

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications.

PAR :

Amira Boudaoud

Thème

**SUR LA THÉORIE ET LES APPLICATIONS DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES.**

Devant le jury composé de :

Abdelaziz Rahmoune	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
Abita Rahmoune	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examineur
Mohamed Saadaoui	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

REMERCIEMENTS

*Je remercie tout d'abord **ALLAH** le tout puissant, de m'avoir permis d'atteindre ce modeste niveau scientifique et de m'avoir donné le courage et la patience afin de mener à bien le travail réalisé dans cette thèse.*

*Je remercie professeur **Mr. Abdelaziz Rahmoune**, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.*

*J'adresse aussi mes sincères reconnaissances à **Mr. Abita Rahmoune**, qui a accepté de participer à mon jury. Leur présence constitue un grand honneur.*

Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

*Mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur **Mr. Mohamed Saadaoui**, pour son appui scientifique, sa disponibilité, ses orientations judicieuses et dont les compétences intellectuelles, l'expérience, la modestie et la patience ont grandement contribué à l'aboutissement de ce mémoire. Qu'il trouve, ici, l'expression de mon profond respect.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

DÈDICACES

Je dédie ce mémoire,

*A mon très cher **père** tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager, que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.*

*A ma **maman** qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études, qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

*A mes très chers frères **Zakaria, Omar elfarouk, Abdessalam et Bassel Elabderazek, Djelloul.***

*Ma soeur **Nouceiba.***

*Mes nièces **Riponzl et Miral.***

*Mes chers amis **Meriem et Douha.***

*Mon chère professeur de stage **Maatouge warda.***

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا الى المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الكسرية من حيث الوجود و الحل. كما قمنا بتحويل هذه المعادلات الى نظام لاثبات الوجود الحلول. و قدمنا عدة تعاريف و نظريات للمشتقات الكسرية لتثمين العمل. و كذا حل بعض المعادلات التفاضلية (العادية – الكسرية) تحت شرط التفكيك.

الكلمات المفتاحية :

المشتقات الكسرية، معادلات تفاضلية عادية، معادلة تفاضلية كسرية، نظام التفاضلي، حساب التفاضلي الكسري.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons abordé les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles fractionnaires en ce qui concerne leur existence des solutions. Nous avons également converti ces équations en un système pour prouver l'existence des solutions. De plus, présenté plusieurs définitions et théories des dérivées fractionnaires pour valoriser le travail. Ainsi, nous avons résolu certaines équations différentielles (ordinaires - fractionnaires) sous la condition de la décomposition.

Mots clés :

Dérivées fractionnaires, équations différentielles ordinaires, équation différentielle fractionnaire, système différentiel, calcul différentiel fractionnaire.

Abstract

In this work, concerns us by ordinary differential equations and fractional differential equations in terms of existence and solution. We also converted these equations into a system to prove the existence of solutions. We presented several definitions and theories of fractional dissectors to evaluate work. As well as solving some differential equations (ordinary - fractional) under the condition of decomposition.

Keywords :

Fractional derivatives, ordinary differential equations, fractional differential equation, differential system, fractional differential calculus.

Notation

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées.

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

\mathbb{N} : Ensemble des nombres entiers naturels.

\mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.

Ω : Un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière.

$C([a, b])$: L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$.

$C^n([a, b])$: L'espace des fonctions continument différentiables sur $[a, b]$.

$L^p(\Omega)$: Espace de Lebesgue $0 \leq p \leq \infty$.

$L^1(\Omega)$: Est l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$: le gradient de la fonction u .

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: Le Laplacien.

Γ : La fonction Gamma.

B : La fonction Bêta.

$E_\alpha(z)$: La fonction Mittag-Leffler.

$I_{a+}^\alpha f, I_{b-}^\alpha f$: L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$.

$D_{a+}^\alpha f, D_{b-}^\alpha f$: La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$.

${}^C D_{a+}^\alpha f, {}^C D_{b-}^\alpha f$: La dérivée fractionnaire de Caputo (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$.

${}^G D_{a+}^\alpha f, {}^G D_{b-}^\alpha f$: La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$.

C : constante réelle.

Table des matières

Introduction	9
1 Outils mathématiques	13
1.1 Espaces Des Fonctions Continues	13
1.1.1 Espace $L^P(\Omega)$	13
1.1.2 Lemme de Gronwall	14
1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	15
1.2.1 Fonction Gamma	15
1.2.2 Fonction Bêta	17
1.2.3 Fonction Mittag-Leffler	17
1.3 Problème de Cauchy	17
1.3.1 Existence et unicité	18
1.3.2 Systèmes différentiels	20
1.3.3 Problème de Cauchy de systèmes différentiels	20
1.4 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz	21
2 Équation différentielle ordinaire (EDO)	24
2.1 Équation différentielle ordinaire d'ordre n	24
2.1.1 Solutions d'un équation différentiel linéaire	25
2.2 Équations différentielles ordinaires du premier Ordre	25
2.3 Équations différentielles ordinaires du deuxième ordre	27
2.3.1 Équation de Bernoulli	28
2.3.2 Équation de Riccati	29
2.3.3 Équation de Clairaut	32
2.3.4 Équation de Lagrange	33

3	Équation différentielle fractionnaire	37
3.1	Dérivation fractionnaire	37
3.1.1	Quelques définitions des dérivés fractionnaires	39
3.1.2	Quelques définitions des intégrales fractionnaires	43
3.1.3	Propriétés Fractionnaire	44
3.2	Quelques-unes des expressions les plus connues de dérivée fractionnaire	45
3.2.1	Dérivée fractionnaire de Rimann-Liouville	45
3.2.2	Dérivée fractionnaire de Caputo	47
3.2.3	Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov	48
3.3	Relation enter les dérivées pour $\alpha \in]0, 1[$	50
3.3.1	Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires	52
4	Résolutions d'un équation différentielle fractionnaire	53
4.1	Équation différentielle d'ordre α	53
4.1.1	Équations différentielles homogènes	54
4.1.2	Équations différentielles particulière	54
4.1.3	Cas particuliers	55
4.2	Équations différentielles fractionnaires linéaires ordinaire d'ordre α	62
4.2.1	Existence	62
4.2.2	Solutions de système	64
	Conclusion	77
	Bibliographie	78

Introduction

Calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire. Les dérivées d'ordres non entiers sont à présent largement appliquées dans de nombreux domaines, par exemple, en probabilité, viscoélasticité, électronique, économie, mécanique et en biologie, etc. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs. En bref, toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations antérieures notamment à caractère viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement.

Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre tous les types d'équations différentielles fractionnaires. La méthode de résolution dépend du type d'équation et de ses conditions initiales. Parmi les méthodes courantes :

Les méthodes analytiques : ces méthodes consistent à utiliser des transformations intégrales et d'autres analyses mathématiques pour obtenir une solution exacte de l'équation.

Les méthodes numériques : ces méthodes utilisent des techniques de calcul pour approcher la solution de l'équation. Parmi les méthodes numériques courantes, citons la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis.

Les logiciels : de nombreux logiciels sont disponibles pour résoudre les équations différentielles fractionnaires. Parmi les logiciels les plus courants, Mathematica, MATLAB et FreeODE.

Il y a eu de nombreux autres contributeurs à ce domaine, parmi les scientifiques qui ont contribué à trouver des solutions pour les équations différentielles fractionnaires, on peut citer : Albert Senftenberg : Mathématicien américain renommé pour ses travaux sur la résolution des équations différentielles partielles fractionnaires et leurs applications dans divers domaines scientifiques et techniques. Samuel Samkovitch : Mathématicien serbe célèbre pour ses contributions au développement de la théorie des équations différentielles partielles fractionnaires et leurs applications en physique mathématique, en ingénierie, et dans de nombreux autres domaines. Ihab Abdelrahman : Chercheur dans le domaine des mathéma-

tiques arabes, a réalisé de nombreuses études et recherches sur la résolution des équations différentielles partielles fractionnaires et a publié de nombreux articles scientifiques dans ce domaine. Ernesto Monografìa : Mathématicien italien réputé pour ses travaux sur la théorie des équations différentielles partielles fractionnaires et leurs applications en dynamique des fluides et dans les domaines de l'ingénierie. Ces scientifiques ont apporté des contributions significatives à la résolution des équations différentielles fractionnaires, et leur travail continue d'inspirer de nouveaux développements et applications dans ce domaine.

Ce memoire contient quatre chapitres :

Le premier chapitre, nous allons aborder certains outils mathématiques, ainsi que des fonction spéciales comme la fonction Gamma, Bêta et Mittag-Leffler, et nous étudierons l'existence et l'unicité des problèmes de Cauchy et de Cauchy-Lipschitz, et quelques définitions des systèmes différentiels.

Le deuxième chapitre, nous utilisons quelques définitions sur les équations différentielles ordinaire (EDO).

Le troisième chapitre, représente les définitions et propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires, avec quelques exemples.

Le quatrième chapitre, est consacré résolutions d'un équation différentiel fractionnaire, et équation différentielle d'ordre α .

L'importance de l'étude

Ces dernières années, le calcul fractionnaire a suscité un regain d'intérêt et a été appliqué à divers problèmes liés aux sciences, à l'ingénierie et aux mathématiques appliquées. Les nombreux problèmes physiques qui semblent présenter des propriétés inhérentes aux dérivées fractionnaires et aux intégrales fractionnaires sont particulièrement intéressants.

Certaines des applications les plus notables concernent la viscoélasticité, les processus de diffusion et l'écoulement des médias poreux, pour n'en citer que quelques-unes.

Ces applications ont motivé le développement théorique du calcul fractionnaire et de ses domaines connexes, et de nouvelles méthodes de résolution des équations différentielles doivent être développées pour étudier certains de ces problèmes modernes.

Le développement du calcul fractionnaire remonte à la fin du 17^{ème} siècle jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle. Dans cette époque, de nombreux articles ont été rédigés puis rapidement accueillis et adoptés par la communauté scientifique. Certains des principaux contributeurs au développement de la théorie du calcul fractionnaire furent Leibniz, L'Hopital, Liouville, Abel, Riemann, Grünwald-Letnikov.

Le calcul fractionnaire a acquis une importance croissante dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. De nombreux systèmes dans ces domaines sont régis par des équations différentielles contenant des dérivées d'ordre non entier. Il est bien connu qu'une équation différentielle est une description concise de systèmes physiques, biologiques, sociaux ou techniques. L'ordre de l'équation différentielle représente la complexité du comportement dynamique du système. Plus l'ordre est grand, plus le système est complexe. C'est sur ce sujet que nous sommes confrontés à une question. Si l'ordre d'un système augmente avec la vitesse, on dit que le système possède de la mémoire. La mémoire est un ingrédient vital connu dans la description de systèmes complexes. Ce phénomène a conduit à un développement et une application majeurs du calcul fractionnaire, notamment pour décrire le comportement des systèmes impliquant la mémoire. Le développement a débuté avec la publication d'un article d'Oldham et Spanier, intitulé "The Fractional Calculus", qui a généré un regain d'intérêt pour le sujet. Cela vient du fait que des méthodes de nature complexes sont impliquées dans la résolution d'équations différentielles fractionnaires, et on pensait qu'il était grand temps de développer.

Problème étudié

L'objectif principal de ce travail est d'examiner des équations différentielles fractionnaires (EDF) à travers les dérivées fractionnaires. Nous tentons d'aborder l'existence et certaines solutions analytiques de cette équation, en utilisant et en maîtrisant les théories techniques et méthodes traditionnelles, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz, Lemme de Gronwall, etc. on utilise dans (EDO) équations différentielles ordinaires, pour l'existence et résolution d'un équation différentielle fractionnaire en générale.

Chapitre 1

Outils mathématiques

1.1 Espaces Des Fonctions Continues

Définition 1.1.1 On note par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur Ω ($n \geq 0$),

muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{C^m} = \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_c = \sum_{k=0}^m \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_c = \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

Soit intervalle $\Omega \subset \mathbb{R}$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des classes des fonctions réelles mesurables f sur Ω , vérifiant

$$\int_a^b |f(x)^p| dx < +\infty.$$

De plus $L^p(\Omega)$ est un espace de banach muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout sur Ω , c'est-à-dire

$$L_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque par tout (p.p) sur Ω , de plus est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Espace L^1

L'espace L^1 fait référence à un espace fonctionnel utilisé en mathématique. Il est composé de toutes les fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur un certain ensemble mesurable.

Formellement, pour un ensemble mesurable E donnée $L^1(E)$ est l'ensemble des fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale de la valeur absolue de f sur E est finie.

