RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Amar Telidji - Laghouat

Faculté de sciences

THÈSE DE DOCTORAT D/LMD

Spécialité: Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement
le 01/12/2022

BENGHIA Fatima Zohra

THEME

Théorème de Szegő d'ordre supérieur, cas d'une mesure discrète

JURY :

Monsieur Mokhtari Abdelkader **Président du jury**, Professeur , Université de Laghouat UATL.

Monsieur BELABBACI Youcef , **Rapporteur** , MCA , Université de Laghouat UATL.

Madame BOUKHATEM Yamna , **Eaminatrice** , Pr , Université de Laghouat UATL.

Madame BENDAOUD Zohra **,** **Examinatrice** , MCA , ENS Laghouat.

Monsieur NOUIRI Brahim , **Eaminateur** , Pr , Université de M'Sila UMBM.

Monsieur YAGOUB Ameur , **Examinateur** , MCA , Université de Laghouat UATL.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l 'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI-LAGHOUAT-

Faculté des Sciences

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées

THÈSE

Présentée par

BENGHIA Fatima Zohra

pour l 'obtention du diplôme de Doctorat D LMD en Mathématiques

THÈME

Théorème de Szegö d'ordre supérieur, cas d'une mesure discrète

Soutenu le 01/12/2022, devant le jury formé de :

Mr	MOKHTARI Abdelkader	Pr	(UAT Laghouat)	Président
Mr	BELABBACI Youcef	MCA	(UAT Laghouat)	Rapporteur
Mme	BENDAOUD Zohra	MCA	(ENS Laghouat)	Examinatrice
Mme	BOUKHATEM Yamna	Pr	(UAT Laghouat)	Examinatrice
Mr	NOUIRI Brahim	Pr	(UMB M'sila)	Examinateur
Mr	YAGOUB Ameur	MCA	(UAT Laghouat)	Examinateur.

Remerciement

Je remercie DIEU, le tout-puissant, qui m'a donné la force, la volonté et surtout la patience pour accomplir cette modeste thèse.

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Monsieur Belabbaci Yousef, pour son aide. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je remercie également Madame Zohra Bendaoud pour leur dynamisme, leur tolérance, leur disponibilité, leurs compétences scientifiques, ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans elle, qui a toujours pu me guider et me conseiller et me témoigner leur soutien et leur confiance.Elle a été disponible jusqu'au bout.

J'adresse aussi mes remerciements aux personnes que je nomme « ressources » dans ma thèse et qui m'ont permis de mieux comprendre mon thème de recherche.

Mes très vifs remerciements s'adressent aux membres du jury de cette thèse qui ont accepté de juger ce travail. Je suis profondément reconnaissante à mes examinateurs, d'avoir accepté de lire et évaluer ma thèse.
Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à Monsieur Mokhtari Abdelkader pour avoir assuré la charge de président du jury.
Je remercie également l'ensemble des enseignants du département Mathématiques et , qui m'ont offert un excellent cadre de travail, merci en particulier à Mr Moukhtari, Mr Belabbaci , Mme Abdesslam et Mme Boukhatem qui m'ont beaucoup aidé et encouragé durant mes études.
Merci pour les aides permanentes reçut du personnel du laboratoire, de mathématiques, qui ont été disponibles à chaque fois que j'ai eu besoin d'une aide.
Merci au personnel de la faculté des sciences de l'Université de LAGHOUAT qui m'ont offert d'agréables moments. J'aimerais remercier également l'ensemble du personnel de

l'université de Laghouat.
J'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents pour leurs soutiens qui m'a été bien utile durant ma thèse.
Je remercie chaleureusement mon mari, pour la grande patience. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Mes remerciements vont aussi à ma famille , avec cette question récurrente, « quand est-ce que tu la soutiens cette thèse ? », bien qu'angoissante, m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final.
Merci ma petite princesse Meriem pour ton sourire est si doux, illumine ma vie et qui m'a poussé à terminer ce travail.

Théorème de Szegő d'ordre supérieur, cas d'une mesure discrète

Résumé : On présente dans cette thése, une étude de théorème de Szegő sur le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux perturbé par une suite de Blaschke infinie de masses ponctuelles.

Le but de cette thèse est d'étudier le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux $\{\Phi_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont les relations d'orthonormalisation suivantes :

$$\Phi_n(z) = \gamma_n z^n + ...(\gamma_n > 0),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}d\mu(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\Phi_n(z_k)\overline{\Phi_m(z_k)} = \delta_{mn}; \forall\ m, n = 0, 1, ...,\ z = e^{i\theta}.$$

avec $d\mu = \mu'_{ac}dm + d\mu_s$, μ_{ac} est la partie absolument continue de μ et $d\mu_s$ est la partie singulière sur $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, où m est une mesure de probabilité borélienne sur le cercle unité $\mathbb{T}$ i.e. $dm(t) = dt/(2\pi it) = 1/(2\pi)d\theta$, $t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

De plus μ vérifie la condition généralisée de Szegö :

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \log \mu'_{ac}(e^{i\theta})d\theta > -\infty,$$

où p un polynôme trigonométrique tel que $p(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{T}$.

Les A_k vérifie

$$A_k > 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty\ et\ \sum_{k=1}^{\infty}(|z_k| - 1) < +\infty,$$

pour $k = 1, ...$ et $\delta(z - z_k)$ est la mesure de Dirac au pointz_k.

Mots clés : polynômes orthogonaux, mesure polynomiale de Szegő , condition de Szegő, éspace de Hardy.

Szegő theorem of higher order, case of a discrete measure

Abstract : We present in this thesis, a study of the Szegő theorem for asymptotics of orthogonal polynomials perturbed by a infinite Blaschke sequence of point masses .

The aim of this thesis is to study of asymptotics for orthogonal polynomials $\{\Phi_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfy the following orthonormality relations :

$$\Phi_n(z) = \gamma_n z^n + ...(\gamma_n > 0),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}d\mu(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\Phi_n(z_k)\overline{\Phi_m(z_k)} = \delta_{mn};\ \forall m, n = 1, 2, ...,\ z = e^{i\theta}.$$

Where $d\mu = \mu'_{ac}dm + d\mu_s$, μ_{ac} is the absolutely continuous part of μ and $d\mu_s$ is singular and, and m is the probability Lebesgue measure on $\mathbb{T}$; $dm(t) = dt/(2\pi it) = 1/(2\pi)d\theta$, $t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Moreover μ satisfises the generalised Szegö condition :

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \log \mu'_{ac}(e^{i\theta})d\theta > -\infty,$$

where p be a trigonometric polynomial such that $p(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{T}$.

The masses A_k satisfy

$$A_k > 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty\ and\ \sum_{k=1}^{\infty}(|z_k| - 1) < +\infty,$$

for $k = 1, ...$ and $\delta(z - z_k)$ is the Dirac measure supported at the point z_k.

Keywords : Orthogonal Polynomials, Polynomial Szegő measure , Szegő condition, Hardy space.

Fatim Zohra BENGHIA

Table des matières

Table des notations

$\mathbb{R}$ L'ensemble des entiers reels .

$\mathbb{C}$ L'ensemble des entiers complexes .

$Re(z)$ la partie reele de z .

$Im(z)$ la partie imaginaire de z .

$\mathbb{T}$ le cercle unité .

$\mathbb{D}$ le disque unité.

L^p l'espace de de Lebesgue .

$Hol(\mathbb{D})$ L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

$H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy du disque unité .

$\mathtt{N}$ La classe de Nevanlinna .

$B(z)$ le produit de Blaschke.

m la mesure de Lebesgue .

$\mu \perp m$ μ est étrangère à m .

$\mu \prec\prec m$ μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m.

β_s la partie singulière de β_s

β'_{ac} la dérivée de Radon-Nikodym de la partie absolue de β par rapport à la mesure de Lebesgue m.

(N) la mesure de Nevai

(E) la mesure d' Erdos.

(R) la mesure Rakhmanov.

(S) mesure de de Szegö.

(pS) mesur de classe polynômial de Szegö.

$\delta(z - z_k)$ la mesure de Dirac au point z_k.

p_n le polynômes de degré n

(p_n^*) le polynômes inverse de p_n .

(f^*) la limite radiale de f.

$\log^+ |f| = \log |f|$ si $|f| \geq 1$ et 0 si non .

Introduction

Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux classiques est connu à partir du livre de Szegö [47]. Szegö est lui même qui a développé la théorie asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, et l'intervalle unité pour des poids qui répondent à la condition dite de Szegö. De nombreux résultats asymptotiques ont été trouvés pour les polynômes orthogonaux nous allons résumer selon la mesure μ et son support $\mathbb{S}$; le comportement asymptotique d'une classe assez large de polynômes orthogonaux et extrémaux relativement à la mesure μ et qui s'avèrent la plus intéressante pour notre étude.

1. $\mathbb{S} = [-\pi;\pi]$; μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi;\pi]$. Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle avec fonction poids. Ce cas a été étudié par G.Szego [42] en 1921 et la formule asymptotique qu'il a obtenu est :

$$T(z) \approx \frac{z^n}{\overline{S}_p(\frac{1}{z})}; |z| > 1, \tag{0.0.1}$$

   où S_p est une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, construite par Szegö et porte son nom. Szegö a utilisé la propriété extrémal des polynômes orthogonaux pour trouver la formule (0.0.1) : Sa méthode a été reprise et développée pour trouver la formule asymptotique d'autres types de polynômes orthogonaux. Krein [24] ; et Gueronimus [10] ; ont généralisé cette étude dans le cas où μ est non absolument continue.

2. $= \mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité,$z_j \in ext(\mathbb{T})$; μ est une mesure de la forme $\mu = \beta + \sigma$; où β est concentrée sur $\mathbb{T}$ assez générale, et σ est une mesure discrète concentrée sur les points z_j avec les masses A_j c'est à dire :

$$\sigma = \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j}; A_j > 0$$

   δ_{z_j} est la mesure de Dirac au pointzj : Ce cas a été étudié en 1994 par X. Li et K. Pan [25] ; et a été appliqué à l'étude de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux associés à μ.

3. $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$; $z_j \in ext(\mathbb{T})$;μ est une mesure de la forme : $\mu = \frac{\beta}{2\pi} + \sigma = \frac{\beta}{2\pi} + \sum_{j\geq 1} A_j \delta_{z_j}$; $A_j > 0, \sum_{j\geq 1} A_j < +\infty$; β concentrée sur $\mathbb{T}$ et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta$ sur $[-\pi;\pi]$; σ une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses A_j : Ce cas a été étudié par R.Khaldi et R.Benzine [18] en 2000 :
4. $\mathbb{S} = \mathbb{T}$; $\mathbb{T}$ est le cercle unité. Ce problème a été étudié en 2006 par S. Denisov et S. Kupin [7] ; pour une mesure plus générale μ appartient à la classe polynomiale de Szegö définie par :

$$d\mu(e^{i\theta}) = \mu'_{ac}(e^{i\theta})d\theta + d\mu_s(e^{i\theta}),$$

μ_s est singulière et la partie absolument continue μ_{ac} de μ vérifie la condition généralisée de Szegö

$$\int_{\mathbb{T}} p(e^{i\theta}) \log \mu'_{ac}(e^{i\theta})d\theta > -\infty.$$

où p est un polynôme trigonométrique, non négatif sur le cercle unité $\mathbb{T}$.
5. $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{m}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité,$z_j \in ext(\mathbb{T})$; v est une mesure de la forme $v = \mu + \sum_{j=1}^{m} A_j \delta_{z_j}$: avec μ appartient à la classe polynomiale de Szegö . Ce problème a été étudié en 2011 par R. Khaldi et R. Guezane [22].

Notre résultat [4] principal est lié à prouver le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de la forme $v = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \delta_{z_j}$ avec μ appartient à la classe polynomiale de Szegö dont le support est $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité et $z_j \in ext(\mathbb{T})$.

Dans un premier chapitre on introduit divers outils nécessaires en particulier la théorie avancée des fonctions harmoniques, très utile dans la construction de départ , aussi bien la formule de Poisson .

Nous décrivons dans le deuxième chapitre quelques propriétés classiques des polynômes orthogonaux. Une formule de Christoffel est établie , théorème d'extrema sont introduites, et la relation de récurrence permettant de calculer un polynôme dans une suite à partir des deux précédents.

Le troisième est consacré à l'étude des espaces de Hardy la factorisation de toute fonction appartenant à un espace de Hardy sous la forme d'un produit d'une fonction intérieure par une fonction extérieure , fonction de Szegö associée au cercle unité qui nous servent à définir l'espace de Hardy $H^2(G;\rho)$; où ρ est la densité de la partie absolument continuede la mesure μ.

le chapitre IV est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure avec la condition généralisée de Szegö concentrée sur le cercle unité, contient une partie importante des résultats originaux de cette thèse.

Chapitre 1

Rappels

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ est noté $Hol(\mathbb{D})$.

1.1 Fonction harmonique et fonction sous-harmonique

Définition 1 *Soit (E, d) un espace métrique on dit que E est connexe si et seulement si les seuls sous ensembles à la fois ouverts et fermés de (E, d) sont E et l'ensemble vide .*

Proposition 1 (la formule de la moyenne) *Soit f une fonction continue sur $\overline{D(a,r)}$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), harmonique sur $D(a,r)$ et à valeurs complexes. Alors on a la formule de la moyenne :*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt.$$

Définition 2 *Un ouvert E est dit simplement connexe s'il est connexe et si tout chemin continu et fermé doit pouvoir être réduit continûment à un point .*

Théorème 1 *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur Ω alors il existe une fonction φ holomorphe sur Ω telle que $Re(\varphi) = f$.*

Preuve.

Considérons la 1-forme différentielle w de classe C^1 définie par $w = -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$. Alors w est une forme fermée. En effet,

$$\begin{aligned}
dw &= \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right) \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy \\
&= \Delta f dx \wedge dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'ouvert Ω étant simplement connexe, alors il existe une fonction g de classe C^2 sur Ω telle que

$$-\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy = w = dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy$$

On a donc $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$ La fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi = f + ig$ est donc holomorphe sur et par construction $f = Re(\varphi)$.

