الـــجمهـــورية الجـــــــــزائرية الديمـــــــــقراطـــية الشـــــــعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة عمار ثليجي – الأغواط -
كليـة التكنولوجيا
قسم العلوم التقنية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Telidji – Laghouat
Faculté de Technologie
Département des sciences techniques

دروس

المقياس : رياضيات2

السداسي الثاني

مستوى السنة الأولى

جذع مشترك علوم و تقنيات

إعداد الأستاذ : سليم ساف

جامعة عمار ثليجي بالأغواط s.saf@lagh-univ.dz

السنة الجامعية: 2023-2022

الفهرس العام

مقدمة.....ص04

الفصل الأول: المصفوقات و المحددات ص05

1-1. المصفوفات (تعريفات و عمليات) ص06

2-1. المصفوفات و التطبيقات الخطية.....ص18

1-2-1. المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي.....ص18

2-2-1. التطبيق الخطي المرافق بمصفوفة.....ص20

3-1. مصفوفة العبور ص26

4-1. رتبة مصفوفة.....ص30

5-1. المحددات.....ص34

1-5-1. تطبيقات لحساب المحددات.....ص39

الفصل الثاني: حل جمل المعادلات الخطية.....ص43

1-2. مفاهيم عامة ص44

2-2. دراسة مجموعة الحلول.....ص45

3-2. طرق حل جمل المعادلات الخطية ص46

1-3-2. حل جمل معادلات خطية ذات n معادلة و n مجهول ص46

1-1-3-2. طريقة كرامر ص46

2-1-3-2. طريقة مقلوب مصفوفة.....ص46

3-1-3-2. طريقة غوص.....ص49

2-3-2. حل جمل معادلات خطية ذات n معادلة و m مجهول.....ص50

1-2-3-2. طريقة تحويل الجملة لكرامر.....ص51

2-3-2-2. طريقة تحويل غوص.....ص59

الفصل الثالث: التكاملات.....ص63

1-3. قابلية التكامل بمفهوم ريمان ص64

2-3. التكامل الغير محدود ض67

3-3. التكامل المحدود ص68

4-3. طرق حساب التكامل.....ص69

5-3. تكامل الدوال الناطقة.....ص71

6-3. تكامل الدوال المثلثية و الأسية.....ص79

الفصل الرابع: المعادلات التفاضلية.....ص86

1-4. المعادلات التفاضلية العادية ص87

2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى.....ص87

1-2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة.....ص87

2-2-4. المعادلات التفاضلية المتجانسة من المرتبة الأولى.....ص89

3-2-4. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى ص90

4-2-4. المعادلات التفاضلية لبرنولي.....ص95

3-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.....ص96

قائمة مراجع ص105

مقدمة

بسم اللهّٰ الرحمن الرحيم و الصلاة والسلام على خاتم الأنبياء و المرسلين و بعد :

تتضمن هذه المطبوعة الموجهة إلى طلاب السنة الأولى جذع مشترك علوم و تكنولوجيا دروس في مقياس الرياضيات 2.

وقد كتبت هذه المطبوعة باللغة العربية لشعور الأستاذ بالحاجة لمثل هذه المطبوعات في مثل هذه المقاييس و باللغة العربية التي تنقص المراجع بها كثيرا.

إن هذه المطبوعة و كأي نتاج علمي لا تخلو من النواقص و الهفوات، وكل أملنا أن تسهم في تطوير العمل البيداغوجي والبحث العلمي.

و الله الموفق

الأستاذ: سليم ساف

الفصل الأول:

المصفوقات و المحددات

1-1. المصفوفات:

تعريف: ليكن K حقلا و ليكن $m,n \in \mathbb{N}$، نأخذ جميع المقادير السلمية a_{ij} من الحقل K حيث: $i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, n$ و لنشكل الجدول التالي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

نسمي هذا الجدول **مصفوفة** و نرمز لها أحيانا بالرمز $A = (a_{ij})$ و العناصر a_{ij} تسمى عوامل المصفوفة، و تسمى مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول سطرا و تسمى مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني عمودا و نقول عندئذ أن المصفوفة A هي ذات m سطر و n عمود و نقول كذلك أن المصفوفة A من الدرجة (أو الصنف) $m \times n$.

أو إذا كتبنا $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ بحيث $1 \leq i \leq m$ تسمى أسطر A و بالتالي فإن i يرمز الى السطر الموجود فيه العنصر a_{ij}،

و إذا كتبنا كذلك $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ بحيث $1 \leq j \leq n$ تسمى أعمدة A و بالتالي فإن j يرمز الى السطر الموجود فيه العنصر a_{ij}.

تساوي مصفوفتين: لتكن A و B مصفوفتين من نفس الصنف $m \times n$، نقول أن المصفوفتين A و B متساويتين إذا كانت عناصرهما (عواملهما) متساوية على الترتيب أي: $a_{ij} = b_{ij}$ بحيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ و نكتب $A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$

مثال: لتكن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} a-\mathrm{b} & 1 & -1 \\ 0 & a+\mathrm{b} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

تعين قيم a و b حتى تكون $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad (*)$$

بحل الجملة (*) نجد: $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$

المصفوفة الصفرية: نسمي مصفوفة صفرية (أو معدومة)، المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار و نرمز لها بالرمز 0 و نكتب $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

فضاء المصفوفات من نفس الصنف: ليكن K حقلا و $m, n \in \mathbb{N}^*$، نرمز لمجموعة المصفوفات من الصنف $m \times n$ بالرمز $M_{m\times n}(K)$ و نعرف في $M_{m\times n}(K)$ مايلي:

أ. الجمع: لتكن $A, B \in M_{m\times n}(K)$ نعرف $A + B = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots a_{2n} \\ & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots\dots\dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots\dots\dots b_{2n} \\ & \\ b_{m1} & b_{m2} \dots\dots b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots\dots\dots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots\dots\dots a_{2n} + b_{2n} \\ & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \dots\dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(K)$$

مثال: لتكن $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 + (-1) & 4 + 2 & 2 + 0 \\ 1 + (-2) & 0 + 0 & 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ب. ضرب مصفوفة بعدد حقيقي: لتكن $A \in M_{m\times n}(K)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ نعرف

$$\alpha A = \alpha\left((a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}\right) = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots a_{2n} \\ . & . \quad . \quad . & . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \dots\dots\dots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots\dots\dots \alpha a_{2n} \\ & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} \dots\dots \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ و $\alpha = 2 \in \mathbb{R}$، لدينا

$$\alpha A = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

خواص:

1. $\forall A, B \in M_{m\times n}(K):\ A + B = B + A$
2. $\forall A, B, C \in M_{m\times n}(K): (A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\forall A \in M_{m\times n}(K), \exists!\, 0 \in M_{m\times n}(K):\ A + 0 = 0 + A = A$
4. $\forall A \in M_{m\times n}(K), \exists!\, (-A) \in M_{m\times n}(K):\ \begin{cases} A + (-A) = 0 \\ \text{و} \\ (-A) + A = 0 \end{cases}$

و منه نستنتج أن $(M_{m\times n}(K), +)$ زمرة تبديلية.

5. $\forall A \in M_{m\times n}(K): 1_K \times A = A$
6. $\forall A, B \in M_{m\times n}(K), \forall \alpha \in K:\ \alpha \times (A + B) = \alpha \times A + \alpha \times B$
7. $\forall A \in M_{m\times n}(K), \forall \alpha, \beta \in K: (\alpha + \beta) \times A = \alpha \times A + \beta \times A$
8. $\forall A \in M_{m\times n}(K), \forall \alpha, \beta \in K: (\alpha\, \beta) \times A = \alpha \times (\beta \times A)$

و منه نستنتج أن $(M_{m\times n}(K), +, \times)$ ف ش على الحقل K .

جداء أو ضرب المصفوفات: ليكن $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ و ليكن كذلك

نعرف $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$

$$A \times B = (a_1, a_2, \dots, a_n) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

تعريف: لتكن $A \in M_{m\times p}(K)$ و $B \in M_{p\times n}(K)$ (نلاحظ **أن** عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطرالمصفوفة B) نعرف:

بحيث: $A \times B = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots \dots \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots \dots \dots c_{2n} \\ & \\ c_{m1} & a_{m2} \dots \dots a_{mn} \end{pmatrix}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

c_{11} هو جداء السطر الأول للمصفوفة A في العمود الأول للمصفوفة B

c_{12} هو جداء السطر الأول للمصفوفة A في العمود الثاني للمصفوفة B

c_{13} هو جداء السطر الأول للمصفوفة A في العمود الثالث للمصفوفة B

.

.

.

c_{1n} هو جداء السطر الأول للمصفوفة A في العمود الأخير للمصفوفة B

ثم نحسب باقي الأسطر للمصفوفة AB بنفس الطريقة.

ملاحظات:

1. لا يمكن إجراء الجداء AB إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى A يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية B .

2. إذا كان $A \in M_{m\times p}(K)$ و $B \in M_{p\times n}(K)$ فإن $AB \in M_{m\times n}(K)$.

3. جداء المصفوفات ليس تبديلي عموما.

4. إذا كان $A \in M_{m\times p}(K)$ و $0 \in M_{p\times n}(K)$ فإن $A \times 0 = 0$.

أمثلة: 1. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة A تساوي عدد أسطر المصفوفة B إذن نستطيع حساب AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 3 = 1, c_{12} = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$c_{13} = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, c_{21} = (2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 11, c_{22} = (2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7,$$

$$c_{23} = (2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

و بالتالي : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 11 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

BA غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد أسطر المصفوفة A .

2. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

لدينا $BA = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ و $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

و بالتالي : $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

3. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ و $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

لدينا $A \times 0 = 0$

منقول مصفوفة: لتكن $A \in M_{m\times p}(K)$ ، نسمي منقول مصفوفة A و نرمز لها بالرمز $\mathrm{A^t}$ المصفوفة التي نحصل عليها بإستبدال أسطرها بأعمدتها و العكس أي أسطر A تصبح أعمدة $\mathrm{A^t}$ و العكس و منه $A \in M_{m\times p}(K)$ فإن $A^t \in M_{p\times m}(K)$.

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

و منه $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

خواص:

1. $\forall A \in M_{m\times p}\,(K):\ (A^t)^t = A$
2. $\forall\, A, B \in M_{m\times p}\,(K):\ (A+B)^t = A^t + B^t$.
3. $\forall\, A, B \in M_{m\times p}\,(K):\ A = B \iff A^t = B^t$
4. $\forall\, A \in M_{m\times p}\,(K), \forall B \in M_{p\times n}\,(K):\ (AB)^t = B^t A^t$
5. $\forall\, A \in M_{m\times p}\,(K), \forall \alpha \in K:\ (\alpha A)^t = \alpha(A^t)$

أمثلة:

1. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

لدينا $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و منه $(A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$

2. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

لدينا $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ و منه $(A+B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

لدينا $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ومنه $A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$

لدينا $AB = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 20 & 27 \end{pmatrix}$ و منه $(AB)^t = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 18 & 27 \end{pmatrix}$ من جهة أخرى لدينا

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ و منه $B^tA^t = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 18 & 27 \end{pmatrix}$

4. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

ومنه: $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha \\ 2\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$ و $(\alpha A)^t = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك $(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و منه $\alpha(A)^t = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$ إذن $(\alpha A)^t = \alpha(A)^t$

المصفوفات المربعة: نقول عن مصفوفة A أنها مصفوفة مربعة إذا كان عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها و نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة ب: $M_n(K)$، و نكتب

$$A \in M_n(K) \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ مصفوفة مربعة من الصنف 2×2

قطر مصفوفة مربعة: لتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$ فإن

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ يسمى قطر المصفوفة A

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ قطر المصفوفة هو: $^{1}{}_{7}{}_{2}$

أثر مصفوفة: لتكن $A \in M_n(K)$ ، أثر المصفوفة A و نرمز له ب: $Tr(A)$ هو مجموع عناصر القطر و نكتب: $Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \ldots + a_{nn}$

مثال: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ فإن $tr(A) = 1 + 5 + 2 = 8$

خواص:

1. $\forall A \in M_n(K): Tr(A^t) = Tr(A)$
2. $\forall A, B \in M_n(K): Tr(A + B) = TrA + TrB.$
3. $\forall A, B \in M_n(K): Tr(AB) = Tr(BA)$
4. $\forall A \in M_n(K), \forall \alpha \in K: Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$

المصفوفة القطرية: نقول عن مصفوفة $A \in M_n(K)$ أنها قطرية إذا تحقق:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \forall i \neq j: \ a_{ij} = 0$$

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ مصفوفة قطرية

المصفوفة المثلثية: نقول عن مصفوفة $A \in M_n(K)$ أنها **مثلثية علوية** إذا كانت عناصرها التي تقع تحت القطر أصفار أي $\forall i > j: \ a_{ij} = 0$ و نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

و نقول عن مصفوفة $A \in M_n(K)$ أنها **مثلثية سفلية** إذا كانت عناصرها التي تقع فوق القطر أصفار أي $\forall j > i: \ a_{ij} = 0$ و نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & 0 \\ a_{31} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

المصفوفة الحيادية: هي كل مصفوفة $A \in M_n(K)$ و نرمز لها ب I_n تحقق :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

إذن $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n يمثل عدد الأسطر و الأعمدة)

مثال: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .....

المصفوفة السلمية: هي كل مصفوفة $A \in M_n(K)$ تحقق: $a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \alpha & i = j \end{cases}$، إذن

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & & . & 0 \\ . & 0 & & & . & . \\ . & . & & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \forall \alpha \in K$$

- إذا كان $\alpha = 1$ فإن $A = I_n$ و إذا كان $\alpha = 0$ فإن $A = 0$

المصفوفة المتناظرة (أو المتماثلة): $A \in M_n(K)$ مصفوفة متناظرة إذا تحقق $a_{ij} = a_{ji}$ لكل $i = 1,2,\dots n$ و $j = 1,2,\dots,n$ أي $A = A^t$

أمثلة: 1. المصفوفة الحيادية مصفوفة متناظرة و كذلك المصفوفة الصفرية

2. المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ مصفوفة متناظرة لأن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A^t$

المصفوفة ضد المتناظرة (أو المتخالفة): $A \in M_n(K)$ مصفوفة متخالفة اذا تحقق:

$a_{ij} = -a_{ji}$ لكل $i = 1,2,\dots n$ و $j = 1,2,\dots,n$ أي $A = -A^t$

(نلاحظ أن : $i = j \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$)

أمثلة: 1. المصفوفة الصفرية هي مصفوفة ضد تناظرية

2. المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ضد تناظرية لأن $A = -A^t$

تمرين: لتكن $A \in M_n(K)$، بين أن $A = B + C$ بحيث $B \in M_n(K)$ مصفوفة تناظرية و $C \in M_n(K)$ مصفوفة ضد تناظرية .

الحل: إيجاد المصفوفتين B و C بحيث $A = B + C$

B مصفوفة تناظرية أي $B = B^t$ و C مصفوفة ضد تناظرية أي $C = -C^t$

و نعلم أن: $(B + C)^t = B^t + C^t$ و منه

$$(1)\begin{cases} A = B + C \\ A^t = B^t + C^t = B^t - C^t \end{cases}$$

بحل الجملة (1) نجد $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ و $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$

مثال تطبيقي : لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ، أوجد B و C بحيث $A = B + C$

لدينا :

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

حلقة المصفوفات المربعة:

نعلم أن $(M_n(K), +)$ زمرة تبديلية، و لدينا كذلك الخواص التالية:

1. $\forall A, B, C \in M_n(K): \ A(BC) = (AB)C$

2. $\forall A, B, C \in M_n(K): \begin{cases} A(B + C) = AB + AC \\ \text{و} \\ (A + B)C = AC + BC \end{cases}$

إذن نستنتج أن: $(\boldsymbol{M_n(K)}, +, \times)$ **حلقة** ليست تبديلية لأن جداء المصفوفات ليس تبديلي.

و لدينا كذلك $\forall A \in M_n(K): AI_n = I_n A = A$ إذن I_n هي العنصر الحيادي بالنسبة لضرب المصفوفات ومنه نستنتج أن $(\boldsymbol{M_n(K)}, +, \times)$ **حلقة واحدية**.

المصفوفة القابلة للقلب (أو العكوسة):

تعريف: نقول عن مصفوفة A أنها قابلة للقلب إذا تحقق:

$$\forall A \in M_n(K), \exists! \, B \in M_n(K): \ AB = BA = I_n$$

عندئذ نقول أن المصفوفة A عكوسة في الحلقة $(M_n(K), +, \times)$ و نسمي المصفوفة A^{-1} نظير المصفوفة A بالنسبة للعملية الثانية ($\times$) في الحلقة $(M_n(K), +, \times)$ ، و نرمز لها بالرمز A^{-1} و نرمز كذلك لمجموعة المصفوفات القابلة للقلب (العكوسة) بالرمز

$$M_n(K)^* = GL_n(K)$$

مثال: بين أن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ قابلة للقلب و عين مقلوبها A^{-1} .