En d'autres termes, si $f \in L^1(E)$, alors

$$\int_E |f(x)| dx < \infty.$$

1.1.2 Lemme de Gronwall

Définition 1.1.2 (Lemme d'intégrale)

Supposons qu'une fonction f continue sur $I = [0, T] \subseteq \mathbb{R}$, (Attention on ne s'intéresse qu'aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^+), vérifie

$$f(x) \leq \int_0^x a(s)f(s)ds + b(x),$$

pour tout $x \in I$, où $a(x), b(x)$ sont des fonctions continues sur I dans \mathbb{R}^+ . Alors, on a l'inégalité

$$f(x) \leq b(x) + \int_0^x \exp\left(\int_s^x a(\sigma)d\sigma\right) b(s)a(s)ds,$$

pour tout $x \in [0, T]$.

1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma d'Euler et Bêta, Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler Γ est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexe.

Définition 1.2.1 On définit $\Gamma(\alpha)$ par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

La fonction Γ s'étend $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ tout entier.

Remarque 1.2.1 La fonction Gamma peut être définir aussi par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^\alpha}{(\alpha+1) \dots (\alpha+n)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

Propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante :

1. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.
2. La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel, car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On définit le prolongement de $\Gamma(\alpha)$ pour α négatif comme suit :

- Pour $-1 < \alpha < 0$, alors $0 < \alpha+1 < 1$ et $\Gamma(\alpha)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(\alpha)$.

On convient alors de définir $\Gamma(\alpha)$ par la relation $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, et on étend le procédé de proche en proche.

- Pour $-(n+1) < \alpha < n$ ($n > 0$), on aura

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)}.$$

$\Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement décroissante.

On a $\Gamma(1) = 1$ et pour $\alpha = 0$, $\Gamma(\alpha)$ est infinie, il en sera de même pour toutes les valeurs entières négatives de α , c'est à dire $\Gamma(-1), \Gamma(-2), \dots, \Gamma(-n), \dots$ sont infinies.

- Pour $0 < \alpha < 1$. Dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'abscisse et l'ordonnée du minimum sont $\alpha \approx 1,465$ et $\Gamma(\alpha) \approx 0,8856$. Cette dernière valeur est évidemment proche de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,8862$.
De plus, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement croissante pour $\alpha \geq 2$ donc elle est convexe pour $\alpha \in]0, +\infty[$.

Graphe de la fonction Gamma

Le graphe de la fonction $\Gamma(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est tracé sur la figure ci-dessous :

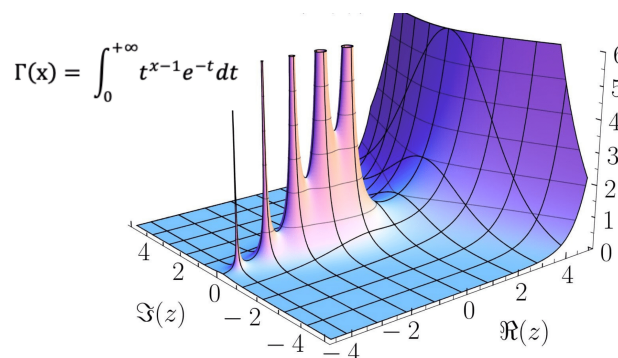


FIGURE 1.1 – La fonction gamma

Fonction Digamma

La fonction $\psi(z)$ d'Euler aussi appelée fonction digamma est la dérivée logarithmique de $\Gamma(z)$:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

et

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Comme $\Gamma(z)$ ne s'annule pas, et que les pôles de $\Gamma'(z)$ sont les mêmes que ceux de $\Gamma(z)$, et $\psi(z)$ est une fonction méromorphe ayant des pôles simples en n ($n \in \mathbb{N}$), avec un résidu égal à -1 .

Représentation intégrale de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$

La représentation intégrale de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ sur le contour de Hankel est donnée par

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\varepsilon'} e^{tz} dt.$$

1.2.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.2 La fonction Bêta d'Euler notée $B(x, y)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (\operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0).$$

Remarque 1.2.2 La relation entre la fonction Bêta et Gamma d'Euler est donnée par

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.2.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.2.3 On appelle fonction de Mittag-Leffler la fonction définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

Définition 1.2.4 La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

1.3 Problème de Cauchy

Une équation différentielle est une équation du type $y' = f(t, y)$, où f est une fonction définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^2$ (Ω est appelé le domaine de l'équation différentielle). Une solution de cette équation différentielle est une fonction y définie et dérivable sur un intervalle I , et telle que pour tout $t \in I$, $(t, y(t))$ est dans Ω , et $y'(t) = f(t, y(t))$.

Une équation différentielle de la forme précédente s'appelle une équation différentielle du premier ordre. On rencontre aussi souvent des équations du deuxième ordre du type

$y'' = f(t, y', y)$. Plus généralement, une équation différentielle d'ordre m est une équation du type $y^{(m)} = f(t, y^{(m-1)}, \dots, y)$.

Définition 1.3.1 Soit un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^2$ et (t_0, y_0) un point de Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle problème de Cauchy en (t_0, y_0) la recherche d'une solution à l'équation différentielle sous les hypothèses supplémentaires que y est définie sur un intervalle contenant t_0 et que $y(t_0) = y_0$.

S'écrit de la forme

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1.3.1 Existence et unicité

Théorème 1.3.1 Soit U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f \in (U, \mathbb{R})$. On suppose $f(x, y)$ lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (x_0, y_0) , c'est à dire qu'il existe un voisinage de (x_0, y_0) dans U et un constant $L > 0$ tel que pour tous (x, y) et (z, y) dans ce voisinage

$$\|f(x, y) - f(z, y)\| \leq L \|x - z\|.$$

Alors on a les propriétés suivantes.

Existence locale

Il existe $T > 0$ et $x \in L^1([t_0 - T, t_0 + T]; J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Unicité

Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Théorème 1.3.2 On suppose $f \in (I \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ et globalement lipschitzienne par rapport à x . Alors, quelque soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in l^1(I; \mathbb{R})$.

Exemple 1.3.1 Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(y(x) + 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Possède une solution unique pour $-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$.

Solution de l'exemple : Il suffit de montrer que

- I) f est continue sur D .
- II) $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur D .
- III) $\exists M$ et $\exists h$.

Nous avons

$$y'(x) = 2x(y(x) + 1) \implies f(t; y(t)) = 2t(y(t) + 1),$$

$$y(0) = 0 \implies (x_0 = 0 \wedge y_0 = 0),$$

$$(-1 \leq x \leq 1 \wedge -2 \leq y \leq 2) \implies (D = [-1, 1] \times [-2, 2] \wedge a = 1 \wedge b = 2).$$

I) $f(t; y(x)) = 2x(y(x) + 1)$ est une fonction continue sur D .

II) Comme $f(x; y(x)) = 2x(y(x) + 1)$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x \implies \sup |f(x; y(x))| \leq 2.$$

Ainsi, la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y existe et est continue sur D .

III) $\exists M$ et $\exists h$. Comme

$$f(x; y(x)) = 2x(y(x) + 1).$$

Alors

$$M = \sup |f(x; y(x))|$$

$$M = 6.$$

De plus

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

$$h = \min\left(1, \frac{2}{6}\right),$$

$$h = \frac{1}{3}.$$

Donc $J = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ et le problème de Cauchy admet une unique solution

$$y : \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \longrightarrow [-2, 2].$$

1.3.2 Systèmes différentiels

Un système différentiel ordinaire linéaire est une collection de plusieurs EDO avec plusieurs fonctions inconnues dépendant de la même variable de la forme

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{r=k} \sum_{i=0}^{i=n} g_{1,i}(t) y_r^{(i)}(t) = g_1(t) \\ \sum_{r=0}^{r=k} \sum_{i=0}^{i=n} g_{2,i}(t) y_r^{(i)}(t) = g_2(t) \\ \vdots \\ \sum_{r=0}^{r=k} \sum_{i=0}^{i=n} g_{j,i}(t) y_r^{(i)}(t) = g_j(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Le système en k équations différentielles ordinaires est dit d'ordre n car il implique les dérivées n ièmes des k fonctions inconnues y_1, y_2, \dots, y_k de la variable t .

Exemple 1.3.2 *Le système suivant représente un système différentiel d'ordre 3*

$$\begin{cases} x'(t) - t^2 y(t) + tz''(t) = 0 \\ tx(t) + y''(t) + z(t) = e^t \\ (t-2)x'''(t) + ty'(t) + z(t) = te^t \end{cases}$$

où les fonctions inconnues $x(t), y(t), z(t)$.

1.3.3 Problème de Cauchy de systèmes différentiels

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe non vide, I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

On appelle problème de Cauchy, le système suivant,

$$\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix}$ est conditions initiales.

On appelle solution de Systèmes différentiels ordinaire d'ordre 1

$$Y'(t) = f(t, Y(t)),$$

une fonction Y de classe C sur un intervalle $J \subseteq I$ et à valeurs dans Ω .

1.4 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.4.1 (Cauchy-Lipschitz) Ω étant une partie ouverte d'un espace réelle de Banach $E \subseteq \mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et f une fonction continument différentiable de $I \times \Omega$ dans E . Alors pour tout $x_0 \in I$ et tout $Y_0 \in \Omega$, il existe un intervalle ouvert $J \subseteq I$ tel que l'équation différentielle ordinaire vectorielle d'ordre 1

$$Y'(t) = f(t, Y(t)),$$

admet une solution $Y(t)$ différentiable sur J et vérifiant $Y(t_0) = Y_0$.

Nous utiliserons la méthode des approximations successives de Picard pour démontrer le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

Existence de la solution

Soit $D = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \omega, y_0 + \omega] \subset I \times \Lambda_0$ un compact avec $\delta > 0$, $\omega > 0$.

On sait que f est continument différentiable sur D , ce qui entraîne que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et continue sur D . Donc $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$ est bornée sur D et posons $A = \sup_{(t,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$.

Appliquons la formule des accroissements finis à la fonction $y \rightarrow f(t, y(t))$ sur l'intervalle $\{x\} \times [y_1, y_2] \subset D$,

$$\exists c \in [y_1, y_2], \quad f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)(y_1 - y_2),$$

d'où

$$\exists c \in [y_1, y_2], \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|.$$

Ainsi, f satisfait à la condition de lipschitz relativement à y dans le domaine D .

D'autre part, f est continue sur le compact D , autrement dit $\sup_{(t,y) \in D} |f(t, y)| = M < +\infty$.

Posons $h = \min\left(\delta, \frac{\omega}{M}\right)$, et définissons une suite de fonctions $y_n(t)$ pour $|t - t_0| \leq h$ par

$$y_n(t) = y_0(t) + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad k = 1, \dots, n.$$

Le théorème à démontrer consiste à vérifier que $y_n(t)$ converge pour tout $x \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et que la limite $y(x)$ de la suite $y_n(t)$ est une solution de l'équation $y'(x) = f(x; y(x))$ qui satisfait à la condition $y(x_0) = y_0$.

Pour cela, nous allons montrer que la suite $y_n(x)$ est une suite de Cauchy.

Pour tout m à n la quantité $|y_m(t) - y_n(t)|$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 |y_m(t) - y_n(t)| &= |y_m(t) - y_{m-1}(t) + y_{m-1}(t) - \cdots + y_{n-1}(t) - y_n(t)| \\
 &\leq |y_m(t) - y_{m-1}(t)| + \cdots + |y_{n+1}(t) - y_{m-1}(t)| \\
 &= \sum_{k=n}^{k=m-1} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \\
 &\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s)) ds \right| \\
 &\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} A \int_{t_0}^t |y_k(s) - y_{k-1}(s)| ds \\
 &\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} A \int_{t_0}^t \frac{\omega(A|s - s_0|)^{k-1}}{(k-1)!} ds \\
 &\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} \frac{\omega A^k}{(k-1)!} \int_{t_0}^t |s - s_0|^{k-1} ds \\
 &\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} \frac{\omega A^k}{k!} |t - t_0|^k \leq \omega \sum_{k=n}^{k=m-1} \frac{(Ah)^k}{k!} \\
 |y_m(t) - y_n(t)| &\leq \frac{(Ah)^n}{n!} \frac{1}{1 - (m-n)h} \leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(Ah)^n}{n!} \frac{1}{1 - (m-n)h} = 0$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_m(t) - y_n(t)| = 0, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Ainsi, la suite $y_n(t)$ étant convergente $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, on dit alors que $y_n(t)$ converge uniformément vers $y(t)$.

Comme $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] : y_n(t_0) = y_0$. Nous avons, donc $y(t_0) = y_0$.

De plus, on sait que

1. Si $y_n(t)$ converge uniformément vers $y(t)$, $\forall t \in I$ et si $y_n(t)$ est continue $\Rightarrow y(t)$ est continue sur I .
2. Si $y_n(t)$ converge uniformément vers $y(t) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t y_n(s) ds = \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(s) ds$
nous pouvons passer à la limite dans la relation de récurrence (1.1) dit formule des approximations successive de Picard. En dernier,

nous obtenons

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

L'unicité

Pour montrer l'unicité de la solution, nous aurons besoin du lemme suivant. Soit $y(t)$ une solution du problème de Cauchy satisfaisant.