On cherche une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe C^2 telle que $f + ig$ soit holomorphe sur Ω.

D'après les équations de Cauchy-Riemann, $f+ig$ est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ sur Ω.

D'où $w = -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy$

Donc $g = \int -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$ (à une constante près)

■

Définition 3 *Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$ est dite sous-harmonique si elle a la propriété suivante :*
Pour tout domaine (ouvert connexe) Ω de $\mathbb{D}$ dont la fermeture $\overline{\Omega}$ est inclus dans $\mathbb{D}$ et pour toute fonction U harmonique dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$ vérifiant $f(z) \leq U(z)$ sur la frontière $Fr(\Omega)$ de Ω , on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

En pratique, les fonctions continues à valeurs réelles sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ sont caractérisées par la propriété locale de majoration par la valeur moyenne avec laquelle il est souvent plus facile de travailler.

Théorème 2 *(`Propriété de la sous-moyenne`) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$. Alors f est sous-harmonique si et seulement si pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ il existe $r_0 > 0$ tel que*

$D(z_0, r_0) \subset \mathbb{D}$ avec de plus

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

pour tout $r < r_0$.

Proposition 2 *1. Soit f holomorphe dans $\mathbb{D}$ et soit $p > 0$. Alors la fonction g continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles définie par $g(z) = |f(z)|^p$ est sous-harmonique.*

2. Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$. Alors $\log^+ |f|$ est une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$.

Preuve.

Supposons que $f(z_0) \neq 0$:. D'après le principe des zéros isolés , il existe alors $r_0 > 0$ tel qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $D(z_0, r_0)$ avec $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \mathbb{D}$ et ainsi on peut définir $z \to f(z)^p$ comme une fonction holomorphe dans $D(z_0, r_0)$. En particulier, pour tout $r < r_0$, on a :

$$(f(z)^p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(z_0 + re^{it}) \right)^p dt$$

ce qui implique naturellement

$$|f(z)^p| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{it}) \right|^p dt$$

si $z_0 \in \mathbb{D}$, tel que $|f(z_0)| \leq 1$; l'inégalité de la sous-moyenne est triviale .
Si $z_0 \in D$ est tel que $|f(z_0)| > 1$, par continuité de $|f|$, il existe $r_0 > 0$ tel que $|f(z)| > 1$ sur $D(z_0, r_0) \subset \mathbb{D}$. Par conséquent pour tout $r < r_0$; $\log^+ |f(z)| = \log |f(z)|$ pour tout $z \in D(z_0, r)$. Comme $\log |f|$ est une fonction harmonique sur $D(z_0, r_0)$ l'inégalité de la sous-moyenne est vérifiée (c'est même une égalité) pour $r < r_0$. ■

Proposition 3 *Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$ et soit*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt \text{ pour } 0 \leq r < 1.$$

Alors $r \to m(r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Preuve.

Soient $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Comme f continue sur D, il existe une unique fonction U harmonique sur $D(0, r_2)$, continue sur $\overline{D(0, r_2)}$ tel que U et f coïncident sur le cercle

$(0, r_2)$. Comme f est sous-harmonique, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \overline{D(0, r_2)}$. On a donc :

$$\begin{aligned} m(r_1) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_1 e^{it})dt = U(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r_2 e^{it})dt = m(r_2). \end{aligned}$$

■

1.2 L'intégrale de Poisson par rapport à une mesure complexe

1.2.1 Mesure complexe

Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $m(E) = \int_E dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$.

Définition 4 *[36] Soit (X, M) un espace mesurable. Autrement dit X est un ensemble et M est une σ -algèbre sur X.*
Une mesure complexe est une application $\mu : M \to \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante :

pour tout $E \in M$ et toute partition dénombrable $(E_i)_{i\geq 1}$ de E, on a :$\mu(E) = \sum_{i\geq 1}\mu(E_i)$.
À toute mesure complexe μ on associe sa variation totale $|\mu|$ définie par la formule :

$$|\mu|(E) = sup\left\{\sum_{i\geq 1}|\mu(E_i)| \quad : \ (E_i)_{i\geq 1} \ \textit{partition dénombrable de } E \right\},$$

pour tout $E \in M$; et $|\mu|$ est une mesure positive au sens usuel. On note $M(X)$ l'ensemble des mesures complexes sur (X, B) où B est l'algèbre des boréliens, c'est à dire l'algèbre engendrée par les ouverts de X. $M^+(X)$ l'ensemble des mesures positives finies sur (X, B).

Définition 5 *On dit que μ est étrangère à m et on note $\mu \perp m$, s'il existe un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $m(A) = 0$ et tel que $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ pour tout borélien E. Autrement dit, μ est portée par un borélien de mesure de Lebesgue nulle.*

Voici un exemple de mesures sur $\mathbb{R}$ étrangères à m :
Exemple : Soit t_0 un point de $\mathbb{R}$ et soit δ_{t_0} la mesure de Dirac en t_0. Posons $A = \{t_0\}$. On a donc $m(A) = 0$ tandis que pour tout borélien E de $\mathbb{R}$ on a $\delta_{t_0}(E) = \delta_{t_0}(E \cap A)$ car $\delta_{t_0}(E) = 0$ si $t_0 \notin E$ et $\delta_{t_0}(E) = 1$ si $t_0 \in E$.

Définition 6 *On dit que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et on note $\mu \prec\prec m$ si $m(E) = 0$ alors $\mu(E) = 0$, $\forall E$.*

Théorème 3 *(de `Radon-Nikodym` [32]) Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m, alors il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int_E f(x)dx$. On écrit aussi $d\mu(x) = f(x)dx$. fonction f s'appelle la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à x.*

Théorème 4 *(de `Lebesgue`) Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure complexe définie sur $\mathbb{R}$. Alors il existe un unique couple (v, p) de mesures complexe définie sur $\mathbb{R}$ tel que $\mu = v + p$ avec $v \perp m$ et $p \prec\prec m$.*

1.2.2 L'intégrale de Poisson

Définition 7 *Pour $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, on pose*

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$$

Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, P_r est appelé noyau de Poisson et $(P_r)_{0<1}$ est appelée la famille des noyaux de Poisson.

Remarque 1 *(i) Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$ converge normalement, donc uniformément . La fonction P_r est continue sur $[0, 2\pi]$.*

(ii) Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1.$$

Pour voir ceci, on peut invertir l'intégrale et la série qui définit $P_r(t)$.

Proposition 4 *Pour $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) \\ &= Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} \end{aligned}$$

Preuve. La première égalité est immédiate. Elle provient du fait que

$$P_r(\theta - t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in(\theta - t)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t))$$

Pour démontrer la deuxième égalité on remarque que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) &= \left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}}\right) = \left(\frac{1 + re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}\right) \\
&= \left(\frac{1 - re^{i(\theta - t)} + 2re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}\right) = 1 + \left(\frac{2re^{i(\theta - t)}}{1 - re^{i(\theta - t)}}\right) \\
&= 1 + 2re^{i(\theta - t)} \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)} \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta - t)}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) = P_r(\theta - t)$$

La troisième égalité s'obtient en remarquant que :

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{(e^{it} + z)(e^{-it} + \overline{z})}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - |z|^2 + (ze^{it}\overline{z}e^{it})}{|e^{it} - z|^2}$$

Comme $ze^{it}\overline{z}e^{it}$ est imaginaire ,

$$Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - ze^{-it}|^2} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\theta - t)}|^2}$$

Enfin on calcule

$$\begin{aligned}
\left|1 - re^{i(\theta - t)}\right|^2 &= |1 - r\cos(\theta - t) - ir\sin(\theta - t)|^2 \\
&= (1 - r\cos(\theta - t))^2 + r^2\sin^2(\theta - t) \\
&= 1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2 *Il résulte de la proposition précédente qu'un noyau de Poisson est une fonction* $P : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$P(z, \xi) = Re\left(\frac{\xi+z}{\xi-z}\right)$ *uniformément continue sur* $[0, 2\pi]$, 2π*-périodique, positive et paire.*

Définition 8 *L'intégrale de Poisson ou transformée de Poisson d'une fonction réelle Lebesgue-intégrable sur le cercle* ($\varphi \in L^1(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$) *est la fonction définie pour* $|z| < 1$ *par*

$$P(\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi(t)dt.$$

La proposition suivante nous montre comment construire des fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}$ à partir de mesures complexes sur $\mathbb{T}$.

Proposition 5 *Soit* μ *une mesure complexe (finie) sur* $[-\pi, \pi]$.
Pour $z = re^{i\theta}$ *avec* $0 \leq r < 1$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *, on pose :*

$$P(\mu)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$$

Alors P_μ *est une fonction harmonique sur* $\mathbb{D}$.

Preuve. La mesure complexe μ est de la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ avec μ_1 et μ_2 mesures réelles définies par $\mu_1(A) = Re(\mu(A))$ et $\mu_2(A) = Im(\mu(A))$ pour tout borélien A de $[-\pi, \pi]$. Ainsi $P(\mu)(z) = P(\mu_1)(z) + iP(\mu_2)(z)$ et pour montrer que P_μ (avec μ mesure complexe sur $\mathbb{T}$) est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ il suffit de montrer que si v est une mesure réelle sur $\mathbb{T}$ alors $P(v)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. Pour cela on remarque que :

$$P(v)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z})dv(t) = Re\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}dv(t)\right) = Re(\varphi(z))$$

avec $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dv(t)$. La fonction φ étant holomorphe sur $\mathbb{D}$ (comme intégrale de la fonction holomorphe $z \to \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ sur $\mathbb{D}$) donc $P(v)$ est harmonique sur $\mathbb{D}$. ∎

1.2.3 Limite radiale de l'intégrale de Poisson

Lemme 1.2.1 *L'application* $\mu \to P(\mu)$ *est une isométrie bijective de* $M^+(\mathbb{T})$ *(mesure positive finie sur* $\mathbb{T}$ *) sur l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur* $\mathbb{D}$.

Preuve. Soit $\mu \in M^+(\mathbb{T})$. Pour toute fonction $f \in C(\mathbb{T})$ positive on a donc :

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu \geq 0$$

. Comme $P(\mu)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$ avec $t \to P_r(\theta - t)$ continue et positive pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a donc $P(\mu)$ fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$.

■

Théorème 5 *Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue), $\lim_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it})$ existe et si on pose $\varphi(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} P(\mu)(re^{it})$, alors $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et φ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, si l'on pose $\nu(E) = \mu(E) - \int_E \varphi(e^{it})dt$ pour tout borélien E de $\mathbb{T}$, alors $\nu \perp m$.*

En utilisant le Lemme 1.2.1 et le Théorème 5 on obtient une description des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$.

Théorème 6 *Soit F une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$. Alors*

$$F^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} F(re^{it})$$

existe m-presque partout et $F^* \in L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe une mesure positive finie ν sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$ et $F = P(F^*) + P(\nu)$ avec $\lim_{r\to 1^-} P(\nu)(re^{it}) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Chapitre 2

Polynômes orthogonaux

2.1 Définition et propriétés des polynômes orthogonaux

Soit X un espace mesurable et μ une mesure positive sur X, et soit l'espace

$$L^2(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R},\ f\ mesurable;\ \|f\| < \infty\}$$

de norme induite par le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu.$$

Théorème 7 *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue à droite. Alors il existe une unique mesure μ_F sur $\boldsymbol{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ pour tout $a < b$.*

Définition 9 — *La mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à F est notée μ_F,*

$$\int f dF = \int f d\mu_F$$

.

2.1.1 Relation de récurrence

Il est intéressant de savoir que toute suite de polynômes orthogonaux peut s'obtenir à l'aide d'une relation de récurrence. C'est le contenu du théorème suivant.

Théorème 8 *Soit $\{P_n,\ n \geq 0\}$ une suite de polynômes orthogonaux. Alors il existe une relation de récurrence selon laquelle on peut calculer P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}, donnée par la formule*

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x);$$

où les constantes $A_n,\ B_n,\ C_n$ sont

$$A_n = \frac{cd(P_{n+1})}{cd(P_n)},\ B_n = -A_n \frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle},\ C_n = A_n \frac{\langle xP_n, P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}.$$

où $cd(P_n)$ note le coefficient dominant de P_n.

Preuve. Considérons le polynôme $P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x)$. De la définition de la constante A_n, nous voyons assez bien que les termes en x^{n+1} s'annulent, et donc que ce polynôme est de degré au plus n. Il peut alors être exprimé comme une combinaison linéaire des n premiers éléments de $\mathbb{O}$. Cela s'écrit

$$P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) = a_n P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1} + ... + a_0 P_0(x) :$$

La valeur de chaque a_j peut être trouvée en prenant le produit scalaire de cette expression avec le P_j correspondant. À gauche, nous obtenons, pour chaque P_j avec $0 \leq j < n-1$,

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x), P_J(x)\rangle &= \langle P_{n+1}(x), P_J(x)\rangle - A_n \langle xP_n(x), P_J(x)\rangle && (2.1.1)\\ &= \langle P_{n+1}(x), P_J(x)\rangle - A_n \langle P_n(x), xP_J(x)\rangle && (2.1.2)\\ &= 0, && (2.1.3) \end{aligned}$$

résultat obtenu grâce au fait que les degrés de P_j et de xP_j sont strictement inférieurs au degré de P_n et aussi, à plus forte raison, au degré de P_{n+1}. Pour les j correspondants, nous obtenons à droite : $a_j \langle P_j(x), P_j(x)\rangle$, avec bien sûr, $\langle P_j(x), P_j(x)\rangle \neq 0$. En égalisant les deux côtés, il vient donc que chacun de ces a_j doit être nul. Pour $j = n-1$, on obtient de même, à gauche :

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x), P_{n-1}(x)\rangle &= \langle P_{n+1}(x), P_{n-1}(x)\rangle - A_n \langle xP_n(x), P_J(x)\rangle && (2.1.4)\\ &= -A_n \langle P_n(x), xP_{n-1}(x)\rangle && (2.1.5) \end{aligned}$$

et à droite : $a_{n-1}\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$, d'où, en égalisant

$$a_{n-1} = -A_n \frac{\langle xP_n, P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} = -C_n.$$

Pour $j = n$, on applique le même procédé

$$a_n = -A_n \frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} = B_n.$$

La formule est donc bien démontrée. ■

2.1.2 Formule de Christoffel

Étant donnée une suite de polynômes orthogonaux, le théorème suivant permet d'en construire une infinité d'autres.