A قابلة للقلب يكافىء

$$\forall A \in M_2(K), \exists!\, B \in M_2(K):\ AB = BA = I_2$$

نضع: $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ و منه لدينا

$$AB = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + z = 0 \\ y + 2t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 2 \\ z = 1, \ t = -1 \end{cases}$$

$$BA = I_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1, y = 2 \\ z = 1, t = -1 \end{cases}$$

إذن $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$، و بالتالي A قابلة للقلب و مقلوبها $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

تمرين: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

تحقق من أن: $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$ ، ثم إستنتج أن A عكوسة و عين A^{-1} .

الحل:لدينا $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $4A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $5I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}(\frac{1}{5}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3)) = \mathrm{I}_3 \\ (\frac{1}{5}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3))\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \exists!\, B \in M_3(\mathbb{R}): AB = BA = I_3$$

ومنه نستنتج أن A قابلة للقلب و مقلوبها هو $A^{-1} = \frac{1}{5}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3)$

نظرية: لتكن A و B مصفوفتين من $M_n(K)$

1. إذا كانت A و B مصفوفتين قابلتين للقلب فإن AB قابلة للقلب و عندئذ لدينا $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ و نقول أن B^{-1} $^{-1}$ نظير AB بالنسبة للعملية $(\times)$ في الحلقة $(M_n(K), +, \times)$.

2. إذا كانت A قابلة للقلب فإن A^p قابلة للقلب و $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.

مثال1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

بما أن A قابلة للقلب و B قابلة للقلب فإن AB قابلة للقلب ومقلوبها هو

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة قابلة للقلب $\Leftarrow$ $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ($p = 2$) مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو $(\mathrm{A}^2)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2-1. المصفوفات و التطبيقات الخطية:

1-2-1. المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي:

ليكن V_1 ف ش على الحقل K و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ أساس له، إذن $dim(V_1) = n$

و ليكن V_2 ف ش على الحقل K و $B' = \{w_1, \dots, w_p\}$ أساس له، إذن $dim(V_2) = p$

و ليكن $f: V_1 \longrightarrow V_2$ تطبيق خطي إذن لدينا

$$f(v_1) \in V_2 \Longrightarrow f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{p1}w_p$$

$$f(v_2) \in V_2 \Longrightarrow f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{p2}w_p$$

.

.

$$f(v_n) \in V_2 \Longrightarrow f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{pn}w_p$$

بحيث $a_{ij} \in K$ لكل $i = 1,2, \ldots p$ و $j = 1,2, \ldots, n$ فإن المصفوفة

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p\times n}(K)$ تسمى المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي

f بالنسبة للأساس B في V_1 و الأساس B' في V_2 و نرمز لها أحيانا بالرمز $A = M_B^{B'}(f)$

ملاحظة: عدد أسطر المصفوفة A يساوي $dim(V_2) = p$ و عدد أعمدة المصفوفة A يساوي $dim(V_1) = n$.

مثال1 : ليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف كمايلي:

$$f(x,y) = (x - y, 2x + y, x + 3y)$$

و لتكن $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ أساس قانوني ل $\mathbb{R}^2$ و لتكن كذلك

$B' = \{l_1 = (1,0,0), l_2 = (0,1,0), l_2 = (0,0,1)\}$ أساس قانوني ل $\mathbb{R}^3$

إذن لدينا:

$$f(e_1) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow f(e_1) = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + a_{31}l_3$$

$$\Longrightarrow (1,2,1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$$

$$\Longrightarrow a_{11} = 1\,, a_{21} = 2, a_{31} = 1$$

$$f(e_2) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow f(e_2) = a_{12}l_1 + a_{22}l_2 + a_{32}l_3$$

$$\Longrightarrow (-1,1,3) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1)$$

$$\Longrightarrow a_{12} = -1\,, a_{22} = 1, a_{32} = 3$$

و منه المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي : $A = M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2-2-1. التطبيق الخطي المرافق لمصفوفة:

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p\times n}(K)$$

ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ أساس له و ليكن V_2 ف ش على الحقل K ذو بعد منته p و $B' = \{w_1, \dots, w_p\}$ أساس له ومنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: V_1 \longrightarrow V_2$ و لدينا

$$\forall v \in V_1 \Longrightarrow v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

$$\Longrightarrow f(v) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + \cdots + x_nf(v_n)$$

و لدينا من جهة أخرى:

$$f(v_1) \in V_2 \Longrightarrow f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{p1}w_p$$

$$f(v_2) \in V_2 \Longrightarrow f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{p2}w_p$$

.

.

.

$$f(v_n) \in V_2 \Longrightarrow f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{pn}w_p$$

و منه ينتج :

$$f(v) = x_1(a_{11}w_1 + \ \dots + a_{p1}w_p) + \cdots + x_n\ (a_{1n}w_1 + \ \dots + a_{pn}w_p\ )$$

$$f(v) = \underbrace{(x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})}_{y_1}w_1 + \cdots + \underbrace{(x_1a_{p1} + \cdots + x_na_{pn})}_{y_p}w_p$$

ومنه التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A هو:

$$f(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3 + y_4w_4 + \cdots + y_pw_p$$

بحيث: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$

ملاحظة: في كثير من الأحيان نعين التطبيق f على أنه التطبيق الخطي $f: K^n \to K^p$ المعرف كمايلي: $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$

مثال1: لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ أساسه القانوني $B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ أساسه القانوني $B' = \{l_1 = (1,0,0), l_2 = (0,1,0), l_3 = (0,0,1)\}$ و منه فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و لدينا

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow (x,y,z) = xl_1 + yl_2 + zl_3$$

$$\Longrightarrow f(x,y,z) = xf(l_1) + yf(l_2) + zf(l_3)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$f(l_1) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow f(l_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (a_{11}, a_{21}) = (2,0)$$

$$f(l_2) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow f(l_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = (a_{12}, a_{22}) = (1,1)$$

$$f(l_3) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow f(l_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 = (a_{13}, a_{23}) = (-1,1)$$

ومنه $f(x,y,z) = (2x + y - z, y + z)$ و هو التطبيق الخطي المرافق A

أو نحسب التطبيق الخطي f مباشرة أي:

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow f(v) = y_1e_1 + y_2e_2 \; ; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x + y - z \\ y_2 = 0 + y + z \end{cases}$$

و بالتالي : $f(x,y,z) = (2x + y - z)e_1 + (y + z)e_2 = (2x + y - z, y + z)$

مثال2: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه القانوني

$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1\}$ و $\mathbb{R}^4$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ أساسه القانوني $B' = \{l_1 = (1,0,0,0), l_2 = (0,1,0,0), l_3 = (0,0,1,0), l_4 = (0,0,0,1)\}$

ومنه التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A هو التطبيق $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المرف كمايلي:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (-x + z, 2x + 2z, x - y, z)$$

مثال3: لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ و $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه

$B = \{l_1 = (1,1), l_2 = (2,1)\}$ و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$، أساسه القانوني

$B' = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ و منه فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ و لدينا

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$f(e_1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(e_1) = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 = (2,2)$$

$$f(e_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(e_2) = a_{12}l_1 + a_{22}l_2 = (3,2)$$

$$f(e_3) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f(e_3) = a_{13}l_1 + a_{23}l_2 = (1,0)$$

و بالتالي :

$$f(x,y,z) = (2x + 3y + z, 2x + 2y)$$

و هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A .

مثال4: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

عين التطبيق الخطي f المرافق للمصفوفة A بالنسبة للأساس القانوني $\{1, x\}$ للمجموعة $\mathbb{R}_1[x]$ و الأساس القانوني $\{1, x, x^2\}$ للمجموعة $\mathbb{R}_2[x]$.

بما أن $\mathbb{R}_1[x]$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ وأساسه $\{1, x\}$ و $\mathbb{R}_2[x]$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ و أساسه $\{1, x, x^2\}$ فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ ومنه

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[x] \Longrightarrow P(x) = a_0 + a_1 x; \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow f\big(P(x)\big) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2; \quad b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = a_0 + 0 \\ b_1 = 0 + a_1 \\ b_2 = a_0 + a_1 \end{cases}$$

و بالتالي

$$f\big(P(x)\big) = a_0 + a_1 x + (a_0 + a_1) x^2$$

وهو التطبيق الخطي المطلوب.

خواص:

ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ أساس له، و ليكن V_2 ف ش على الحقل K ذو بعد منته p و $\grave{B} = \{w_1, \dots, w_p\}$ أساس له، و V_3 ف ش على الحقل K ذو بعد منته k و $\grave{B_1} = \{u_1, \dots, u_k\}$ أساس له.

1 . $A + B = M_B^{\grave{B}}(f + g) = M_B^{\grave{B}}(f) + M_B^{\grave{B}}(g)$ معناه أن $A + B$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق $f + g$.

مثال: ليكن $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x+y, 2x)$$

و $B = \{e_1, e_2\}$ أساس قانوني ل $\mathbb{R}^2$

المصفوفة المرافقة للتطبيق f وفق الأساس القانوني B هي $A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

و ليكن $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = (x+y, 2x+y)$$

المصفوفة المرافقة للتطبيق g وفق الاساس القانوني B هي $B = M_B^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

الطريقة الأولى لحساب مجموع مصفوفتين:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية لحساب مجموع مصفوفتين:

لدينا $f + g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

$$= (x+y, 2x) + (x+y, 2x+y) = (2x+2y, 4x+y)$$

المصفوفة المرافقة للتطبيق $f + g$ وفق الأساس القانوني هي:

$$A + B = M_B^B(f+g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\forall \alpha \in \mathrm{K}: \alpha A = M_B^{\grave{B}}(\alpha f) = \alpha M_B^{\grave{B}}(f)$ معناه أن αA هي المصفوفة المرافقة للتطبيق (αf).

3. $M_B^{\grave{B}}(f_0) = 0$ حيث 0 هي المصفوفة الصفرية المرافقة للتطبيق المعدوم f_0

4. $BA = M_B^{\grave{B}_1}(g \circ f) = M_B^{\grave{B}}(g) \times M_{\grave{B}}^{\grave{B}_1}(f)$ أي أن BA هي المصفوفة المرافقة للتطبيق $(g \circ f)$ تساوي B المصفوفة المرافقة للتطبيق g ضرب A المصفوفة المرافقة للتطبيق f .

مثال: ليكن $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x+y, y, x)$

$B = \{e_1, e_2\}$ أساس قانوني ل $\mathbb{R}^2$ و $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ أساس قانوني ل $\mathbb{R}^3$،

المصفوفة المرافقة للتطبيق f هي $A = M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

و ليكن $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل:

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y,z) = (x+y, 2x+y)$

المصفوفة المرافقة للتطبيق g هي: $B = M_{B'}^{B}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

الطريقة الأولى لحساب جداء مصفوفتين:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية لحساب جداء مصفوفتين:

لدينا $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي معرف بالشكل :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (g \circ f)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = g(x+y, y, x)$$

$$= (x+2y, 2x+3y)$$

المصفوفة المرافقة للتطبيق $g \circ f$ هي $BA = M_B^B(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\mathrm{I_n}$ هي المصفوفة الحيادية المرافقة للتطبيق الحيادي Id_V

نتيجة: $f : V_1 \to V_2$ تطبيق خطي و $A = M_B^{B'}(f)$ المصفوفة المرافقة للتطبيق f

f تقابلي $\Leftrightarrow$ $M_B^{B'}(f)$ قابلة للقلب و المصفوفة المرافقة للتطبيق f^{-1} هي $M_B^B(f^{-1})$

3-1. مصفوفة العبور (الإنتقال):

ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ و

$\grave{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ أساسيين له.

بما أن $\grave{B}$ أساس للفضاء الشعاعي V_1 فإن $(w_i)_{1\leq i\leq n}$ هو مزج خطي للإشعة $\{v_1, \dots, v_n\}$ أي

$$w_1 \in V_1 \Longrightarrow w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n$$

$$w_1 \in V_1 \Longrightarrow w_1 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n$$

.

.

$$w_1 \in V_1 \Longrightarrow w_1 = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

فإن المصفوفة

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

تسمى مصفوفة العبور من الأساس $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ إلى الأساس $\grave{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$

مثال1: ليكن $V_1 = \mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل $\mathbb{R}$ و $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ أساسه القانوني و $\grave{B} = \{w_1 = (1,-1,1), w_2 = (2,-1,0), w_3 = (3,0,0)\}$ أساس أخر له ومنه لدينا

$$w_1 \in V_1 \Longrightarrow w_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

$$\Longrightarrow (1,-1,1) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

$$w_2 \in V_1 \Longrightarrow w_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$\Longrightarrow (2,-1,0) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

$$w_3 \in V_1 \Longrightarrow w_2 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

$$\Rightarrow (3,0,0) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

ومنه مصفوفة العبور من الأساس B إلى الأساس B' هي: $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

مثال2: ليكن $B = \{v_1 = (1,2), v_3 = (1,1)\}$ أساس للمجموعة $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$،

$\grave{B} = \{w_1 = (2,1), w_2 = (2,3)\}$ أساس أخر لنفس المجموعة على الحقل $\mathbb{R}$

$$w_1 \in V_1 \Rightarrow w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 = (a_{11} + a_{21}, 2a_{11} + a_{21})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} = 2 \\ 2a_{11} + a_{21} = 1 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = -1, a_{21} = 3$$

$$w_2 \in V_1 \Rightarrow w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 = (a_{12} + a_{22}, 2a_{12} + a_{22})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12} + a_{22} = 2 \\ 2a_{12} + a_{22} = 3 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 1, a_{22} = 1$$

ومنه مصفوفة العبور من الأساس B إلى الأساس $\grave{B}$ هي: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

مثال3: لتكن $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة العبور من الأساس القانوني $\mathrm{B} = \{e_1, e_2\}$ إلى الأساس $\grave{\mathrm{B}} = \{v_1, v_2\}$ للفضاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$ ، أوجد أشعة الأساس $\grave{\mathrm{B}} = \{v_1, v_2\}$

$$v_1 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (a_{11}, a_{21}) = (1,-1)$$

$$v_2 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = (a_{12}, a_{22}) = (4,2)$$

ملاحظات:

1. مصفوفة العبور P من الأساس B إلى الأساس $\grave{\mathrm{B}}$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيادي Id_{V_1} وبما أن التطبيق الحيادي Id_{V_1} تقابلي فإن P قابلة للقلب إذن P^{-1} موجودة و هي بذلك مصفوفة العبور من الأساس $\grave{\mathrm{B}}$ إلى الأساس B.

مثال: (نأخذ المثال2) وجدنا في المثال2 مصفوفة العبور من الأساس

$B = \{v_1 = (1,2), v_3 = (1,1)\}$ إلى الأساس $\grave{B} = \{ w_1 = (2,1), w_2 = (2,3\}$

هي $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

ولدينا $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ (يمكن التأكد: $PP^{-1}=P^{-1}P=I_2$).

لنبحث عن مصفوفة العبور من الأساس

$B=\{v_1=(1,2),v_3=(1,1)\}$ إلى الأساس $\grave{B}=\{w_1=(2,1),w_2=(2,3)\}$ لدينا

$$v_1=a_{11}w_1+a_{12}w_2=(2a_{11}+2a_{21},a_{11}+3a_{21})=(1,2)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2a_{11}+2a_{21}=1\\ a_{11}+3a_{21}=2\end{cases}\Longrightarrow a_{11}=\frac{-1}{4},a_{21}=\frac{3}{4}$$

$$v_2=a_{21}w_1+a_{22}w_2=(2a_{21}+2a_{22},a_{21}+3a_{22})=(1,1)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2a_{12}+2a_{22}=1\\ a_{12}+3a_{22}=1\end{cases}\Longrightarrow a_{12}=\frac{1}{4},a_{22}=\frac{1}{4}$$

ومنه مصفوفة العبور من الأساس $\grave{B}$ الى الأساس B هي $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

2. ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و $B=\{v_1,\dots,v_n\}$

و $\grave{B}=\{w_1,..,w_n\}$ أساسين له لدينا:

$$\forall v\in V_1\Longrightarrow v=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n;\qquad (x_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow v=y_1v_1+y_2v_2+\cdots+y_nv_n$$

بحيث: $\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ .\\ .\\ w_n\end{pmatrix}=P^t\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ .\\ .\\ v_n\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ .\\ .\\ y_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}$

نظرية: ليكن V_1 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n و $B=\{v_1,\dots v_n\}$

و $B_1=\{\ _1,\dots w_n\}$ أساسيين له، ليكن V_2 ف ش على الحقل K ذو بعد منته n

و $B' = \{ \quad_n, \dots u_n\}$ و $\grave{B}_1 = \{\grave{u}_1, \dots, \grave{u}_p\}$ أساسين له بحيث P مصفوفة العبور من الأساس B إلى الأساس B_1 و Q مصفوفة العبور من الأساس B' إلى الأساس $\grave{B}_1$

و ليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيق خطي و A المصفوفة المرافقة له بالنسبة للأساس B في V_1 و الأساس $\grave{B}$ في V_2 لدينا :

$$V_1 \xrightarrow{Id_{V_1}} V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{Id^{-1}{}_{V_2}} V_2$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{M}_{\mathrm{B}_1}^{\grave{\mathrm{B}}_1}\left(\mathrm{Id}^{-1}{}_{\mathrm{V}_2} \circ f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{V}_1}\right) = \mathrm{M}_{\grave{\mathrm{B}}}^{\grave{\mathrm{B}}_1}(Id^{-1}{}_{V_2}) \times \mathrm{M}_{\mathrm{B}}^{\grave{\mathrm{B}}}(f) \times \mathrm{M}_{\mathrm{B}_1}^{\mathrm{B}}(Id_{V_1})$$

$$\Longrightarrow B = Q^{-1}AP$$

مثال: $\mathbb{R}^2$ ف ش على الحقل K و أساسه القانوني B و $\mathbb{R}^3$ ف ش على الحقل K و أساسه القانوني $\grave{B}$ و ليكن $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي معرف كمايلي:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x + y, x, y)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f .