Supposons qu'il existe une autre solution $z(t)$ telle que $z(t_0) = y(t_0)$. Alors,

$$z(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

De plus,

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |(f(s, y(s)) - f(s, z(s)))| ds \\ &\leq k \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq K \int_{t_0}^t e^{k|s-s_0|} |y(s_0) - z(s_0)| ds \\ |y(t) - z(t)| &\leq K \int_{t_0}^t e^{k|s-s_0|} |y(s_0) - y(s_0)| ds, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $|y(t) - z(t)| \leq 0$, donc $y(t) = z(t)$. Autrement dit le problème de Cauchy admet une unique solution, par conséquent le problème (1.9) admet aussi une unique solution.

Chapitre 2

Équation différentielle ordinaire (EDO)

Dans cette partie, nous allons présenter quelques notions et définitions élémentaires sur les équations différentielles ordinaires utilisables à travers ce travail.

2.1 Équation différentielle ordinaire d'ordre n

Définition 2.1.1 On appelle équation différentielle ordinaire d'ordre n , toute équation de la forme

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (2.1)$$

avec f est une application de $I \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

Définition 2.1.2 Une équation différentielle ordinaire d'ordre n est dite linéaire si la fonction f est linéaire par rapport à y et à toutes ses dérivées. Autrement dit, l'EDO d'ordre n est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n} g_i(t) y^{(i)}(t) = g(t) \quad (2.2)$$

où $g_n(t) \neq 0$, $g_i(t)$ sont appelées les coefficients lesquels peuvent être variables ou constants, $y^{(i)}$ sont les dérivées de la fonction inconnue y par rapport à t et $g(t)$ est la fonction second membre.

Remarque 2.1.1 Pour la fonction second membre $g(t) = 0$, on appelle équation homogène.

Exemple 2.1.1 Soit $y^{(3)}(t) + 3y^{(2)}(t) - y(t) = \ln(1+t)$ est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients constants avec second membre.

Remarque 2.1.2 Si l'équation différentielle ordinaire n'est pas de la forme de (2.2) dit équation différentielle ordinaire non-linéaire.

Exemple 2.1.2 Soit $y^{(3)}(t)y(t) + 3ty^{(2)}(t) + ty^2(t) = t \sin(1+t)$ est une équation différentielle ordinaire linéaire non-linéaire à coefficients variables avec second membre.

Remarque 2.1.3 La relation (2.1) est la forme implicite de l'EDO, tandis que la relation (2.2) est la forme explicite résolue normale.

Solutions de l'équation différentiel

On appelle solution ou intégrale de l'équation différentielle ordinaire (2.1) tout couple (I, y) formé d'un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et d'une fonction y vérifiant les conditions suivantes :

- I) y soit n -fois dérivable sur I .
- II) $\forall x \in I, y$ vérifie (2.1).

2.1.1 Solutions d'un équation différentiel linéaire

La solution générale de (2.1) est donnée par $y_g = y_h + y_p$ avec y_h est la solution de l'équation homogène (2.2) et y_p et la solutions particulière de (2.1).

2.2 Équations différentielles ordinaires du premier Ordre

Définition 2.2.1 On appelle une équation différentielle linéaire une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{2.3}$$

Où $a(t), b(t)$ sont des fonctions continues sur I .

La solution d'équations différentielles homogènes :

Une équation différentielle homogène est une équation de la forme

$$y' + a(t)y = 0.$$

Où $a(t)$ est continue sur I . On a

$$\begin{aligned} y' = -a(t)y &\implies \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\implies \ln |y| = - \int a(t)dt + c_1 \\ &\implies y(t) = ce^{-\int a(t)dt}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d'où la solution d'équation différentielle homogène est donnée par :

$$y_h(t) = ce^{-\int a(t)dt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La solution d'équations différentielles particulière

Méthode la variation de la constante : On a $y_h = kf$ où $f(t) = e^{-\int a(t)dt} = F$.

La méthode consiste à faire varier la constante c de la solution d'équation différentielle homogène $y_h(t) = ce^{-\int a(t)dt}$, c'est à dire la constante c devient la fonction à trouver $c(t)$ avec $y_p(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt}$ on remplaçant dans (2.3) .

Alors

$$y'_p = c'(t)e^{-\int a(t)dt} - c(t)a(t)e^{-\int a(t)dt},$$

donc

$$\begin{aligned} c'(t)e^{-\int a(t)dt} - c(t)a(t)e^{-\int a(t)dt} + a(t)c(t)e^{-\int a(t)dt} &= b(t) \implies c'(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t) \\ &\implies c'(t) = b(t)e^{\int a(t)dt}. \end{aligned}$$

On retrouve $c(t)$ et

$$y_p(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt}.$$

La solution générale de l'équation (2.3) est

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ce^{-\int a(t)dt} + c(t)e^{-\int a(t)dt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.1 Soit l'équation : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$3y'(t)(t^2 - 1) - 2ty(t) = 0$$

Donner la solution générale de l'équation.

Solution de l'exemple :

L'équation représente une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à variables séparées. Nous avons

$$\begin{aligned} 3y'(t)(t^2 - 1) - 2ty(t) &= 0 \\ \implies \int \frac{1}{y} dy(t) &= \frac{1}{3} \int \frac{2t}{t^2 - 1} dt, \\ \implies \ln |y(t)| &= \frac{1}{3} \ln |t^2 - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ \implies y(t) &= k(t^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solution générale y_g de l'équation est :

$$y_g(t) = k\sqrt[3]{t^2 - 1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.3 Équations différentielles ordinaires du deuxième ordre

L'équations différentielles ordinaires du deuxième ordre écrite sous la forme

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \tag{2.4}$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions connues et $t \in I \mapsto \mathbb{R}$.

Équation homogène à coefficients constantes

Une équation différentielle linéaire de seconde ordre à coefficient constantes est du type

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{2.5}$$

Équation caractéristique est

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.6}$$

Soit $\Delta = a^2 - 4ab$ discriminant de l'équation caractéristique (2.6).

La solution homogène de l'équation (2.5) est

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solution r_1 et r_2 réelles.

La solution générale s'écrit

$$y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r réelle.

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{rt}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet une racine complexe r_1 et r_2 .

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.3.1 Soit l'équation

$$y''(t) - 9y(t) = 2e^{3t}.$$

Trouver la solution générale y_g de l'équation.

2.3.1 Équation de Bernoulli

On appelle une équation de Bernoulli une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t) y^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } n > 1. \quad (2.7)$$

Méthode de résolution :

Dans ce type d'équation, on divise (2.7) par y^n on a

$$y' y^{-n} + a(t) y^{1-n} = b(t).$$

Par le changement variable : $z = y^{1-n} \implies z' = (1+n)y' y^{-n}$, nous obtenons une équation différentielle du premier ordre en z sous la forme

$$\frac{1}{1-n} z' + a(t) z = b(t).$$

Exemple 2.3.2 Déterminer la solution générale de l'équation

$$(y'(t) - 2ty(t))\sqrt{y(t)} = t^3.$$

Solution de l'exemple :

L'équation représente une équation de Bernoulli avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, car

$$(y'(t) - 2ty(t))\sqrt{y(t)} = t^3 \implies y'(t) - 2ty(t) = t^3 y^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Comme $\alpha = -\frac{1}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} z(t) = y^{1+\frac{1}{2}}(t) = y^{\frac{3}{2}}(t) &\implies z'(t) = \frac{3}{2}y'(t)y^{\frac{1}{2}}(t) = t^3, \\ &\implies \frac{3}{2}z'(t) - 2tz(t) = t^3. \end{aligned}$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.7) nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(t) - 2ty(t) = t^3y^{-\frac{1}{2}}(t) &\implies y'(t)y^{\frac{1}{2}}(t) - 2zy(t)y^{\frac{1}{2}}(t) = t^3, \\ &\implies \frac{2}{3}z'(t) - 2tz(t) = t^3, \end{aligned}$$

qui est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 linéaire avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes :

Étape 1 :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}z'(t) - 2tz(x) = 0 &\implies \int \frac{dz(t)}{z(t)} = 3 \int t dt, \\ &\implies \ln |z(t)| = \frac{3}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale z_h de l'EDO linéaire sans second membre est

$$z_h = ke^{\frac{3}{2}t^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Étape 2 :

$$z(t) = k(t)e^{\frac{3}{2}t^2} \implies z'(t) = k'(t)e^{\frac{3}{2}t^2} + 3tk(t)e^{\frac{3}{2}t^2}.$$

En remplaçant z et z' dans l'équation (2.7).

Donc, la solution générale z_g de l'équation est

$$z_g(t) = c_1e^{\frac{3}{2}t^2} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $z(t) = y^{\frac{3}{2}}(t)$. Alors, la solution générale y_g de l'équation est

$$y_g(t) = \left(c_1e^{\frac{3}{2}t^2} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

2.3.2 Équation de Riccati

Définition 2.3.1 On appelle équation de Riccati toute équation différentielle ordinaire d'ordre 1 qui peut se mettre sous la forme

$$y' = f(t)y^2(t) + g(t)y(t) + h(t) \tag{2.8}$$

où f, g et h sont des fonctions continues de $I \subseteq \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

Méthode de résolution :

Dans ce type d'équation, vous devez connaître la solution particulière $y_p(t)$ de l'équation de Riccati. On élimine le terme indépendant de y en changeant la fonction, en posant

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{z(t)},$$

et

$$y'(t) = y_p'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)}.$$

En remplaçant y et y' dans l'équation (2.8), on a

$$\begin{aligned} y_p'(t) - \frac{z'(t)}{z^2(t)} &= f(t) \left(y_p(t) + \frac{1}{z(t)} \right)^2 + g(t) \left(y_p(t) + \frac{1}{z(t)} \right) + h(t) \\ &= [f(t) y_p^2(t) + g(t) y_p(t) + h(t)] + \left[f(t) \left(\frac{1}{z^2(t)} + \frac{2y_p(t)}{z(t)} \right) + \frac{g(t)}{z(t)} \right], \end{aligned}$$

car $y_p(t)$ est une solution particulière de l'équation (2.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{z'(t)}{z^2(t)} &= f(t) \left(\frac{1}{z^2(t)} + \frac{2y_p(t)}{z(t)} \right) + \frac{g(t)}{z(t)} \\ &= f(t) \frac{1}{z^2(t)} + (2f(t) y_p(t) + g(t)) \frac{1}{z(t)}, \end{aligned}$$

donc, $z'(t) = -[g(t) + 2f(t) y_p(t)] z(t) - f(t)$ est une équation différentielle de la forme (2.3).

Et la solution générale de l'équation de Riccati (2.8) est

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{z_g(t) + z_p(t)}.$$

Exemple 2.3.3 Trouver la solution générale de l'équation

$$y'(t) = 2ty^2(t) - ty(t) - t.$$

Solution de l'exemple :

L'équation représente une équation de Riccati. Nous remarquons que $y_p(t) = 1$ est une solution particulière.

$$\begin{aligned} y_p'(t) - 2ty_p^2(t) + ty_p(t) + t &= 0 \\ y_p(t) = 1 &\implies y_p'(t) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y'_p(t) - 2ty_p^2(t) + ty_p(t) + t &= 0 - 2t + t + t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $y_p(t) = 1$ définit bien une solution particulière de l'équation.

Posons

$$y(t) = 1 + \frac{1}{z(t)} \implies y'(t) = -\frac{z'(t)}{z^2(t)}.$$

En remplaçant y et y' dans l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} y'(t) = 2ty^2(t) - ty(t) - t &\implies -\frac{z'(t)}{z^2(t)} = 2t \left(1 + \frac{1}{z(t)}\right)^2 + t \left(1 + \frac{1}{z(t)}\right) - t, \\ &\implies -z'(t) = 2t + 3tz(t), \end{aligned}$$

qui est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

Étape 1 : EDO sans second membre

$$\begin{aligned} -z'(t) = 3tz(t) &\implies \frac{dz(t)}{z(t)} = -3 \int t dt \\ &\implies \ln |z(t)| = -\frac{3}{2}t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale de l'EDO linéaire sans second membre z_h est

$$z_h(t) = ke^{-\frac{3}{2}t^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Étape 2 : EDO avec second membre (méthode de la variation de la constante)

$$z(t) = ke^{-\frac{3}{2}t^2} \implies z'(t) = k'e^{-\frac{3}{2}t^2} + 3tk(t)e^{-\frac{3}{2}t^2}.$$

En remplaçant z et z' dans l'équation, il vient

$$\begin{aligned} -z'(t) = 3tz(t) + 2t &\implies -k'e^{-\frac{3}{2}t^2} + 3tk(t)e^{-\frac{3}{2}t^2} = 3tk(t)e^{-\frac{3}{2}t^2} + 2t \\ &\implies \int k'(t)dt = -2 \int te^{-\frac{3}{2}t^2} dt, \\ &\implies k(t) = -\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}t^2} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale z_g de l'équation est

$$z_g = c_1 e^{\frac{3}{2}t^2} - \frac{3}{2}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme $y(t) = 1 + \frac{1}{z(t)}$. Alors, la solution générale y_g de l'équation est

$$y_g(t) = 1 + \left(c_1 e^{\frac{3}{2}t^2} - \frac{3}{2} \right)^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

et $c_1 e^{\frac{3}{2}t^2} - \frac{3}{2} \neq 0$.