Théorème 9 *Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes, orthogonaux par rapport à une mesure $dF(x)$ de segment $[a;b]$. Soit de plus $P(x) = c(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_k)$, $c \neq 0$ un polynôme de degré k, positif sur $[a;b]$, avec $x_i \neq x_j; \forall i \neq j$. Alors l'ensemble $(q_n)_{n\geq 1}$, où*

$$q_n = \frac{1}{p(x)} \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & ... & P_{n+k}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & ... & P_{n+k}(x_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ P_n(x_k) & P_{n+1}(x_k) & ... & P_{n+k}(x_k) \end{vmatrix}$$

est un ensemble de polynômes, orthogonaux par rapport à la mesure $dF(x)$. Dans le cas où un des x_i serait de multiplicité $\mu > 1$, le théorème fonctionne encore, mais en remplaçant les $\mu - 1$ lignes supplémentaires en x_i par leur dérivée première, seconde, ...

Preuve. Montrons d'abord que le déterminant précédent (appelons-le D) n'est pas identiquement nul. Développons-le par rapport à la première ligne, pour obtenir

$$D = P_n(x)D_0 - P_{n+1}(x)D_1 + P_{n+2}(x)D_2 + ... + (-1)^k P_{n+k}(x)D_k;$$

où on a appelé D_i la sous-matrice de D obtenue en lui supprimant la première ligne et la $i + 1^e$ colonne. Comme lesdits D_i sont tout simplement des nombres, le membre de droite de l'équation précédente est une combinaison linéaire de polynômes. Aussi sont ils de degrés tous différents, donc linéairement indépendants. La combinaison linéaire ne peut alors être nulle que si tous les D_i sont nuls. Montrons donc que

$$D_k = \begin{vmatrix} P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & ... & P_{n+k-1}(x_1) \\ P_n(x_2) & P_{n+1}(x_2) & ... & P_{n+k-1}(x_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ P_n(x_k) & P_{n+1}(x_k) & ... & P_{n+k-1}(x_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

Supposons le contraire. Alors il existe une combinaison linéaire des colonnes de la matrice qui soit nulle. Autrement dit, il existe des constantes $a_i (i = 0, 1, 2, ..., k-1)$ non toutes nulles telles que

$$H(x) = a_0 P_n + a_1 P_{n+1} + ... + a_{k-1} P_{n+k-1}$$

s'annule pour $x = x_1, x_2, ..., x_k$. $H(x)$ est donc de la forme $p(x)G(x)$ pour un certain polynôme $G(x)$ de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui est donc orthogonal à $H(x)$. Cela s'écrit

$$\int H(x)G(x)dF(x) = \int G(x)^2 P(x)dF(x) = 0.$$

Puisque P est positif sur $[a; b]$, alors

$$G(x) \equiv 0 \Rightarrow H(x) \equiv 0,$$

une contradiction.

Remarquons que par le calcul précédent, ledit déterminant est un polynôme de degré exactement $n+k$. De plus, comme chaque $x_i,\ i = 1, 2, ..., k$, l'annule évidemment, on vois que ledit déterminant est divisible par $P(x)$. Ainsi, $q_n(x)$ est bien un polynôme de degré n. Soit maintenant $q(x)$, un polynôme arbitraire de degré (inférieur ou égal à $n-1$). Alors

$$\int q(x)q_n(x)(P(x)dF(x)) = \int q(x)(q_n(x)P(x))dF(x) \tag{2.1.6}$$

$$= \int q(x) \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & ... & P_{n+k}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & ... & P_{n+k}(x_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ P_n(x_k) & P_{n+1}(x_k) & ... & P_{n+k}(x_k) \end{vmatrix} dF(x) \tag{2.1.7}$$

Maintenant, le déterminant dans l'intégrale est en fait une combinaison linéaire de $P_n, P_{n+1}, ..., P_{n+k}$, orthogonaux par hypothèse à tout polynôme de degré au plus $n-1$ (par rapport à la mesure $dF(x)$). Nous avons trouvé

$$\int q(x)q_n(x)(P(x)dF(x)) = \int q(x)(q_n(x)P(x))dF(x) = 0.$$

Ainsi, comme q_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur pour chaque n, on a bien obtenu que la suite des $(q_n)_{n\geq 1}$ forme un ensemble de polynômes orthogonaux

■

2.1.3 Séries de Fourier généralisées, propriétés d'extrema

Les séries de Fourier classiques sont utilisées pour représenter une fonction périodique ou encore toute autre fonction sur un intervalle fini avec des « monômes trigonométriques », c'est-à-dire des fonctions de la forme $sin(nx)$ ou $cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 10 *Soit $B = \{u_1, u_2, u_3, ...\}$ une base d'approximation d'un espace séparable E et soit $f \in E$. La série que donne «$P_{\{u_1,u_2,u_3,...\}}(f)$ » se nomme « série de Fourier généralisée de f dans la base B ».*

Théorème 10 *Soit $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base orthogonale d'un sous-espace H_n d'un R-espace vectoriel V et soit $f \in V$. L'élément $h \in H_n$ qui minimise la norme $\|f - h\|$ s'écrit*

$$h = P_{\{u_1,u_2,...,u_n\}}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\|u_k\|^2} u_k,$$

où $a_k = \langle f, u_k\rangle$.

Preuve. Soit $g = \sum_{k=1}^{n} b_k u_k$, un élément arbitraire de H_n, alors

$$\begin{aligned}
\|f - g\|^2 &= \langle f - g, f - g\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \langle f, u_k\rangle + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \|u_k\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} b_k a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \|u_k\|^2 \\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (b_k \|u_k\| - \frac{a_k}{\|u_k\|})^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{\|u_k\|^2}
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

■

Ce calcul donne clairement que les valeurs de b_k qui minimisent $\|f - g\|^2$ sont bien les valeurs de $\frac{a_k}{\|u_k\|^2}$, c'est-à-dire que la norme est minimale lorsque $g = h$.

Avec les mêmes hypothèses et notations que dans le théorème, on obtient comme corollaire immédiat de ce résultat l'égalité

$$0 \leq \left\|f - P_{\{u_1,u_2,...,u_n\}}(f)\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\|u_k\|}\right)^2$$

qui mène à l'inégalité, dite inégalité de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{\|u_k\|}\right)^2 \leq \|f\|^2 .$$

Lorsque $n \to \infty$, le terme de gauche de cette inégalité ne peut qu'augmenter. Or, il est borné par $\|f\|^2$. Cela nous permet de conclure que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{\|u_k\|}\right)^2$ converge.

Corollaire 1 *Soit $(P_n)_{n\geq 1}$, une suite de polynômes orthogonaux. En prenant $f = P_{n+1}$ et $H_n = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$, nous obtenons que l'élément qui minimise la norme $\|f - h\|$ est $h = 0$, c'est-à-dire que P_{n+1} (normalisé) est le polynôme de degré $n+1$ de norme minimale.*

Définition 11 *Une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$ (où les a_k sont des scalaires et les u_k des éléments d'un espace vectoriel V) converge en moyenne s'il existe $g \in V$ tel que*

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Il se dit aussi que « la série converge vers g au sens des moindres carrés ».

Théorème 11 *Soit $x_0 \in \mathbb{C}$, une mesure $d\alpha(x)$ de Lebesgues-Stieltjes et soit l'ensemble*

$$S = \left\{p,\ \textit{polynôme de degré } n \textit{ tel que } \|p(x)\|^2 = 1 \textit{ dans } L^2_\alpha[a,b]\right\}$$

Soit de plus $\{p_n\}$ la suite de polynômes orthogonaux dudit espace. Alors le polynôme $p \in S$ maximisant la quantité $|p(x_0)|^2$ s'écrit

$$P(x) = K_n(x_0, x_0)^{-1/2} K_n(x_0, x);$$

où

$$K_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{P_k(x_0)} P_k(x)}{\langle P_k, P_k\rangle} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\overline{x_0}) P_k(x)}{\langle P_k, P_k\rangle}$$

Le maximum est donné par $K_n(x_0, x_0)$.

$K_n(x, y)$ est appelé « noyau de Christoffel-Darboux ».

Preuve. Écrivons

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle p, p_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{P_k}{\|P_k\|}$$

Alors la condition $\|p\| = 1$ peut s'écrire $\sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|^2 = 1$, et l'inégalité de Cauchy donne alors

$$|P(x_0)|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{|P_k(x_0)|^2}{\langle P_k, P_k\rangle} = K_n(x_0, x_0).$$

Cette borne est évidemment atteinte si $\lambda_k = \lambda P_k(x_0)$, où λ est déterminé par la condition

$$|\lambda|^2 \sum_{k=0}^{n} |P_k(x_0)|^2 = 1.$$

■

2.2 Zéros des polynômes orthogonaux

Les deux théorèmes suivants, ont une grande importance dans la théorie des polynômes orthogonaux. Le troisième est un théorème de répartition des zéros.

Théorème 12 *Le nième polynôme d'une suite de polynômes orthogonaux, $P_n(n > 0)$ admet n racines réelles distinctes, toutes situées à l'intérieur du segment fondamental.*

Preuve.

Soit $m \geq 0$, le nombre de zéros de P_n qui soient réels et situés sur le segment fondamental, que nous noterons $[a, b]$. Le théorème fondamental de l'algèbre assure d'abord que $m \leq n$. Soit donc $\phi = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ l'ensemble (éventuellement vide) des zéros de P_n. Soit de plus le polynôme $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)$ où nous nous rappelons la convention selon laquelle un produit vide vaut 1 . Ce polynôme possède les mêmes zéros que P_n dans $[a, b]$, et donc le produit $S(x)P_n(x)$ doit être du même signe sur tout l'intervalle $[a, b]$, et ne s'annuler qu'en chaque x_i. Selon les conditions énoncées sur le poids d'intégration $w(x)$, il doit en être de même pour le produit $S(x)P_n(x)w(x)$.
Ainsi, le produit scalaire $\langle S, P_n\rangle$ doit être non nul, puisque nous intégrons une fonction non identiquement nulle qui ne change pas de signe sur l'intervalle d'intégration. Or, P_n est orthogonal à tous les polynômes de degré strictement inférieur (puisqu'ils sont combinaisons linéaires des P_k pour $k = 0, 1, ..., n - 1$). Il faut donc avoir $m \geq n$. Mais nous avions déjà $m \leq n$. Nous avons donc montré que $m = n$, d'où le résultat. ■

Théorème 13 *Soit $\{P_n,\ n = 0, 1, 2, ...\}$ une suite de polynômes orthogonaux. Alors les racines de P_n se trouvent strictement entre les racines de P_{n+1}.*

Preuve. Nous utilisons le noyau de Christoffel-Darboux, Nous avons, $K_n(x, x) \geq 0$, et d'autre part

$$K_n(x, x) = P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x). \tag{2.2.1}$$

Soit donc deux zéros consécutifs α et β de P_{n+1}. Comme ils sont consécutifs, $P'_{n+1}(\alpha)$ et $P'_{n+1}(\beta)$ doivent être de signes opposés. Or 2.2.1 donne, avec ce qui la précédait

$$\begin{cases} P'_{n+1}(\alpha)P_n(\alpha) & \geq & 0 \\ P'_{n+1}(\beta)P_n(\beta) & \geq & 0. \end{cases}$$

Il suit que $P_n(\alpha)$ et $P_n(\beta)$ sont de signes opposés, et donc que P_n a un zéro dans $[\alpha, \beta]$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Comme finalement il y a n tels intervalles $[\alpha, \beta]$ et que P_n a au plus n zéros réels, le théorème suit.

