}{q(t)} - A(t)\right)z^2\\ &+ \left(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r\right)y^2 + \frac{1}{2}\left((qB)^{'}(t) + \mu(qA)^{'}(t) - \frac{1}{\rho}(qc)^{'}(t)\right)y^2\\ &+ c(t)(\mu y + z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

à partir duquel on déduit

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_{(4.5)} &= \mu\left((p(t)c(t))^{'} - (q(t)c(t))^{'}F(x)\right) + \mu(q(t)c(t)^{'}F(x) + \left(\frac{\mu}{q(t)} - A(t)\right)z^2\\ &+ (q(t)c(t))^{'}f(x)y + \frac{1}{2\rho}(q(t)c(t))^{'}y^2 + \left(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r\right)y^2\\ &+ \frac{1}{2}\left((qB)^{'}(t) + \mu(qA)^{'}(t) - \frac{1}{\rho}(qc)^{'}(t)\right)y^2 + c(t)(\mu y + z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds\\ &- \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Mais

$$(qB)^{'}(t) + \mu(qA)^{'}(t) - \frac{1}{\rho}(qc)^{'}(t) = q(t)\Big[B^{'}(t) + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t)\Big] + q^{'}(t)\Big[B(t) + \mu A(t) - \frac{1}{\rho}c(t)\Big] \leq q^{'}(t)\Big[\mu A^{'}(t) + B^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t)\Big],$$

puisque $\mu A(t) + B(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t) > \mu A(t) + B(t) - \frac{\mu}{q(t)} - \frac{c(t)}{\rho} > 0$, et par (H_3) on obtient

$$\dot{\chi}_{(4.5)} \leq \mu(qc)^{'}(t)F(x) + (qc)^{'}(t)f(x)y + \frac{1}{2\rho}(qc)^{'}(t)y^2 + \Big(\frac{\mu}{q(t)} - A(t)\Big)z^2 + \frac{1}{2}q(t)\Big(B^{'}(t) + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t)\Big)y^2 + \Big(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r\Big)y^2 + c(t)(\mu y + z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi,$$

on réarrange

$$\dot{\chi}_{(4.5)} \leq \mu(qc)^{'}(t)\Psi(t) + \frac{1}{2}q(t)\Big(B^{'} + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}\Big)y^2 + \Big(\frac{\mu}{q(t)} - A(t)\Big)z^2 + \Big(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r\Big)y^2 + c(t)(\mu y + z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.$$

En utilisant linégalité de Schwartz $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ et comme $|f^{'}(x)| \leq \delta_1$, on a

$$\mu c(t)y\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds \leq \mu\frac{\delta_1 Cr}{2}y^2 + \mu\frac{\delta_1 C}{2m2}\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi,$$

et

$$c(t)z\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f^{'}(x(s))ds \leq \frac{\delta_1 Cr}{2}z^2 + \frac{\delta_1 C}{2m2}\int_{t-r}^{t}z^2(\xi)d\xi,$$

D'où

$$\dot{\chi}_{(4.5)} \leq \mu(q(t)c(t)^{'}\Psi(t) + \frac{1}{2}q(t)\Big(B^{'} + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}\Big)y^2 + \Big(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r + \frac{\mu C\delta_1 r}{2}\Big)y^2 + \Big(\frac{C\delta_1 r}{2} + \frac{\mu}{q(t)} - A(t)\Big)z^2 + \Big(\frac{\mu C\delta_1}{2m^2} + \frac{C\delta_1}{2m^2} - \lambda\Big)\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.$$

Si $\lambda = \frac{\mu C\delta_1}{2m^2} + \frac{C\delta_1}{2m^2}$, linégalité précédente devient

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_{(4.5)} &\leq \mu(q(t)c(t)^{'}\Psi(t) + \frac{1}{2}q(t)\left(B^{'} + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}\right)y^2 \\ &+ \left(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r + \frac{C\delta_1}{2m^2}(\mu + 1 + \mu m^2)r\right)y^2 \\ &+ \left(\frac{C\delta_1 r}{2} + \frac{\mu}{q(t)} - A(t)\right)z^2.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Grace à (4.12) on calcule

$$\dot{U}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) = \exp(-\frac{\eta(t)}{\beta})\left[\dot{\chi}_(5.5)(t, x_t, y_t, z_t) - \frac{|(q(t)c(t))^{'}|}{\beta}\chi(t, x_t, y_t, z_t)\right].$$