2.3.3 Équation de Clairaut

Définition 2.3.2 *Oute équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de la forme*

$$y(t) = ty'(t) + g(y'(t)) \tag{2.9}$$

où g est une fonction à valeur dans \mathbb{R} continue et dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit équation de Clairaut.

Méthode de résolution :

Pour résoudre l'équation de Clairaut (2.8), nous utiliserons le changement de fonction $y'(t) = z(t)$, l'équation de Clairaut (2.8) devient

$$y(t) = tz(t) + g(z(t)).$$

Dérivons cette dernière équation par rapport à t , on a

$$\begin{aligned} y(t) &= y'(t) + g(y'(t)) \\ y'(t) = z(t) &= z(t) + tz'(t) + z'(t)g'(z(t)) \end{aligned}$$

donc

$$z'(t)(t + g'(z(t))) = 0.$$

Ainsi, on distingue deux cas :

$$z'(t) = 0 \Rightarrow z(t) = c,$$

alors la solution générale y_g de la forme

$$y(t) = ct + g(c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si

$$t + g'(z(t)) = 0 \Rightarrow z(t) = (g')^{-1}(-t),$$

nous obtenons une solution singulière y_s de la forme

$$y(t) = t(g')^{-1}(-t) + g\left((g')^{-1}(-t)\right).$$

Exemple 2.3.4 Résoudre l'équation suivante

$$y(t) = ty'(t) + (y'(t))^2.$$

Solution de l'exemple :

L'équation est une équation de Clairaut. Pour sa résolution, posons $t(x) = y'(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y(t) = ty'(t) + (y'(t))^2 &\implies y(t) = tz'(t) + (z'(t))^2 \\ &\implies y'(t) = z(t) + tz'(t) + 2z(t)z'(t), \\ &\implies z'(t)(t + 2z(t)) \\ y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Étape 1 : Si $z'(t) = 0$. Alors, $z(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Donc, la solution générale y_g de l'équation de Clairaut est

$$y_g(t) = ct + c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Étape 2 : Si $t + 2z(t) = 0$. Alors, $z(t) = -\frac{t}{2}$.

Donc, la solution singulière y_s de l'équation de Clairaut est

$$y_s(t) = -\frac{1}{4}t^2.$$

2.3.4 Équation de Lagrange

Définition 2.3.3 Toute équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de la forme

$$y(t) = tf(y'(t)) + g(y'(t)) \tag{2.10}$$

où f et g sont des fonctions continues et dérivables sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit équation de Lagrange.

Méthode de résolution :

Pour résoudre l'équation de Lagrange (2.10), nous utiliserons le changement de fonction $y'(t) = z$ avec u une nouvelle variable et t et y sont des fonctions dépendant de la variable z , l'équation de Lagrange (2.10) devient

$$\begin{aligned} t'(z)y'(t(z)) &= zt'(z) \\ &= t'(z)f(z) + t(z)f'(z) + g'(z) \\ &\implies t'(z)(z - f(z)) = t(z)f'(z) + g'(z). \end{aligned}$$

Ainsi, deux cas peuvent se présenter :

1. Si $z - f(z) = 0 \Rightarrow t(z) f'(z) + g'(z) = 0 \Rightarrow t(z) = -\frac{g'(z)}{f'(z)}$,
nous obtenons la solution singulière y_s de l'équation de Lagrange

$$y_s(z) = -\frac{g'(z) f(z)}{f'(z)} f + g(z).$$

2. Si $z - f(z) \neq 0$,
nous obtenons une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de la forme (2.3)

$$t'(z) = \frac{f'(z)}{z - f(z)} t(z) + \frac{g'(z)}{z - f(z)},$$

alors la solution générale y_g de l'équation de Lagrange (2.10) est

$$y_g(z) = (t_h(z) + t_p(z)) f(z) + g(z).$$

Exemple 2.3.5 Soit l'équation

$$y(t) = 2ty'(t) + \ln y'(t).$$

Déterminer la solution générale.

Solution de l'exemple :

L'équation représente une équation de Lagrange. Pour sa résolution, posons

$$y'(t) = u.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y(t) = 2ty'(t) + \ln y'(t) &\implies y(u(t)) = 2t(u)u + \ln u, \\ &\implies ut'(t) = 2ut'(u) + 2t(u) + \frac{1}{u} \\ &\implies -ut'(t) = 2t(u) + \frac{1}{u}, \end{aligned}$$

laquelle est une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de fonction inconnue x et de variable u (pour tout $x, y'(t) > 0$). Elle peut, aussi s'écrire comme

$$t'(u) = -\frac{2}{u}t(u) - \frac{1}{u^2}.$$

Pour la résolution de l'équation, nous passons par deux étapes.

Étape 1 : EDO sans second membre.

Nous avons

$$\begin{aligned} t' = -\frac{2}{u}t &\implies \int \frac{dt}{t} = -2 \int \frac{du}{u}, \\ &\implies \ln |t(u)| = -2 \ln |u| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale de l'EDO linéaire sans second membre est

$$t_h(u) = kt^{-2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Étape 2 : EDO avec second membre (Méthode de la variation de la constante).

Nous avons

$$t(u) = k(u)u^{-2} \implies t'(u) = k'(u)u^{-2} - 2k(u)u^{-3}.$$

En remplaçant x et x' dans l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} t'(u) = -\frac{2}{u}t(u) - \frac{1}{u^2} &\implies k'(u)u^{-2} - 2k(u)u^{-3} = -\frac{2}{u}k(u)u^{-2} - \frac{1}{u^2} \\ &\implies \int k'(u)du = - \int du, \\ &\implies k(u) = -u + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale t_g de l'équation est

$$t_g(u) = c_1u^{-2} - u^{-1}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

En dernier, comme $y(u) = 2t(u)u + \ln u$. Alors, la solution générale y_g de l'équation devient

$$y_g(u) = 2c_1u^{-1} + \ln u - 2, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Réduction d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n à un système différentiel d'ordre 1

Avant de commencer à résoudre des EDOs d'ordre quelconque, nous allons nous rendre compte qu'il est possible de réduire l'ordre d'une EDO d'ordre n à un système d'EDO d'ordre 1.

Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre n écrite sous la forme normale

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (2.11)$$

avec f est une application de $I \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

Introduisant le changement de fonctions auxiliaires y_1, y_1, \dots, y_n de tel sorte que

$$y_k(t) = y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

En dérivant le système (1.6), nous obtenons

$$y'_k(t) = y^{(k)}(t) \Rightarrow y'_k(t) = y_{k+1}(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ce dernier système représente un système de n EDO d'ordre 1

$$\begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Le système (1.7) peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle vectorielle unique du premier ordre de la forme

$$\frac{d}{dt} Y(t) = M(t, f) Y(t).$$

Chapitre 3

Équation différentielle fractionnaire

Le but de ce chapitre est de présenter de manière synthétique et unifiée les éléments de la théorie du calcul fractionnaire sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans ce travail.

3.1 Dérivation fractionnaire

Historique

En (1695) l'Hôpital envoie une lettre à Leibniz. Dans son message, une question importante sur l'ordre de la dérivée a émergé : que pourrait être une dérivée d'ordre $n = \frac{1}{2}$?

Dans une réponse, Leibniz prévoit le début du domaine que l'on appelle aujourd'hui calcul fractionnaire (FC). En fait, FC est aussi ancien que le calcul traditionnel proposée indépendamment par Newton et Leibniz.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas du FC. Cette différence avec le calcul classique peut être considérée comme un problème pour la lente progression du FC jusqu'en (1900). Après Leibniz, c'est Euler (1738) qui a remarqué le problème d'une dérivée d'ordre non entier.

Fourier (1822) a suggéré une représentation intégrale afin de définir la dérivée, et sa version peut être considérée comme la première définition de la dérivée d'ordre arbitraire (positif).

Abel (1826) a résolu une équation intégrale associée au problème de la tautochrone, qui est considérée comme la première application de la FC.

Liouville (1832) propose une définition basée sur la formule de différenciation de la fonction exponentielle. Cette expression est connue comme la première définition de Liouville,

la deuxième définition formulée par Liouville est présentée en termes d'intégrale et est désormais appelée la version de Liouville pour l'intégration d'ordre non entier.

Après une série d'ouvrages de Liouville, 10 ans après sa mort a été publié l'article le plus important de Riemann, qui a développé indépendamment une approche des dérivées d'ordre non entier en termes de séries convergentes pratiques.

Hadamard (1892) a publié un article dans lequel la dérivée d'ordre non entier d'une fonction analytique doit être calculée en fonction de sa série de Taylor.

Marchaud (1927) a introduit une nouvelle définition de l'ordre non entier des dérivées. Cette définition coïncide avec la version de Liouville pour les fonctions à suffisamment bonnes.

Erdelyi-Kober (1940) a présenté une définition distincte de l'ordre d'intégration non entier qui est utile dans les applications impliquant des équations intégrales et différentielles.

Caputo (1967) a formulé une définition plus restrictive que celle de Riemann-Liouville mais plus appropriée pour discuter de problèmes impliquant une équation différentielle fractionnaire avec des conditions initiales.

Après le premier congrès à l'Université de New Haven, en(1974) la FC s'est développée et plusieurs applications ont vu le jour dans de nombreux domaines de la connaissance scientifique. En conséquence, des approches distinctes pour résoudre les problèmes impliquant la dérivée ont été proposées et des définitions distinctes de la dérivée fractionnaire sont disponibles dans la littérature, voir ([13]).

3.1.1 Quelques définitions des dérivés fractionnaires

Un problème de longue date du calcul fractionnaire est qu'il existe trop de définitions.

Il existe de nombreuses définitions de la dérivée fractionnaire, qui peuvent être étudiées toutes ou énumérées. Nous en citons quelques-uns :

Dérivé fractionnaire de Caputo et Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Kolwanker-Gangal, mod Jumarie, Grénwald-Letnikov, Sonin-Letnikov, Liouville, Hadamard, Marchaud, Riesz, Riesz-Miller, Miller-Ross, Weyl, Erdélyi-Kober, Machado, Chen-Machado, Coimbra, Katugampola, Caputo-dérivé de Katugampola, Hilfer, Hilfer-Katugampola, Davidson, Chen, Atangana-dérivé de Baleanu, Pichaghchi,....

Malheureusement la plupart de ces dérivés fractionnaires possèdent de nombreuses propriétés inhabituelles.

Il existe des tentatives visant à unifier les conditions et les caractéristiques qui doivent être remplies pour une définition générale des dérivées fractionnaires.

Nous avons généralement considéré D_t^α comme une dérivée fractionnaire.

- Liouville dérivative :

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3.1)$$

- Dérivé gauche de Liouville :

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{-\alpha+n-1} f(s) ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.2)$$

- Dérivé droit de Liouville :

$$D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (s-t)^{-\alpha+n-1} f(s) ds, \quad t < +\infty. \quad (3.3)$$

- Dérivé gauche de Riemann-Liouville :

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{-\alpha+n-1} f(s) ds, \quad a \leq t < +\infty. \quad (3.4)$$

- Dérivé droit de Riemann-Liouville :

$$D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (s-t)^{-\alpha+n-1} f(s) ds, \quad t \leq b. \quad (3.5)$$

- Dérivé gauche de Caputo :

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha+n-1} \left(\frac{d^n}{ds^n} f(s) \right) ds, \quad a \leq t < +\infty. \quad (3.6)$$

- Dérivé droit de Caputo :

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{-\alpha+n-1} \left(\frac{d^n}{ds^n} f(s) \right) ds, \quad t \leq b. \quad (3.7)$$

- Dérivé gauche de Grünwald-Letnikov :

$${}_t^G D_{a+}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad (3.8)$$

- Dérivé droit de Grünwald-Letnikov :

$${}_t^G D_{b-}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad (3.9)$$

- Dérivé de Weyl :

$${}_t D_{\infty}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_t^{\infty} (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds \right], \quad t < +\infty. \quad (3.10)$$

- Dérivé de Marchaud :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{1+\alpha}} ds, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (3.11)$$

- Dérivé gauche de Marchaud :

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(t) - f(s)}{s^{1+\alpha}} ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.12)$$

- Dérivé droit de Marchaud :

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^{+\infty} \frac{f(s) - f(t)}{s^{1+\alpha}} ds, \quad t < +\infty. \quad (3.13)$$

- Dérivé gauche de Hadamard :

$$D_{h+}^{\alpha} f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(t) - f(s)}{(\ln(t/s))^{1+\alpha}} ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.14)$$

- Dérivé gauche de Chen :

$$D_{c^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_c^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad c < t < +\infty. \quad (3.15)$$

- Dérivé droit de Chen :

$$D_{c^-}^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_c^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad t < c. \quad (3.16)$$

- Dérivé de Davidson-Essex :

$$D_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{n+1-k}}{dt^{n+1-k}} \int_0^t (t-s)^{-\alpha+n-1} \left(\frac{d^k}{ds^k} f(s) \right) ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.17)$$

- Dérivé de Canavati :

$${}_t D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-n+\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{ds^n} f(s) \right) ds, \quad n+1 < \alpha \leq n, \quad a < t < +\infty. \quad (3.18)$$

- Dérivé de Jumarie :

$$D_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{-\alpha+n-1} \left(\frac{d^n}{ds^n} f(s) \right) ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.19)$$

- Dérivé de Riesz :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{-1}{2 \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\begin{array}{c} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha+n-1} f(s) ds \\ + \int_t^{+\infty} (s-t)^{-\alpha+n-1} f(s) ds \end{array} \right], \quad -\infty < t. \quad (3.20)$$

- Dérivé de Cossar :

$$D_{0^+}^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_t^N (s-t)^{-\alpha} f(s) ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.21)$$

- Local fractional dérivative :

$$D_{0^+}^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{f\left(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}\right) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (3.22)$$

- Dérivé Katugampola :

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{f\left(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}\right) - f(t)}{\varepsilon}. \quad (3.23)$$

- Dérivé Osler :

$${}_a D_z^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{D(a,z)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\alpha+1}} ds. \quad (3.24)$$

Nous pouvons voir [13].