■

Théorème 14 *(densité des zéros). Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes, orthogonaux par rapport à une mesure de Lebesgues-Stieltjes $m_\alpha(x)$. Pour tout intervalle $[a', b'] \subseteq [a, b]$ (avec naturellement $a' < b'$), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n \geq N$, le polynôme P_n a au moins un zéro dans $[a', b']$.*

Preuve. (Par contradiction.) Supposons le contraire, c'est-à-dire supposons que pour chaque rang m, il existe un rang n tel que $2n-1 > m$ et tel que le polynôme P_n n'a aucun de ses zéros dans $[a', b']$. Appelons $(x_{\nu n})(\nu = 1, 2, ..., n)$ les zéros de P_n pour chaque n. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{dans } [a, b]/[a', b']; \\ (x-a')(b'-x) & [a', b']. \end{cases}$$

Comme f est continue sur un intervalle fermé borné, nous savons par Weierstrass que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $r(x)$ d'un certain degré M tel que $|f(x) - r(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. Par hypothèse, il existe un rang N tel que $2N-1 > M$ et tel que p_N n'a aucun de ses zéros $x_{\nu N}$ dans $[a', b']$. Alors, en utilisant une quadrature de Gauss, nous pouvons obtenir

$$\int_a^b r(x)d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} r(x_{\nu N}).$$

Comme tous les $x_{\nu N}$ sont dans $[a, b]/[a', b']$, que $f \equiv 0$ sur cet ensemble et que $|f(x) - r(x)| < \epsilon$, il vient que $|r(x_{\nu N})| < \epsilon$ pour chaque $x_{\nu N}$. De plus, les $\lambda_{\nu N}$ sont tous positifs. Ainsi

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} r(x_{\nu N}) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} \epsilon$$

En mettant tout cela ensemble, nous pouvons faire le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)d\alpha(x) &= \int_a^b (r(x)+\epsilon)d\alpha(x) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} r(x_{\nu N}) + \epsilon(\alpha(b)-\alpha(a)) \\
&\leq \epsilon \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} + \epsilon(\alpha(b)-\alpha(a)) \\
&= \epsilon \left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} + (\alpha(b)-\alpha(a)) \right) \qquad (2.2.2) \\
&= 2\epsilon(\alpha(b)-\alpha(a)).
\end{aligned}$$

En laissant $\epsilon \to 0$, l'inégalité reste vraie et donne

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) \leq 0.$$

ce qui est évidemment une contradiction. ■

2.3 Polynômes orthgonaux sur le cercle unité

2.3.1 Construction des polynômes orthgonaux sur le cercle unité

Soit $p \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $p \geq 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)d\theta > 0$. On désigne par $L_p^2(\mathbb{R})$ la classe des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$; à valeurs complexes, périodiques de période 2π, mesurables au sens de Lebesgue dans $[-\pi;\pi]$; pour lesquelles $\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 p(\theta)d\theta < +\infty$.
Si φ et ψ sont deux fonctions dans $L_p^2(\mathbb{T})$; alors l'espace $\left(L_p^2(\mathbb{T}), \langle .,. \rangle_{L_p^2(\mathbb{T})}\right)$ devient un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_p^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\overline{\psi(\theta)}p(\theta)d\theta;$$

et la norme par

$$\|\varphi\|^2_{L_p^2(\mathbb{T})} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L_p^2(\mathbb{T})} .$$

Définition 12 *Soit p une fonction de poids vérifiant $p \in L^1(\mathbb{T})$; p non négative et $\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)d\theta > 0$. On dit que le système de polynômes $\{\varphi_n(z) : n \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{C}\}$ est un système orthonormal relativement au cercle et à la fonction poids p ; si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions suivantes :*

1. *$\varphi_n(z)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de z^n est réel et strictement positif.*
2. *Le système $\left\{\phi_n(\theta) = \varphi_n(e^{i\theta})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormé dans $L^2_p(\mathbb{T})$; c'est-à-dire :*

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_{L^2_p(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta}) \overline{\varphi_m(e^{i\theta})} p(\theta)d\theta = \delta_{n,m};\ n, m \in \{1, 2...\}$$

Proposition 6 *Soit p une fonction de poids vérifiant $p \in L^1(\mathbb{T})$; p non négative et $\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)d\theta > 0$ alors il existe un système de polynômes orthogonaux unique $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ relativement au cercle et à la fonction poids p ; c'est-à-dire vérifiant les conditions 1 et 2 de la définition.*

Preuve. Considérons le système $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et posons

$$\widetilde{\psi}_n(\theta) = \psi_n(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^n = z^n;\ n \in \mathbb{N}$$

Alors $\widetilde{\psi_n} \in L^2_p(\mathbb{T})$ car :

$$\left\|\widetilde{\psi}_n\right\|_{L^2_p(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\widetilde{\psi}(\theta)\right|^2 p(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)d\theta < +\infty; ;$$

de plus le système $\left\{\widetilde{\psi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $L^2_p(\mathbb{T})$. Donc en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Grahm Schmidt au système $\left\{\widetilde{\psi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient :
$\exists \{\widetilde{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; $\widetilde{\varphi}_n \in L^2_p(\mathbb{T})$ tel que :

1. $\widetilde{\varphi}_n = \lambda_{n,n}\widetilde{\psi}_n + \lambda_{n,n-1}\widetilde{\psi}_{n-1} + ... + \lambda_{n,0}\widetilde{\psi}_0,\quad \lambda_{n,n} > 0$
2. $\langle \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\varphi}_m \rangle_{L^2_p(\mathbb{T})} = \delta_{n,m};\ n, m \in \{1, 2...\}$

Développons 1) et 2) :

1. $\widetilde{\varphi}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\widetilde{\psi}_k(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}\psi_k(e^{i\theta})$
   donc : $\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} z^k;\ \lambda_{n,n} > 0,\ z = e^{i\theta}$

2.

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\varphi}_n, \widetilde{\varphi}_m \rangle_{L^2_p(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\varphi}_n(\theta)\overline{\widetilde{\varphi}_m(\theta)}p(\theta)d\theta && (2.3.1)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}p(\theta)d\theta && (2.3.2)\\
&= \delta_{n,m};\ n, m \in \{1, 2...\} && (2.3.3)
\end{aligned}$$

■

2.3.2 Problème du comportement asymptotique des polynômes extrémaux

L'étude du comportement asymptotique des polynômes extrémaux est d'un grand intérêt dans la théorie de polynômes orthogonaux généraux et extrémaux ; il s'agit d'une généralisation du problème du comportement asymptotique des polynômes orthonormés par rapport à une mesure positive dont le support est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$. L'étude du comportement asymptotique des polynômes extrémaux contribue de façon significative dans la résolution de problèmes de mathématiques et elle a beaucoup d'applications ; citons particulièrement, les processus stochastiques, les opérateurs de Toeplitz, la théorie aléatoire de la diffusion, l'approximation rationnelle, la théorie spectrale,...

.

Définition 13 *On appelle problème du comportement asymptotique des polynômes extrémaux relativement à la mesure μ l'étude du problème suivant :*

$$Etudier\ :\ \lim_{n\to\infty} L_n(z);\ z \in E\ ou\ z \in K;\ K\ compact\ de\ \mathbb{C};\ avec\ S = supp(\mu)$$

La solution de ce problème dépend en général de μ et de son support S :

Il'existe trois types de problèmes du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux ou extrémaux :

— Asymptotique faible des polynômes orthogonaux ou extrémaux qui consiste en l'étude de l'asymptotique de $|L_n(z)|^{1/n}$: Ce problème est étroitement lié à la distribution des zéros des polynômes orthogonaux ou extrémaux et il dépend de la propriété de régularité de la mesure. L'outil principal dans l'étude de ce cas est la capacité logarithmique. Parmi les applications on peut citer la distribution des zéros et leur comportement asymptotique.

— Ratio asymptotique c'est l'asymptotique de $\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}$. Un grand nombre de travaux a été fait sur ce sujet. Dans le cas des polynômes orthogonaux sur le cercle, Szegö [47] a obtenu des résultats de convergence pour des fonctions poids vérifiant la condition de Szegö, ensuite moyennant la transformation de Joukowski $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$qui transforme le cercle unité au segment $[-1; +1]$; il a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment. Le cas général sur le ratio asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, a été traité par Rakhmanov [28] . La meilleure condition pour établir le ratio asymptotique pour les polynômes orthogonaux est la condition dite de Rakhmanov : $\mu' > 0$ presque partout sur le support essentiel de la mesure μ .

— Asymptotique fort pour les polynômes orthogonaux ou extrémaux, qui est le problème du comportement asymptotique uniforme des polynômes $L_n(z)$ à l'extérieur et sur le support de la mesure. Dans le cas classique d'un intervalle ou le cercle unité, la formule forte du comportement asymptotique a été établie par Szegö [47]. La théorie de Szegö a été prolongée et développée par Widom [49], dans le cas où le support de la mesure est un système fini d'arcs et de contours, ensuite par Gontchar [11] et Nikishine [27] , dans le cas où le support de la mesure est le segment $[-1; +1]$ plus un nombre fini de points, et d'autres.

Chapitre 3

Espaces de Hardy et fonction de Szegö

Les espaces H^p ainsi dénommés en référence à G. H. Hardy [12], ont beaucoup de propriétés intéressantes, en ce qui concerne les problèmes de factorisation, les valeurs frontières et les représentations du type de Cauchy à partir de mesures sur la frontière. Les espaces de Hardy ont été introduits en analyse en 1915 dans le disque unité ouvert, constituent l'outil fonctionnel de base pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux . Pour une étude approfondie des espaces de Hardy dans le disque unité ouvert, on cite les ouvrages de K. Hoffman [13], de P. Kossis [17] ; de S. Zygmund [50].

3.1 Espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, pour $0 < p \leq \infty$

Définition 14 *Pour* $f \in Hol(\mathbb{D})$ *,* $p \in]0; \infty[$ *et* $r \in [0; 1[$ *posons*

$$M_p(f,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \ et$$

$$M_\infty(f,r) = \sup_{0 \leq t < 2\pi} \left| f(re^{it}) \right|$$

Pour $0 < p \leq \infty$*, l'espace de Hardy du disque noté* $H^p(\mathbb{D})$ *est l'ensemble des fonctions de* $Hol(\mathbb{D})$ *telles que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} M_p(f,r) < \infty$$

Ainsi, $H^\infty(\mathbb{D})$ represente l'ensemble des fonctions analytiques et bornées sur $\mathbb{D}$.

Définition 15 *La classe de Nevanlinna $\mathtt{N}$ est définie par :*

$$\mathtt{N} = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}),\ \sup_{0 \leq r < 1} M_0(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{it}) \right| dt < \infty \right\}$$

Avec Les fonctions de $\mathtt{N}$ étant holomorphes, ce sont des fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$ à valeurs complexes.

Nous avons les inclusions suivantes :

Théorème 15

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset \mathtt{N}$$

pour $0 < p < s < \infty$.

Théorème 16 *Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$. Les fonctions $r \to M_p(f, r)$ (pour $0 < p \leq \infty$) sont des fonctions croissantes sur $[0, 1[$.*

Preuve. Nous avons vu au chapitre I que si $f \in Hol(\mathbb{D})$ alors $|f|^p$ et $log^+|f|$ sont des fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ pour $0 < p < \infty$. D'après la Proposition 3 (chapitre I), $r \to M_p(f, r)$ (pour $0 < p < \infty$) est une fonction croissante sur $[0, 1[$.
Le fait que $r \to M_\infty(f, r)$ est croissante sur $[0, 1[$ est une conséquence du principe du maximum pour les fonctions de $Hol(\mathbb{D})$. ■
Les fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ possèdent une limite radiale dans $L^p(\mathbb{T})$; c'est à dire que pour presque tout $t \in [0, 2\pi\,[$, $\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ existe et si l'on définit la fonction f^* par $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$; alors $f^* \in L^p(T)$.

Théorème 17 *([17] [33]) Si $p > 0$ et si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors f possède une limite radiale notée f^*,*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1} f(re^{it})$$

presque partout sur le cercle T. En plus

$$f^* \in L^p(T) \ et\ \|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|f^*\|_{L^p(T)} \ pour\ 1 \leq p \leq \infty.$$

On peut donc définir les espaces de Hardy (*pour* $0 < p \leq \infty$) et la classe de Nevanlinna N de la façon suivante :

Définition 16 *Pour $0 < p \leq \infty$ on a :*

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \lim_{r \to 1^-} M_p(f, r) < \infty \right\}.$$

et

$$N = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \lim_{r \to 1^-} M_0(f, r) < \infty \right\}.$$

La norme naturelle dont on munit $H^p(\mathbb{D})$ est

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \lim_{r \to 1^-} M_p(f; r) \text{ si } p \in \Big[0; \infty\Big[\text{ et } \|f\|_{H^\infty(\mathbb{D})} = \lim_{r \to 1^-} M_\infty(f; r)$$

Théorème 18 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\Big\|.\Big\|_{H^p(\mathbb{D})}$ est un espace de Banach.*

Théorème 19 *Soit f une fonction de $Hol(\mathbb{D})$ de la forme*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n.$$

Alors, f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n^2| < \infty$.
De plus on a $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}$.

Théorème 20 *$H^2(\mathbb{D})$, muni du produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta}) \overline{g^*(e^{i\theta})} d\theta$$

est un espace de Hilbert

Définition 17 *Pour $0 < p \leq \infty$ on a :*

$$H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(T) : \ \hat{f}(n) = 0, \ n < 0 \ \right\}$$

où $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$ est le n ième coefficient de Fourier de f.

Pour une fonction $g \in H^p(\mathbb{T})$; le noyau de Poisson $P_r : t \to Re\left(\frac{1+re^{int}}{1-re^{int}}\right)$ permet de résoudre le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta f = 0. \\ \lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) = g(e^{it}) \text{ pour presque tout } t \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

qui a pour solution

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt.$$

On peut vérifier que $f \in H^p(\mathbb{D})$ et que $f^* = g$. On peut alors identifier isométriquement $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$; au sens où l'on a construit un isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$.