En posant $\beta = mc_0$, en utlisant (4.14)et (4.15) et puisque $(q(t)c(t))^{'} - |(q(t)c(t))^{'}| \leq 0$ on a

$$\begin{aligned}\dot{U}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) \leq \exp(-\frac{\eta(t)}{\beta})&\left[\frac{1}{2}q(t)\left(B^{'} + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t)\right)y^2\right. \\ &+ \left(\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) + \lambda r + \frac{C\delta_1}{2m^2}(\mu + 1 + \mu m^2)r\right)y^2 \\ &\left.+ \left(\frac{C\delta_1 r}{2} + \frac{\mu}{q(t)} - A(t)\right)z^2\right].\end{aligned}$$

Par (iii), $(H_1)(H_2)$,et (H_5)

$$\begin{aligned}\frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) &\leq \frac{MC\delta_1}{p(t)} - (\frac{a_0b_0 + M^2C\delta_1}{2b_0M})\frac{b_0}{p(t)} \\ &\leq -\frac{1}{2}(\frac{a_0b_0}{dM^2} - \frac{MC\delta_1}{}) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Utilisons (H_6)

$$\frac{1}{2}q(t)B^{'}(t) + \mu A^{'}(t) - \frac{1}{\rho}c^{'}(t) + \frac{q(t)}{p(t)}c(t)f^{'}(x) - \mu B(t) < -\frac{1}{4}(\frac{a_0b_0}{M_2} - \frac{MC\delta_1}{m}) < 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}\dot{U}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) \leq \exp(\frac{-\eta(t)}{mc_0})&\left[\left(-\frac{1}{4}(\frac{a_0b_0}{M_2} - \frac{MC\delta_1}{m}) + \frac{C\delta_1}{2m^2}(\mu + 1 + \mu m^2)r\right)y^2\right. \\ &\left.+ \left(\frac{C\delta_1 r}{2} + \frac{\mu}{m} - \frac{a_0}{M^2}\right)z^2\right].\end{aligned}$$

La condtion (H_7) montre que $e^{-\frac{\eta(t)}{\beta}} \geq e^{-\frac{-E}{\beta}}$. Par conséquent, si

$$r < \left\{ \frac{m^2 c_1}{2\delta_1 C(1+\mu+\mu m^2)}, \frac{2(a_0 m - \mu M^2)}{CM^2 m\delta_1} \right\},$$

où$c_1 = \frac{a_0 b_0}{M^2} - \frac{MC\delta_1}{m}$,alors

$$\dot{U}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) \leq -\gamma(y^2 + z^2), \quad pour \quad \gamma > 0$$

A savoir, la seule solution du système (5.5) pour lequel $\dot{U}(5.5)(t, x_t, y_t, z_t) = 0$ est la solution $x = y = z = 0$ (voir la preuve du théorème 4.2). Ainsi, en vertu de ce qui précède, nous concluons que les conditions du Théorème 4.18 sont vérifiées, donc la solution nulle de l'équation (4.1) est uniformément asymptotiquement stable.
Dans le cas $e(t) = 0$ nous établissons les résultats suivants :

Théorème 4.4 *En plus des hypothèses du Théorème 4.2, si nous supposons que $e(t)$ est continue dans $\mathbb{R}$ et*

$$\int_0^t |e(s)|ds < \infty$$

pour tout $t \geq 0$, alors toutes les solutions de l'équation perturbée (5.2) sont uniformément bornées.