Remarque 3.1.1 Pour $0 < \alpha < 1, n = 1$, en général les définitions ci-dessus,

1. Dérivé gauche :

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad -\infty \leq a < t. \quad (3.25)$$

2. Dérivé droit :

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t < b \leq +\infty. \quad (3.26)$$

Et

$$D^{\alpha} (D^{\beta} f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t).$$

Où

1. Dérivé gauche :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad -\infty \leq a < t. \quad (3.27)$$

2. Dérivé droit :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (s-t)^{-\alpha} f(s) ds, \quad t < b \leq +\infty. \quad (3.28)$$

Et

$$D^{\alpha} (D^{\beta} f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t) - \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

3.1.2 Quelques définitions des intégrales fractionnaires

- Intégrale gauche de Riemann-Liouville :

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a \leq t < +\infty. \quad (3.29)$$

- Intégrale droit de Riemann-Liouville :

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \leq b. \quad (3.30)$$

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad 0 < t < +\infty. \quad (3.31)$$

- Intégrale de Weyl :

$${}_t W_{\infty}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \leq b. \quad (3.32)$$

- Intégrale gauche de Chen :

$$I_{c+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > c. \quad (3.33)$$

- Intégrale droit de Chen :

$$I_{c-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^c (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < c. \quad (3.34)$$

- Intégrale Cossar :

$$I_c^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > c. \quad (3.35)$$

- Intégrale gauche de Erdélyi :

$$I_{\sigma,\beta}^{\alpha} f(t) = \frac{\sigma t^{-\sigma(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\sigma(\beta+1)-1} f(s) ds. \quad (3.36)$$

- Intégrale droit de Erdélyi :

$$I_{\sigma,\beta}^{\alpha} f(t) = \frac{\sigma t^{\sigma\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (s^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} s^{\sigma(1-\alpha-\beta)-1} f(s) ds. \quad (3.37)$$

- Intégrale gauche de Kober :

$$I_{1,\beta}^{\alpha} f(t) = \frac{t^{-(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta} f(s) ds. \quad (3.38)$$

- Intégrale droit de Kober :

$$I_{1,\beta}^{\alpha} f(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (s-t)^{\alpha-1} s^{-\alpha-\beta} f(s) ds. \quad (3.39)$$

Nous pouvons voir [13].

Remarque 3.1.2 Pour $0 < \alpha < 1, n = 1$, en général les définitions ci-dessus,

1. Intégrale gauche

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad -\infty \leq a < t.$$

2. Intégrale droit

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < b \leq +\infty.$$

3.1.3 Propriétés Fractionnaire

Toutes les définitions visent à satisfaire les propriétés habituelles de la dérivée standard. La seule propriété héritée par toutes les définitions de la dérivée fractionnaire est la propriété de linéarité. Cependant, voici les inconvénients d'une définition :

- I) La plupart des dérivées fractionnaires ne satisfont pas :

$$D^{\alpha} C = 0.$$

- II) La plupart des dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du produit connue :

$$D^{\alpha} fg = gD^{\alpha} f + fD^{\alpha} g.$$

- III) La plupart des dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du quotient connue :

$$D^{\alpha} f/g = \frac{gD^{\alpha} f - fD^{\alpha} g}{g^2}.$$

IV) La plupart des dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle de la chaîne :

$$D^\alpha f(g(t)) = (g(t))^\alpha f_g^{(\alpha)}(g(t)).$$

V) La plupart des dérivées fractionnaires ne satisfont pas :

$$D^\beta D^\alpha f = D^{\beta+\alpha} f.$$

VI) Généralisation Formule de Leibniz :

$$D_t^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \partial^{\alpha-k} f(t) \partial^k g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \partial^{\alpha-k} g(t) \partial^k f(t).$$

3.2 Quelques-unes des expressions les plus connues de dérivée fractionnaire

Dans cette section on va restreindre à trois approches les plus populaires et les plus praticable qui sont l'approche de Grünwald Letnikov, de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo.

3.2.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répandue.

L'approche de Riemann-Liouville se base sur la définition de l'intégrale fractionnaire comme une à prolongation à de l'intégration d'ordre entier à un ordre réel.

Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville.

On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successives d'une fonction continue, par exemple.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.

- Une primitive de f est donnée par

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

- Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau) d\tau \right) ds.$$

- Le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

- Puis une itération donne

$$(I_a^j f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{j-1}}{(j-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p avec $n - 1 < p < n$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ((I_a^{n-p} f)(t)) \end{aligned}$$

Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de différenciation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, et en générale on a :

$${}^R D_t^p (I^q f)(t) = {}^R D_t^{p-q} f(t).$$

Si $p - q < 0$, on pose

$${}^R D_t^{p-q} f(t) = I_t^{q-p} f(t),$$

et

$$I^q ({}^R D_t^p f(t)) = {}^R D_t^{p-q} f(t) - \sum_{k=0}^j [{}^R D_t^p f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}.$$

On déduit alors que la différenciation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en générale.

Composition avec les dérivées d'ordre entier

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^p f(t)) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t),$$

mais

$${}_a^R D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p+1)}.$$

On déduit alors que la différenciation fractionnaire et la différenciation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 3.2.1 *soit $j-1 < q < j$ et $n-1 < p < n$:*

$${}_a^R D_t^q ({}_a^R D_t^p f(t)) = {}_a^R D_t^{q+p} f(t) - \sum_{k=0}^j \left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)}$$

et

$${}_a^R D_t^p ({}_a^R D_t^q f(t)) = {}_a^R D_t^{q+p} f(t) - \sum_{k=0}^j \left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}$$

par suite deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}_a^R D_t^p$ et ${}_a^R D_t^q$ ne commutent que si $p = q$ et $\left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a}$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n$ et $\left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t) \right]_{t=a}$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, j$.

Transformée de Laplace

Définition 3.2.1 *Soit f une fonction qui posséder la transformée de Laplace $F(s)$.*

Pour $n-1 \leq p < n$ on a :

$$L \left({}_0^R D_t^p f(t) \right) (s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^R D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}.$$

3.2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c-à-d qu'elles contiennent les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $t = a$.

Définition 3.2.2 Soit $n - 1 < p < n$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction, telle que dit $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$, la dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right)_t^R D_a^\alpha (I^\alpha f(t)) \\ &= f(t) I^\alpha ({}^C D_a^\alpha f(t)) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t - a)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Les dérivées au sens de Caputo sont plus familières du point de vue physique car elles conduisent à une valeur nulle pour la dérivée d'une constante. De plus, les conditions initiales d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo s'expriment en termes de dérivée d'ordre entier, tandis que les conditions initiales d'une équation différentielle fractionnaire au sens de Riemann-Liouville s'expriment par des opérateurs fractionnaires qui n'ont pas de sens physique défini, au moins pour le moment.

Transformée de Laplace

Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$, pour $n - 1 \leq p < n$ on a :

$$L \left({}^R D_t^p f(t) \right) (s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}^R D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}$$

$$L \left({}^C D_a^\alpha f(t) \right) = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(a).$$

3.2.3 Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p (si $p > 0$) et l'intégrale répétée p fois (si $p < 0$), d'une fonction f comme ceci :

Soit $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.

Pour une fonction f donnée, d'après la définition classique de la dérivation.

- La dérivée première :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

- La dérivée seconde :

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

Et par récurrence pour n nous obtenons :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh). \quad (3.40)$$

Où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-k)\Gamma(k+1)}.$$

Remarque 3.2.1 La formule (3.40) s'appelle dérivée d'ordre n à gauche, de même en prenant les différences à droite, on obtient une dérivée d'ordre n à droite

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t+kh),$$

en remplaçant n par α , on remarque que

$$(-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-k)\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)},$$

alors

$${}^G D_a^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)} f(t+kh).$$

L'intégrale fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$${}^G I_a^\alpha f(t) = {}^G D_a^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} f(t+kh).$$

On a

1. Pour $\alpha = 1$,

$${}_t^G I_a^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-1}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)\Gamma(k+1)} f(t+kh),$$

en tenant compte de $t+kh = a$ et que f est continue, alors :

$${}_t^G I_a^1 f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t (t-s)^{1-1} f(s) ds.$$

2. Pour $\alpha = 2$,

$${}_t^G I_a^2 f(t) = \int_a^t (t-s)^{2-1} f(s) ds,$$

et par récurrence on peut généraliser les formules (1.13) et (1.14) sous la forme suivante :

$${}_t^G I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

et

$${}_t^G D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Composition avec les dérivées d'ordre entier

$${}_t^G D_a^\alpha ({}_t^G D_a^\beta f(t)) = {}_t^G D_a^\beta ({}_t^G D_a^\alpha f(t)) = {}_t^G D_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

3.3 Relation entre les dérivées pour $\alpha \in]0, 1[$

En résumé, différentes définitions de dérivées et d'intégrales fractionnaires ont été présentées dans ce chapitre.

Lien entre les dérivées fractionnaires

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le cas particulier des dérivées au sens de Riemann-Liouville. Si la fonction est absolument continue et si l'intégrale de sa dérivée existe, les opérations d'intégration et de dérivation peuvent être permutées, on calcule alors l'intégrale fractionnaire de la dérivée de la fonction. On dit alors que la dérivation fractionnaire obtenue ainsi est définie au sens de Caputo. Les deux définitions des dérivées coïncident lorsque $f(a) = 0$.

Remarque 3.3.1 — Si f est de classe C^n et $\alpha \in]0, 1[$, alors en effectuant des intégrations par parties et des différenciations répétées on obtient :

1. ${}_a^R D_t^\alpha f(t) = {}_a^G D_t^\alpha f(t)$.
2. ${}_a^R D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha}$.

— Si $f(a) = 0$, dans ce cas l'approche sont équivalentes.

Elles sont rappelées dans le tableau, toutes les expressions des dérivées sont définies pour un ordre de dérivation appartenant à l'intervalle $\alpha \in]0, 1[$.

D_t^α	C	$(t-a)^\beta, \beta > -1$.	$e^{\lambda t}$
Rimann-Liouville	${}_a^R D_t^\alpha (C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$	${}_a^R D_t^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^\alpha e^{\lambda t}$
Caputo	${}_a^C D_t^\alpha (C) = 0$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$	${}_a^C D_t^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^\alpha e^{\lambda t}$
Grunwald-letnkov	${}_a^G D_t^\alpha (C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}$	${}_a^G D_t^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^\alpha e^{\lambda t}$

Le tableau de dérivées fractionnaire

Remarque 3.3.2 ${}_a^R D_t^\alpha (f(t)) = {}_a^G D_t^\alpha (f(t)) = 0 \Rightarrow f(t) = \sum_{k=1}^{i=n} c_k \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-n+\alpha+1)} (t-a)^{i-n+\alpha}$.

Rimann-Liouville	Caputo	Grunwald-letnkov
${}_a^R D^\alpha ({}_a^R D^\alpha f(t)) = {}_a^R D^{2\alpha} f(t)$	${}_a^C D^\alpha ({}_a^C D^\alpha f(t)) = {}_a^C D^{2\alpha} f(t)$	${}_a^G D^\alpha ({}_a^G D^\alpha f(t)) = {}_a^G D^{2\alpha} f(t)$
${}_a^R D^\alpha ({}_a^R I^\beta f(t)) = f(t)$	${}_a^C D^\alpha ({}_a^C I^\beta f(t)) = f(t)$	${}_a^G D^\alpha ({}_a^G I^\beta f(t)) = f(t)$
${}_a^R I^\alpha ({}_a^R D^\alpha f(t)) = f(t) - f(a)$	${}_a^C I^\alpha ({}_a^C D^\alpha f(t)) = f(t) - f(a)$	${}_a^G I^\alpha ({}_a^G D^\alpha f(t)) = f(t) - f(a)$
${}_a^R I^\alpha ({}_a^R I^\alpha f(t)) = {}_a^R I^{2\alpha} f(t)$	${}_a^C I^\alpha ({}_a^C I^\alpha f(t)) = {}_a^C I^{2\alpha} f(t)$	${}_a^G I^\alpha ({}_a^G I^\alpha f(t)) = {}_a^G I^{2\alpha} f(t)$

Le tableau de composition avec les dérivées fractionnaires $\alpha \in]0, 1[$

3.3.1 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Définition 3.3.1 Soit $f(x)$ une fonction réel de la variable temporelle x intégrable, et p un nombre complexe.