و ليكن $B_1 = \{v_1 = (1,2), v_2 = (2,3)\}$ أساس أخر للفضاء $\mathbb{R}^2$، إذن مصفوفة العبور من الأساس B إلى الأساس B_1 هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$، و ليكن

$\grave{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (2, -1, 0), u_3 = (3, 0, 0)\}$ أساس للمجموعة $\mathbb{R}^3$

و منه مصفوفة العبور من الأساس $\grave{\mathrm{B}}$ إلى الأساس $\grave{B}_1$ هي $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و مصفوفة العبور من الأساس $\grave{B}_1$ إلى الأساس $\grave{\mathrm{B}}$ هي $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

و لدينا :

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Id_{V_1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{Id^{-1}{}_{V_2}} \mathbb{R}^3$$

$$B = M_{B_1}^{\grave{B}_1}\left(Id^{-1}{}_{V_2} \circ f \circ Id_{V_1}\right) = M_{\grave{B}}^{\grave{B}_1}(Id^{-1}{}_{V_2}) \times M_{\grave{B}}^{B}(f) \times M_{B_1}^{B}(Id_{V_1})$$

$$\Longrightarrow B = Q^{-1}AP$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \\ \frac{7}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B = M_{B_1}^{\grave{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \\ \frac{7}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

4-1. رتبة مصفوفة:

لتكن $A = (A^1, \dots, A^n) = \begin{pmatrix} A_1 \\ . \\ . \\ A_p \end{pmatrix} \in M_{p\times n}(K)$

بحيث $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ و $1 \le i \le p$

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

بحيث $1 \le j \le n$

تعريف: رتبة مصفوفة A هي رتبة التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A و نرمز لها ب $rg(A)$

ونعرف كذلك $rg(A) = dim\langle A^1, A^2, \dots, A^n\rangle = dim\langle A_1. A_2, \dots, A_p \rangle$

خواص : لتكن $A \in M_{p\times n}(K)$

1. $\forall A \in M_{p\times n}(K): \quad rg(A) = rg(A^t)$

2. رتبة مصفوفة A هي أكبر عدد ممكن من أعمدتها (أسطرها) المستقلة خطيا (**ملاحظة** $rg(A) \leq \min(p,n)$)

3. لا تتغير رتبة مصفوفة A عند إستبدال عمود (أو سطر) بأخر

4. لا تتغير رتبة مصفوفة A عند إضافة إلى أحد الأعمدة (الأسطر) عبارة خطية (مزج خطي) من أعمدة (أسطر) أخرى.

طريقة عملية لتعين رتبة مصفوفة: (**تحويلات أولية**) لتكن $A \in M_{p\times n}(K)$

بإستخدام الخاصيتين (3) و(4) نقوم بتصفير جميع عناصر العمود الأول (أو السطر الأول) ما عدا العنصر الأول ثم نقوم بتصفير جميع عناصر العمود الثاني (أو السطر الثاني) ما عدا العنصر الأول و الثاني ثم و هكذا ....

نتيجة: رتبة المصفوفة A تساوي عدد الأسطر (الأعمدة) الغير معدومة المتبقاة

ترميز: نرمز ب L_i الى السطر رقم i و C_i الى العمود رقم i

مثال1: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ عين رتبة المصفوفة A .

الطريقة الأولى (بإستعمال التعريف):

التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A هو $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف كمايلي :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y, x+3y)$$

$$Im(f) = \{f(x,y); \quad x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x+y, x+3y); \ x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

و بالتالي : $rg(A) = rg(f) = \dim\big(Im(f)\big) = 2$

الطريقة الثانية (ف ش ج المولد بواسطة أعمدة أو أسطر A):

لتكن الأشعة $v_1 = (1,1)$ و $v_2 = (1,3)$ و ليكن V ف ش ج من $\mathbb{R}^2$ المولد بواسطة $\{v_1, v_2\}$

هل $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطيا ؟

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha(1,1) + \beta(1,3) = (0,0) = \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

و منه $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطيا فهي تشكل أساس للمجموعة V إذن $rg(A) = dim(V) = 2$

ملاحظة: يمكن إستعمال الخاصية (2) و دراسة الإستقلال الخطي مباشرة للجملة $\{v_1, v_2\}$

الطريقة الثالثة (بإستعمال التحويلات الأولية):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \textcircled{1} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg(A) = 2$$

نقوم بتصفير جميع عناصر العمود الأول ماعدا العنصر الأول أي نقوم بتصفير العنصر الموضوع في الدائرة وذلك بإجراء المزج خطي $L_2 - L_1$ (السطر الثاني نطرح منه السطر الأول نجد السطر الثاني $(0 \;\; 1)$، السطر الأول يبقى ثابت

ملاحظة: السطر الذي يتغير هو السطر الذي يوجد فيه العنصر الذي نقوم بتصفيره أما باقي الأسطر فتبقى ثابتة.

مثال2 : (إستعمال طريقة التحويلات الأولية)

لتكن المصفوفتين $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ \textcircled{1} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{2}{5}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg(B) = 2$$

مثال3: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rg(A) = 3$$

طريقة غوص لحساب مقلوب مصفوفة: لتكن $A \in M_n(K)$ و $rg(A) = n$

نقوم بتشكيل المصفوفة الموسعة (A/I_n) لحساب A^{-1} (نستعمل الخاصيتين (3) و (4) من خواص الرتبة) نقوم بإحدى بالعمليات التالية :

1. مبادلة سطر (عمود) بأخر في نفس المصفوفة
2. إضافة سطر (عمود) إلى سطر (عمود) أخر
3. إضافة مزج خطي للأسطر (للأعمد ة) إلى سطر (عمود) أخر
4. إجراء مزج خطي لسطر (لعمود) مع سطر (عمود) أخر.

و في الأخير يجب أن نصل إلى المصفوفة الموسعة (I_n/B) حيث المصفوفة B هي المصفوفة A^{-1}

ملاحظة: العملية التي نجرها على المصفوفة A نجريها كذلك على المصفوفة الحيادية I_n.

مثال1 : لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$، عين المصفوفة A^{-1}.

وجدنا في مثال سابق أن $rg(A) = 2$، و منه المصفوفة A^{-1} موجودة (أي A عكوسة)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

و بالتالي: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (يمكن أن تتأكد من ذلك $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$:)

مثال2: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$، عين المصفوفة A^{-1}.

وجدنا في مثال سابق أن $rg(A) = 3$ و منه المصفوفة A^{-1} موجودة (أي A عكوسة)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3-L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_1-L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&2&1&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_1-L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

و بالتالي: $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

5-1. المحددات:

تعريف المصفوفة المستخرجة: ليكن K حقلا و لتكن $A\in M_n(K)$، نعرف المصفوفة المستخرجة من المصفوفة A و ذلك بحذف السطر i و العمود j من المصفوفة A و نرمز لها بالرمز A_{ij}.

مثال: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&1\\4&1&2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$، المصفوفة $A_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ تسمى المصفوفة المستخرجة من A وذلك بحذف السطر الأول و العمود الأول.

تعريف المحدد: ليكن K حقلا، لتكن $A\in M_n(K)$ و $f: M_n(K)\longrightarrow K$ تطبيق يحقق الشرطين :

1. إذا كان $A=(a_{11})$ $\forall a_{11}\in K$: فإن: $f(A)=a_{11}$

2. إذا كانت $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{2n}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$ فإن $f(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+}\,a_{ij}f(A_{ij})$

بحيث: $n>1$ و $1\le j\le n$

نسمي التطبيق f محدد المصفوفة A و نرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det(A)$

ملاحظات:

1. $det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}f(A_{ij}),\ 1\le i\le n$ وبأخذ j قيمة اختيارية تسمى هذه العبارة بحساب المحدد وفق العمود j

2. و أيضا $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij} f(A_{ij}),\ 1 \le j \le n$ و بأخذ i قيمة إختيارية تسمى هذه العبارة بحساب المحدد وفق العمود i.

أمثلة:

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ و منه: $\det(A) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+j}\, a_{ij}|A_{ij}|$

حساب المحدد وفق العمود الأول $(j = 1)$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\, a_{i1}|A_{i1}| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

حساب المحدد وفق السطر الأول $(i = 1)$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{2}(-1)^{1+j}\, a_{1j}|A_{1j}| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}|$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ومنه $\det(A) = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}\, a_{ij}|A_{ij}|$

حساب المحدد وفق السطر الأول $(i = 1)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{2}(-1)^{1+j}\, a_{1j}|A_{1j}| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

هناك طريقة خاصة لحساب محدد من الدرجة $n = 3$ تسمى **طريقة ساروس**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

نجد محدد A بإيجاد حاصل ضرب الأسطر المائلة إنطلاقا من القطر مع إعطاء الإشارة الموجبة في نهاية ناتج الضرب ثم حاصل ضرب الأسطر المائلة عكس القطر مع إعطاء الإشارة السالبة في نهاية ناتج الضرب، ثم جمع هذه العناصر نجد:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

خواص: لتكن $A, B \in M_n(K)$

1. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ أعمدة (أسطر) A مرتبطة خطيا،
2. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ أعمدة (أسطر) A مستقلة خطيا $\Leftrightarrow rg(A) = n$ ،
3. إذا كان أحد أعمدة (أو أسطر) المصفوفة A معدوم فان: $\det(A) = 0$ ،
4. إذا كان أحد أعمدة (أو أسطر) المصفوفة A عبارة عن مزج خطي للأعمدة (للأسطر) أخرى أو إذا تساوى عمودين (سطرين) فإن $\det(A) = 0$،
5. $\det(A) = \det(A^t)$،
6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$،
7. $\forall \alpha \in K: \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$،
8. $\det(I_n) = 1$،
9. إذا كانت A قابلة للقلب فإن $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$،
10. $\det(A^p) = (\det(A))^p$،
11. لا تتغير قيمة المحدد عند إضافة إلى أحد الأعمدة (أو الأسطر) عبارة خطية من الأعمدة (الأسطر) الأخرى.

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

نضيف إلى السطر الأول السطرين الثاني و الثالث فنجد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 = \det(A)$$

12. عند مبادلة عمود (سطر) بعمود (سطر) أخر و العكس نضرب قيمة المحدد في (-1)

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 9$$

نستبدل في محدد A العمود الأول بالعمود الثاني و العكس نجد:

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\left(4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right) = -(-9) = 9$$

13. محدد مصفوفة مثلثية يساوي جداء عناصر قطرها

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

.14

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ نعلم أن $\det(A) = 9$

لنحسب محدد المصفوفة A بإستعمال الخاصية (14) فنجد:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & (2+2)2 \\ 2 & (1+2)2 \\ 0 & (3+4)1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & \alpha a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ . & . & & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad ; \alpha \in K \quad .15$$

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، لدينا

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha 4 & 2 \\ 2 & \alpha 3 & 2 \\ 0 & \alpha 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha 3 & 2 \\ \alpha 7 & 1 \end{vmatrix} - 4\alpha \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & \alpha 3 \\ 0 & \alpha 7 \end{vmatrix} = 9\alpha = \alpha \det(A)$$

1-5-1. تطبيقات لحساب المحددات:

أ. حساب مقلوب مصفوفة:

نظرية: ليكن K حقلا و $A \in M_n(K)$ ، لدينا

$$\left(\det(A) \neq 0 \iff A \text{ قابلة للقلب (عكوسة)}\right)$$

تعريف: ليكن K حقلا و $A \in M_n(K)$ بحيث $\det(A) \neq 0$، نعرف مقلوب مصفوفة A و التي نرمز لها بالرمز A^{-1} كمايلي: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$

بحيث: $c_{ij} = (-1)^{i+} \det(A_{ij})$ لكل $i, j = 1,2, \dots, n$

نسمي المصفوفة C^t أحيانا **بالمرافق التقليدي** للمصفوفة A و نرمز لها بالرمز $adj(A)$

مثال: لتكن $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

و منه المصفوفة A قابلة للقلب و $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$،

نضع $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ بحيث: $c_{ij} = (-1)^{i+} \det(A_{ij})$ لكل $i, j = 1,2,3$

و لدينا :

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ , c_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \ , c_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \ , c_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \ , c_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ , c_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \ , c_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

و بالتالي نجد : $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

ب. دراسة الاستقلال الخطي لجملة من الأشعة في $\mathbb{R}^n$:

إذا كان $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ بحيث:

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ جملة من أشعة $\mathbb{R}^n$ فإنه لدينا:

$$\det(v_1, \dots, v_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ مستقلة خطيا}$$

مثال: لتكن الأشعة $v_1 = (2,0,4)$ و $v_2 = (2,-1,0)$ و $v_3 = (-1,1,1)$ من $\mathbb{R}^3$،

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 2 & 2-1 \\ 0-1 & 1 \\ 4 & 0 \ 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

و بالتالي الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة خطيا.

ج. حساب رتبة مصفوفة: ليكن K حقلا و $A \in M_{p\times n}(K)$ أي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ . & . \ . \ . \\ . & . \\ \\ a_{p1} & a_{2n} \dots a_{pn} \end{pmatrix}$$

1. إذا كان $p = n$ (أي عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة) فإن A تصبح مصفوفة مربعة

إذن أول خطوة نقوم بها هي حساب $\det(A)$ فإذا كان $\det(A) \neq 0$ فإن $rg(A) = n$

و إذا كان $\det(A) = 0$ فإن $rg(A) \neq n \leq n-1$، في هذه الحالة نقوم بإستخراج مصفوفة A_{ij} بحيث $i,j = 1,2,\dots,n$ و ذلك بحذف السطر i و العمود j من المصفوفة A فإذا كان إحدى محددات المصفوفات المستخرجة يختلف عن الصفر (مثلا $\det(A_{11}) \neq 0$) فإن $rg(A) = n-1$ و إذا وجدنا جميع المحددات تساوي صفر فإن

$rg(A) \neq n-1 \leq n-2$ ، في هذه الحالة نقوم بإستخراج مصفوفات أخرى و ذلك بحذف سطرين و عمودين من المصفوفة A فإذا كان إحدى محددات المصفوفات المستخرجة يختلف عن الصفر فإن $rg(A) = n-2$ و إذا وجدنا جميع المحددات تساوي صفر فإن $rg(A) \neq n-2 \leq n-3$ و هكذا.....

مثال: عين رتبة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

الخطوة الأولى : نقوم بحساب محدد A لدينا $\det(A) = 0$ لأن العمود الأول يساوي العمود الرابع و منه $rg(A) \neq 4 \leq 3$.

الخطوة الثانية : نقوم بإستخراج مصفوفة A_{ij} بحيث $i,j = 1,2,3,4$ و ذلك بحذف السطر i و العمود j من المصفوفة A نلاحظ أن المصفوفات A_{ij} بحيث $i,j = 1,2,3,4$ المستخرجة من المصفوفة A محدداتها تساوي الصفر لأنه في كل مرة نجد عمود أو سطر مكرر (مثلا $|A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$) ومنه $rg(A) \neq 3 \leq 2$.

الخطوة الثالثة: نستخرج مصفوفة من المصفوفة A و ذلك بحذف سطرين و عمودين مثلا

نحذف السطرين الثالث و الرابع و العمودين الثالث و الرابع فنجد $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ إذن

$\det(A_1) = 1$، و بالتالي $rg(A) = rg(A_1) = 2$

2. إذا كان $p > n$ (أي عدد الأسطر أكبر من عدد الأعمدة) في هذه الحالة نقوم بإستخراج إحدى المصفوفات A_i من المصفوفة A و ذلك بحذف عدد من الأسطر i حتى تصبح A_i مصفوفة مربعة من الدرجة n، فإذا كان محدد إحدى المصفوفات المستخرجة، و لتكن مثلا A_1 يختلف عن الصفر فإن $rg(A) = rg(A_1) = n$، وإذا كانت جميع محددات المصفوفات المستخرجة يساوي الصفر فإن $rg(A) \neq n \leq n-1$، في هذه الحالة نقوم بإستخراج إحدى المصفوفات A_{ij} من المصفوفة A و ذلك بحذف عدد من الأسطر i و عمود j حتى تصبح A_{ij} مصفوفة مربعة من الدرجة $n-1$ فإذا كان محدد إحدى المصفوفات المستخرجة و لتكن مثلا A_{21} يختلف عن الصفر فإن $rg(A) = rg(A_{21}) = n-1$، وإذا كانت جميع محددات المصفوفات المستخرجة يساوي الصفر فإن $rg(A) \neq n-1 \leq n-2$ و هكذا.....