Preuve du théorème 4.4
La preuve de ce théorème dépendra de la fonction estimée $W(t, x_t, y_t, z_t)$ déjà utilisée dans la preuve du théorème 4.2.On a montré que

$$\eta_1 \parallel X \parallel^2 \leq W(t, X_t) \leq \delta_5 \parallel X \parallel^2 + \delta_6 \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} \parallel X(\xi) \parallel^2 d\xi ds, \tag{4.16}$$

L'équation (4.2) est équivalente au système

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{p(t)} y, \\
y' &= \frac{1}{q(t)} z, \\
z' &= -A(t)z - B(t)y - c(t)f(x) + c(t)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} f'(x(s))ds + e(t).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Nous avons

$$\dot{W}_{(4.17)}(t, x_t, y_t, z_t) = \dot{W}_{(4.5)}(t, x_t, y_t, z_t) + (y + \alpha z)e(t).$$

Puisque $\dot{W}_{(4.5)} \leq 0$ pour tout t, x, y, z, alors

$$\dot{W}_{(4.17)} \leq (y + \alpha z)e(t) \leq (\mid y \mid + \alpha \mid z \mid) \mid e(t) \mid \leq \eta_3(\mid y \mid + \alpha \mid z \mid) \mid e(t) \mid,$$

où $\eta_3 = \max\{1, \alpha\}$.Notons que $| x |< 1 + x^2$,nous avons

$$\begin{aligned}\dot{W}_{(4.17)} &\leq \eta_3(2 + y^2 + z^2) \mid e(t) \mid \\ &\leq 2\eta_3 \mid e(t) \mid + \eta_3 \parallel X \parallel^2 \mid e(t) \mid \\ &\leq 2\eta_3 \mid e(t) \mid + \frac{\eta_3}{\eta_1} W(t, x_t, y_t, z_t) \mid e(t) \mid .\end{aligned}$$

Rappelons que $\eta_1 \parallel X \parallel^2 \leq W(t, x_t, y_t, z_t)$.
Soit $\eta = \max\{2\eta_3, \frac{\eta_3}{\eta_1}\}$,alors

$$\dot{W}_{(4.17)} - \eta W \mid e(t) \mid .$$

Multiplion chaque coté de l'inégalité par $\exp(-\eta \int_0^t \mid e(s) \mid ds)$,nous obtenons

$$\dot{W}_{(4.17)} \exp(-\eta \int_0^t \mid e(s) \mid ds) - \eta W \mid e(t) \mid \exp(-\eta \int_0^t \mid e(s) \mid ds) \leq \eta \mid e(t) \mid \exp(-\eta \int_0^t \mid e(s) \mid ds)).$$

Intégrons chaque coté de l'inégalité entre 0 et t, nous obtenons

$$\dot{W}_{(4.17)} \exp(-\eta \int_0^t \mid e(s) \mid ds) - W(0) \leq 1 - \exp(-\eta \int_0^t \mid e(s) \mid ds),$$

où $x(0), y(0), z(0) = (0, 0, 0)$.Puisque $\int_0^t \mid e(s) \mid ds \leq E$ pour tout t,cela implique

$$W(t, x_t, y_t, z_t) \leq W(0)e^{\eta E} + [e^{\eta E} - 1].$$

Maintenant , puisque $W(t, x_t, y_t, z_t)$ est bornée ,et par concluons que

$$\mid x(t) \mid < D, \mid y(t) \mid \leq D, \mid z(t) \mid \leq D, \forall t \geq 0.$$

Théorème 4.5 *En plus des hypothèses du Théorème 4.3, si on suppose que $e(t)$ est continu dans $\mathbb{R}$ et*

$$\int_0^t \mid e(s) \mid ds < \infty \quad pourtout \quad t \geq 0,$$

alors toutes les solutions de l'équation perturbée (4.2) sont uniformément bornées.