Théorème 21 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'application $\phi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{T})$ telle que $\phi(f) = f^*$ et où $H^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^p(T) : \ \hat{f}(n) = 0, \ n < 0 \right\}$ est un isomorphisme isométrique.*

Théorème 22 *[32]*

Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors

$$\lim_{r \overset{1}{\to}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{it}) - f^*(e^{it}) \right|^p dt = 0.$$

Théorème 23 *[32] Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors f est respectivement l'intégrale de Poisson et de Cauchy de sa limite radiale $f^*(e^{it})$, on a alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt,$$

et

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

3.2 Produit de Blaschke

Théorème 24 *Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de complexes non nuls tels que $|\alpha_n| < 1, n \geq 1$ avec de plus*

$$\sum_{n\geq 1} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

. Alors le produit infini

$$\prod_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ dont les zéros sont exactement les nombres (α_n) répétés selon leur multiplicité.
De plus $B^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} B(re^{it})$ existe m-presque partout et est de module 1 m-presque partout $|B^*(e^{it})| = 1$ avec

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| B(re^{it}) \right| dt = 1$$

Définition 18 *Soit* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments non nuls de* $\mathbb{D}$ *telle que* $\sum_{n\geq 1}(1-|\alpha_n|) < \infty$ *la fonction*

$$B(z) = z^k \prod_{n\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z},$$

(avec k *entier* $k \geq 1$*) est appelée un produit de Blaschke.*

Théorème 25 *Soit* $f \in N$ *une fonction non identiquement nulle sur* $\mathbb{D}$*. On note* (α_n) *la suite des zéros de* f *numérotés de sorte que* $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \ldots$*; chaque* α_n *pouvant apparaitre plusieurs fois. Alors les zéros de* f *vérifient la condition de Blaschke*

$$\sum_{n\geq 1}(1-|\alpha_n|) < \infty$$

Théorème 26 *Soit* $f \in \mathtt{N}$ *non identiquement nulle. Soit* B *le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de* f*, i.e.*

$$B(z) = z^k \prod_{k\geq 1} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z},$$

si 0 *est un zéro d'ordre* k *de* f *et avec* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *suite des zéros non nuls de* f *répétés selon leur multiplicité. Alors* $B \in N$ *,* $f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ *existe m-presque partout et* $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$*.*

Théorème 27 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$ *et soit* f *une fonction de* $H^p(\mathbb{D})$ *non identiquement nulle. Si* B *est le produit de Blaschke associé à* f *(*$f \in N$*) alors* $\frac{f}{B} \in H^p(\mathbb{D})$ *avec* $\left\|\frac{f}{B}\right\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$

Preuve. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité et soit B_n le produit de Blaschke fini associé aux n premiers zéros de f .
B_n est une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec $|B_n(e^{it})| = 1$ pour $t \in R$. Comme B_n est continue sur le compact D , B_n est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Par conséquent, si l'on choisit $\epsilon \in]0,1[$, il existe $\nu < 1$ tel que pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$, vérifiant $|z_1 - z_2| < \nu$.
On ait $|B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \epsilon$.
En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $1-\nu < r < 1$ on a $|B_n(re^{it}) - B_n(e^{it})| < \epsilon$. Comme

$|B_n(e^{it})| = 1$, on obtient $1-\epsilon < |B_n(re^{it})| < 1+\epsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $1-\nu < r < 1$. Alors :

$$\frac{1}{1+\epsilon}\left|f(re^{it})\right| < \left|\frac{f(re^{it})}{B_n(re^{it})}\right| < \frac{1}{1-\epsilon}\left|f(re^{it})\right|$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1-\nu < r < 1$. Si $p \in]0,\infty]$ et $f \in H_p(\mathbb{D})$ on obtient ainsi

$$\frac{1}{1+\epsilon}\left\|f\right\|_p < \left\|\frac{f}{B_n}\right\| < \frac{1}{1-\epsilon}\left\|f\right\|_p$$

pour tout $\epsilon \in]0,1[$. On a $\|g_n\|_p = \|f\|_p$ avec $p \in]0,\infty[$ et avec $g_n = \frac{f}{B_n}$.
Posons $g = f.B$. Par construction $g \in Hol(\mathbb{D})$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$ et $(|g_n(z)|)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. D'aprés le théorème de convergence monotone, pour $p \in]0,\infty[$ et pour $r \in [0,1[$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_n(re^{it})\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty}\left|g_n(re^{it})\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left|g(re^{it})\right|^p dt.$$

ce qui implique $M_p(g,r) = \lim_{n\to\infty} M_p(g_n,r)$. Comme $r \to M_p(g_n,r)$ est une fonction croissante avec $\lim_{r\to 1^-} M_p(g_n,r) = \|f\|_p$, on obtient $\lim_{n\to\infty} M_p(g_n,r) \leq \|f\|_p$ pour tout $r \in [0,1[$ et donc $\|g\|_p = \lim_{r\to 1} -M_p(g,r) \leq \|f\|_p$. Par conséquent $g \in H_p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. D'autre part, comme $|B(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on en déduit $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi on a $\|g\|_p \geq \|f\|_p$ .Alors , pour $p \in]0,\infty[$, on a $\|g\|_p = \|f\|_p$. Si $f \in H_p(\mathbb{D})$, comme $\sup_{z\in\mathbb{D}} |g_n(z)| = \|g_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty$, on a $|g_n(z)| \leq \|f_n\|_\infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout entier $n \geq 1$. Comme pour $z \in \mathbb{D}$ on a $g(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$,

on a $\|g\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |g_n(z)| \leq \|f\|_\infty$. De plus, comme $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on obtient $\|g\|_\infty \geq \|f\|_\infty$, et donc $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$. ■

3.3 Théorèmes de factorisation

D'aprés le Théorème (27), toute fonction f non identiquement nulle de $H^p(\mathbb{D})$ avec $(p \in]0,\infty])$ peut se factoriser sous la forme $f = Bg$ oŭ B est un produit de Blaschke et $g \in H^p(\mathbb{D})$ sans zéro dans $\mathbb{D}$. Il existe une factorisation plus subtile qui nous semblent importantes pour le dernier chapitre.

3.3.1 Fonctions intérieures

Définition 19 *Une fonction intérieure est une fonction $U \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout (avec $U^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} U(re^{it})$).*

Le théorème suivant donne une description complète des fonctions intérieures.

Théorème 28 *Soit $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, soit B un produit de Blaschke et soit v une mesure de Borel positive finie sur T telle que $v \perp m$. Pour $z \in \mathbb{D}$ on pose*

$$U(z) = cB(z) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dv(t)\right\} \tag{3.3.1}$$

La fonction U est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.

Preuve. Supposons que U soit définie sur $\mathbb{D}$ par (3.3.1). Par construction $U \in Hol(\mathbb{D})$. Posons $g = \frac{U}{B}$, alors on a

$$\log|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) d(-v(t)),$$

on note que $\log|g|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure de Borel finie négative $-\nu$. Ainsi $\log|g|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$, ce qui implique $|g(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent, g et par suite U sont des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$. De plus, comme $\nu \perp m$ et $\log|g| = -P(\nu)$, d'après le Théorème 6, on a $\lim_{r\to 1^-} \log|g(re^{it})| = \log|g^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout. On a donc $|g^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout.
Comme, $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout (m la mesure de Lebesgue sur T), on a donc $|U^*(e^{it})| = 1$ m- presque partout et ainsi la fonction U est bien une fonction intérieure.
Réciproquement, soit U une fonction intérieure et soit B le produit de Blaschke associé à la suite de ses zéros comptés avec multiplicité. D'après le Théorème 27, $g = \frac{U}{B} \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\|g\|_\infty = \|U\|_\infty = 1$ et par construction g ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Il existe donc $L \in Hol(\mathbb{D})$ vérifiant $\log|g| = Re(L)$, ce qui implique que $\log|g|$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. D'autre part $\log|g|$ est négative puisque $\|g\|_\infty = 1$.
Puisque $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. Comme $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout, nécessairement $|g^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout et donc $\log|g^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout.
D'après le théorème , il existe $\nu \geq 0$, ν finie sur $\mathbb{T}$, $\nu \perp m$ telle que $\log|g|$ soit l'intégrale de Poisson de $-\nu$. Finalement $\log|g|$ est la partie réelle de la fonction holomorphe

$h(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)$ Comme $g = e^l$ avec $Re(l) = Re\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)$, on obtient $g(z) = c\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right\}$ avec $|c| = 1$ puisque $h(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t) - l \in i\mathbb{R}$.

■

Définition 20 *Les fonctions intérieures singulières sont les fonctions intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, i.e. les fonctions de la forme*

$$U(z) = c\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dv(t)\right\}$$

oŭ $|c| = 1$ et oŭ v est une mesure de Borel positive finie sur T telle que $v\perp m$.

3.3.2 Fonctions extérieures

Définition 21 *Une fonction extérieure est une fonction $Q \in Hol(\mathbb{D})$ de la forme*

$$Q(z) = c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})dt\right\}$$

oŭ $|c| = 1$ et oŭ φ est une fonction positive mesurable telle que $\log\varphi \in L^1(T)$.

Proposition 7 *Soit Q une fonction extérieure reliée à φ et qui intervient dans la définition . Alors*

1. *$\log|Q|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la dérivée de Radon-Nikodym est $\log\varphi$.*
2. *$\lim_{r\to1^-}|Q(re^{it})| = \varphi(e^{it})$ m-presque partout. (m le mesure de Lebesgue sur T)*
3. *Pour $p \in]0,\infty]$, $Q \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Dans ce cas $\|Q\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|\varphi\|_{H^p(\mathbb{D})}$.*

Preuve. Comme

$$|Q(z)| = \exp Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})dt\right) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\log\varphi(e^{it})dt\right\}$$

avec $Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = P_r(\theta-t)$ *si* $z = re^{i\theta}$, on a $\log|Q(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi(e^{it})dt$, ce qui prouve 1. De plus, d'après 1. et en appliquant le Théorème 5 , on obtient $\lim_{r\to1^-}|Q(re^{it})| = \log\varphi(e^{it})$ m-presque partout, ce qui implique 2.

Si $p = \infty$, compte tenu de 2. l'assertion 3. est évidente. Supposons $p \in]0,\infty[$ et $Q \in H^p(\mathbb{D})$.

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels de $]0,1[$ tendant vers 1 .
D'après le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (sur $\mathbb{T}$) $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie par $Q_n(e^{it}) = |Q(r_n e^{it})|^p$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{n\to\infty} Q_n(e^{it})dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(e^{it})$$

ce qui implique $\|Q^*\|_{H^p(\mathbb{D})} \leq \|Q\|_{H^p(\mathbb{D})}$. D'après 2., on a donc $\|\varphi\|_{H^p(\mathbb{D})} \leq \|Q\|_{H^p(\mathbb{D})}$.
Par conséquent, si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Réciproquement, supposons que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. On a alors :

$$|Q(re^{it})|^p = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\varphi^p(e^{it})dt\right\}$$

D'après l'inégalité de Jensen, appliqué à la fonction convexe $x \to e^x$ et à la mesure positive μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}P_r(\theta - t)dt$, on obtient :

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log\varphi^p(e^{it})dt\right\} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})dt$$

On a donc

$$|Q(re^{it})|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})dt$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la variable θ, sachant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dt = 1$, on obtient $M_p(Q,r) \leq \|\varphi\|_p$, et donc $\lim_{r\to 1^-} M_p(Q,r) = \|Q\|_{H^p(\mathbb{D})} \leq \|\varphi\|_{H^p(\mathbb{D})}$.
L'équivalence $Q \in H^p(\mathbb{D}) \Leftrightarrow \varphi \in L^p(\mathbb{T})$ est démontrée.
Il résulte des calculs ci-dessus que si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\|Q\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|\varphi\|_{H^p(\mathbb{D})}$.

■

Proposition 8 *Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Alors la limite radiale de f, notée f^*, est telle que* $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ *et* $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.

Preuve. Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En effet, $H^p(\mathbb{D}) \subset N$ et on a, d'après le Théorème 26 si $f \in N$ alors $f^*(e^{it})$ est définie m-presque partout avec $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.
De plus, pour $p \in]0,\infty[$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{2\pi} \liminf_{r\to 1^-} \left|f(e^{it})\right|^p dt \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^p dt$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^p dt \leq M_p(f,r)^p = \|f\|_p^p .$$

Par conséquent, pour $p \in]0, \infty]$, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Pour $p = \infty$, comme $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc $|f^*(e^{it})| \leq \|f\|_\infty$ m-presque partout. De ce fait, si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ on a donc $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$. ■

Proposition 9 *Soit $p \in]0, \infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Alors, la fonction extérieure Q_f définie par*

$$Q_f(z) = c \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt\right\} \tag{3.3.2}$$

appartient à $H^p(\mathbb{D})$.

Remarque 3 *La fonction Q_f est appelée facteur extérieur de f. Notons que Q_f ne dépend que de f^*.*

Preuve. Soit $p \in]0, \infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. D'après le Théorème 26, $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Par suite l'intégrale (3.3.2) est bien définie comme fonction extérieure. De plus, comme , $f \in H^p(\mathbb{D})$ implique $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, la 3 ième assertion de la Proposition 7 nous permet de conclure que $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$. ■

3.3.3 Factorisations des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$.

Le théorème suivant va nous permettre d'établir la factorisation de toute fonction appartenant à un espace de Hardy sous la forme d'un produit d'une fonction intérieure par une fonction extérieure.

Théorème 29 *Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors il existe une fonction intérieure U_f telle que $f = U_f Q_f$ où Q_f est le facteur extérieur de f, à savoir la fonction de $H^p(\mathbb{D})$ définie par :*

$$Q_f(z) = c \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt\right\}.$$

De plus

$$\log|f(0)| \leq \int_0^{2\pi} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt \tag{3.3.3}$$

avec égalité si et seulement si U_f est constante, autrement dit, si et seulement si f est extérieure.

Preuve. Commençons par le cas $p = 1$. On peut supposer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ et que $f(0) = 1$; en effet, on pose sinon $g = f/B$ où B est le produit de Blaschke construit sur les zéros de f, on a alors $|f^*| = |g^*|$ et le Théorème 27 montre alors que $g \in H^1(\mathbb{D})$. La fonction $\log|f|$ est donc harmonique sur $\mathbb{D}$ et la propriété de moyenne fournit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| dt = \log|f(0)| \quad (0 < r < 1)$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-\left|f(re^{i\theta})\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| dt \leq \|f\|^N \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{D})}$$

On en déduit par le lemme de Fatou

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^-\left|f^*(e^{i\theta})\right| dt \leq \|f\|^N \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{D})}$$

et donc $\log^-|f^*| \in L^1(T)$; de la meme fa»con $\log^+|f^*| \in L^1(T)$ et $\log|f^*| \in L^1(T)$, ce qui montre que la définition de Q_f a bien un sens. De plus, on a $f^* \in L^1(T)$ grace à la Proposition 8 et donc $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$.