مثال: عين رتبة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من A وذلك بحذف السطر الثالث من المصفوفة A

لدينا $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$ و منه $rg(A) = rg(A_1) = 2$

3. إذا كان $p < n$ (أي عدد الأعمدة أكبر من عدد الأسطر) في هذه الحالة نقوم بنفس الخطوات السابقة فقط نستبدل كلمة سطر بعمود.

مثال: عين رتبة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من A وذلك بحذف العمود الثالث من المصفوفة A

لدينا $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ و بالتالي نجد $rg(A) = rg(A_1) = 2$

الفصل الثاني:

حل جمل المعادلات الخطية

1-2. مفاهيم عامة :

ليكن K حقل تبديلي "$\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ "، نسمي جملة المعادلات الخطية (S) ذات n معادلة و m مجهول و بمعاملات من الحقل K ، كل جملة من الشكل :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ . \qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

يمكن كتابة الجملة (S) على **الشكل المصفوفي** $\boldsymbol{AX = B}$ كمايلي:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = B$$

حيث :

$A \in M_{n\times m}(K)$ تسمى مصفوفة المعاملات للجملة (S) و هي معطاة،

$B \in M_{n\times 1}(K)$ يسمى شعاع الطرف الثاني للجملة (S) و عناصره معطاة كذلك،

$X \in M_{m\times 1}(K)$ يسمى شعاع المجاهيل للجملة (S).

رتبة الجملة (S) : نسمي رتبة الجملة (S) العدد المساوي لرتبة المصفوفة A و نكتب

$$rg(A) = rg(S)$$

ملاحظات : يمكن أن نميز الحالات التالية:

أ. $n = m$ (عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل) فإن $rg(S) = n$ أو $rg(S) < n$

ب. $n < m$ (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل) فإن $rg(S) = n$ أو $rg(S) < n$

ج. $n > m$ (عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل) فإن $rg(S) = m$ أو $rg(S) < m$

مثال:

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$(S)\begin{cases}2x+y+z+2t=1\\3x+0+z+t=0\\0+y+2z+0=1\end{cases}$$

كتابة الشكل المصفوفي $\boldsymbol{AX=B}$ (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل):

$$(S)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1&1&2\\3&0&1&1\\0&1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow AX=B$$

حيث: $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\3&0&1&1\\0&1&2&0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2-2. دراسة مجموعة الحلول

تعريفات:

- نسمي حلا لجملة المعادلات الخطية (S) كل شعاع $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ من K^n الذي يحقق n معادلة للجملة (S).

- نقول أن الجملة (S) متجانسة إذا كان الطرف الثاني $B=0$.

الجمل المتكافئة:

نقول عن جملتي معادلات خطية أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.

عدد حلول جملة معادلات خطية:

نظرية: إذا كانت جملة معادلات خطية (S) ب n معادلات و m مجاهيل على الشكل المصفوفي $AX=B$. فإن الجملة (S) تقبل إما:

أ. حل وحيد

ب. لا تقبل حلول

ج. عدد لانهائي من الحلول

3-2. طرق حل جمل المعادلات الخطية :

1-3-2. حل جملة معادلات خطية ذات n معادلة و n مجهول :

نعتبر جملة معادلات خطية تتكون من n معادلة و n مجهول (S_1)

$$(S_1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ . \qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

الشكل المصفوفي $AX = b$ يكتب على الشكل :

$$(S_1) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b$$

1-1-3-2. طريقة كرامر لحل الجملة (S_1):

نقول عن جملة معادلات خطية أنها لكرامر إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل و محدد المصفوفة المرافقة للجملة غير معدوم.

إذا كان $det(A) \neq 0$ فإن الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا معطى بواسطة قاعدة كرامر التالية:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

حيث Δ هو محدد المصفوفة A المستخرجة من الجملة (S_1) و Δ_i هو المحدد المستخرج من المصفوفة A بإستبدال العمود i بالعمود b مثلا Δ_1 هو المحدد المستخرج من المصفوفة A بإستبدال العمود الأول في المصفوفة A بالعمود b.

2-1-3-2. حل الجملة (S_1) بإستعمال مقلوب مصفوفة:

إذا كان $det(A) \neq 0$ فإن A قابلة للقلب أي A^{-1} موجودة إذن

$$(S_1) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$$

و بالتالي الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا معطى بالشكل : $\boldsymbol{X = A^{-1}b}$

ملاحظة: إذا كان $det(A) = 0$ فإن الجملة (S_1) تقبل عدد لانهائي من الحلول أو لا تقبل حلول. (يمكن تحويل الجملة لكرامر)

مثال:

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية :

$$(S_2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي $AX = b$ يكتب على الشكل :

$$(S_2) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b$$

حل الجملة (S_2) بإستعمال طريقة كرامر :

بما أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل و $det(A) = -12 \neq 0$ فإن الجملة (S_2) جملة كرامر و حلها معطى بالشكل :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

حل الجملة (S_2) بإستعمال مقلوب مصفوفة:

بما أن $\det(A) = -12 \neq 0$ فإن A قابلة للقلب أي A^{-1} موجودة

و بالتالي الجملة (S_2) تقبل حلا وحيدا معطى بالشكل : $\boldsymbol{X = A^{-1}b}$

لنحسب A^{-1} بإستعمال طريقة المصفوفة المرافقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t \quad ; \quad C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}} , \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \ , c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \ , c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \ , c_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \ , c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , c_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \ , c_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

و منه فنجد:

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

و بالتالي حل الجملة (S_2) معطى بالشكل :

$$X = A^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -2 & 7 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{12}(-4 + 0 + 0) = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-1}{12}(-2 + 0 - 6) = \frac{2}{3} \\ x_3 = \frac{-1}{12}(2 + 0 - 6) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3-1-3-2. حل الجملة (S_1) بإستعمال تحويل غوص :

لتكن المصفوفة الموسعة (A' / b') المصفوفة المكافئة للمصفوفة الموسعة (A/b) بتحويل غوص المطبق على (A / b)، عندئذ فإن حل الجملة (S_1) مكافىء لحل الجملة (S_1') حيث: $(S_1') \Leftrightarrow A'X = b'$.

و بالإعتماد على الرتبة، نميز الحالات التالية :

أ. إذا كانت $rg(A) = rg(A/b) = n$ فإن الجملة (S_1) تملك حلا وحيدا.

ب. إذا كانت $rg(A) = rg(A/b) < n$ فإن الجملة (S_1) تملك عدد غير منته من الحلول.

ج. إذا كانت $rg(A) \neq rg(A / b)$ فإن الجملة (S_1) لا تملك حلول.

مثال: لتكن جملة المعادلات الخطية :

$$(S_2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي $AX = b$ يكتب على الشكل :

$$(S_2) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b$$

حل جملة المعادلات الخطية (S_2) بطريقة تحويل غوص:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 - L_2 \mapsto L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}L_1 \mapsto L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2L_2 \mapsto L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 + \frac{2}{3}L_2 \mapsto L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

من الواضح أن : $rg(A\ /\ b) = rg(A) = 3$ و منه الجملة (S_2) تقبل حلا وحيدا

الجملة المكافئة للجملة (S_2) هي: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$، إذن لدينا :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 & (1) \\ 0 - 3x_2 + 3x_3 = -1 & (2) \\ 0 + 0 + 4x_3 = \frac{4}{3} & (3) \end{cases}$$

من المعادلة (3) نجد $x_3 = \frac{1}{3}$، نعوض x_3 في المعادلة (2) نجد $-3x_2 + 1 = -1$،

و منه $x_2 = \frac{2}{3}$ ، ثم نعوض x_3 و x_2 في المعادلة (1) نجد : $2x_1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$،

و منه $x_1 = \frac{1}{3}$.

و بالتالي حلول الجملة (S_2) هي المجموعة : $S = \left\{\left(x_1 = \frac{1}{3}\ ,\ x_2 = \frac{2}{3}\ ,\ x_3 = \frac{1}{3}\right)\right\}$

ملاحظة: ليس بالضرورة بأن تقوم بنفس المزج الخطي الذي أجريناه و لكن المهم أن تصل إلى نفس النتائج.

نظرية: إن الشرط الكافي و اللازم لكي تقبل الجملة الخطية المتجانسة $AX = 0$ ذات n معادلة و n مجهول حلول غير تافهة $(X = 0)$ هو أن يكون $\det(A) = 0$.

2-3-2. حل جملة معادلات خطية ذات n معادلة و m مجهول :

لتكن جملة المعادلات الخطية (S_3) ذات n معادلة و m مجهول

$$(S_3)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

الشكل المصفوفي $AX = b$ يكتب على الشكل:

$$(S_3) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2m} \\ . & . & . & & . & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & . \\ . & . & & & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots\dots & a_{nm} & \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b$$

1-2-3-2. طريقة الحل (تحويل جملة الى جملة كرامر) :

نستخرج من المصفوفة A مصفوفة مربعة بديلة A_r محددها غير معدوم و نرمز له بالرمز Δ_r (نبحث عن أعلى رتبة ممكنة للمصفوفة A) و ذلك بحذف أسطر و أعمدة من المصفوفة A حيث:

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

العدد r عبارة عن رتبة المصفوفة المربعة A_r المستخرجة من المصفوفة A، نسمي المجاهيل الموافقة للأعمدة A_r بالمجاهيل الرئيسية فيما تسمى المجاهيل المتبقية بالوسائط ففي هذه الحالة تتحول الجملة (S_3) الى جملة كرامر (S_3') بمصفوفة A_r من r معادلة و r مجهول، فهي إذا تقبل حلا وحيدا، فإذا كان هذا الحل يحقق كل معادلات الجملة (S_3) فنقول أن الجملة تقبل حلول و إذا كان هذا الحل لا يحقق معادلة واحدة على الأقل من الجملة (S_3) فنقول الجملة (S_3) لا تقبل حلول.

- يدعى Δ_r المحدد الرئيسي (هو محدد المعادلات الرئيسية) و تدعى المعادلات غير الرئيسية المعادلات التي لا تدخل في تشكيل المحدد الرئيسي و مجاهيلها تستعمل كوسائط.

- يجب أن تكون كل معادلة غير رئيسية منسجمة مع جملة المعادلات الرئيسية أي المحدد المتكونة أعمدته من عوامل المجاهيل الرئيسية و العمود b يساوي الصفر.

ملاحظة: نقول أن الجملة الخطية $AX = 0$ ذات n معادلة و m مجهول بأنها متجانسة إذا كان $b = 0$

نظرية: لكي تقبل الجملة الخطية $AX = b$ ذات n معادلة و m مجهول حلول يكفي و يلزم أن تكون كل معادلة غير رئيسية منسجمة مع جملة المعادلات الرئيسية.

مثال1: (عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات)

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$(S_4)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 & (1)\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2 & (2)\\ 3x_1+5x_2-x_3+3x_4=5 & (3)\end{cases}$$

الشكل المصفوفي $AX=b$ يكتب على الشكل :

$$(S_4)\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&1\\3&5&-1&3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}}_{b}\Leftrightarrow AX=b$$

لدينا :

$$|E|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\3&5&3\end{vmatrix}=0,|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\3&5&-1\end{vmatrix}=0,|C|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\5&-1&3\end{vmatrix}=0,$$

$$|D|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\3&-1&3\end{vmatrix}=0$$

حيث: C,B,E و D هي مصفوفات مستخرجة من المصفوفة A و ذلك بحذف في كل مرة عمود، وبما أن جميع محدداتها تساوي الصفر فإن $rg(A)\neq 3\leq 2$

إذن نستخرج مصفوفة أخرى من المصفوفة A و ذلك بحذف عمودين و سطر و لتكن

$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ و لدينا $\Delta_2=\det(A_2)=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$

Δ_2 هو المحدد الرئيسي لمعادلتين رئيسيتين هما المعادلة الأولى و الثانية أما المعادلة الثالثة فهي معادلة غير رئيسية إذن المجهولين الرئيسين هما x_1 و x_2 و المجهولين غير الرئيسين هما x_3 و x_4، يتم إستعمالهما كوسائط.

و لدينا كذلك المعادلة الثالثة الغير رئيسية منسجمة مع المعادلتين الرئيسيتين (الأولى و الثانية)

لأن $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

إذن تتحول الجملة (S_4) لجملة كرامر المكافئة (S'_4) : $A_2X = b'$ بحيث نعتبر x_1 و x_2 مجاهيل أساسية و المجهولين غير الرئيسين هما x_3 و x_4، يتم إستعمالهما كوسائط و لدينا :

$$(S'_4): A_2X = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_3 - x_4 \\ 2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 2 + x_3 - x_4 \end{cases}$$

حلها معطى بالشكل :

$$x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} 1 - x_3 - x_4 & 1 \\ 2 + x_3 - x_4 & 2 \end{pmatrix}}{\det(A_2)} = -3x_3 - x_4$$

$$x_2 = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 - x_3 - x_4 \\ 1 & 2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}}{\det(A_2)} = 1 + 2x_3$$

نعوض x_3 و x_4 في المعادلة الثالثة للجملة (S_4) نجد :

$3(-3x_3 - x_4) + 5(1 + 2x_3) - x_3 + 3x_4 = 5$ إذن محققة

و بالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_4) هي المجموعة

$$\{(-3x_3 - x_4, 1 + 2x_3, x_3, x_4); \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

مثال2: (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$(S_5)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (1) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 & (2) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 & (3) \end{cases}$$

1. كتابة الشكل المصفوفي $(AX = b)$ لجملة المعادلات الخطية (S_4) :

$$(S_5) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b$$

2. تحويل الجملة لكرامر (بالإعتماد على رتبة الجملة) :

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A_3, A_2, A_1 و A_4 هي مصفوفات مستخرجة من المصفوفة A وبما أن جميع محدداتها تساوي الصفر فإن $rg(A) \neq 3 \leq 2$

إذن نستخرج مصفوفة أخرى من المصفوفة A و ذلك بحذف عمودين و سطر و لتكن مثلا

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و لدينا $\Delta_2 = \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Δ_2 هو المحدد الرئيسي لمعادلتين رئيسيتين هما المعادلة الأولى و الثانية أما المعادلة الثالثة فهي معادلة غير رئيسية إذن المجهولين الرئيسين هما x_3 و x_4 و المجهولين غير الرئيسين هما x_1 و x_2، يتم إستعمالهما كوسائط.