Preuve du Théorème 4.5 : Le reste de cette preuve est similaire à la preuve du théorème 4.4 et par conséquent elle sera omise.
Nous donnons deux exemples pour illustrer nos principaux résultats :

4.2.1 Exemple 1

Nous considérons l'équation différentielle suivante du troisième ordre à retard nonoutonome

$$
\begin{aligned}
&((\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2})((\frac{2}{1+t^2}+\frac{1}{2})x^{'}(t))^{'})+(\frac{1}{4}\sin t+10)x^{''}(t)\\
&+(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2})x^{'}(t)+(\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{4})(x(t-r)+\frac{x(t-r)}{1+x^2(t-r)})=e^{-t}
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Maintenant, il est facile de voir que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\leq p(t)=\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\leq\frac{3}{2},\frac{1}{2}\leqq(t)=\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\leq\frac{3}{2},\\
&-1\leq p^{'}(t)\leq 0,-1\leq q^{'}(t)\leq,\quad et\quad p^{''}(t)\geq 0\quad pourtout\quad t\in[1,+\infty[,\\
&1\leq\frac{f(x)}{x}=1+\frac{1}{1+x^2}\quad avec\quad x\neq 0,et\quad\mid f^{'}(x)\mid\leq 2=\delta_1.\\
&\frac{1}{4}\leq c(t)=\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{4}\leq b(t)=\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\leq 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
-1\leq b^{'}(t)\leq c^{'}(t)\leq 0;\quad pourtout\quad t\in[1,+\infty[.\\
(p(t)c(t))^{'}\leq(q(t)c(t))^{'}\leq 0\quad pourtout\quad t\in[1,+\infty[.\\
\frac{39}{4}\leq a(t)=\frac{1}{4}\sin t+10\leq\frac{41}{4},t\in[1,+\infty[,\\
\frac{M}{a_0}=\frac{2}{13}<\alpha<\frac{1}{3}=\frac{1}{M\delta_1}.\\
\frac{1}{2}a^{'}(t)=\frac{1}{8}\cos t<n(1-\alpha M\delta_1)<\frac{7}{52},
\end{gathered}
$$

et

$$e(t)=e^{-t}$$

où

$$\int_1^{\infty}e^{-t}<\infty.$$

Toutes les hypothèses du Théorème 4.4 sont bien remplies.Nous pouvons conclure que toute solution de (4.18)est uniformément bornée.

4.2.2 Exemple 2

Nous considérons l'équation différentielle à retard du troisième ordre non-autonome suivante

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\big(\frac{1}{8(1+t^2)}+\frac{31}{8}\big)\Bigg(\big(\frac{1}{4(1+t^2)}+\frac{31}{8}\big)\Bigg)^{'}\Bigg)^{'}\\
&+\Bigg(20+e^{-t}\Bigg)x^{''}(t)+\Bigg(36+e^{-2t}\Bigg)x^{'}(t)\\
&+\Bigg(\frac{1}{20(1+t)}+\frac{1}{20}\Bigg)\Bigg(\frac{x(t-r)}{200}+\frac{x(t-r)}{200(1+x^2(t-r))}\Bigg)=2e^{3-t}.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\frac{31}{8}<q(t)=\frac{1}{8(1+t^2)}+\frac{31}{8}\leq p(t)=\frac{1}{4(1+t^2)}+\frac{31}{8}\leq 4,\\
&-\frac{1}{4}\leq p^{'}(t)<0m-\frac{1}{8}\leq q^{'}(t)<0,\quad pourtout\quad t\in[1,+\infty[.\\
&\frac{1}{200}\leq\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{200}+\frac{1}{200(1+x^2)}\quad avec\quad x\neq 0, et\mid f^{'}(x)\mid\leq\frac{1}{10^2}=\delta_1.
\end{aligned}
$$

Il en résulte facilement que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{20}<c(t)=\frac{1}{20(1+t)}+\frac{1}{20}\leq p(t)=\frac{1}{10},\\
&36\leq b(t)=36+e^{-2t}\leq 37;\quad et\quad 20\leq a(t)=20+e^{-t}\leq 21,\\
&-2\leq b^{'}(t)\leq 0;\quad -1\leq a^{'}(t)\leq 0,\\
&-\frac{1}{20}\leq c^{'}\leq 0;\quad pourtoutt\in[1,+\infty[.
\end{aligned}
$$