Soit $|z| \leq 1$ et $0 < r < 1$, on pose $f_r(z) = f(rz)$. Alors, f_r est définie sur $\overline{\mathbb{D}}$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\log|f_r(z)| = P(\log|f_r|)(z) = P(\log^+|f_r|)(z) - P(\log^-|f_r|)(z).$$

où P l'intégrale de Poisson. Pour tout $u, v > 1$, on a

$$|\log u - \log v| = \int_u^v \left|\frac{dt}{t}\right| \leq \int_u^v |dt| = |u - v|$$

et donc $\left|\log^+ u \log^+ v\right| \leq |u - v|$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$. Puisque , $\|f_r - f^*\|_{H^1(\mathbb{D})} = 0$ lorsque r tend vers 1 , on a

$$\left|P(\log^+|f_r|) - P(\log^+|f^*|)\right| \leq |P(|f_r - f^*|)| \to 0$$

d'où $P(\log^+|f_r|) \to P(\log^+|f^*|)$ pour $r \to 1$. Le lemme de Fatou donne

$$P(\log^+|f^*|) \leq \liminf_{r\to 1} P(\log^-|f_r|) = P(\log^+|f^*|) - \log|f^*|\,.$$

On a donc l'inégalité $\log|f^*| \leq P(\log|f^*|)$. Mais d'après l'assértion 3 de la Proposition 7, $\log|Q_f| = P(\log|f^*|)$ et donc $|f| \leq |Q_f|$. Ceci montre que la fonction $U_f = f/Q_f$

appartient à H^∞.
Du fait que $\log|f^* \in L^1(\mathbb{T})$ et du théorème précédent on déduit $|f^*| = \left|Q_f^*\right| \neq 0$ *p.p.* et donc $\left|U_f^*\right| = 1p.p.$.
La factorisation $f = U_f Q_f$ est donc établie avec U_f intérieure. L'inégalité

$$\log|f^*(0)| \leq \int_0^{2\pi} \log\left|f^*(e^{it})\right| dt$$

est évidente en appliquant à $z = 0$ la relation $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ L'égalité n'a lieu que si $|f(0)| = |Q_f(0)|$, c'est-à-dire si et seulement si $\left|U_f^*(0)\right| = 1$. Puisque $\|U_f\|_{H^\infty} = 1$, cette condition équivaut à U_f constante.
Si $1 < p \leq \infty$, alors grace au lemme de Fatou

$$\|f^*\|^p_{H^p(\mathbb{D})} \leq \liminf_{r\to 1} \int_{\mathbb{T}} |f_r|^p \frac{dt}{2\pi} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$$

et donc $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Ainsi $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$ d'après l'assértion 3 de la Proposition 7. Puisque $f \in H^1(\mathbb{D})$, la factorisation $f = U_f Q_f$ a bien lieu, ainsi que l'inégalité $\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f^*(e^{it})|\, dt$.

Pour $p < 1$, on utilise la décomposition $f = Bh^{2/p}$ du théorème 27 avec $h \in H^2(\mathbb{D})$. On a alors $\log|f^*| = \log|B^*| + \log\left|(h^{2/p})^*\right| = \frac{2}{P}\log|h^*| \in L^1(\mathbb{T})$ On a aussi $Q_f = (Q_f)^{2/p}$ et donc $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$. Puisque U_h est une fonction intérieure, il en va de meme pour $U_f = BU^{2/p}$ et alors

$$f = Bh^{2/p} = BU_h^{2/p} Q U_h^{2/p} = U_f Q_f.$$

Enfin

$$\log|f(0)| = \log|B(0)| + \log|h(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|h^*(e^{it})\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f^*(e^{it})\right|$$

avec égalité si et seulement si U_f est constante.

■

Remarque 4 *Les fonctions Q_f et U_f sont appelées respectivement facteur extérieur et facteurs intérieur de f. Le facteur U_f tient compte des zéros de f dans $\mathbb{D}$ et du comportement de f^* sur T tandis que le facteur Q_f ne dépend que des valeurs de $|f^*|$ sur T.*

3.4 Fonction de Szegö

Comme on le verra plus tard, la formule asymptotique des polynôme orthogonaux s'exprime essentiellement en fonction des fonctions de Szegö . les fonctions de Szegö rentrent dans le cadre général de la représentation des fonctions positives.Pour la construction de ces fonctions dans le disque unité ouvert, on cite ([44] ; [45] ; [46] ; [47]).

Soit $F \in H^p(\mathbb{D})$ et F^* sa limite radiale qui existe presque partout sur le cercle unité. Posons : $f(\theta) = \left|F^*\left(e^{i\theta}\right)\right|$ on a vu que $f \in L^p([-\pi,\pi], d\theta)$ (Théorème 17), et $\log(f) \in L^1([-\pi,\pi], d\theta)$.

Réciproquement si $f \in L^p([-\pi,\pi], d\theta)$, f presque partout positive et $\log(f) \in L^1([-\pi,\pi], d\theta)$ on a montre qu'il existe une infinité de fonctions $F \in H^p(\mathbb{D})$ presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$. F^* étant la limite radiale de F (Proposition 7).
Parmi les fonctions de type F , on peut construire une fonction particulière dite fonction de Szegö et dont les propriétés se résument dans le théorème suivant :

3.4.1 Fonction de Szegö associée au disque unité $\mathbb{D}$

Théorème 30 *Soit f une fonction non négative intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. et vérifiant la condition de Szegö*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\theta)\, d\theta > -\infty,$$

Alors la fonction définie par :

$$S_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log f(\theta)\, d\theta\right\} \quad (|z|<1),$$

dite fonction de Szegö associée à $\mathbb{D}$ et à la fonction poids f , possède les propriétés suivantes :

1. $S_f \in H^2(\mathbb{D})$,
2. $S_f(z) \neq 0$ *pour* $|z| < 1$,
3. $\left|S_f^*\left(e^{ix}\right)\right|^2 = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi,\pi]$; *où* S_f^* *est la limite radiale de* S_f,
4. $S_f(0) > 0$.

Preuve. Considérons l'intégrale de Poisson associée à la fonction $\log(f)$ qu'on note par :

$$u(r,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\log f(\theta)\,d\theta$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité D puisque $\log(f)\in L^1([-\pi,\pi],d\theta)$

Considérons maintenant la fonction holomorphe $h(z)$ dont $u(r;x)$ est la partie réelle et exigeons que $h(0)$ soit réelle pour avoir l'unicité de h. La fonction cherchée sera donc

$$g(z)=\exp\left\{\frac{1}{2}h(z)\right\}.$$

On a $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}=\mathbf{Re}(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z})$, alors

$$\mathbf{Re}S_f(z)=\mathbf{Re}g(z)\,;\ \left(z=re^{ix},\ r\in[0,1[\right)$$

alors

$$S_f(z)=g(z)$$

(2) Montrons que :

$$\exists c>0\ tel\ que:\ \forall r\in[0,1[:\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_f\left(re^{ix}\right)\right|^2dx\leq c.$$

En effet

$$\begin{aligned}|S_f(z)| &= \left|\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\mathbf{Re}h(z)+\mathbf{Im}h(z)\right)\right\}\right|\\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbf{Re}h(z)\right\}\\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}u(r,x)\right\}\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Par suite , pour $z=re^{ix}$; $r\in[0;1[$; on a :

$$\begin{aligned}\left|S_f\left(re^{ix}\right)\right|^2 &= \exp\{u(r,x)\}\\ &= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\log f(\theta)\,d\theta\right\}\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta(\textit{inégalité de Jensen}).\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_f\left(re^{ix}\right)\right|^2dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta=C\ \forall r\in[0;1[.\end{aligned}$$

ce qui donne le point (1).

(2) est évident.

(3) $S_f \in H^2(\mathbb{D})$; notons par S_f^* la limite radiale de S_f . Comme :

$$\left|S_f\left(re^{ix}\right)\right|^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(x-\theta\right)+r^2}d\theta\right\}$$

il vient

$$\begin{aligned}\left|S_f^*\left(re^{ix}\right)\right|^2 &= \lim_{r\to 1^-}\left|S_f^*\left(re^{ix}\right)\right|^2 \\ &= \exp\left\{\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(x-\theta\right)+r^2}d\theta\right\} \\ &= \exp\left\{\log f\left(x\right)\right\};\ \textit{presque partout sur } [-\pi;\pi];\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

(5) $S_f^*(0) = \exp\left\{\frac{1}{2}h\left(0\right)\right\} > 0$: ($h(0) \in IR$ *par construction*).

■

3.4.2 Fonction de Szegö associée à l'exterieur du disque unité

Soit $G = \{w \in \mathbb{C},\ |w| > 1\} \cup \{\infty\}$, et $Hol(G)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans G (∞ y compris) et par $T_r = \{w \in \mathbb{C},\ |w| = r\}$

Définition 22 *(Espace $H^2(G)$) Soit $f \in Hol(G)$; on dit que $f \in H^2(G)$ s'il existe une constante C positive, indépendante de r, telle que :*

$$\int_{T_r}|f(w)|^2|dw| \leq C,\ \forall r \in [1,2[.$$

Si $f \in H^2(G)$; on note par :

$$\|f\|^2_{H^2(G)} = \sup_{1\leq r<2}\int_{T_r}|f(w)|^2|dw|$$

Proposition 10 *Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$; et soit la fonction g définie par :*

$$\begin{cases} g(w) &= f(\frac{1}{w}) \textit{ pour } w \in G\setminus\{\infty\}. \\ g(\infty) &= f(0). \end{cases}$$

Alors

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \Leftrightarrow g \in H^2(G).$$

Théorème 31 *Soit f une fonction non négative définie $[-\pi,\pi]$ telle que f et $\log(f) \in L^1([-\pi,\pi], d\theta)$, $d\theta$ étant la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.*

Alors il existe une fonction unique notée S_f^{ext} , appelée fonction de Szegö associée à l'extérieur de T et à la fonction poids f, possédant les propriétés suivantes :

1. $S_f^{ext} \in H^2(G)$,

2. $S_f^{ext}(w) \neq 0$ *pour tout* $w \in G$,

3. $\left|\left(S_f^{ext}\right)^*(e^{ix})\right|^2 = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi, \pi]$; $\left(S_f^{ext}\right)^*$ *est la limite radiale de* S_f^{ext},

4. $S_f^{ext}(\infty) > 0$.

Preuve. Considérons la fonction de Szegö S_f introduite dans le théorème 30 et construisons la fonction S_f^{ext} de la façon suivante :

$$\begin{cases} S_f^{ext}(w) &= S_f(\frac{1}{w}) \text{ pour } w \in G\setminus \{\infty\}. \\ S_f^{ext}(\infty) &= S_f(0). \end{cases}$$

Alors les propriétés de S_f et le théorème 30 nous donne les propriétés de S_f^{ext} Notons que la formule explicite de S_f^{ext} est donnée par :

$$S_f^{ext}(w) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{w+e^{-i\theta}}{w-e^{-i\theta}}\log f(\theta)\, d\theta\right\}, \quad |w| > 1$$

■

3.4.3 Espace de Hardy $H^2(G, p)$ associé à G et à la fonction poid p

$H^p(G, p)$, est l'espace fonctionnel de base pour l'étude du comportement asymptotique des polynomes orthogonaux.

Les formules asymptotiques de ces polynômes seront déduites des valeures optimales de problèmes extremaux de $H^2(G, p)$.

Définition 23 *On dit qu'une fonction* $h \in H^2(G)$ *est dans* $H^2(G, p)$ *;p une fonction poids vérifiant :* $p \in L^1([-\pi, +\pi], d\theta)$ *avec* $p \geq 0$ *el* $\log p \in L^1([-\pi, +\pi], d\theta)$ *,si* $(h.S_p^{ext}) \in H^2(G)$, *où* S_p^{ext} *est la fonction de Szegö associée à l'extérieur de* T *et à la fonction poids* p

Théorème 32 *Soit* $f \in H^2(G, p)$ *. Alors* f *admet en presque tous point de* T *une limite radiale notée* f^*, *avec :*

1. $f^* \in (L^2(\mathbb{T}, p\,|d\xi|)$

2. $(H^2(G, p), \|.\|_p)$ *est un espace de Hilbert, où*

$$\|f\|^2_{\mu'_{ac}} = \langle f, f\rangle_p\,,$$

$$\langle f,g\rangle_p = \langle\ f^*,g^*\rangle_{L^2(\mathbb{T},p|d\xi|)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^*(e^{i\theta})\overline{g^*(e^{i\theta})}p(\theta)d\theta.$$

Pour f,g dans $\in H^2(G,p)$.

3. *if $f \in H^2(G,p)$, alors pour tout compact $K \subset G$, il existe une constante $C(K)$ ($C(K)$ ne dépend que de K) tel que*

$$\sup_{z\in K}|f(z)| \leq C(K)\,\|f\|_{\mu'_{ac}}$$

Pour la preuve voir [7].

Théorème 33 *[16] Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de classe $H^2(G,p)$ vérifiant :*

1. *f_n converge vers une fonction f dans le sens de Hol(G) : (qui est alors holomorphe dans G)*
2. *$\|f_n\|^2_{H^2(G,p)} \leq C$, ($C$ étant une constante)*

   Alors :

$$f \in H^2(G,p),$$

et de plus

$$\|f\|^2_{H^2(G,p)} \leq \liminf \|f_n\|^2_{H^2(G,p)}\,.$$

Chapitre 4

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux avec la condition généralisée de Szegö

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le comportement asymptotique de polynômes orthogonaux avec la condition généralisée de Szegö.
Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité

Théorème 34 *Soit p une fonction poids vérifiant ,*

$$p \in L^1(\mathbb{T}),\ p \text{ non négative et } \int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)d\theta > 0.$$

Alors il existe un système de polynômes orthogonaux unique $\{\varphi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ relativement au cercle unité $\mathbb{T}$ et à la fonction poids p.

Preuve. Exigeons que $\log p \in L^1(\mathbb{T})$; ceci nous permet de considérer la fonction de Szegö S_p (vue au chapitre precédent) associée à p et au disque unité $\mathbb{D}$:
Considérons le système $\{h_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$h_n(z) = S_p(z).z^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Alors, on a : $h_n(z) \in H^2(\mathbb{D})$. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h_n(re^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_p(re^{i\theta})\right|^2 r^{2n} d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_p(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \;\; pour\ r \in [0,1[\\ &< +\infty,\ car\ S_p \in H^2(\mathbb{D}). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$\{h_n\}$ est libre dans $H^2(\mathbb{D})$. Ceci nous permet d'appliquer le procédé d'orthogonalisation de Grahm Schmidt au système $\{h_n\}$ dans l'espace de Hilbert $H^2(\mathbb{D})$.