- La transformée de $f(x)$ notée $\mathcal{L}(f(t))$ où $F(s)$ définie par :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

- La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_{\text{Res}-i\infty}^{\text{Res}+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

Avec $\text{Res} > s_0$, s_0 est résidu dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace.

- La transformée de Laplace de la convolution :

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(t-x) g(x) dx\right) = F(s) \cdot G(s).$$

Sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

- La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (R-L) de f est donné par :

$$\mathcal{L}({}_a^R D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - I^{1-\alpha} f(t)_{t=a}.$$

- La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de caputo est donné par :

$$\mathcal{L}({}_a^C D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(a).$$

- La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (G-L) est donnée par :

$$\mathcal{L}({}_a^G D^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s).$$

Chapitre 4

Résolutions d'une équation différentielle fractionnaire

Dans ce chapitre on symbolisons $D_t^\alpha f(t) =_a^C D_t^\alpha f(t) + k \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha}$. Pour généraliser les définitions dans le chapitre précédent, d'après le lemme 3.3.1,

- si $k = 0$ on a

$$D_t^\alpha f(t) =_a^C D_t^\alpha f(t).$$

- si $k = 1$,

$$D_t^\alpha f(t) =_a^C D_t^\alpha f(t) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha} =_a^R D_t^\alpha f(t).$$

4.1 Équation différentielle d'ordre α

Définition 4.1.1 On appelle une équation différentielle linéaire une équation de la forme

$$y^{(\alpha)} + h(t)y = b(t). \quad (4.1)$$

Où $h(t), b(t)$ sont des fonctions continues sur I , et $0 < \alpha \leq 1$.

Méthode de résolution :

On propose que la solution générale de l'équation différentielle linéaire est donnée par $y_g = y_h + y_p$, avec y_h la solution homogène (4.1), et y_p la solution particulière de (4.1).

4.1.1 Équations différentielles homogènes

Définition 4.1.2 Une équation différentielle homogène est une équation de la forme

$$y^{(\alpha)} + h(t)y = 0. \quad (4.2)$$

Où $h(t)$ est continue sur I .

La solution d'équation différentielle homogène

La solution homogène d'équation (4.2) est

$$\begin{aligned} y^{(\alpha)} + h(t)y = 0 &\implies y^{(\alpha)} = -h(t)y \\ &\implies \frac{y^{(\alpha)}}{y} = -h(t) \\ &\implies I^\alpha \frac{y^{(\alpha)}}{y} = I^\alpha (-h(t)) \\ &\implies \ln_\alpha |y| = -I^\alpha h(t) \\ &\implies y(t) = ce_\alpha^{-I^\alpha h(t)}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avec \ln_α est une notation proposée. D'où la solution d'équation différentielle homogène est donnée par

$$y_h(t) = ce_\alpha^{-I^\alpha h(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4.1.2 Équations différentielles particulières

La solution d'équations différentielles particulières (Méthode la variation de la constante)

La méthode consiste à faire varier la constante c de la solution d'équation différentielle homogène $y_h(t) = ce_\alpha^{-I^\alpha h(t)}$, c-à-d la constante c devient la fonction à trouver $c(t)$ avec $y_p(t) = c(t) e_\alpha^{-I^\alpha h(t)}$ on remplaçant dans (4.1). Alors

$$y_p^{(\alpha)} = c^{(\alpha)}(t) e_\alpha^{-I^\alpha h(t)} - c(t)h(t)e_\alpha^{-I^\alpha h(t)},$$

donc

$$c^{(\alpha)}(t) e_\alpha^{-I^\alpha h(t)} = b(t),$$

alors

$$\begin{aligned} c^{(\alpha)}(t) e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} = b(t) &\implies c^{(\alpha)}(t) = e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} b(t) \\ &\implies c(t) = I^{\alpha} e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} b(t). \end{aligned}$$

On retrouve $c(t)$ et

$$y_p(t) = e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} I^{\alpha} e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} b(t).$$

La solution générale de l'équation (4.1) est

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} + e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} I^{\alpha} e_{\alpha}^{-I^{\alpha}h(t)} b(t), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le cas particulière de l'équation (4.1) pour $h(t) = 0$, est

$$y^{(\alpha)}(t) = b(t). \quad (4.3)$$

4.1.3 Cas particuliers

Soit l'équation différentielle fractionnaire

$$D_t^{\alpha} u(t) - h(t) u(t) = g(t). \quad (4.4)$$

Nous proposons maintenant quelques techniques pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire.

I) $h(t)$ est une fonction continues :

A) Si on peut écrire $h(t)$ sous la forme

$$-h(t) = \frac{D_t^{\alpha} \theta(t)}{\theta(t)}, \quad (\theta(t) \neq 0). \quad (4.5)$$

Proposition 4.1.1 *La solution générale de l'équation différentielle fractionnaire homogène (4.4) est*

$$u(t) = \frac{c + I_t^{\alpha} (\theta(t) g(t))}{\theta(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Preuve

On a la forme homogène de l'équation (4.4), est

$$D_t^{\alpha} u(t) - h(t) u(t) = 0.$$

D'après l'équation (4.5), on a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u_h(t) + \frac{D_t^\alpha \theta(t)}{\theta(t)} u_h(t) &= 0 \\ \frac{\theta(t) D_t^\alpha u_h(t) + D_t^\alpha \theta(t)}{\theta(t)} &= 0, \end{aligned}$$

on a

$$D_t^\alpha [\theta(t) u_h(t)] = 0.$$

Donc

$$u_h(t) = \frac{c}{\theta(t)}. \quad (4.6)$$

Et la solution particulière,

$$\theta(t) D_t^\alpha u_p(t) + D_t^\alpha \theta(t) u_p(t) = \theta(t) g(t),$$

donc

$$D_t^\alpha [\theta(t) u_p(t)] = \theta(t) g(t).$$

Nous avons

$$u_p(t) = \frac{I_t^\alpha (\theta(t) g(t))}{\theta(t)}. \quad (4.7)$$

Ou, en utilisant la valeur d'une constante

$$c(t) = I_t^\alpha (\theta(t) g(t)),$$

D'après l'équation (4.6) et (4.7), alors

$$u(t) = \frac{c + I_t^\alpha (\theta(t) g(t))}{\theta(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

B) Si on peut écrire $h(t)$ sous la forme

$$h(t) = \frac{D_t^\alpha \theta(t)}{\theta(t)}, \quad (\theta(t) \neq 0). \quad (4.8)$$

Proposition 4.1.2 *La solution générale de l'équation différentielle fractionnaire homogène (4.4) est*

$$u(t) = \theta(t) (c + I_t^\alpha (\theta(t) g(t))), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Preuve

D'après la forme homogène de l'équation (4.4) et d'après l'équation (4.8), on a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u_h(t) - \frac{D_t^\alpha \theta(t)}{\theta(t)} u_h(t) &= 0 \\ \frac{\theta(t) D_t^\alpha u_h(t) - D_t^\alpha \theta(t)}{\theta^2(t)} u_h(t) &= 0, \end{aligned}$$

on a

$$D_t^\alpha \left[\frac{u_h(t)}{\theta(t)} \right] = 0.$$

Donc

$$u_h(t) = c\theta(t). \quad (4.9)$$

Et la solution particulière,

$$\theta(t) D_t^\alpha u_p(t) - D_t^\alpha \theta(t) u_p(t) = \theta(t) g(t)$$

$$\frac{\theta(t) D_t^\alpha u_p(t) - D_t^\alpha \theta(t) u_p(t)}{\theta^2(t)} = \frac{g(t)}{\theta(t)},$$

donc

$$D_t^\alpha \left[\frac{u_p(t)}{\theta(t)} \right] = \frac{g(t)}{\theta(t)}.$$

On a

$$u_p(t) = \theta(t) I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{\theta(t)} \right).$$

Ou, en utilisant la valeur d'une constante

$$u_p(t) = c(t) \theta(t),$$

nous avons

$$D_t^\alpha u_p(t) - h(t)u_p(t) = u_h(t)D_t^\alpha c(t) + c(t) D_t^\alpha u_h(t) - h(t)c(t) u_h(t) = g(t),$$

donc

$$u_h(t)D_t^\alpha c(t) = g(t),$$

On obtient

$$c(t) = I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{\theta(t)} \right),$$

sortie

$$u_p(t) = \theta(t) I_t^\alpha (\theta(t) g(t)). \quad (4.10)$$

D'après l'équation (4.9) et (4.10), alors

$$u(t) = \theta(t) (c + I_t^\alpha (\theta(t) g(t))).$$

Exemple 4.1.1 Soit l'équation différentielles fractionnaire

$$D_t^{\frac{1}{6}} y(t) - \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{-\frac{1}{6}} y(t) = 0.$$

Solution de l'exemple : On a

$$D_t^\beta t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\beta+1)} t^{n-\beta}$$

$$\frac{D_t^{\frac{1}{6}} t}{t} = \frac{\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{1-\frac{1}{6}}}{t} = \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{-\frac{1}{6}} = \frac{D_t^{\frac{1}{6}} y(t)}{y(t)}.$$

Alors

$$y_h(t) = c_1 t.$$

La solution particulière (par la variation de constante)

$$\left(D_t^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\Gamma(\frac{10}{6})} t^{-\frac{1}{6}} \right) y_p(t) = \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{10}{6})} - \frac{1}{\Gamma^2(\frac{11}{6})} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{6})} \right) t^{\frac{4}{6}}$$

$$= A t^{\frac{4}{6}}.$$

Alors

$$y_p(t) = c_1(t) t.$$

Donc la solution de l'équation est

$$c_1(t) = D_t^{-\frac{1}{6}} A t^{\frac{-2}{6}}$$

$$= A \frac{\Gamma(\frac{4}{6})}{\Gamma(\frac{5}{6})} t^{\frac{-1}{6}}.$$

Alors

$$y_p(t) = A \frac{\Gamma(\frac{4}{6})}{\Gamma(\frac{5}{6})} t^{\frac{5}{6}},$$

donc

$$y(t) = c_1(t) t + A \frac{\Gamma(\frac{4}{6})}{\Gamma(\frac{5}{6})} t^{\frac{5}{6}}.$$

II) $h(t) = \lambda$ est constante :

A) Utilisation de la transformée de Laplace.

Proposition 4.1.3 *L'équation différentielle fractionnaire $D_t^\alpha u(t) - \lambda u(t) = g(t)$ En utilisant la transformée de Laplace $F(s)$ est obtenu $u(t) = L^{-1} \left(\frac{G(s)}{s^\alpha - \lambda} \right)$. Avec $G(s) = L(g(t))$ et $F(s) = L(u(t))$.*

Preuve

Nous avons

$$L(D_t^\alpha u(t) - \lambda u(t)) = L(D_t^\alpha u(t)) - \lambda L(u(t)) = L(g(t)),$$

alors

$$s^\alpha F(s) - \lambda F(s) = G(s),$$

on a

$$F(s) = \frac{G(s)}{s^\alpha - \lambda}.$$

Donc

$$u(t) = L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s^\alpha - \lambda}\right).$$

Exemple 4.1.2 Trouver l'équation en utilisant la transformée de laplace.

l'équation $g(t) = 1 + t$,

on a

$$G(s) = L(1 + t) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s - 1}{s^2},$$

nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= L^{-1}\left(\frac{s - 1}{s^2(s^\alpha + \lambda)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^\alpha + \lambda)}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s^\alpha + \lambda)}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda} L^{-1}\left(\frac{\lambda}{s(s^\alpha + \lambda)}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s^\alpha + \lambda)}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(1 - E_\alpha(-at^\alpha)) - t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha). \end{aligned}$$

B) Utilisation de la fonction Mittag-leffler.

Proposition 4.1.4 l'équation différentielle fractionnaire $D_t^\alpha u(t) - \lambda u(t) = 0$ à une solution sous la forme

$$u(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha),$$

où E_α est la fonction Mittag-leffler.

preuve.