Puisque $p(t)-q(t)=\frac{1}{8(1+t^2)}$,il est facile de voir que

$$
(p(t)c(t))^{'}-(q(t)c(t))=(p(t)-q(t))c^{'}(t)+(p^{'}(t)-q^{'}(t))c(t)\leq 0,
$$

alors $(p(t)c(t))^{'}\leq(q(t)c(t))^{'}$ pour tout $t\in[1,+\infty]$.Maintenant ,onvérifie les condition (H_5)et (H_6),on a

$$
\begin{aligned}
B^{'}(t)&=\frac{b^{'}(t)p^2(t)-[b(t)+a^{'}]p(t)p^{'}(t)-a(t)p(t)p^{''}+2a(t)p^{'2}(t)}{p^3(t)}\\
&\leq\frac{-b(t)p(t)p^{'}(t)+2a(t)p^{'2}(t)}{p^3(t)}\leq 0.68;\\
A^{'}&=\frac{a^{'}(t)p(t)q(t)-a(t)(p^{'}(t)q(t)+p(t)q^{'}(t))}{(p(t)q(t))^2}\\
&\leq\frac{-a^{'}(t)(p^{'}(t)q(t)+p(t)q^{'}(t)}{(p(t)q(t))^2}\leq 0.14.
\end{aligned}
$$

On a $\mu=\frac{a_0b_0+M^2C\delta_1}{2b_0M}=2.5$, on obtient $\frac{1}{\rho}=\frac{\delta_1}{\mu}=0.004$. On déduit que

$$
\mu A^{'}(t)+B^{'}(t)-\frac{1}{\rho}c^{'}(t)<1.1<\frac{1}{2M}(\frac{a_0b_0}{M^2}-\frac{MC\delta_1}{m})=5.62.
$$

Finalment nous avons $\int_1^\infty 2e^{3-s} < \infty$.
Ainsi Toutes les hypothéses du Théorème 4.5 sont satisfaites, nous pouvons conclure que chaque solution de (4.19)est uniformément bornée.

Remarque 4.2 *Léquation (4.1)peut etre réécrite comme suit*

$$x^{'''} + \alpha(t)x^{''} + \beta(t)x^{'} + \gamma(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{4.20}$$

où

$$\alpha(t)\frac{p(t)q^{'}(t) + 2q(t)p^{'}(t) + a(t)}{p(t)q(t)}, \beta(t)\frac{q^{'}(t)p^{'}(t) + q(t)p''(t) + b(t)}{p(t)q(t)}$$

et

$$\gamma(t) = \frac{c(t)}{p(t)q(t)}.$$

Si on applique le Théorème de Sadek on montre que toute soltion $x(t)$de (4.20) est uniformément bornée et satisfaite $x(t) \longrightarrow 0, x^{'}(t) \longrightarrow 0$et $x^{''}(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$ alors la différentiabilité de α et β est exigée,ce qui implique la nécessité de la dérivée seconde de q et de la troisième dérivée de p. Or dans notre théorème ces derenières conditions ne sont pas nécessaires puisque nous avons juste eu besoin de $p^{'}, p^{''}$et $q^{'}$.

Remarque 4.3 *Nous avons montré que les solutions du système Sp.q(4.5) sont unformément asymptotiguement stables et sont aussi proches du système $S_{(1.1)}$. Le système(4.5) peut être considéré comme une perturbation régulière si $\forall\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \frac{1}{\varepsilon_1} \leq p(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_2}$ et$\frac{1}{\varepsilon_1} \leq q(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_2}$,ou singulière si $\forall\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \frac{1}{\varepsilon_1} \leq p(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_2}$ et$\frac{1}{\varepsilon_1} \leq q(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_2}$. Finalement, les solutions de $S_{p.q}$ restent proches de $S_{1.1}$ quelle que soit la perturbation, sans même avoir utilisé la théorie des perturbations.*

Conclusion

Le but de ce mémoire est d'étudier la stabilité ou sens de Lyapunov et la bornitude de la solution d'une certaine équations différentielle à retard de troisième degré, pour celà on exprime quelques notions de la stabilité de Lyaponov et nous avons etudier l'existence et l'unicité des solution de l'équations différentielles à retard Constant et dépendant de l'etat .
Des hypothèses et résultats principaux montrant la stabilité asymptotique ont été efféctués. Des exemples ont été étudier pour but de démontrer la bornutude des solution.