■

Soit $d\beta = \beta'_{ac}dm + d\beta_s$ une mesure de probabilité borélienne sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et β_{ac} est la partie absolument continue de β et β_s la partie singulière.
Où m est une mesure de probabilité de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ i.e.

$$dm(t) = dt/(2\pi it) = 1/(2\pi)d\theta,\ t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}.$$

Soit $\varphi(z) = k_n z^n + ... \in P_n(k_n > 0,\ n \in \{0, 1, ..., n\})$, le polynôme orthonormé de degré n relativement à la mesure β i.e.,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(z)\bar{z^k}d\beta(\theta) = \frac{1}{k_n}\delta_{kn},\ k,\ z = e^{i\theta}.$$

Pour un polynôme $p \in P_n$, posons $p^*(z) = z^n\overline{p(1/\bar{z})}$. On peut vérifier que , pour $z \in T$, $|p^*(z)| = |p(z)|$ Il est bien connu par les formules de récurrence

$$k_n\varphi_{n+1} = k_{n+1}z\varphi_n + \varphi_{n+1}(0)\varphi_n^*$$

$$k_n\varphi_{n+1}^* = k_{n+1}z\varphi_n^* + \overline{\varphi_{n+1}(0)}z\varphi_n$$

que les polynômes orthonormés $\{\varphi_n(z)\}_{n\in N}$ sont uniquement déterminées par les paramètre de Geronimus $\alpha_n = \overline{-\varphi_{n+1}(0)}/k_{n+1},\ n \in \{0, 1, ..., n\}$.

Définition 24 *On dit qu'une mesure de probabilité β appartient à la classe de Nevai (N) (notée $\beta \in (N)$) si* $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

il s'ensuit que la condition $\grave{\beta} > 0$ *p.p.* sur T implique que $\beta \in (N)$.

Définition 25 *la classe des mesures de probabilité avec $\grave{\beta} > 0$ p.p. sur T est appelé la classe d' Erdos, noté (E).*

Enfin,

Définition 26 *β est une mesure Rakhmanov si*

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi|^2 \, d\beta = dm$$

Pour ces calasses de mesures nous avons les inclusions suivantes :

$$(E) \subset (N) \subset (R).$$

Définition 27 *on dit qu'une mesure β appartient à la classe de Szegö (notée $\beta \in (S)$) si la dérivée de Radon-Nikodym β'_{ac} de β par rapport à la mesure de probabilité de Lebesgue m satisfait la condition de Szegö :*

$$\int_0^{2\pi} \log \beta'_{ac} d\theta > -\infty.$$

4.2 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux avec la condition généralisée de Szegö

On commence d'abord par présenter le résultat de Denisov et Kupin ([7]) sur le comportement asymptotique des polynôme extrémaux .
Soit p un polynôme trigonométrique tel que $p(t) \geq 0\,;\, t \in \mathbb{T}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$p(t) = \prod_{k=1}^{N} \left(t - \xi_k\right)^{2m_k},$$

où $\{\xi_k\}$ sont des points sur $\mathbb{T}$ et $m_k > 0$ sont leurs multiplicités.

Définition 28 *On dit qu'une mesure β appartient à la classe polynômial de Szegö (notée $\beta \in (pS)$) si la dérivée de Radon-Nikodym β'_{ac} de la partie absolue de β par rapport à la mesure de Lebesgue m satisfait la condition généralisée de Szegö :*

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \log \beta'_{ac}(e^{i\theta}) d\theta > -\infty.$$

Il est facile de voir que $(S) \subset (pS) \subset (E)$.

Pour une mesure $\beta \in (pS)$, Denisov et Kupin dans [7], ont obtenue l'asymptotique dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ pour les polynômes orthogonaux associés à $\{\varphi_n(z)\}$ et prouvé leurs asymptotiques au sens L^2 sur le cercle unité.

Pour $\beta \in (pS)$, on introduit les fonctions

$$\widetilde{D}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log\beta'_{ac}(e^{i\theta})d\theta\right\} \tag{4.2.1}$$

$$\widetilde{\varphi_n^*}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log\left|\varphi_n^*(e^{i\theta})\right| d\theta\right\} \tag{4.2.2}$$

où $K(e^{i\theta}, z)$ est le noyau de Schwarz modifié défini par

$$K(t, z) = \frac{t + zq(t)}{t - zq(z)}$$

et $q(t) = \prod_{k=1}^{N}(t-\beta_k)^{2m_k/t^{N'}}$, $N' = \sum_k m_k$ *et* $t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$

Les fonctions $\left\{\widetilde{\varphi_n^*}\right\}$ sont appelés les polynômes orthogonaux modifiés inversés, et satisfaire le Lemme suivant :

Lemme 4.2.1 *[7] Soit $\beta \in (pS)$; les fonctions $\widetilde{D}(z)$, $\widetilde{\varphi_n^*}(z)$ et $\widetilde{\psi_n^*}(z)$ définies par (4.2.1) et (4.2.2) . Alors*

1. $\left|\widetilde{D(t)}\right|^2 = \beta'_{ac}$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$,
2. $\left|\widetilde{\varphi_n^*}(t)\right| = |\varphi_n^*(t)|$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$.

Preuve. Pour prouver l'affirmation (i), on a

$$\log\left|\widetilde{D(t)}\right|^2 = Re\int_{\mathbb{T}}\frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)}{q(z)}\log\beta'_{ac}(t)dm(t)$$

Oa a aussi , $Im(q(t)/q(z))$ tend uniformément vers 0 puisque z est dans $\mathbb{T}\setminus\{\xi_k\}$, et $q = Re(q) = p$ sur $\mathbb{T}$.

Par conséquent, pour $t_0 \in \mathbb{T}\setminus\{\xi_k\}$ p.p. ,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to t_0}\log\left|\widetilde{D(t)}\right|^2 &= \lim_{z\to t_0}\frac{1}{Req(z)}\int_{\mathbb{T}} Re\frac{t+z}{t-z}Req(t)\log\beta'_{ac}(t)dm(t) \\ &= \frac{1}{Rep(t_0)}p(t_0)\log\beta'_{ac}(t_0),\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

où on a utilisé les propriétés standard du noyau de Poisson $Re(t+z)/(t-z)$, de la même manière on aura $\left|\widetilde{\varphi_n^*}(t)\right| = |\varphi_n^*(t)|$ *p.p. sur* $\mathbb{T}$.

■

Théorème 35 *[7] Soit $\beta \in (pS)$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{D}(z)\widetilde{\varphi_n^*}(z) = 1$$

pour chaque $z \in \mathbb{D}$.

Preuve. On choisit une constante C_1 de façon que $0 \leq C_1 p \leq 1$ sur $\mathbb{T}$. On peut définir

$$f_n(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} \log \alpha_n(t) dm\right),$$

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} \log \alpha(t) dm\right)$$

avec $\alpha_n(t) = \left(|\varphi_n^*(t)|^{-2}\right)^{C_1 p(t)}$, $\alpha(t) = (\beta'_{ac})^{C_1 p(t)}$ et $z \in \mathbb{D}$. Il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \log f_n(z) = \log f(z)$. Rappeler que $\int_{\mathbb{T}} |\varphi_n^*|^{-2} dm = 1$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} |f_n|^2 dm = \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}\right)^{C_1 p} dm = \int_{|\varphi_n^*|^2 \leq 1} \left(\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}\right)^{C_1 p} + \int_{|\varphi_n^*|^2 \geq 1} \left(\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}\right)^{C_1 p} dm \leq 2.$$

Il en résulte de même que $\int_{\mathbb{T}} |f|^2 dm < \infty$. Donc les fonctions f_n et f sont des fonctions extérieures. Une boule dans $H^2(\mathbb{D})$ est faiblement compacte, et la convergence faible implique la convergence ponctuelle sur $\mathbb{D}$. Par conséquent, il existe une sous-suite f_{n_k} de f_n qui converge vers une fonction $f_0 \in H^2(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{D}$.
Maintenant, nous prouvons que $f_0 = f$. En effet, pour une $z \in \mathbb{D}$

$$\limsup_n \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Re\frac{t+z}{t-z} p(t) \log \frac{1}{|\varphi_n^*(t)|^2} dm(t) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Re\frac{t+z}{t-z} p(t) \log \beta'_{ac}(t) dm(t).$$

On a $|\varphi_n^*(t)|^{-2} dm$ tend faiblement vers β et les expressions ci-dessus sont semi-continues . Cela implique que $|f_0(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
Nous observons également que

$$\log f_n(0) = \int_{\mathbb{T}} (C_1 p) \log \frac{1}{|\varphi_n^*|^2} dm = \frac{1}{2} C_1 \tilde{\psi}(C_n),$$

où $\tilde{\psi} = \sum_{k=0}^{2N+1} \{A_0 \log p_k + Re(P(C) - P(C_0)e_k), e_k\} + \sum_{k=0}^{\infty} \eta \circ \tau^k(C) + \gamma(C)$ et C_n est la matrice tronquée. En particulier, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\psi}(C_n) = \tilde{\psi}(C),$$

qui est équivalente à

$$\log f_0(0) = \lim_{k\to\infty} \log f_{n_k}(0) = \log f(0).$$

Puisque la fonction f est extérieure $H^2(\mathbb{D})$, $|f_0| \leq |f|$ et $|f_0(0)| = |f(0)|$, alors $f = f_0$ sur $\mathbb{D}$. Ainsi, la suite f_n converge vers la fonction f.

■

Pour tout $\epsilon > 0$, soit $B_\epsilon[\zeta] = \{z : |z - \zeta| \leq \epsilon\}$. and $\Omega_\epsilon = \mathbb{D} \setminus (\cup_k B_\epsilon[\zeta_k])$, et $I_{k,\epsilon} = \mathbb{T} \cap B_\epsilon[\zeta_k]$ et $A_\epsilon = \cup_k I_{k,\epsilon}$. Pour démontrer le théorème du comportement asymptotique des polynôme extrémaux au sens L^2 sur le cercle unité, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.2.2 *Soit $\beta \in (pS)$. Alors, pour tout union finie d'intervals $E \in \mathbb{T}$*

$$\limsup_n \int_E p \left|\log\left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right)\right| dm < \infty.$$

Preuve. On commence par prouver que

$$\limsup_n \int_E p \log^+ \left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right) dm < \infty$$

En effet, pour $\log^+ x,\ x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_E p \log^+ \left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right) dm &\leq C \int_E \log^+ \left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right) dm, \\
&\leq \int_E |\varphi_n|^2 \beta'_{ac} dm, \\
&\leq \int_E |\varphi_n|^2 d\beta = C.
\end{aligned}$$

Pour prouver que

$$\limsup_n \int_E p \log^- \left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right) dm < \infty,$$

il suffit de savoir que

$$\limsup_n \int_E p \log \left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right) dm > -\infty,$$

les mesures $\left\{|\varphi_n^*|^{-2} dm\right\}$ tendent faiblement vers $d\beta$, de plus on a

$$\limsup_n \int_E p \log \frac{1}{|\varphi_n^*|^2} dm \leq \int_E p \log \beta'_{ac} dm.$$

Donc on a

$$\limsup_n \int_E p \log \left(|\varphi_n^*|^2 \beta'_{ac}\right) dm \geq 0.$$

Le lemme est prouvé. ■

Lemme 4.2.3 *Soit $\beta \in (pS)$. et*

$$\chi_n(z) = \tilde{D(z)}\tilde{\varphi_n^*(z)} = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K(t,z)\log\left(|\varphi_n^*|^2 \beta_{ac}'\right) dm\right).$$

Alors, pour $z \in \Omega_{2\epsilon}$

$$|\chi_n(z)| \leq \frac{C_\epsilon}{\sqrt{1-|z|}},$$

où C_ϵ ne dépend pas de n.

Preuve. On a $\chi_n(z) = f_n' f_n''$ avec

$$f_n'(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{A_\epsilon} K(t,z)\log\left(|\varphi_n^*|^2 \beta_{ac}'\right) dm\right)$$

$$f_n''(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}\setminus A_\epsilon} K(t,z)\log\left(|\varphi_n^*|^2 \beta_{ac}'\right) dm\right)$$

Il est clair que, pour $t \in A_\epsilon$, $z \in \Omega_{2\epsilon}$, les expressions $|(t+z)/(t-z)|$, $1/|q(z)|$ sont bornés par des constantes qui dépendent de ϵ . Le lemme précédent montre que

$$\limsup_n \int_{A_\epsilon} p\left|\log\left(|\varphi_n^*|^2 \beta_{ac}'\right)\right| dm < \infty.$$

et donc, $|f_n'(z)| \leq C$ for $z \in \Omega_{2\epsilon}$. Passer à f_n'', nous le représentons comme

$$\begin{aligned} f_n''(z) &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K(t,z)\log\beta_n(t)dm\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z}\left(\frac{q(t)}{q(z)}-1\right)\log\beta_n(t)dm\right)\exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\frac{t+z}{t-z}\log\beta_n(t)dm\right), \\ &= g_n'(z)g_n''(z) \end{aligned}$$

où

$$\beta_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in A_\epsilon \\ |\varphi_n^*|^2 \beta_{ac}', & t \in \mathbb{T}\setminus A_\epsilon \end{cases}$$

Encore une fois, le lemme précédent implique que

$$\limsup_n \int_{\mathbb{T}} p\left|\log|\beta_n|\right| dm < \infty.$$

Puisque $0 < c \leq p(t) \leq C$ pour $t \in \mathbb{T}\setminus A_\epsilon$, on a

$$\limsup_n \int_{\mathbb{T}} \left|\log|\beta_n(t)|\right| dm(t) < \infty.$$

De plus,

$$\left|\frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)-q(z)}{q(z)}\right| \leq C$$

pour tout $z \in \Omega_{2\epsilon}$, on obtient $|g_n'(z)| \leq C$.