Soit $u(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$, on a

$$D_t^\alpha u(t) = D_t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda u(t).$$

Et la solution particulière, en utilisant la valeur d'une constante

$$u_p(t) = c(t) E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Nous avons

$$D_t^\alpha u_p(t) - h(t)u_p(t) = u_H(t)D_t^\alpha c(t) + c(t) D_t^\alpha u_H(t) - h(t)c(t) u_H(t) = g(t).$$

Donc

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha)D_t^\alpha c(t) = g(t),$$

donner

$$c(t) = I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{E_\alpha(\lambda t^\alpha)} \right),$$

obtient

$$u_p(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{E_\alpha(\lambda t^\alpha)} \right).$$

On a résultat

$$u(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) \left(c + I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{E_\alpha(\lambda t^\alpha)} \right) \right).$$

C) Utiliser la forme exponentielle.

Proposition 4.1.5 *L'équation différentielle fractionnaire $D_t^\alpha u(t) - \lambda u(t) = 0$, a-t-il une solution sous la forme*

$$u(t) = ce^{\lambda \frac{1}{\alpha} t}.$$

Preuve :

Soit $u(t) = ce^{\lambda \frac{1}{\alpha} t}$, on a

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(t) &= D_t^\alpha ce^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} = cD_t^\alpha e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} + e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} D_t^\alpha c \\ &= c(\lambda \frac{1}{\alpha})^\alpha e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} + e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} D_t^\alpha c = c\lambda e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} \\ &= \lambda u(t). \end{aligned}$$

Et la solution particulière, en utilisant la valeur d'une constante

$$u_p(t) = c(t) e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t}.$$

Nous avons

$$D_t^\alpha u_p(t) - h(t)u_p(t) = u_H(t)D_t^\alpha c(t) + c(t)D_t^\alpha u_H(t) - h(t)c(t)u_H(t) = g(t).$$

Donc

$$e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} D_t^\alpha c(t) = g(t),$$

donne

$$c(t) = I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t}} \right),$$

obtient

$$u_p(t) = e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t}} \right).$$

On a résultat

$$u(t) = e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t} \left(c + I_t^\alpha \left(\frac{g(t)}{e^{\lambda \frac{1}{\alpha} t}} \right) \right).$$

Exemple 4.1.3 Soit l'équation différentielles fractionnaire

$$D_t^{\frac{1}{4}} y(t) - (1 + i) y(t) = \sqrt{2}.$$

Solution de l'exemple : On a

$$D_t^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^\alpha e^{\lambda t}.$$

Donc

$$\frac{D_t^{\frac{1}{4}} e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} = \lambda^{\frac{1}{4}} = (1 + i),$$

on obtient

$$\lambda = \lambda_1^4 = -4,$$

et

$$D_t^{\frac{1}{4}} c_1(t) = \sqrt{2} e^{4t} = D_t^{\frac{1}{4}} e^{4t}.$$

Donc la solution de l'équation est

$$y(t) = ce^{-4t} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4.2 Équations différentielles fractionnaires linéaires ordinaire d'ordre α

On s'intéresse à l'existence et à l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre $m = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ et $[m] = j$.

Définition 4.2.1 Une équation différentielle d'ordre α si elle s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} g_i(t) y^{(\alpha_i)}(t) = g(t). \quad (4.11)$$

où $\alpha = \max\{\alpha_i\}_{i=1,n}$, et $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $g_n(t) \neq 0$, $g_i(t)$ sont appelées les coefficients lesquels peuvent être variables ou constants, $y^{(\alpha_i)}$ sont les dérivées de la fonction inconnue y par rapport à t et $g(t)$ est la fonction second membre.

Remarque 4.2.1 Pour la fonction second membre $g(t) = 0$, on appelle équation homogène.

Exemple 4.2.1 Soit $y^{(\frac{3}{2})}(t) + 3y^{(\frac{2}{3})}(t) - ty^{(\frac{1}{6})}(t) = \ln(1+t)$ est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre $\frac{3}{2}$ à coefficients constants avec second membre.

Le problème de Cauchy est constituée de (3.1) et de la condition initiale est

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} g_i(t) y^{(\alpha_i)}(t) = g(t) \\ y^{(\alpha_i)}(t_0) = y_0^{(\alpha_i)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.12)$$

4.2.1 Existence

Avant de commencer à prouver l'existence et à résoudre de (4.12). Nous allons d'abord réduire une équation différentielle ordinaire d'ordre α (EDF) à un système différentiel d'ordre β (SDF).

Soit $\alpha_i = \frac{\theta_i}{\beta_i}$, $\beta = \frac{1}{\text{pcgd}\{\beta_i\}}$, $\theta_i, \beta_i \in \mathbb{N}^*$, alors $\alpha_i = m_i \beta$, $m_i \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = m\beta$, où, On pose l'équation différentielle d'ordre α (4.11) écrite sous la forme normale

$$y^{(\alpha)}(t) = \sum_{i=1}^{i=n-1} f_i(t) y^{(\alpha_i)}(t) + f(t). \quad (4.13)$$

avec f est une application de $I \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ et $\alpha_i = \frac{\theta_i}{\beta_i}$. On pose

$$y^{(\beta)}(t) = z(t), \quad (4.14)$$

alors

$$y^{(\alpha_i)}(t) = z^{(m_i)}(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Donc l'équation différentielle d'ordre α (4.13), s'écrite sous la forme

$$z^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{i=n-1} f_i(t) z^{(m_i)}(t) + f(t). \quad (4.15)$$

En introduisant le changement de fonctions auxiliaires z_1, z_2, \dots, z_n de telle sorte que

$$z_m(t) = z^{(m-1)}(t), \quad m = 1, \dots, n. \quad (4.16)$$

En dérivant le système (4.16), nous obtenons

$$z'_m(t) = z_{m+1}(t), \quad m = 1, \dots, n.$$

Ce dernier système représente un système d'EDO d'ordre 1 sous la forme matricielle

$$Z'(t) = A(t) Z(t) + F(t) \quad (4.17)$$

où

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \\ \vdots \\ z'_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Théorème 4.2.1 *Si $A : I \rightarrow M(\mathbb{R})$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ sont continues, autrement dit $f_i(t)$ est continue pour tous $i = 1, \dots, n-1$ et $f(t)$ est continue, alors pour tout $t \in I$, le problème (4.17) admet une solution.*

Remarque 4.2.2 *Le théorème précédent est une adaptation du théorème (C-L) du chapitre précédent. Ainsi, le problème équivalent de Cauchy est constitué de (4.17), avec la condition initiale est*

$$\begin{cases} Z'(t) = A(t) Z(t) + F(t) \\ z^{(m_i)}(t_0) = z_0^{(m_i)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.18)$$

4.2.2 Solutions de système

On remarque que la matrice $A(t)$ est diagonale est nous cherchons $B(t)$ le diagonale de $A(t)$. Avec

$$B(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & h_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Alors le système s'écrire de la forme équivalente

$$Z'(t) - B(t)Z(t) = F(t).$$

On obtient le nouveau système non homogène suivant

$$\begin{cases} z'_1(t) - h_1(t)z_1(t) = 0, \\ z'_2(t) - h_2(t)z_2(t) = 0 \\ \vdots \\ z'_n(t) - h_{n-1}(t)z_n(t) = f(t). \end{cases}$$

systemes homogènes

Le système (4.12) est dit homogène si $F \equiv 0$, c-à-d

$$Z'_H(t) - B(t)Z_H(t) = 0,$$

avec $Z_H(t) = (c_i z_{h,i}(t) = c_i e^{i \int h_i(t) dt}, i = 1, n-1)$.

Alors toute solution Z_H de (4.17) est de la forme

$$z_h(t) = \sum_{i=1}^{i=n-2} c_i e^{\int h_i(t) dt} = \sum_{i=1}^{i=n-2} c_i z_{h,i}(t).$$

On va chercher le système suivant sous

$$\begin{cases} z'_1(t) - h_1(t)z_1(t) = z_{p,2}(t), \\ z'_2(t) - h_2(t)z_2(t) = z_{p,3}(t) \\ \vdots \\ z'_n(t) - h_{n-1}(t)z_n(t) = f(t). \end{cases}$$

Avec

$$Z'_p(t) = B(t)Z_p(t) + F^p(t).$$

par la méthode de variation de la constante, un $z_p(t)$ pour chaque équation précédente

$$\begin{cases} z'_n(t) - h_n(t) z_n(t) = f(t) \\ z'_i(t) - h_i(t) z_i(t) = z_{p,i+1}(t), \end{cases}$$

ou

$$z_p(t) = z_{p,1}(t).$$

On obtient

$$z(t) = \sum_{i=1}^{i=n-2} c_i e^{\int h_i(t) dt} + z_{p,1}(t) = \sum_{i=1}^{i=n-2} c_i z_{h,i}(t) + z_{p,1}(t).$$

Exemple 4.2.2 soit l'équation différentielle

$$y^{(n)} - 5y^{(n)} + 6y = 2e^t. \quad (4.19)$$

Solution de l'exemple :

Nous pouvons écrire

$$D_t^2 y - 5D_t y + 6y = (D_t - 3)(D_t - 2)y = 2e^t.$$

Donc la solution de l'équation (4.19) est

1. La solution homogène de l'équation (4.19) est

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

2. La solution particulière (par la variation de constante). On a

$$(D_t - 2)y_1 = 2e^t,$$

alors

$$y_1 = y_{1,h} + y_{1,p} = c_1 e^{2t} - e^t.$$

Et, on a

$$(D_t - 3)y_2 = y_{1,p} = -e^t,$$

alors

$$y_2 = c_2 e^{3t} + 2e^t.$$

Donc la solution de l'équation (4.19) est

$$y(t) = c_2 e^{3t} + c_1 e^{2t} + e^t.$$

Exemple 4.2.3 Soit l'équation différentielle

$$y^{(n)} - y^{(n)} + y = e^t. \quad (4.20)$$

Solution de l'exemple :

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} D_t^2 y - D_t y + y &= (D_t - \lambda_1)(D_t - \lambda_2)y \\ &= (D_t - \lambda_2)(D_t - \lambda_1)y \\ &= e^t. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= 3, \\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

La solution de l'équation (4.20) est

1. La solution homogène de l'équation (4.20) est

$$y_h = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. La solution particulière (par la variation de constante). On a

$$(D_t - \lambda_1)y_1 = e^t,$$

alors

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{1 - \lambda_1} e^t.$$

Et, on a

$$(D_t - \lambda_2)y_0 = \frac{1}{1 - \lambda_1} e^t,$$

alors

$$\begin{aligned} y_0(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} e^t \\ &= c_2 e^{\lambda_2 t} + e^t. \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (4.20) est

$$y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} + c_1 e^{\lambda_1 t} + e^t.$$

Exemple 4.2.4 Soit l'équation différentielle

$$y^{(n)} - 4ty^{(l)} + (4t^2 + 2)y = (4t^2 - 4t + 3)e^t. \quad (4.21)$$

Solution de l'exemple :

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (D_t - \lambda_1(t))(D_t - \lambda_2(t))y &= D_t^2 y - (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))D_t y + (\lambda_1(t)\lambda_2(t) - D_t \lambda_2(t))y \\ &= D_t^2 y - 4tD_t y + (4t^2 + 4)y. \end{aligned}$$

On a

$$\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t) = \bar{\lambda}_2(t).$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda_1(t) + \lambda_2(t) = 2\alpha(t) = 4t, \\ \lambda_1(t)\lambda_2(t) - D_t \lambda_2(t) = 4t^2 + 4, \\ \lambda_1(t) = 2t + 2i = \bar{\lambda}_2(t). \end{cases}$$

La solution de l'équation (4.21) est

1. La solution homogène de l'équation (4.21) est

$$y_h = c_1 e^{t^2 - 2ti} + c_2 e^{t^2 + 2ti}.$$

2. La solution particulière (par la variation de constante). On a

$$(D_t - \lambda_1)y_1 = e^t,$$

alors

$$y_1 = c_1 e^{t^2 + 2ti} + (1 - \lambda_2)e^t.$$

Et, on a

$$(D_t - \lambda_2)y_2 = (1 - \lambda_2)e^t,$$

alors

$$y_2(t) = c_2 e^{t^2 - 2ti} + e^t.$$

Donc la solution de l'équation (4.21) est

$$y(t) = c_2 e^{t^2 + 2ti} + c_1 e^{t^2 - 2ti} + e^t.$$

Exemple 4.2.5 Soit l'équation différentielle

$$y^{(m)} - (4t + 1)y^{(n)} + (4t^2 + 4t - 2)y^{(r)} - (4t^2 - 8t + 2)y = (8t - 4)e^t. \quad (4.22)$$

On pose

$$\lambda_1, \lambda_2(t) = \alpha(t) + i\beta(t) = \bar{\lambda}_3(t).$$

Solution de l'exemple :