و لدينا كذلك المعادلة الثالثة الغير رئيسية منسجمة مع المعادلتين الرئيسيتين (الأولى و الثانية) لأن $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

إذن تتحول الجملة (S_5) لجملة كرامر المكافئة (S'_5) : $BX = b'$ بحيث نعتبر x_3 و x_4 مجاهيل أساسية و المجهولين غير الرئيسين هما x_1 و x_2، يتم إستعمالهما كوسائط و لدينا :

$$(S'_5): BX = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_2 - x_1 \\ -1 + 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 1 + 2x_2 - x_1 \\ x_3 - x_4 = -1 + 2x_2 - x_1 \end{cases}$$

حلها معطى بالشكل :

$$x_3 = \frac{det\begin{pmatrix} 1 + 2x_2 - x_1 & 1 \\ -1 + 2x_2 - x_1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(B)} = 2x_2 - x_1$$

$$x_4 = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 1 + 2x_2 - x_1 \\ 1 & -1 + 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}}{\det(B)} = 1$$

نعوض x_3 و x_4 في المعادلة الثالثة للجملة (S_5) نجد :

$x_1 - 2x_2 + 2x_2 - x_1 + 5(1) = 5$ (محققة)

و بالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_5) هي المجموعة

$$S = \{(x_1, x_2, 2x_2 - x_1, 1); \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

مثال3: (عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية :

$$(S_6): \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

1. كتابة الشكل المصفوفي $(AX = b)$ لجملة المعادلات الخطية (S_6) :

$$(S_6) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b$$

حيث: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. تحويل الجملة لكرامر (بالإعتماد على رتبة الجملة) :

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

بما أن $A \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ فإن $rg(A) \leq Min(3,2) = 2$، إذن لتكن $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة A بحذف السطر الثالث، لدينا :

$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$ اذن $rg(B) = 2$ و منه $rg(A) = rg(B) = 2$ (رتبة المصفوفة A هي رتبة المصفوفة المستخرجة B)

إذن تتحول الجملة (S_6) لجملة كرامر المكافئة (S'_6) : $BX = b'$ بحيث نعتبر x و y مجاهيل أساسية و لا توجد وسائط و لدينا :

$$(S'_6): BX = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

حلها معطى بالشكل :

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}}{\det(B)} = \frac{-6 - 15}{-7} = 3$$

$$y = \frac{det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}{\det(B)} = \frac{10 - 3}{-7} = -1$$

نعوض x و y في المعادلة الثالثة للجملة (S_6) نجد : $3(3) + 2(-1) = 7$ (محققة)

و بالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_6) هي المجموعة $S = \{(x = 3\ ,\ y = -1)\}$

مثال4 : (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية :

$$(S_7)\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \end{cases}$$

1. كتابة الشكل المصفوفي $(AX = b)$ لجملة المعادلات الخطية (S_7) :

$$(S_7) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b$$

حيث: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

2. تحويل الجملة لكرامر (بالإعتماد على رتبة الجملة) :

لنبحث عن رتبة المصفوفة A (رتبة المصفوفة هي رتبة الجملة):

بما أن $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ فإن $rg(A) \leq Min(3,4) = 3$ إذن لتكن $B_4 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة A بحذف العمود الرابع و لدينا :

$$det(B_4) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= 2(2-3) + (3-1) = -2 + 2 = 0$$

$B_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة A بحذف العمود الثالث و لدينا :

$$det(B_3) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$= 2(4-3) - (3-1) = 2 - 2 = 0$$

$B_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة A بحذف العمود الثاني و لدينا

$$det(B_2) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة A بحذف العمود الأول و لدينا :

$$det(B_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة A بحذف العمود الأول و لدينا :

$$det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

إذن جميع المحددات المستخرجة من محدد A من الدرجة أو الصنف (3×3) معدومة و منه $rg(A) \leq 2$

إذن لتكن $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من A بحذف السطر الثالث و العمودين الثالث و الرابع و لدينا :

$$det(C) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

و منه : (عدد أسطر المصفوفة) $rg(A) = rg(C) = 2$

إذن تتحول الجملة (S_7) لجملة كرامر المكافئة (S'_7) : $CX' = b'$ بحيث نعتبر x و y مجاهيل أساسية و $t\ ,\ z$ وسائط و لدينا :

$$(S'_7): CX' = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{z} - \mathrm{t} \\ -2\mathrm{z} - 4\mathrm{t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -\mathrm{z} - \mathrm{t} \\ x + 3y = -2\mathrm{z} - 4\mathrm{t} \end{cases}$$

حلها معطى بالشكل :

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} -\mathrm{z} - \mathrm{t} & 1 \\ -2\mathrm{z} - 4\mathrm{t} & 3 \end{pmatrix}}{\det(C)} = \frac{-3z - 3t + 2z + 4t}{2} = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t$$

$$y = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{z}-\mathrm{t} \\ 1 & -2\mathrm{z}-4\mathrm{t} \end{pmatrix}}{\det(C)} = \frac{-2z-4t+z+t}{2} = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t$$

نعوض x و y في المعادلة (3) في الجملة (S_5) نجد : $2\left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t\right) + z - t = 0$ (محققة) و بالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_7) هي المجموعة :

$$S = \left\{ \left(x = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t\,, \qquad y = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t \right), \qquad z,t \in \mathbb{R} \right\}$$

2-2-3-2. حل الجملة (S_1) بإستعمال تحويل غوص :

لتكن المصفوفة الموسعة (A' / b') المصفوفة المكافئة للمصفوفة الموسعة (A/b) بتحويل غوص المطبق على (A / b)، عندئذ فإن حل الجملة (S_1) مكافىء لحل الجملة (S_1') حيث $A'X = b' \Leftrightarrow (S_1')$

و بالإعتماد على الرتبة، نميز الحالات التالية :

1. الحالة: $m < n$ أي عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل

أ. إذا كانت $rg(A) = rg(A/b) = m$ فإن الجملة (S_1) تملك حلا وحيدا

ب. إذا كانت $rg(A) = (A/b) < m$ فإن الجملة (S_1) تملك عدد غير منته من الحلول

ج. إذا كانت $rg(A) \neq rg(A/b)$ فإن الجملة (S_1) لا تملك حلول.

2. الحالة: $m > n$ أي عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل

أ. إذا كانت $rg(A) = rg(A/b) \leq n$ فإن الجملة (S_1) تملك عدد غير منته من الحلول

ب. إذا كانت $rg(A) \neq rg(A/b)$ فإن الجملة (S_1) لا تملك حلول.

مثال1: (عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية :

$$(S_6): \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

1. كتابة الشكل المصفوفي $(AX = b)$ لجملة المعادلات الخطية (S_4) :

$$(S_6) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b$$

حيث: $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 7\end{pmatrix}$

2. حل الجملة بإستعمال تحويل غوص :

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & 5\\ 3 & 2 & 7\end{array}\right)\xrightarrow[L_3-3L_2\mapsto L_3]{}\left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & 5\\ 0 & 8 & -8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2-\frac{1}{2}L_1\mapsto L_2]{}\left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 3\\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 8 & -8\end{array}\right)\xrightarrow[2L_2]{}\left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 3\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & 8 & -8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3+\frac{8}{7}L_2\mapsto L_3]{}\left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 3\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)=(A'|b')$$

إذن : عدد المجاهيل $= rg\,(A|b) = rg(A) = 2$ و منه الجملة (S_6) تملك حلا وحيدا

تتحول الجملة (S_6) للجملة المكافئة $A'X=b'$

$$A'X=b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -7\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=3\\ 0-7y=7\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=-1, \qquad x=3$$

و بالتالي مجموعة الحلول للجملة (S_4) هي المجموعة $S=\{(x=3\ ,\ y=-1\ )\}$

مثال 2: (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل)

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية :

$$(S_7)\begin{cases}x+y+z+t=0\\ x+3y+2z+4t=0\\ 2x+z-t=0\end{cases}$$

1. كتابة الشكل المصفوفي $(AX=b)$ لجملة المعادلات الخطية (S_7) :

$$(S_7) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = b$$

حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. حل الجملة بإستعمال تحويل غوص :

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_1 \mapsto L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 - L_1 \mapsto L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_2 \mapsto L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|b')$$

إذن : عدد المجاهيل $= 4 > rg\,(A|b) = rg(A) = 2$

و منه الجملة (S_7) تملك عدد غير منته من الحلول

تتحول الجملة (S_7) للجملة المكافئة $A'X = b'$ بحيث نعتبر x و y مجاهيل أساسية و $t\ ,\ z$ وسائط و لدينا :

$$A'X = b' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 0 + 2y + z + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -z - t \\ 2y = -z - 3t \end{cases}$$

بحل الجملة نجد : $y = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t$ و $x = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t$

و منه مجموعة الحلول للجملة (S_7) هي المجموعة :

$$S = \left\{ \left(x = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t \, , \; y = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t \; \right), \; \mathrm{z,t} \in \mathbb{R} \right\}$$

الفصل الثالث:

التكاملات

1-3. قابلية التكامل بمفهوم ريمان: ليكن $[a \quad b]$ مجال محدود و مغلق (متراص) من $\mathbb{R}$، و لتكن f دالة حقيقية معرفة و محدودة على المجال $[a \quad b]$.

تعريف1: نقول عن تجزئة $d_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ للمجال $[a \quad b]$ أنها منتظمة، إذا كان طول جميع مجالاتها هو $\frac{b-a}{n}$ أي $\forall i = 0,1, \dots, n: x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

بفرض أن:

$$\forall i = 1, \dots, n: m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} (f(x)), M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} (f(x))$$

تعريف2: نسمي مجموع داربو الأسفل المتصل بالدالة f و التقسيم d_n، العدد الحقيقي

$$s_n(f) = s(f, d_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} m_i$$

- نسمي مجموع داربو الأعلى المتصل بالدالة f و التقسيم d_n، العدد الحقيقي

$$S_n(f) = S(f, d_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} M_i$$

ملاحظة: $s_n(f)$ متتالية متزايدة ، $S_n(f)$ متتالية متناقصة و لدينا:

$$\forall n \ge 1: s_n(f) \le S_n(f)$$

و منه نستنتج أن : $s_n(f)$ و $S_n(f)$ متتاليتين متقاربتين.

تعريف3: نقول عن الدالة f إنها قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على المجال $[a \quad b]$ إذا كان لدينا $\lim_{n \to +\infty} s_n(f) = \lim_{n \to +\infty} S_n(f)$ و تشكل النهاية المشتركة للنهايتين, تكامل f على المجال $[a \quad b]$ و نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} S_n(f) = \lim_{n \to +\infty} s_n(f)$$

مثال1: أثبت أن الدالة $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) = x^2 \end{matrix}$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على المجال $[0 \quad 1]$

التجزئة المنتظمة للمجال $[0 \quad 1]$ معرفة بالشكل $x_i = a + i\frac{b-a}{n} = \frac{i}{n}$ أي

$$a = x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 = b$$

إذن

$$f(x_0) = f(0) = 0, f(x_1) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \dots., f(x_n) = f(1) = 1$$

بما أن f دالة متزايدة على المجال [0 1] فإن

$$m_0 = \inf_{0<x<\frac{1}{n}} f(x) = f(0) = 0, m_1 = \inf_{\frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}} f(x) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \dots \dots$$

$$\dots, m_i = \inf_{\frac{i}{n}<x<\frac{i+1}{n}} f(x) = f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$M_0 = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} f(x) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, M_1 = \sup_{\frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}} f(x) = f\left(\frac{2}{n}\right) = (\frac{2}{n})^2, \dots$$

$$\dots, M_i = \sup_{\frac{i}{n}<x<\frac{i+1}{n}} f(x) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

و منه لدينا:

$$s_n(f) = s(f, d_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{6n^3}\, n(n-1)(2n-1)$$

$$S_n(f) = S(f, d_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)^2}{n^2} = \frac{1}{6n^3}\, n(n+1)(2n+1)$$

نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

و بالتالي f قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على المجال [0 1]، و لدينا $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

مثال2:

الدالة $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ غير قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على المجال [0 1] لأن

$\forall i = 0,1, \dots, n-1; m_i = 0,\ M_i = 1$، و منه $S_n(f) = 1$ و $s_n(f) = 0$

قضية1: كل دالة حقيقية f مستمرة على المجال $[a \quad b]$ من $\mathbb{R}$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على هذا المجال.

قضية2: كل دالة حقيقية f رتيبة على المجال $[a \quad b]$ من $\mathbb{R}$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على هذا المجال.

مجاميع ريمان: لتكن f دالة معرفة و محدودة على المجال $[a \quad b]$، و لتكن

$d = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ تجزئة منتظمة للمجال $[a \quad b]$ أي نقسم المجال $[a \quad b]$ إلى n مجال متساوي بواسطة النقاط $x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0,1,2,\dots,n$ فنحصل على المستطيلات التي عرضها $\forall k = 0,1,\dots,n-1;\ x_{k+1} - x_k = \frac{(b-a)}{n}$ و أطوالها هي الإرتفاعات $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$

تعريف: نسمي مجموع ريمان و نرمز له بالرمز R_n المرافق للتابع f و للتجزئة المجموع التالي:

$$R_n(d) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(x_k) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

نتيجة: لتكن f دالة معرفة و محدودة وقابلة للتكامل على المجال $[a \quad b]$، حسب ريمان لدينا

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

ملاحظات:

1. إن العدد $\int_a^b f(x)dx$ غير مرتبط بالتقسيم d، و كذلك لا يتغير بتغير قيم الدالة عند عدد غير منته من النقاط .

2. إن المتغير x في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم" بمعنى أنه يمكن تعويض الحرف x بأي حرف أخر أي $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \cdots$

3. نضع إصطلاحا $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,, \int_a^a f(x)dx = 0$

خواص:

لتكن f و g دالتين مستمرتين على المجال $[a \quad b]$، لدينا

1. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
4. $f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a \quad b]$

2-3. التكامل غير المحدود

البحث عن الدوال الأصلية:

تعريف1: لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$، نسمي دالة أصلة للدالة f كل دالة $F: I \to \mathbb{R}$ معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، و تحقق

$$\forall x \in I: F'(x) = f(x).$$

أمثلة:

1. $F: x \to x^2$ دالة أصلية للدالة $f: x \to 2x$ على $\mathbb{R}$.
2. $F: x \to x^2 + 1$ أيضا دالة أصلية للدالة $f: x \to 2x$ على $\mathbb{R}$.
3. $F: x \to cos(x)$ دالة أصلية للدالة $f: x \to sin(x)$ على $\mathbb{R}$.

ملاحظة: الدالة الأصلية ليست وحيدة

نظرية: إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f فإن $F - G =$ ثابت

نتيجة: إذا كانت $F: I \to \mathbb{R}$ دالة أصلية للدالة $f: I \to \mathbb{R}$ فإن الدوال من الشكل $F(x) + c$ هي كذلك دوال أصلية للدالة f حيث c ثابت حقيقي.

تعريف2: نسمي **تكامل غير محدود** للدالة $f: I \to \mathbb{R}$ و نرمز له بالرمز $\int f(x)$ ، كل دالة من الشكل $F(x) + c$ و نكتب $\int f(x)dx = F(x) + c$

ملاحظة: التكاملين $\int_a^b f(x)dx$ و $\int f(x)dx$ ليس لهما نفس المعنى، التكامل $\int_a^b f(x)dx$ هو عدد حقيقي أما التكامل $\int f(x)dx$ هو عبارة عن دالة.

خواص أساسية: لتكن F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على الترتيب، إذن الدوال

$$f+g, \qquad \alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad fG+Fg, \qquad \frac{fG-Fg}{G^2} \quad (G \neq 0)$$

تقبل دوال أصلية و لدينا:

1. $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x)$
2. $\int (\alpha f)(x)dx = \alpha F(x)$
3. $\int (fG+Fg)(x)dx = (F \times G)(x)$
4. $\int \left(\frac{fG-Fg}{G^2}\right)(x)dx = \left(\frac{F}{G}\right)(x)$

مثال: $F: x \to x^2$ دالة أصلية للدالة $f: x \to 2x$ على $\mathbb{R}$ و $G: x \to x^3$ دالة أصلية للدالة $g: x \to 3x^2$ على $\mathbb{R}$، إذن لدينا:

$F + G: x \to x^2 + x^3$ دالة أصلية للدالة $f + g: x \to 2x + 3x^2$ على $\mathbb{R}$،

$F \times G: x \to x^5$ دالة أصلية للدالة $f \times g: x \to 5x^4$ على $\mathbb{R}$،

$\frac{F}{G}: x \to \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ دالة أصلية للدالة $\frac{fG-Fg}{G^2}: x \to \frac{2x^4-3x^4}{x^6} = -\frac{1}{x^2}$ على $\mathbb{R}^*$.

3-3. التكامل المحدود:

لتكن f دالة معرفة على مجال $[a \quad b]$ من $\mathbb{R}$، و لتكن F دالة أصلية لها على المجال $[a \quad b]$.

نسمي تكامل محدود للدالة f بين a و b العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ ، و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ و نكتب : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ملاحظات:

أ. إن المتغير x في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم" بمعنى أنه يمكن تعويض الحرف x بأي حرف أخر أي: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \cdots$

ب. نضع إصطلاحا $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

خواص:

لتكن f و g دالتين مستمرتين على المجال $[\ a \quad b\ ]$، لدينا

أ. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ب. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

ج. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

د. $f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

و. $\int_a^b f(x)dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a \quad b]$

4-3. طرق حساب التكامل:

الطرق العامة: يمكن إيجاد دالة أصلية للدالة f بسهولة إذا كانت الدالة f مشتقة دالة معروفة.

أمثلة:

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + k, \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + k$$

$$, \int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c\ , \int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg(x) + k \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{k}$$

$$\int ch(x)dx = sh(x) + k, \int sh(x)dx = ch(x) + k, \int e^x\,dx = e^x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + k, \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + k$$

$$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tg(x) + k, \int \frac{1}{ch^2(x)}dx = th(x) + k$$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = Aln|x-a| + k,\ \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + k$$

في كل مرة يكون الثابت k إختياري من $\mathbb{R}$.

طريقة تبديل المتغير : لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، و $\varphi: I \mapsto J$ تقابل مستمر و قابل للاشتقاق على المجال I.