Bibliographie

[1] A. I. Sadek, On the Stability of Solutions of Some Non-Autonomous Delay Differential Equations of the Third Order ,Asymptot.Anal .,43 no (1-2) (2005),1-7.

[2] A. M.Lyapunov, Stability of Motion,Academic Press,London, 1966 Equations of the Third Order, Asymptot. Anal, 43 no i-2) (2005), 1-7

[3] B. Mehri et D. Shadman, Boundedness of Solutions of Certain Third Order Differential Equation,Math Inequal Appl.,2(4),(1999), 545-549.

[4] B. Yuzhen et G. Cuixia, New results on stability and boundedness of third order nonlinear delay differential equations. Dynam. Systems Appl. 22, no. 1(2013), 95- 104.

[5] C.Tunc,On asymptotic stability of solutions to third order nonlinear differential equations with retarded argument, Communications in applied analysis,11,no (4)(2007),515-528.

[6] G.Makay. On theasymptotic stability of functional-differential equations with infinitè dely,J.Differential Equations 108(1),(1994),139-151.

[7] H. K. Khlil, Nonlnear systèms. Prentice-Hall, New York, 2002 oseillatory restoring and forcing terms. Czech. Math. J.36,

1(1986), 1-6

[8] J. Andres, Boundedness of solutions of the third order diffcrcn- tial equation with the oscillatory restoring and forcing terms. Czech.Math .J.36,1(1936),1-6.

[9] J. K. Hale, "Theory of Functional Differential Equations", Springer- Verlag, New York, 1977.

[10] J. K. Hale, et S. Verduyn-Lunel, Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1993

[11] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel, "Introduction to Functional Differential Equations", Springer, New York, 1993.

[12] K. Cooke and W. Huang, On the problem of linearisation for statedependent delay differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 1417-1426.

[13] K.E. Swick.Asyptotic behavior of the solutions of certain third order differentialequations,SIAM J.Appl.Math.19(1969),96-102

[14] L. Zhang, L. Yu, Global asymptotic stability of certain third-order nonlinear differential equations. Math. Methods Appl. Sci. 36, no. 14(2013), 1845-1850.

[15] M. Louihi, M. L. Hbid, and O. Arino, Semigroup properties and the Grandall-Liggett approximation for a class of differential equations with state-dependent delays, J. Diff. Eqs 181 (2002) 1-30.

[16] M. O. Omeike, New results on the stability of solution of some non-autonomous delay the third order, Differential Equations

and Control Processes 1, (2010), 18-29.

[17] M.Remili,L.Damerdji Oudjedi.Uniform Stability and Bounddedness of Third Order Delay DifferentialEquations.Bull.Comput.Appl.Math.,Vol.2,No.1, (2014),25-35.

[18] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, "Delay Equation : Functional-, Complex, and Nonlinear Analysis", Springer- Verlag, New York, Series : Appl. Math. Sci., 110, 1995.

[19] S. Liu, M. Kouche, and N.-e. Tatar, Permanence extinction and global asymptotic stability in the stage structured system with distributed delays, J. Math. Anal. Appl. 301 (2005) 187-207.

[20] T. A. Burton, Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, 178. Academic Press, Inc, Orlando, FT, 1985.

[21] T.Hara, On the asymptotic behavior of the solutions of some third and fourth order non-autonomous differential equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci.9, (1973/74), 649-673.

[22] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[23] Y.F. Zhu. On stability,boundedness and existence of periodic solution of a kined of third order nonlinear delay differential system. Ann.Differential Equations 8(2)(1992),249-259.

[24] Y. Kuang, "Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics", Mathematics in Sciense and Engineering,

191, 1993.

[25] Zhang Li Juan, Si Li Geng, Globally asymptotic stability of a class of third order nonlinear system, (Chinese) Acta Math. Appl. Sin. 3 0(no.1) (2007) 99-103.