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & (D_t - \lambda_1)(D_t - \lambda_2)(D_t - \lambda_3)y \\ = & D_t^3 y - (\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t)) D_t^2 y + \begin{pmatrix} D_t(\lambda_2(t) + \lambda_3(t)) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) \\ -D_t\lambda_3(t) + \lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t) \end{pmatrix} D_t y \\ & + (D_t(\lambda_2(t)\lambda_3(t) - D_t\lambda_3(t)) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) - D_t\lambda_3(t))y \\ = & D_t^3 y - (4t + 1) D_t^2 y + (4t^2 + 4t - 2) D_t y - (4t^2 - 8t + 2)y. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 4t + 1 &= \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = \lambda_1(t) + 2\alpha(t), \\ 4t^2 + 2 &= \lambda_2(t)\lambda_3(t) - D_t\lambda_2(t) \\ 4t^2 - 8t + 2 &= (D_t(\lambda_2(t)\lambda_3(t) - D_t\lambda_3(t)) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) - D_t\lambda_3(t)), \\ \lambda_2(t) &= 2t + 2i = \bar{\lambda}_3(t), \quad \lambda_1(t) = 1. \end{aligned}$$

La solution de l'équation (4.22) est

1. La solution homogène de l'équation (4.22) est

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{t^2+2ti} + c_3 e^{t^2-2ti}.$$

2. La solution particulière (par la variation de constante). On a

$$(D_t - \lambda_1(t))y_1 = (8t - 4)e^t,$$

alors

$$y_1 = c_1 e^t + (4t^2 - 4t + 5)e^t.$$

Et, on a

$$(D_t - \lambda_2)y_2 = (4t^2 - 4t + 5)e^t,$$

alors

$$y_2(t) = c_2 e^{t^2+2ti} + (1 - \lambda_3) e^t.$$

Et, on a

$$(D_t - \lambda_3)y_3 = (1 - \lambda_3) e^t,$$

alors

$$y_3(t) = c_3 e^{t^2-2ti} + (1 - \lambda_2) e^t.$$

Donc la solution de l'équation (4.22) est

$$y(t) = c_2 e^{t^2+2ti} + c_3 e^{t^2-2ti} + c_1 e^t + e^t.$$

D'après l'équation (4.14) on a le système s'écrire de la forme équivalente

$$Y^{(\beta)}(t) - B(t)Y(t) = F(t).$$

On obtient, le nouveau système non homogène suivant :

$$\begin{cases} y_1^{(\beta)}(t) - h_1^{(\beta)}(t)y_1(t) = 0, \\ y_2^{(\beta)}(t) - h_2^{(\beta)}(t)y_2(t) = 0 \\ \vdots \\ y_n^{(\beta)}(t) - h_n^{(\beta)}(t)y_n(t) = f(t). \end{cases}$$

Le système (4.12) est dit homogène si $F \equiv 0$, c-à-d d'après l'équation (4.14) on a

$$y(t) = I^{(\beta)}z(t) = \sum_{i=1}^{i=n-2} I^{(\beta)}c_i z_{h,i}(t) + I^{(\beta)}z_{p,1}(t).$$

Exemple 4.2.6 Soit l'équation différentielle fractionnaire, avec $D_t^\alpha C = 0$ et $D_t^\alpha D_t^\alpha = D_t^{2\alpha}$. On a

$$y^{(\frac{1}{3})} - 2y^{(\frac{1}{6})} + y = e^t \left(t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{1}{6}} \right). \quad (4.23)$$

Solution de l'exemple :

Nous pouvons écrire

$$\left(D_t^{\frac{1}{3}} - 2D_t^{\frac{1}{6}} + 1 \right) y = (D_t^{\frac{1}{6}} - 1)^2 y.$$

La solution de l'équation (4.23) est

1- La solution homogène de l'équation (4.23) est

$$y_h = e^t(c_1 + tc_2).$$

2- La solution particulière (par la variation de constante). On a

$$(D_t^{\frac{1}{6}} - 1)y_1 = e^t \left(t^{\frac{1}{3}} - 2 t^{\frac{1}{6}} \right),$$

alors

$$y_1(t) = e^t \left(c_1 + t^{\frac{1}{6}} - 2 \right).$$

Et, on a

$$(D_t^{\frac{1}{6}} - 1)y_2 = e^t \left(t^{\frac{1}{6}} - 2 \right),$$

alors

$$y_2(t) = e^t \left(tc_2 + t + \frac{-2}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} t^{\frac{1}{6}} \right).$$

Donc la solution de l'équation (4.23) est

$$y(t) = e^t \left(c_1 + tc_2 + t + \frac{-2}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} t^{\frac{1}{6}} \right).$$

Exemple 4.2.7 Soit l'équation différentielle fractionnaire, avec

$D_t^\alpha C = 0$ et $D_t^\alpha D_t^\alpha = D_t^{2\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} & y^{(\frac{1}{3})}(t) - t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) y^{(\frac{1}{6})}(t) + t^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) y(t) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} \right) t^{\frac{5}{6}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Solution de l'exemple :

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \left[D_t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) D_t^{\frac{1}{6}} + t^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) \right] y(t) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} \right) t^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

est clair $\beta = \frac{1}{6}$, $m_k = 2$. Alors

$$\begin{aligned} & \left[D_t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) D_t^{\frac{1}{6}} + t^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma(\frac{7}{6})}{\Gamma(\frac{11}{6})} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{6})} \right) \right] y(t) \\ &= \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{-\frac{1}{6}} \right) \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}} \right) y(t) = \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} - \frac{\Gamma(\frac{11}{6})}{\Gamma(\frac{10}{6})} \right) t^{\frac{5}{6}}. \end{aligned}$$

Soit $\lambda_i(t), i = 1, 2$.

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{-\frac{1}{6}}, \lambda_2(t) = \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}}.$$

La solution de l'équation (4.24) est

1. La solution homogène de l'équation (4.24) est

$$\begin{aligned} \frac{D_t^{\frac{1}{6}} y_{1,h}(t)}{y_{1,h}(t)} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{11}{6})} t^{1-\frac{1}{6}}}{t} = \frac{D_t^{\frac{1}{6}} t}{t} \\ y_{1,h}(t) &= c_1 t. \end{aligned}$$

2. La solution particulière (par la variation de constante)

$$\begin{aligned} \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\Gamma(\frac{10}{6})} t^{-\frac{1}{6}} \right) y_{1,p}(t) &= \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{10}{6})} - \frac{1}{\Gamma^2(\frac{11}{6})} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{6})} \right) t^{\frac{4}{6}} \\ &= A t^{\frac{4}{6}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1,p}(t) &= c_1(t) t \\ c_1(t) &= D_t^{-\frac{1}{6}} A t^{\frac{-2}{6}} = A \frac{\Gamma(\frac{4}{6})}{\Gamma(\frac{5}{6})} t^{-\frac{1}{6}}, \end{aligned}$$

alors

$$y_{1,p}(t) = A \frac{\Gamma(\frac{10}{6})}{\Gamma(\frac{11}{6}) - 1} t^{\frac{5}{6}},$$

est

$$y_1(t) = c_1 t + A \frac{\Gamma(\frac{10}{6})}{\Gamma(\frac{11}{6}) - 1} t^{\frac{5}{6}}.$$

$$\begin{aligned}
 \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{-\frac{1}{6}} \right) y_{1,p}(t) &= \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{-\frac{1}{6}} \right) \left(c_1 t + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} t^{\frac{5}{6}} \right) \\
 &= D_t^{\frac{1}{6}} \left(c_1 t + A \frac{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} t^{\frac{5}{6}} \right) - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{-\frac{1}{6}} \left(c_1 t + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} t^{\frac{5}{6}} \right) \\
 &= c_1 \left(D_t^{\frac{1}{6}} t - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{\frac{5}{6}} \right) + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} \left(D_t^{\frac{1}{6}} t^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{\frac{4}{6}} \right) \\
 &= c_1 \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{\frac{5}{6}} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{\frac{5}{6}} \right) \\
 &\quad + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{\frac{4}{6}} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} t^{\frac{4}{6}} \right) \\
 &= A \left(\frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} \right) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1}{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)} \right) t^{\frac{4}{6}} \\
 &= A t^{\frac{4}{6}}.
 \end{aligned}$$

Et

$$\left(D_t^{\frac{1}{6}} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}} \right) y_2(t) = A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} t^{\frac{5}{6}}.$$

La solution particulière est

$$\left(D_t^{\frac{1}{6}} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}} \right) y_2(t) = A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} t^{\frac{5}{6}} = y_{2,p_1}(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
 D_t^{\frac{1}{6}} \left(\frac{y_{2,h}(t)}{t^{\frac{1}{6}}} \right) &= 0 \\
 y_{2,h}(t) &= c_2 t^{\frac{1}{6}}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 y_{2,p}(t) &= c_2(t) t^{\frac{1}{6}} \\
 c_2(t) &= D_t^{-\frac{1}{6}} \left(t^{-\frac{1}{6}} \left(A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} t^{\frac{5}{6}} \right) \right) \\
 &= D_t^{-\frac{1}{6}} \left(A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1} t^{\frac{4}{6}} \right) \\
 &= A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right)} t^{\frac{5}{6}}, \\
 y_2(t) &= c_2 t^{\frac{1}{6}} + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right)} t,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}} \right) y_{2,p}(t) &= \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}} \right) \left(c_2 t^{\frac{1}{6}} + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right) \left(1 - \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\right)} t \right) \\
 &= c_2 \left(D_t^{\frac{1}{6}} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{-\frac{1}{6}} \right) t \\
 &\quad + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right) \left(1 - \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\right)} \left(D_t^{\frac{1}{6}} t - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) t^{\frac{5}{6}} \right) \\
 &= c_2 \left(\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) \\
 &\quad + A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right) \left(1 - \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\right)} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) t^{\frac{5}{6}} \\
 &= A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right) \left(1 - \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\right)} \frac{1 - \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} t^{\frac{5}{6}} \\
 &= A \frac{\Gamma\left(\frac{10}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) - 1\right)} t^{\frac{5}{6}}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$y(t) = c_2 t^{\frac{1}{6}} + c_1 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} t^{\frac{7}{6}} + t.$$

Vérifier que la solution générale satisfait l'équation différentielle fractionnaire (4.24)

$$\begin{aligned}
 \left(D_t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) D_t^{\frac{1}{6}} + t^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) \right) y(t) &= A t^{\frac{4}{6}} \\
 c_2 \left(D_t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) D_t^{\frac{1}{6}} + t^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) \right) t^{\frac{1}{6}} \\
 &= c_2 \left(D_t^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{6}} - t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) D_t^{\frac{1}{6}} t^{\frac{1}{6}} + t^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) \right) t^{\frac{1}{6}} \\
 &= c_2 \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} - \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} + \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) + \left(\frac{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) \right) t^{-\frac{1}{6}} \\
 &= c_2 \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) - \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{6}\right)} \right) t^{-\frac{1}{6}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\left(D_t^{\frac{1}{3}} - t \right)$$

alors

$$y_0(t) = c_2 e^{-4t} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc la solution de l'équation (4.26) est

$$y(t) = c e^{-4t} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Conclusion

Dans ce mémoire , étudié les équations différentielles fractionnaires (EDF) via les dérivées fractionnaires. nous avons utilisé des théories techniques et des méthodes traditionnelles, pour l'existence certaines solutions analytiques de cette équation. utilisé les propriétés des équations différentielles fractionnaires générales dans les équations différentielles ordinaires (EDO), ce travail est soutenu par quelques exemples.

Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, San Diego, 2006.
- [2] A. M. Mathai and H. J. Haubold, Special Functions for Applied Scientists, Springer, New York, NY, USA, 2008.
- [3] D. Valerio and J. S. da Costa, An Introduction to Fractional Control, IET, Stevenage, UK, 2012.
- [4] E. C. de Oliveira and J. A. T. Machado, A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2014, 6 pages.
- [5] F. Wang, Z. Liu, P. Wang, Analysis of a System for Linear Fractional Differential Equations, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics, Volume 2012, 21 pages.
- [6] G. Jumarie Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann Liouville derivative for non-differentiable functions, Applied Mathematics Letters 22 (2009), 378-385.
- [7] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, An Introduction To Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, To Methods Of Their Solution And Some Of Their Applications, Technical University Of Kosice, Slovak Republic, Academic Press San Diego, Boston, New York, London, Sydney, Tokyo, Toronto.
- [8] M. Amirian Matlob, Y. Jamali. The Concepts and Applications of Fractional Order Differential Calculus in Modelling of Viscoelastic Systems : A primer.
- [9] M. D. Ortigueira and J.A.T. Machado, What is a fractional derivative? Journal of Computational Physics 293 (1), 4–13 (2015).
- [10] M. Saadaoui, The Local Fractional Derivative for Numerical Methods Applied for Finite difference and Interpolation Formula, International Journal of Mathematics & Computation, Volume 30, Issue 1 (2019).

- [11] Saeed, Kazem. Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform. *International Journal of Nonlinear Science*, Vol.16, No.1,pp.3-11(2013).
- [12] U. Ghosh, S. Sengupta, S. Sarkar and S. Das. Analytic solution of linear fractional differential equation with Jumarie derivative in term of Mittag-Leffler function. *American Journal of Mathematical Analysis* 3(2). 2015. 32-38, 2015.
- [13] Yang. X.-J. "a short note on local fractional calculus of function of one variable", "JALISi" 1(1) : 1-13 (2012).