بوضع $x = \varphi(t)$ فنجد $dx = \varphi'(t)dt$ و منه نجد العلاقة 1.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

مثال1: أحسب التكامل $I = \int x\sqrt{x-1}dx$

نضع $t = \sqrt{x-1}$ أي $t^2 = x - 1$ و منه $dx = 2tdt$، بتعويض في التكامل نجد

$$I = \int (1+t^2)t\,(2t)dt = \int 2t^2dt + \int 2t^4dt = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + c; c \in \mathbb{R}$$

$$I = \frac{2}{3}(\sqrt{x-1})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5 + c; c \in \mathbb{R}$$

مثال2: أحسب التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)dx$

قبل تغير المتغير لدينا

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3(x)dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2(x))\cos(x)\,dx$$

نضع $t = \sin(x)$ أي $dt = \cos(x)dx$ ، لدينا من أجل $x = 0$ فإن $t = \sin(0) = 0$
و من أجل $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

بتعويض في التكامل نجد :

$$I = \int_0^1 (1-t^2)\mathrm{dt} = [\,t]_0^1 - \frac{1}{3}[t^3]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

التكامل بالتجزئة: لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق بإستمرار على المجال $[a\ \ b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

في الحالة العامة لدينا : $\int gdf = fg - \int fdg$ أو $\int fdg = fg - \int gdf$

مثال1: أحسب التكامل $I = \int xe^x dx$

نضع $df(x) = 1.dx$ و منه $f(x) = x$ و $g(x) = e^x$ و منه $dg(x) = e^x dx$

$$I = \int fdg = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + c$$

مثال2: أحسب التكامل $I = \int_0^\pi xcos(x)dx$

نضع $g(x) = x$ و منه $dg(x) = 1.dx$ ، و نضع كذلك $df(x) = \cos(x)$ و منه $f(x) = \sin(x)\,dx$، إذن نجد

$$I = \int_0^\pi g(x)df(x) = \underbrace{[xsin(x)]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \sin(x)\,dx = [cox(x)]_0^\pi = -2$$

5-3. تكامل الدوال الناطقة:

تعريف: نسمي كسرا ناطقا كل عبارة من الشكل $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P، Q كثيري حدود من $\mathbb{R}[x]$.

إن مكاملة الدوال الكسرية الناطقة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يعتمد أساسا على تفكيك الكسور الى عناصر بسيطة من الشكل $\frac{a}{(x-b)^n}$ و $\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$ حيث a، b ، α و β عناصر من $\mathbb{R}$ و n، m من $\mathbb{Z}$.

تفكيك الكسور:

أولا: إذا كانت درجة البسط $P(x)$ أكبر من أو تساوي درجة المقام، عندئذ، نقوم بإجراء القسمة الإقليدية ل $P(x)$ على $Q(x)$ سنحصل على حاصل القسمة و ليكن $M(x)$ و ليكن باقي القسمة $R(x)$ و بالتالي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يكتب بالشكل: $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

حيث درجة $R(x)$ أقل تماما من درجة $Q(x)$. $(deg(R) < deg(Q))$.

في هذه الحالة نفكك الكسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ الى كسور جزئية.

ثانيا: نقوم بتفكيك $\frac{R(x)}{Q(x)}$ يعني تفكيك المقام $Q(x)$ الى كثيرات حدود خطية من الشكل $ax+b$ أو تربيعية من الشكل ax^2+bx+c مع إحتمال تكرار كل واحدة منهما إلى n من مرات أي تصبح من الشكل $(ax+b)^n$ أو $(ax^2+bx+c)^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

هناك أربعة حالات:

الحالة الأولى: $Q(x)=(a_1x+b_1)(\quad_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)$

عندئذ يكتب الكسر على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

الحالة الثانية: $Q(x)=(ax+b)^n$

عندئذ يكتب الكسر على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

الحالة الثالثة:

$$Q(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\dots(a_nx^2+b_nx+c_n)$$

عندئذ يكتب الكسر على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

الحالة الرابعة: $Q(x)=\quad(ax^2+bx+c)$

عندئذ يكتب الكسر على الشكل :

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

خلاصة: نفرض أن $Q(x) = (x-\alpha)^n(x^2+ax+b)^m$

عندئذ يكتب الكسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ على الشكل:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{(x-\alpha)^i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i x + B_i}{(x^2+ax+b)^i}$$

حيث β_i، B_i و A_i عناصر من $\mathbb{R}$ يتم تعينهم بالمطابقة.

الدوال الأصلية للكسور الناطقة:

ليكن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ كسرا ناطقا معاملاته في $\mathbb{R}$، لقد رأينا سابقا أن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يفكك في $\mathbb{R}$ على شكل مجموع دوال على النحو التالي :

أ. دالة على شكل كثير حدود

ب. كسور ناطقة من الشكل: $\frac{A}{(x-a)^n}$

ج. كسور ناطقة من الشكل: $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$

و بالتالي فإن حساب دالة أصلية للكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ يقودنا بالتأكيد لحساب الدوال الأصلية التي هي من الشكل أ)، ب) و ج) السابقة.

أ. حساب تكامل من الشكل: $\int P_n(x)dx$ حيث P_n كثير حدود من الدرجة n.

$$\int P_n(x)dx = \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)dx$$

$$= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + c$$

ب. حساب تكامل من الشكل: $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx$

$$n = 1 \Rightarrow \int \frac{A}{x-a}dx = Aln(|x-a|) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$n \geq 2 \Rightarrow \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ج. حساب تكامل من الشكل: $\int \frac{Ax+B}{(ax^2bx+c)^n} dx$

أولا لنحسب التكامل من الشكل $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$

نكتب المقام على الشكل القانوني: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$

نضع: $u = x + \frac{b}{2a}$ و $l = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a}$، إذن لدينا ثلاث حالات:

1. $\Delta = 0$، في هذه الحالة نتحصل على تكامل بسيط

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{au^2} du = -\frac{1}{au} = -\frac{1}{a(x + \frac{b}{2a})} + C$$

2. $\Delta > 0$، في هذه الحالة نضع $k^2 = l$، فيصبح لدينا:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2-k^2} du = \frac{-1}{2ak}\int \left(\frac{1}{u+k} - \frac{1}{u-k}\right) du = \frac{-1}{2ak} ln\left|\frac{u+k}{u-k}\right| + C$$

3. $\Delta < 0$، في هذه الحالة نضع $k^2 = -l$، فيصبح لدينا :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+k^2} du = \frac{1}{ak^2}\int \frac{1}{1+(\frac{u}{k})^2} du = \frac{1}{ak^2} Arctan\left(\frac{u}{k}\right) + C$$

مثال: أحسب التكامل التالي $\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{1}{2+(x+1)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}$$

نضع $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ و منه $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}} \leftarrow dx = \sqrt{2}dt$ إذن

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} Arctan(t) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} Arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

ثانيا لنحسب التكامل من الشكل: $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

نستخرج مشتق المقام في البسط أي: $mx+n = \frac{m}{2a}\left(\underbrace{2ax+b}_{\text{مشتق المقام}}\right)+n-\frac{mb}{2a}$، و منه نجد

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx = \frac{m}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}}_{I_1} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx}_{I_2}$$

و منه لحساب I_2 إرجع إلى الشكل الأول و لدينا: $I_1 = ln|ax^2+bx+c|$

مثال: أحسب التكامل التالي $\int \frac{x+2}{^2+2x+3}dx$

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}ln|x^2+2x+3| + \frac{\sqrt{2}}{2}Arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C, \qquad C\in\mathbb{R}$$

نرجع لحساب التكامل : $I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx$ **حيث** $n \geq 2$

نكتب المقام على الشكل $(\Delta < 0)$:

$$x^2+bx+c = \left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + (c-\frac{b^2}{4})\right] = t^2+k^2$$

حيث $t = x+\frac{b}{2}$, $k^2 = c-\frac{b^2}{4}$

إذن التكامل I يصبح على الشكل :

$$I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx = \int \frac{At-\frac{Ab}{2}+B}{(t^2+k^2)^n}dt = \int \frac{At+h}{(t^2+k^2)^n}dt$$

$$= A\int \frac{t}{(t^2+k^2)^n}dt + h\int \frac{1}{(t^2+k^2)^n}dt = I_n + J_n$$

حيث $I_n = A\int \frac{t}{(t^2+k^2)^n}$ ، $J_n = h\int \frac{1}{(t^2+k^2)^n}dt$ و $h = -\frac{Ab}{2} + B$

لحساب I_n نضع $y = t^2 + k^2$ فيكون $dy = 2tdt$ و بالتالي

$$I_n = A\int \frac{t}{(t^2+k^2)^n}dt = \frac{A}{2}\int \frac{1}{y^n}dt = \frac{A}{2(1-n)}\ y^{1-n}$$

$$= \frac{A}{2(1-n)}\ (t^2+k^2)^{1-n} + c$$

و لحساب التكامل J_n نكامل بالتجزئة فنحصل على:

$$J_n = h\int \frac{1}{(t^2+k^2)^n}dt = \frac{ht}{(t^2+k^2)^n} + h2n\int \frac{t^2}{(t^2+k^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{ht}{(t^2+k^2)^n} + h2n\int \frac{t^2+k^2-k^2}{(t^2+k^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{ht}{(t^2+k^2)^n} + \ 2n\int \frac{h}{(t^2+k^2)^n}dt - 2nk^2\int \frac{h}{(t^2+k^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{ht}{(t^2+k^2)^n} + 2nJ_n - 2nk^2J_{n+1}$$

و بالتالي نجد:

$$2nk^2J_{n+1} = \frac{ht}{(t^2+k^2)^n} + (2n-1)J_n$$

هذه العلاقة تمكننا من حسابJ_2 بتعويض $n = 1$ فنجد J_2 بدلالة J_1 حيث أن J_1 قيمته معلومة و هي:

$$J_1 = h\int \frac{1}{t^2+k^2}dt = \frac{h}{k^2}\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{k^2}}dt = \frac{h}{k}Arctan\left(\frac{t}{k}\right) + c$$

و بهذا يصبح التكامل J_2 معلوم، بنفس الطريقة نجدJ_3 بوضع $n = 2$ فنحصل على J_3 بدلالة J_2 التي أصبحت معلومة و هكذا ....

أشكال أخرى :

تكامل من الشكل: $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

نعلم أن:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(\underbrace{x+\frac{b}{2a}}_{u}\right)^2 - \left(\underbrace{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}_{k^2}\right)\right]$$

ومنه لدينا حالتين:

1. $a<0$: إذن يجب أن يكون $\Delta \geq 0$ ، نضع $k^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ و منه نجد:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-u^2}} = \frac{1}{k\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{u}{k})^2}} = \frac{1}{k\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{u}{k}\right)+C$$

2. $a<0$، نضع $\pm^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ (حسب إشارة Δ)

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 \mp k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ ln\left|u+\sqrt{u^2 \mp k^2}\right|+C$$

و لدينا كذلك:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 \mp k^2}} = \begin{cases} \frac{1}{k\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{u}{k})^2+1}} = \frac{1}{k\sqrt{a}}argsh\left(\frac{u}{k}\right)+C & si\ \Delta<0 \\ \frac{1}{k\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{u}{k})^2-1}} = \frac{1}{k\sqrt{a}}argch\left(\frac{u}{k}\right)+C & si\ \Delta>0 \end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل التالي $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx$

لدينا :

$$-2x^2+3x+2 = -2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{5}{8}$$

بوضع: $t = x+\frac{3}{4}$ نجد

$$-2x^2+3x+2=\frac{5}{8}\left[1-\left(\frac{4t}{\sqrt{5}}\right)^2\right]$$

و بالتالي :

$$\int\frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4t}{\sqrt{5}}\right)^2}}dt$$

نضع كذلك $u=\frac{4t}{\sqrt{5}}$ و منه $dt=\frac{\sqrt{5}}{4}du$ ، إذن لدينا

$$\int\frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin(u)=\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{4(x+\frac{3}{4})}{\sqrt{5}}\right)+C$$

تكامل من الشكل: $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

نستعمل نفس الطريقة السابقة المستعملة في الشكل الثاني فنجد:

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{m}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}_{I_2}$$

$$=\frac{m}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)I_2$$

لحساب I_2 نرجع إلى الشكل الثالث (الشكل السابق)

مثال: أحسب التكامل التالي $\int\frac{-8x+1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx$

$$\int\frac{-8x+1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx=2\int\frac{-4x+3}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx-5\int\frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx$$

$$=2\sqrt{-2x^2+3x+2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{4(x+\frac{3}{4})}{\sqrt{5}}\right)+C$$

تكامل من الشكل: $\int\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

نضع $t=\frac{1}{mx+n}$ أي $x=\frac{1}{mt}-\frac{n}{m}$، إذن $dx=\frac{-1}{mt^2}dt$ ثم نرجع إلى الشكل الرابع.

مثال: أحسب التكامل التالي $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-2}}dx$

نضع $t=\frac{1}{x+1}$ و منه $x=\frac{1}{t}-1 \leftarrow dx=\frac{-1}{t^2}dt$، إذن نجد

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-2}}dx=\int \frac{-1}{\sqrt{-t^2-2t+1}}dt=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2}}dt$$

$$=\arccos\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)+C=arccos\left(\frac{\frac{1}{x+1}+1}{\sqrt{2}}\right)+C \quad , \ C\in\mathbb{R}$$

تكاملات من الشكل: $\int f\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$

حيث f هو كسر ناطق بدلالة $x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}$

أولا نبحث عن المقام المشترك للكسور $1, \frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ و ليكن k، ثم نقوم بتبديل المتغير بوضع $x=t^k$ و منه نجد $dx=kt^{k-1}dt$، ثم نرجع f إلى كسر ناطق

مثال : أحسب التكامل التالي $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$

المقام المشترك ل $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ هو 4، إذن نضع $x=t^4$ و منه $dx=4t^3dt$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx=\int \frac{t^2}{t^3+1}(4t^3)dt=4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt=4\left[\int t^2\,dt-\int \frac{t^2}{t^3+1}dt\right]$$

$$=\frac{4}{3}\,t^3-\,ln|t^3+1|=\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}}-\,ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|+C \quad ; \ C\in\mathbb{R}$$

6-3. تكامل الدوال المثلثية و الأسية:

تكامل من النوع: $\int e^{kx}\cos(ax)\,dx$

لحساب هذا النوع من التكاملات، نكامل بالتجزئة مرتين و تكون دالته الأصلية على الشكل

$$e^{kx}(\alpha\cos(ax)+\beta\sin(ax))$$

تكامل من النوع: $\int p_n(x)e^{kx}dx$

$p_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n و $k \in \mathbb{R}$، يمكننا حساب التوابع الأصلية لهذا النوع من التكاملات بإستعمال التكامل بالتجزئة عدة مرات، و بعد الحساب نجد أن التوابع الأصلية هي من الشكل $F(x) = Q_n(x)e^{kx} + c$ حيث $Q_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n، و يمكن حسابه بسرعة بمقارنة $F'(x)$ مع $p_n(x)e^{kx}$.

مثال: $I = \int \underbrace{(2x^2 + 4x + 2)e^{2x}}_{f(x)} dx$

الدالة الأصلية للدالة f هي من الشكل $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$

$$F'(x) = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)e^{2x} = \underbrace{(2x^2 + 4x + 2)e^{2x}}_{f(x)}$$

بمطابقة $F'(x)$ مع $f(x)$ نجد $2a = 2$ ، $2a + 2b = 4$ و $b + 2c = 2$ و منه $a = 1$، $b = 2$ و $c = 0$، إذن $F(x) = (x^2 + 2x)e^{2x}$ و منه

$$I = (x^2 + 2x)e^{2x} + K$$

التكامل من الشكل $\int f(sh(x), ch(x))dx$

لحساب التكامل نستعمل التغير $t = e^x$ أو $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$

مثال: أحسب التكامل التالي $I = \int \frac{ch(x)}{sh(x)}$

نضع $t = th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$ و منه $dx = \frac{dt}{1-t^2} \leftarrow dt = \frac{1}{ch^2(x)} = \left(1 - th^2(x)\right)dx$

و منه التكامل I يصبح على الشكل

$$I = \int \frac{1}{t}\left(\frac{dt}{1-t^2}\right) = \int \frac{1}{t(1-t^2)}dt = \int \frac{1}{t(1-t)(1+t)}dt$$

$$= \int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt = ln|t| - \frac{1}{2}ln|1-t| - \frac{1}{2}ln|1+t| + C$$

$$\Longrightarrow I = ln|th(x)| - \frac{1}{2}ln|1 - th(x)| - \frac{1}{2}ln|1 + th(x)| + C; \quad C \in \mathbb{R}$$

تكامل من الشكل: $\int f(cos(x), sin(x))\, dx$ حيث f دالة كسرية

في هذه الحالة نضع $t = tan(\frac{x}{2})$ (في كثير من الحالات) و الدوال $\sin(x)$ و $\cos(x)$ معطاة بهذا الشكل :

$$\sin(x) = \frac{2tan(\frac{x}{2})}{1 + tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1 - tan^2(\frac{x}{2})}{1 + tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = Arctan(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

مثال: أحسب التكامل التالي $I = \int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx$

نضع: $t = tan(\frac{x}{2})$ و منه $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

و منه نجد، $dx = \frac{2}{1+t^2}dt \leftarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2(\frac{x}{2})\right)dx \leftarrow t = tan(\frac{x}{2})$

$$I = \int \frac{2}{2t + 1 - t^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\int \frac{1}{t - 1 + \sqrt{2}} + \int \frac{1}{1 - t + \sqrt{2}}dt\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[ln\left|t - 1 + \sqrt{2}\right| - ln\left|1 - t + \sqrt{2}\right|\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} ln\left|\frac{t - 1 + \sqrt{2}}{1 - t + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2} ln\left|\frac{tan(\frac{x}{2}) - 1 + \sqrt{2}}{1 - tan(\frac{x}{2}) + \sqrt{2}}\right| + C \;; C \in \mathbb{R}$$

تكامل من الشكل: $\int sin^n(x)\, cos^m(x)\, dx$

في هذه الحالة نميز ثلاث حالات :

أ. الحالة الأولى : n فردي أي $n = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي

$$\int sin^n(x)\, cos^m(x)\, dx = \int sin^{(2k+1)}(x)\, cos^m(x)\, dx$$

$$= \int sin^{2k}(x)\, cos^{m}(x)\, \sin(x)\, dx$$

$$= \int (1 - cos^{2}(x)\,)^{k}\ cos^{m}(x)\, \sin(x)\, dx$$

نضع : $t = cos(x)$ و منه $dt = -sin(x)\, dx$، إذن

$$\int sin^{n}(x)\, cos^{m}(x)\, dx = -\int (1 - t^{2})^{k}\ t^{m}\mathrm{dt}$$

هذا يعني أن التكامل يصبح عبارة عن تكامل كثير حدود.

مثال: 1. أحسب التكامل التالي $I = \int sin^{3}(x)cos^{6}(x)\, dx$

لدينا:

$$I = \int sin^{3}(x)cos^{6}(x)\sin(x)\, dx = \int (1 - cos^{2}(x))cos^{6}(x)\sin(x)\, dx$$

و منه نستعمل التغير $t = \cos(x)$، إذن $dt = -sin(x)dx$ أي $-dt = sin(x)dx$

و منه التكامل I يصبح على الشكل :

$$I = \int (1 - t^{2})t^{6}(-dt) = -\int t^{6}dt + \int t^{8}dt$$

$$= \frac{-t^{7}}{7} + \frac{t^{9}}{9} = \frac{-cos^{7}(x)}{7} + \frac{cos^{9}(x)}{9} + C \quad ; C \in \mathbb{R}$$

ب. الحالة الثانية: m **فردي أي** $m = 2k + 1$ **حيث** k **عدد طبيعي**

$$\int sin^{n}(x)\, cos^{m}(x)\, dx = \int sin^{n}(x)\, cos^{(2k+1)}(x)\, dx$$

$$= \int sin^{n}(x)\, cos^{2k}(x)\, \cos(x)\, dx$$

$$= \int sin^{n}(x)\, (1 - sin^{2}(x)\,)^{k}\, cos(x)\, dx$$

نضع : $t = sin(x)$ و منه $dt = cos(x)\, dx$، إذن

$$\int sin^n(x)\, cos^m(x)\, dx = \int t^n(1-t^2)^k \mathrm{dt}$$

هذا يعني أن التكامل يصبح عبارة عن تكامل كثير حدود.

مثال1: أحسب التكامل التالي: $I = \int sin^2(x)cos^3(x)\, dx$

لدينا

$$I = \int sin^2(x)cos^2(x)\cos(x)\, dx = \int sin^2(x)(1-sin^2(x))\cos(x)\, dx$$

نستعمل التغير $t = \sin(x)$، و منه $dt = \cos(x)dx$

و بالتالي التكامل I يصبح على الشكل :

$$I = \int t^2(1-t^2)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}$$

$$= \frac{sin^3(x)}{3} - \frac{sin^5(x)}{5} + C \quad ; C \in \mathbb{R}$$

مثال2: أحسب التكامل التالي: $I = \int sin^4(x)cos^3(x)\, dx$

لدينا

$$I = \int sin^4(x)cos^2(x)\cos(x)\, dx = \int sin^4(x)(1-sin^2(x))\cos(x)\, dx$$

و منه نستعمل التغير $t = \sin(x)$، و منه $dt = \cos(x)$

و منه التكامل I يصبح على الشكل :

$$I = \int t^4(1-t^2)dt = \int t^4 dt - \int t^6 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$$

$$= \frac{sin^5(x)}{5} - \frac{sin^7(x)}{7} + C \quad ; C \in \mathbb{R}$$

ج. الحالة الثالثة: n زوجي و m زوجي

نستعمل تبديل المتغير $t = \tan(x)$ أو نستعمل القواعد التالية (في كثير من الحالات) :

$$sin(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}[\,sin(a+b) + sin(a-b)]$$

$$sin(a)\,sin(b) = \frac{1}{2}[cos(a-b) - cos(a+b)]$$

$$cos(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$$

مثال: أحسب التكامل $I = \int sin^2(x)cos^4(x)\,dx$

بإستعمال العلاقات المثلثية التالية:

$$sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)\,, \qquad sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)),$$

$$, cos(4x)\,cos(2x) = \tfrac{1}{2}[cos(6x) + cos(2x)] cos^2(x) = \tfrac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

نجد:

$$sin^2(x)cos^4(x) = (sin(x)\cos(x))^2 cos^2(x)$$

$$= \left(\frac{1}{4}sin^2(2x)\right)\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$= \frac{1}{16}(1-\cos(4x))(1+\cos(2x))$$

$$= \frac{1}{16}(1+\cos(2x)-\cos(4x) - cos(4x)\,cos(2x))$$

$$= \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(6x)\right)$$

و بالتالي نجد :

$$I = \int sin^2(x)cos^4(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(6x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}sin(2x) - \frac{1}{4}sin(4x) - \frac{1}{12}sin(6x)\right) + c$$

تكامل من الشكل: $\int sin(nx)\,cos(mx)\,dx$

نحول الجداء إلى مجموع بإستعمال دساتير التحويل التالية:

$$sin(ax)\,cos(bx) = \frac{1}{2}[\,sin(a+b)\,x + sin(a-b)\,x]$$

$$sin(ax)\,sin(bx) = \frac{1}{2}[cos(a-b)\,x - cos(a+b)\,x]$$

$$cos(ax)\,cos(bx) = \frac{1}{2}[cos(a+b)\,x + cos(a-b)\,x]$$

مثال: حساب التكامل $E = \int sin(3x)\,cos(x)\,dx$.

لدينا : $sin(3)\,cos(x) = \frac{1}{2}(sin(4x) + sin(2x))$ و بالتالي:

$$E = \int sin(3x)\,cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(sin(4x) + sin(2x))dx$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(4x)\,dx + \frac{1}{2}\int sin(2x)\,dx = -\frac{1}{8}cos(4x) - \frac{1}{4}cos(2x) + c$$

الفصل الرابع:

المعادلات التفاضلية

1-4. المعادلات التفاضلية العادية

تعريفات:

- نسمي معادلة تفاضلية من المرتبة n كل معادلة من الشكل:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

حيث F دالة معلومة ذات $(n+2)$ متغير، y هي دالة للمتغير x و $y', y'', \dots, y^{(n)}$ هي المشتقات المتتالية للدالة y إلى غاية المرتبة n.

- أكبر مشتقة موجودة في المعادلة (1) تمثل مرتبة المعادلة التفاضلية

- الدرجة هي أس أكبر مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية .

أمثلة:

1. $xy + y' = 0$ ، معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى و الدرجة 1.

2- $(y'')^2 + y' + x = \cos(x)$ ، معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية و الدرجة 2.

2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

- المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى هي كل معادلة من الشكل:

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

- نقول أن المعادلة التفاضلية (2) تملك حلا عاما $y_0(x)$ إذا كان: $y_0'(x) = f(x, y_0(x))$

- إذا إضيف للمعادلة (2) شرطا من النوع $y(x_0) = y_0$، نقول إن الجملة

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ تملك حلا خاصا.

1-2-4. المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى ذات المتغيرات المنفصلة:

لتكن الدالتين المستمرتين $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث و مجالين من $\mathbb{R}$ و $\forall y \in J: g(y) \neq 0$

- نسمي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة (أو منفصلة المتغيرات) كل معادلة من الشكل:

$$g(y)y'(x) = f(x) \text{ أو } \quad y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

و بتعويض $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ فنجد:

$$g(y)dy = f(x)dx \dots (3)$$

و لحل المعادلة (3) يكفي مكاملة الطرفين فنحصل على:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy \Longrightarrow F(x) = G(y) + K; \quad K \in \mathbb{R}$$

حيث F و G هما الدوال الأصلية للدوال f و g على الترتيب.

مثال1: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = 2xy$

لدينا:

$$y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx \Rightarrow \ln|x| = x^2 + K, K \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^{x^2+K}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = e^k e^{x^2} \text{ (حلول موجبة)} \\ \text{أو} \\ y = -e^k e^{x^2} \text{ (حلول سالبة)} \end{cases} \Longrightarrow y(x) = ce^{x^2}, c \in \mathbb{R} \text{ (} c \text{ ثابت إختياري)}$$

و منه حل العام المعادلة التفاضلية هو: $y(x) = ce^{x^2}, c \in \mathbb{R}$ (c ثابت إختياري)

مثال2: حل المعادلة التفاضلية التالية: $xy' = y$ مع تحقق الشرط $y(1) = 2$

لدينا:

$$xy' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|y| = ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow |y| = e^{ln|x|+c}$$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = kx, \ k \in \mathbb{R}$

$$y(1) = 2 \Longrightarrow y(1) = k(1) = 2 \Longrightarrow k = 2$$

و منه الحل الخاص للجملة : $\begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 2 \end{cases}$ هو معطى بالشكل: $y = 2x$

4-2-2. المعادلات التفاضلية المتجانسة من المرتبة الأولى:

- نسمي معادلة تفاضلية متجانسة من المرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

حيث f دالة حقيقية معرفة على $\mathbb{R}$.

لحل المعادلة (4) نضع: $t = \frac{y}{x}$ أي أن $(x) = t(x) \times x$ و منه $y' = xt' + t$،

إذن لدينا

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow xt' + t = f(t) \Leftrightarrow \frac{1}{f(t)-t}dt = \frac{dx}{x}$$

إذن المعادلة التفاضلية المتجانسة من المرتبة الأولى أصبحت معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة (أي نرجع إلى طريقة حل المعادلة (3)).

مثال1: حل المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y' + x^2 + y^2 + xy = 0$

لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: y' + 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = 0 \quad (*)$$

نضع $t = \frac{y}{x}$ ، و بالتالي :

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow \mathrm{y} = x \times t \Rightarrow y' = t + xt'$$

و منه تصبح $(*)$ على الشكل:

$$t + xt' + 1 + t^2 + t = 0$$

و بالتالي

$$xt' + (t+1)^2 = 0 \Rightarrow \frac{-dt}{(t+1)^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{1}{t+1} = ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{ln|x|+c} - 1 \Longrightarrow y = xt = x\left[\frac{1}{ln|x|+c} - 1\right], c \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة التفاضلية $(*)$ هو:

$$y(x) = x\left[\frac{1}{ln|x|+c} - 1\right], c \in \mathbb{R}$$

مثال2: حل المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y' = xy - y^2$

لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad (**)$$

نضع $t = \frac{y}{x}$ و منه

$$t = \frac{y}{x} \iff y = x \times t \iff y' = t + xt'$$

و منه تصبح (**) على الشكل: $t + xt' = t - t^2$ أي $xt' = -t^2$، إذن لدينا:

$$xt' = -t^2 \Longrightarrow \frac{-dt}{t^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{1}{t} = ln|x| + k;\ \ k \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = xt = \frac{x}{ln|x|+k}$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (**) هو:

$$y(x) = \frac{x}{ln|x|+k}, k \in \mathbb{R}$$

3-2-4. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى:

- نسمي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى كل معادلة من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (5)$$

حيث p و q دالتين مستمرتين على مجال I من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $q(x) = 0$ فإن المعادلة :

$$y' + p(x)y = 0$$

تسمى المعادلة المرافقة للمعادلة (5).

الطريقة الأولى لحل المعادلة (5): نضع $y(x) = u(x)v(x)$ و منه نجد:

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

نعوض y و y' في المعادلة (5) فنجد:

$$u'v + u\,v' + p(x)uv = q(x) \Longrightarrow u'v + u(v' + pv) = q$$

نختار v بحيث يكون: $v' + pv = 0$ و منه

$$v' + pv = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{v} = -pdx \Longrightarrow ln|v| = -\int pdx + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow v(x) = Ke^{-\int p(x)dx};\ K = e^c \in \mathbb{R}_+^*$$

و من جهة أخرى يصبح لدينا:

$$u'v = q \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{q}{v} \Longrightarrow u = \int \frac{q}{v}dx \Longrightarrow u = \int \frac{q}{K}e^{\int p(x)dx}\,dx + \mathrm{C}, C \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة (5) هو :

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + Ce^{-\int p(x)dx}$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية:

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

لدينا: $p(x) = 2x$ ، $q(x) = 2xe^{-x^2}$ و بالتالي:

$$, v(x) = Ke^{-\int 2xdx} = Ke^{-x^2} \ , K = e^c \in \mathbb{R}_+^*$$

$$u(x) = \int \frac{q}{v}dx = \frac{1}{K}\int 2x\,dx = \frac{x^2}{K} + C$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى هو:

$$y(x) = u(x)v(x) = \left(Ke^{-x^2}\right)\left(\frac{x^2}{K} + C\right) = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$$

الطريقة الثانية لحل المعادلة (5) :(الحل العام = حل المعادلة بدون طرف ثاني + حل خاص)

- أولا نحل المعادلة بدون طرف ثاني (المعادلة المرافقة للمعادلة (5)):

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow ln|y| = -\int p(x)dx + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow y(x) = Ke^{-\int p(x)dx},\ K = \pm e^{c} \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة المرافقة هو: $y_1(x) = Ke^{-\int p(x)dx},\ K \in \mathbb{R}$

- ثانيا إذا أمكن ملاحظة (أو إستنتاج) حل خاص للمعادلة (5) و ليكن y_0 فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى (المعادلة (5)) هو:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

مثال1: نأخذ المثال السابق

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}\ (*)$$

- نحل المعادلة بدون طرف ثاني: $y' + 2xy = 0$

$$y' + 2xy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \Longrightarrow ln|y| = -x^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$+\Longrightarrow y(x) = Ke^{-x^2},\ K \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة المرافقة هو:

$$y_1(x) = Ke^{-x^2},\ K \in \mathbb{R}$$

- ثانيا نلاحظ أن : $y_0 = x^2 \quad ^{-x^2}$ حل خاص للمعادلة (*) لأن :

$$y_0{}' = 2xe^{-x^2} - (2x)\underbrace{x^2e^{-x^2}}_{y_0} \Longrightarrow y_0{}' + 2xy_0 = 2xe^{-x^2}$$ (محققة)

و منه الحل العام للمعادلة (*) هو:

$$y = y_0 + y_1 = x^2e^{-x^2} + Ke^{-x^2},\ K \in \mathbb{R}$$

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى التالية:

$$y' - ytan(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad (**)$$

أولا نلاحظ أن: $y_0(x) = \frac{x}{\cos(x)}$ حل خاص للمعادلة (**) (يمكن التأكد من ذلك بسهولة)

ثانيا نحل المعادلة بدون طرف ثاني (المعادلة المرافقة):

$$y' - y\tan(x) = 0$$

$$y' - y\tan(x) = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \tan(x)dx$$

$$\Longrightarrow ln|y| = -ln|\cos(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow ln|y| = ln\frac{1}{|\cos(x)|} + c \Longrightarrow y(x) = \frac{K}{\cos(x)}, K = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة المرافقة هو:

$$y_1(x) = \frac{K}{\cos(x)},\ K \in \mathbb{R}$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية (**) هو:

$$y = y_0 + y_1 = \frac{x}{\cos(x)} + \frac{K}{\cos(x)},\ K \in \mathbb{R}$$

الطريقة الثالثة لحل المعادلة (5): (هي طريقة تغير الثابت)

- إذا لم يكن من الممكن ملاحظة حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية (5)، نستعمل في هذه الحالة طريقة تسمى **طريقة تغير الثابت** أي أننا نعتبر الثابت K دالة بدلالة المتغير x فتصبح: $K = K(x)$ (هو الثابت الموجود في حل المعادلة المرافقة للمعادلة (5)) و منه:

$$y(x) = Ke^{-\int p(x)dx} \Longrightarrow y' = K'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - K(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

نعوض y و y' في المعادلة التفاضلية الخطية (5) : $y' + p(x)y = q(x)$ فنجد:

$$K'(x)e^{-\int p(x)dx} - K(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)K(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Longrightarrow K'(x) = \mathrm{q(x)}e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow K(x) = \int \mathrm{q(x)}e^{\int p(x)dx} + C,\quad C \in \mathbb{R}$$

و في الأخير نعوض قيمة $K(x)$ في عبارة الحل العام للمعادلة التفاضلية المرافقة (بدون طرف ثاني) فنجد الحل العام المعادلة التفاضلية الخطية (5) يكتب على الشكل:

$$y(x) = Ke^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} + Ce^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R}$$

مثال1: نأخذ المثال السابق

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \qquad (*)$$

وجدنا سابقا أن الحل العام للمعادلة المرافقة هو: $y(x) = Ke^{-x^2},\ K \in \mathbb{R}$

نستعمل طريقة تغير الثابت: نضع $K = K(x)$ و منه لدينا:

$$y(x) = Ke^{-x^2} \Longrightarrow y' = K'e^{-x^2} + K(-2x)e^{-x^2}$$

نعوض y و y' في المعادلة التفاضلية الخطية فنجد:

$$K'e^{-x^2} + K(-2x)e^{-x^2} + 2xKe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

$$\Longrightarrow K' = 2x \Longrightarrow K = x^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

و في الأخير نعوض قيمة $K(x)$ في عبارة الحل العام للمعادلة التفاضلية المرافقة (بدون طرف ثاني) فنجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية هو:

$$y(x) = Ke^{-x^2} = (x^2 + C)e^{-x^2} = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2},\ C \in \mathbb{R}$$

مثال2: نأخذ المثال السابق $y' - ytan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

نعلم أن الحل العام للمعادلة المرافقة هو: $y(x) = \frac{K}{\cos(x)},\ K \in \mathbb{R}$

نستعمل طريقة تغير الثابت: نضع $K = K(x)$ و منه لدينا:

$$y(x) = \frac{K}{\cos(x)} \Longrightarrow y' = \frac{K'\cos(x) + Ksin(x)}{cos^2(x)} = \frac{K'}{\cos(x)} + \frac{Ksin(x)}{cos^2(x)}$$

نعوض y و y' في المعادلة التفاضلية الخطية فنجد:

$$y' - ytan(x) = \frac{1}{\cos(x)} \Longrightarrow \frac{K'}{\cos(x)} + \frac{Ksin(x)}{cos^2(x)} - \frac{K}{\cos(x)}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Longrightarrow K' = 1 \Longrightarrow K(x) = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

و في الأخير نعوض قيمة $K(x)$ في عبارة الحل العام للمعادلة التفاضلية المرافقة (بدون طرف ثاني) فنجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية هو:

$$y(x) = \frac{x+C}{\cos(x)},\ C \in \mathbb{R}$$

4-2-4. المعادلة التفاضلية لبرنولي Bernoulli:

نسمي المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الأولى :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \; ; \quad n \neq 1$$

بمعادلة برنولي.

طريقة حل معادلة برلوني :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \Leftrightarrow y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

نضع : $z = y^{1-n}$ و منه $z' = (1-n)y'y^{-n}$ أي $y' = \frac{y^n}{1-n}z'$

فنجد:

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x)$$

و هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى.

مثال: حل المعادلة التفاضلية الخطية:

$$xy' + y = y^2\ln(x)\,,\ x > 0 \qquad (*)$$

نضع: $z = \frac{1}{y} = y^{1-2}$ $(n = 2)$ و منه $z' = \frac{-y'}{y^2}$ أي $y' = -y^2z' = -\frac{1}{z^2}z'$

فنجد: $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln(x)}{x}$ و هي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى.

لنحل المعادلة المرافقة (أي بدون طرف ثاني): $z' - \frac{1}{x}z = 0$

$$z' - \frac{1}{x}z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow ln|z| = ln|x| + c \implies z = Kx; K \in \mathbb{R}$$

و منه الحل العام للمعادلة المرافقة هو: $z_1 = Kx; K \in \mathbb{R}$، و نلاحظ أن

$$z_0 = 1 + \ln(x)$$

هو حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية:

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln(x)}{x}$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة هو:

$$z = z_0 + z_1 = 1 + \ln(x) + Kx; K \in \mathbb{R}$$

إذن الحل العام للمعادلة $(*)$ هو:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + \ln(x) + Kx} \;\; ; \;\; K \in \mathbb{R}$$

3-4. المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

نسمي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة، كل معادلة من الشكل:

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (6)$$

حيث a و b ثوابت حقيقية و f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

- إذا كان $f(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية:

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (7)$$

تسمى بالمعادلة التفاضلية المتجانسة من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة (7): لحل المعادلة (7) نحتاج فقط إلى حلين مستقلين خطيا y_1 و y_2 يسمى هذان الحلان بجملة الحلول الأساسية.

الحل العام للمعادلة المتجانسة (7) يكتب على الشكل:

$$\boldsymbol{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت حقيقية أو عقدية.

ملاحظات :

1. إذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة (7) فإن :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y_1' \neq 0 \Leftrightarrow y_2 \, , \, y_1 \text{ مستقلان خطيا}$$

2. إذا كان y_1 حل للمعادلة (7) فإنه يوجد $y_2 = c(x)\, y_1$ بحيث $\{y_2 \, , \, y_1\}$ جملة حلول أساسية.

- نبحث عن y_1 و y_2 من الشكل: $y(x) = e^{rx}$

$$y(x) = e^{rx} \Longrightarrow y'(x) = re^{rx} \Longrightarrow y''(x) = r^2\, e^{rx}$$

و منه المعادلة (7) تصبح على الشكل:

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (8)$$

و تسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمعادلة (7)، و بالتالي e^{rx} يكون حلا للمعادلة (7) إذا قبلت (8) حلا.

حل المعادلة المميزة: $\boldsymbol{r^2 + ar + b = 0}$

نحسب المميز Δ فنجد $\Delta = a^2 - 4b$

الحالة الأولى: $\Delta > 0$ و منه للمعادلة المميزة (8) حلين هما

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ و } r_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$$

و بالتالي : $y_1 = e^{r_1 x}$ و $y_2 = e^{r_2 x}$

إذن حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (7) هي من الشكل:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت حقيقية.

الحالة الثانية: $\Delta = 0$ و منه للمعادلة المميزة (8) حل مضاعف هو $r = \frac{-a}{2}$ و منه $y_1(x) = e^{rx}$ ، لنبحث عن $y_2(x)$ من الشكل $y_2(x) = C(x)e^{rx} = C(x)y_1(x)$ فنجد: $y_2(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (8) هي من الشكل:

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2(\alpha x + \beta)e^{rx} = e^{rx}(xc_1 + k);\ \ c_1, k \in \mathbb{R}$$

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$ و منه للمعادلة المميزة (8) جذران مركبان مترافقان هما

$r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \alpha - i\beta$ حيث $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$.

و منه لدينا:

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

$$y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

و في الأخير نجد:

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)) \text{ ، } y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (8) هي من الشكل:

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة :

$$(*)y'' + 4y' + 3y = 0$$

المعادلة المميزة للمعادلة (*) هي :

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

و لدينا: $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$

و منه للمعادلة حلين هما:

$$r_1 = \frac{-4+2}{2} = -1 \text{ و } r_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$$

وبالتالي : $y_1 = e^{-x}$ و $y_2 = e^{-3x}$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (*) هو من الشكل:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة :

$$(**) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

المعادلة المميزة للمعادلة (**) هي: $r^2 - 2r + 1 = 0$

و لدينا: $\Delta = 4 - 4 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $r = 1$،

إذن الحل العام للمعادلة (**) هو من الشكل:

$$y(x) = e^x(c_1x + c_2);\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

و من جهة أخرى لدينا:

$$y(0) = 1 \Longrightarrow\ e^0(c_1(0) + c_2) \Longrightarrow c_2 = 1$$

$$y(x) = e^x(c_1x + c_2) \Longrightarrow y'(x) = e^x(c_1x + c_2) + c_1e^x$$

$$\Longrightarrow y'(0) = c_2 + c_1 = 2 \Longrightarrow c_1 = 2 - 1 = 1$$

و بالتالي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية المتجانسة (**) هو:

$$y(x) = e^x(x + 1)$$

مثال3: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية:

$$(*)y'' - 2y' + 2y = 0$$

المعادلة المميزة للمعادلة (*) هي: $r^2 - 2r + 2 = 0$،

و لدينا: $\Delta = 4 - 8 = -4 = i^2 4$

و منه للمعادلة حلان مركبان مترافقان هما:

$$r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

و منه: $y_1(x) = e^x \cos(x)$ و $y_2(x) = e^x \sin(x)$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (*) هو من الشكل:

$$y(x) = e^x(c_1\cos(x) + c_2\sin(x));\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بمعاملات ثابتة:

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (6)$$

الطريقة الأولى : طريقة تغير الثوابت

نبحث عن الحل العام للمعادلة التفاضلية (6) إنطلاقا من الحل العام للمعادلة المتجانسة (7) :

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

و ذلك بوضع: $c_2 = c_2(x)$ و $c_1 = c_1(x)$

و لإيجاد الدالتين c_1 و c_1 نحل الجملة:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

مثال1: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية:

$$y'' + 3y' = e^x \qquad (1)$$

لنبحث عن حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية بدون طرف ثاني: $y'' + 3y' = 0$

المعادلة المميزة المرافقة هي: $r^2 + 3r = 0$،

بحل المعادلة نجد: $r_2 = -3$ أو $r_1 = 0$

و بالتالي : $y_1(x) = e^{0x} = 1$ و $y_2(x) = e^{-3x}$،

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هو:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-3x};\ c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (2)، **نستعمل طريقة تغير الثوابت** بوضع:

$c_2 = c_2(x)$ و $c_1 = c_1(x)$ و منه: $y(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{-3x}$ ، لإيجاد الدالتين $c_2(x)$ و $c_1(x)$ ، نحل الجملة:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ c_1'(x)(0) - 3c_2'(x)e^{-3x} = e^x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -3c_2'(x)e^{-3x} = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1(x) = \frac{1}{3}\, e^x + \beta \\ c_2(x) = \frac{-1}{12}\, e^{4x} + \alpha \end{cases};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (1) يكتب على الشكل التالي:

$$y(x) = \frac{1}{3}\, e^x + \beta + \left(\frac{-1}{12}\, e^{4x} + \alpha\right) e^{-3x} = \frac{e^x}{4} + \beta + \alpha e^{-3x};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = (1+x)e^x \qquad (2)$$

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة للمعادلة (2) هي:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \qquad (3)$$

المعادلة المميزة للمعادلة (3) هي: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$ و منه $r_2 = 2$ أو $r_1 = 1$

إذن: $y_1(x) = e^x$ و $y_2(x) = e^{2x}$

و بالتالي الحل العام للمعادلة (3) هو من الشكل:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x};\ c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (2)، نستعمل **طريقة تغير الثوابت** بوضع: $c_2 = c_2(x)$ و $c_1 = c_1(x)$ و نحل الجملة:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0 & (1) \\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = (1+x)e^x & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Longrightarrow c_2'(x)e^{2x} = (1+x)e^x \Longrightarrow c_2'(x) = e^{-x} + xe^{-x}$$

$$\Longrightarrow c_2(x) = -(x+2)e^{-x} + \beta$$

$$(1) \Longrightarrow c_1'(x)e^x = -c_2'(x)e^{2x} \Longrightarrow c_1'(x)e^x = -\left((1+x)e^{-x}\right)e^{2x}$$

$$\Longrightarrow c_1'(x) = -(1+x) \Longrightarrow c_1(x) = \frac{-1}{2}(x+1)^2 + \alpha$$

نعوض $c_1(x)$ و $c_2(x)$ في الحل العام للمعادلة (3) نجد الحل العام للمعادلة (2) من الشكل:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} = \alpha e^x + \beta e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}\right)e^x;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

الطريقة الثانية: مجموع الحل المتجانس و الحل الخاص

الحل العام من الشكل $\boldsymbol{y_g = y_h + y_p}$ حيث y_h هو الحل المتجانس و y_p هو الحل الخاص

أولا لنبحث عن الحل المتجانس y_h :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (7)$$

المعادلة المميزة : المعادلة المميزة المرافقة (أو المساعدة) للمعادلة (7) تكتب على الشكل:

$$ar^2 + br + c = 0$$

حل المعادلة المميزة: نحسب المميز Δ فنجد $\Delta = b^2 - 4ac$ ،إذن نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: $\Delta > 0$ و منه للمعادلة المميزة حلين هما : $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

إذن حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (7) هي من الشكل:

$$\boldsymbol{y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}} \quad , \boldsymbol{c_1, c_2} \in \mathbb{R}$$

الحالة الثانية: $\Delta = 0$ و منه للمعادلة المميزة حل مضاعف هو $r = \frac{-b}{2a}$

اذن حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (7) هي من الشكل:

$$\boldsymbol{y_h(x) = e^{rx}(c_1 + c_2 x);\ \ c_1, c_2} \in \mathbb{R}$$

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$ و منه للمعادلة المميزة جذران مركبان مترافقان هما

$$r_2 = \alpha - i\beta \text{ ، } , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ r_1 = \alpha + i\beta$$

إذن حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (7) هي من الشكل:

$$\boldsymbol{y_h(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)),\ \ c_1, c_2} \in \mathbb{R}$$

ثانيا لنبحث عن الحل الخاص y_p : الحل الخاص يعتمد على شكل التابع f

1. $f(x) = P(x)$ حيث P كثير حدود من الدرجة n ، نبحث عن حل خاص يكون من الشكل :

أ. $y_p(x) = Q(x)$ اذا كان $c \neq 0$

ب. $y_p(x) = xQ(x)$ اذا كان $b \neq 0$ و $c = 0$

ح. $y_p(x) = x^2Q(x)$ اذا كان $c = 0$ و $b = 0$

حيث Q كثير حدود من نفس درجة P

2. $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ حيث P كثير حدود من الدرجة n و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، نبحث عن حل خاص من الشكل :

أ. $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ اذا كان α ليس جذر للمعادلة المميزة

ب. $y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$ اذا كان α جذر بسيط للمعادلة المميزة

ج. $y_p(x) = x^2Q(x)e^{\alpha x}$ اذا كان α جذر مضاعف للمعادلة المميزة

حيث Q كثير حدود من نفس درجة P

3 . $f(x) = \alpha\, sin(\delta x + \varphi) + \beta cos(\delta x + \varphi)$ حيث $(\varphi, \delta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

نبحث عن حل خاص يكون من الشكل:

أ. $y_p = A\, sin(\delta x + \varphi) + Bcos(\delta x + \varphi)$ اذا كان δi ليس حل للمعادلة المميزة

ب. $y_p = Ax\, sin(\delta x + \varphi) + Bx\, cos(\delta x + \varphi)$ اذا كان δi حل للمعادلة المميزة

مثال: حل المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية التالية:

$$y'' + 3y' = e^x \qquad (1)$$

الحل العام من الشكل $y_g = y_h + y_p$ حيث y_h هو الحل المتجانس و y_p هو الحل الخاص

أولا نبحث عن الحل المتجانس y_h

المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية بدون طرف ثاني هي: $y'' + 3y' = 0$

المعادلة المميزة المرافقة هي: $r^2 + 3r = 0$، بحل المعادلة نجد: $r_2 = -3$ أو $r_1 = 0$

و منه: $y_1(x) = e^{0x} = 1$ و $y_2(x) = e^{-3x}$،

إذن الحل المتجانس هو :

$$y_h(x) = c_1 + c_2e^{-3x};\ c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

ثانيا نبحث عن الحل الخاص y_p :

الطرف الثاني للمعادلة (1) هو من الشكل:

$f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ حيث $P(x) = 1$ كثير حدود من الدرجة 0 و $\alpha = 1 \in \mathbb{R}$ ،

و بما أن $\boldsymbol{\alpha = 1}$ ليس جذر للمعادلة المميزة إذن نبحث عن حل خاص من الشكل .
$y_p(x) = Q(x)e^{x}$ حيث Q كثير حدود من نفس درجة P (درجة صفر) أي

$Q(x) = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$ ، و بالتالي : $y_p(x) = ae^{x}$

لنبحث عن a : نحسب y_p' و y_p''

$$y_p(x) = ae^{x} \Rightarrow y_p'(x) = ae^{x} \Rightarrow y_p''(x) = ae^{x}$$

نعوض y_p' و y_p'' في المعادلة (1) نجد :

$$y'' + 3y' = e^x \Rightarrow ae^{x} + 3ae^{x} = e^x \Rightarrow 4ae^x = e^x \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

و منه الحل الخاص من الشكل: $y_p(x) = \frac{e^x}{4}$

و بالتالي الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية (1) هو :

$$y_g = y_h + y_p = \frac{e^x}{4} + c_1 + c_2e^{-3x};\ c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

قائمة المراجع

1. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الألي ج1 المتتاليات و الدوال الوحيدة المتغير la cedraie " .2009.

2. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الألي ج2 التحليل، الإشتقاق و دساتير المتوسط تايلور la cedraie ". 2010.

3. بابا حامد بن حبيب " التحليل *I*" ديوان المطبوعات الجامعية. 2008.

4. علي حميدة و عبد الوهاب بيبي .الرياضيات في الجامعة .التحليل .الجزء الثاني و الجزء الثالث.2001. جامعة قسنطينة.

5. عبد الوهاب بيبي، .علي حميدة وفهيم لكحل .الرياضيات في الجامعة .الجبر .الجزء الأول.2001 . جامعة قسنطينة.

6. قادة علاب " عناصر من التحليل الرياضي التوابع لمتغير حقيقي واحد ". ديوان المطبوعات الجامعية. 1991.