Les fonctions g_n'' appartiennent à la classe Nevanlinna sont des fonctions extèrieures . De plus, on a

$$\int_{\mathbb{T}} \left|g_n''\right|^2 dm = \int_{\mathbb{T}} \beta_n dm \leq \int_{\mathbb{T}\setminus A_\epsilon} |\varphi_n^*|^2 \beta_{ac}' dm \leq 1.$$

donc $g_n'' \in H^2(\mathbb{D})$ et $\|g_n''\|_2 \leq 1$. Pour terminer la preuve du lemme, nous utilisons la formule de Cauchy dans $H^2(\mathbb{D})$.

$$\left|g_n''(z)\right| \leq \|g_n''\|_2 \left\|\frac{1}{1-\bar{z}t}\right\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{1-z^2}}.$$

■

Lemme 4.2.4 *Soit $\mu \in (pS)$.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{I'} \left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\varphi_n^*}(e^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta = 0$$

où I est un arc fermé sur $\mathbb{T}$ qui ne contient aucun point ζ_k.

Preuve. Nous fixons un arc fermé I qui ne contient aucun point ς_k tel que $I' \subset I$. Comme avant $\chi_k = \tilde{D}\tilde{\varphi_n^*}$. Soit Ω un domaine de $\mathbb{D}$ tel que $\partial\Omega = I \cup I_1 \cup I_2$, où I est un arc de $\mathbb{T}$ et I_1, I_2 sont les segments de droite, L'angle entre I_1 et I_2 est π/α, $\alpha > 1$.

Soient $u: \mathbb{D} \to \Omega$ et $v: \Omega \to \mathbb{D}$ des applications conformes inverses des domaines. De plud, soit $\zeta_0 = u(0) \in \Omega$ et soient η_1 et η_2 les corners de Ω. Il'est clair que, pour $i = 1, 2$

1. Il existe des constantes c, $C > 0$ telles que

$$c\,|\varsigma - \eta_i|^\alpha \leq |v(\varsigma) - v(\eta_i)| \leq C\,|\varsigma - \eta_i|^\alpha$$

2. En conséquence,

$$c\,|\varsigma - \eta_i|^{\alpha-1} \leq |v'(\varsigma)| \leq C\,|\varsigma - \eta_i|^{\alpha-1}$$

3. Et on a,

$$c\,(1-|\varsigma|)^{\alpha-1} \leq |v'(\varsigma)| \leq C\,(1-|\varsigma|)^{\alpha-1} \quad pour \quad \varsigma \in I_1 \cup I_2$$
$$c\,|\varsigma-\eta_i|^{\alpha-1} \leq |v'(\varsigma)| \leq C\,|\varsigma-\eta_i|^{\alpha-1} \quad pour \quad \varsigma \in I.$$

De plus, on a

$$\int_{\partial\Omega} |\chi_n(\varsigma)-1|^2\,|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma| = \int_{\partial\Omega} \left(|\chi_n(\varsigma)|^2 - 2Re\chi_n(\varsigma)+1\right)|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma|$$

On commence par le deuxième terme du côté droit

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} 2Re\chi_n(\varsigma)\,|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma| &= 2Re\int_{\mathbb{T}} \chi_n(z)\,|dz| \\ &= 4\pi Re\chi_n(u(z)) = 4\pi Re\chi_n(\varsigma_0) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

où $\chi_n(z) = \chi_n(u(0))$ et $|dz| = 2\pi dm(z) = d\theta$, $z = e^{i\theta}$ La dernière expression de la formule tend vers 4π d'après le théorème 35 . De plus,

$$\int_{\partial\Omega} |v'|\,|d\varsigma| = \int_{\mathbb{T}} |dz| = 2\pi.$$

Il reste à montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} |\chi_n|^2\,|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma| \leq 2\pi$$

Nous divisons la dernière intégrale en deux intégrales sur I et $I_1 \cup I_2$, respectivement. On obtient alors

$$\int_I |\chi_n|^2\,|v'|\,|d\varsigma| = \int_I |\varphi_n^*|^2\,\beta'_{ac}\,|v'|\,|d\varsigma| \leq 2\pi \int_I |\varphi_n^*|^2\,|v'|\,d\beta$$

et la dernière quantité tend à $\int_I |v'(\varsigma)|\,|d\varsigma|$.

Passons maintenant à l'intégrale sur $I_1 \cup I_2$. Pour un $\epsilon > 0$ fixe. Pour tout $\sigma > 0$ on a

$$\int_{I_1\cup I_2} |\chi_n|^2\,|v'|\,|d\varsigma| = \int_{I_1\cup I_2, |\varsigma|\geq 1-\sigma} \ldots + \int_{I_1\cup I_2, |\varsigma|<1-\sigma} \ldots$$

et on obtient pour la première intégrale

$$\begin{aligned} \int_{I_1\cup I_2, |\varsigma|\geq 1-\sigma} |\chi_n(\varsigma)|^2\,|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma| &\leq C\int_0^\sigma \frac{1}{s} s^{\alpha-1} ds = C\int_0^\sigma s^{\alpha-1} ds \\ &= C\sigma^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé que $\alpha > 1$, une borne de (3) et l'inégalité démontrée dans le lemme précédent. Nous choisissons σ assez petit pour satisfaire $C\sigma^{\alpha-1} < \epsilon$

En réduisant $\sigma > 0$, si nécessaire, nous pouvons garantir que

$$\left|\int_{I_1\cup I_2, |\varsigma|\geq 1-\sigma} |v'|\,|d\varsigma|\right| < \epsilon$$

Alors, puisque χ_n tend vers 1 uniformément pour $|\varsigma| < 1-\sigma$, on prend n assez grand pour avoir

$$\left|\int_{I_1\cup I_2, |\varsigma|< 1-\sigma} |\chi_n|^2\,|v'|\,|d\varsigma| - \int_{I_1\cup I_2, |\varsigma|< 1-\sigma} |v'|\,|d\varsigma|\right| < \epsilon$$

En résumant les inégalités écrites ci-dessus, on voit que pour n tend vers l'infini

$$\left|\int_{I_1\cup I_2} |\chi_n|^2\,|v'|\,|d\varsigma| - \int_{I_1\cup I_2} |v'|\,|d\varsigma|\right| < C\epsilon$$

qui donne

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_1\cup I_2} |\chi_n|^2\,|v'|\,|d\varsigma| = \int_{I_1\cup I_2} |v'|\,|d\varsigma|$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_I |\chi_n(\varsigma)-1|^2\,|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma| &\leq \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} |\chi_n(\varsigma)-1|^2\,|v'(\varsigma)|\,|d\varsigma| \\ &\leq 2\pi\lim_{n\to\infty} 2Re\left(1-\chi_n(\varsigma_0)\right) = 0\end{aligned}$$

et le lemme est prouvé pour tout arc fermé $I' \subset I$

■

Théorème 36 *[7] Soit $\mu \in (pS)$.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\varphi_n^*}(e^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta = 0.$$

Preuve. La preuve découle immédiatement du lemme précédent . En effet, prenons un ϵ arbitraire $\epsilon > 0$ et fixons-le. Ensuite, choisir $A = \cup I_k$ de manière à ce que $m(\mathbb{T}\setminus A) < \epsilon$. Pour n assez grand

$$\int_{\mathbb{T}\setminus A} |\chi_n(\varsigma)-1|^2\,dm < C\epsilon.$$

D'autre part, d'après le lemme précédent

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |\chi_n(\varsigma)-1|^2\,dm = 0$$

.

et le théorème est prouvé .

■

4.3 Le comportement asymptotique de polynômes orthogonaux plus une partie discrète finie

Khaldi et Guezane-Lakoud [22], ont étudié le comportement asymptotique ponctuelles à l'intérieur du disque unité de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de classe polynômial de Szegö et perturbé par une suite de Blaschke fini de masses à l'extérieur du cercle unité.
Considérant une mesure sur $\mathbb{T}\cup\{z_j\}_{j=1}^{m}$ de la forme :

$$\mu = \beta + \sum_{j=1}^{m} A_j\delta_{z_j},$$

où $\beta = \beta_{ac} + \beta_s$ est une mesure de probabilité borélienne sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et δ_{z_j} est la mesure de Dirac au point z_j avec les masses $A_j > 0$, pour $j \in \{1, ..., m\}$.
β_{ac} est la partie absolument continue de β et β_s la partie singulière.

Notons P_n l'ensemble des polynômes de degré au plus n et par $\psi_n(z) = \gamma_n z^n + ... \in P_n(\gamma_n > 0)$ le polynôme de degré n orthonormé par rapport à β c'est à dire,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_n(z)\bar{z}^k d\beta(\theta) + \sum_{j=1}^{m} A_j\psi_n(z_j)\bar{z}_j^k = \frac{1}{\gamma_n}\delta_{kn},\ k\in\{0,1,...,n\},\ z = e^{i\theta}$$

où δ_{kn} est le symbole de la Kronecker, γ_n s'appelle coefficient dominant .
et les polynômes orthogonaux modifiés inversés $\left\{\widetilde{\psi_n^*}\right\}$

$$\widetilde{\psi_n^*}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log\left|\psi_n^*(e^{i\theta})\right| d\theta\right\} \tag{4.3.1}$$

Pour étudier le comportement asymptotique ponctuelles à l'intérieur du disque unité de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de classe polynômial de Szegö et perturbé par une suite de Blaschke fini, nous avons besoin d'un résultat très utile de X. Li et K. Pan [25] ,

Lemme 4.3.1 *[25] Si $\beta \in (N)$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(z,\xi)}{\overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(\xi)} = \frac{1}{\bar{z}\xi - 1}, \tag{4.3.2}$$

localement uniformément pour $|z| > 1$ et $|\xi| > 1$, où $K(z,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(z)}\varphi_k(\xi)$.

Preuve. On a d'après la formule de Christoffle Darboux

$$K(z,\xi) = \frac{\overline{\varphi_n^*(z)}\varphi_n^*(\xi) - \overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(\xi)}{1 - \bar{z}\xi}$$

avec $\varphi_n^*(z) = z^n\overline{\varphi_n(1/\bar{z})}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)} = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(z,\xi)}{\overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(\xi)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{\varphi_n^*(z)}\varphi_n^*(\xi) - \overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(\xi)}{\overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(\xi)(1 - \bar{z}\xi)} = \frac{1}{\bar{z}\xi - 1}$$

■

Lemme 4.3.2 *[25] Si $\beta \in (N)$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = z, \tag{4.3.3}$$

uniformément pour les ensembles compacts tel que $|z| \geq 1$, de plus pour tout $\epsilon \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi_n(z)|}{|z|^{\epsilon n}} = \infty, \tag{4.3.4}$$

localement uniformément pour $|z| > 1$.

Preuve. La formule (4.3.3) est bien connue. Pour (4.3.4), soit $r > 1$ et $\delta \in (\epsilon, 1)$, alors d'après (4.3.3) il existe un entier $L > 0$ tel que

$$\left|\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)}\right| \geq \frac{1}{r}|z|,$$

pour tout $n \geq L$ et $|z| \geq r^{1/(1-\delta)}$. Alors, pour $n \geq L$ et $|z| \geq r^{1/(1-\delta)}$

$$\left|\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_L(z)}\right| = \prod_{k=L}^{n}\left|\frac{\varphi_{k+1}(z)}{\varphi_k(z)}\right| \geq \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-L+1} \geq |z|^{\delta(n-L+1)},$$

la formule (4.3.4) découle des inégalités ci-dessus et du fait que $\varphi_L(z) \neq 0$ pour $|z| \geq 1$ ■

Lemme 4.3.3 *[25] pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\frac{\gamma_n}{k_n} \leq 1. \tag{4.3.5}$$

Preuve. le lemme est conséquence de theorème d'extréma du polynôme monique $k_n^{-1}\varphi_n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_n^2} &= \min_{P \in P_{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int |z^n - P(z)|^2 \, d\beta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int \left| \frac{\psi_n(z)}{\gamma_n} \right|^2 d\beta \leq \frac{1}{\gamma_n^2} \int |\psi_n(z)|^2 \, d\mu = \frac{1}{\gamma_n^2}.\end{aligned}$$

■

Lemme 4.3.4 *[25]*

Pour les points distincts $z_1, z_2, ..., z_m$ à l'extérieur du cercle unité, la matrice

$$T_m = \left(\frac{1}{\bar{z}_j z_k - 1} \right)_{k,j=1}^{m} \tag{4.3.6}$$

est non singulière.

Preuve. Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_m)^t \in C^m$, et $T_m X = 0$ alors nous devons montrer que $X = 0$. En effet,soit

$$F(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j}{\bar{z}_j z_k - 1},$$

alors on peut ecrire $F(z)$ sous la forme $f(z) = p(z)/\sum_{j=1}^{m}(\bar{z}_j z_k - 1)$ avec $p(z) \in P_{m-1}$. Cependant $T_m X = 0$ implique $F(z_k) = 0,\ \ k = 1, 2, ..., m$ et donc $p(z_k) = 0,\ \ k = 1, 2, ..., m$ d'où $p(z) = 0$. Ainsi $f(z) = 0$ implique que $X = 0$ puisque $\{1/(\bar{z}_j z_k - 1)\}_{j=1}^{m}$ forme un ensemble de fonctions linéairement indépendantes

■

Lemme 4.3.5 *[25] Pour les points distincts $z_1, z_2, ..., z_m$ à l'extérieur du cercle unité, et soit $B(z) = \prod_{j=1}^{m}(z - z_j)/(1 - \bar{z}_j z)$, alors il existe un ensemble unique de nombres complexes non nuls $r_1, r_2, ..., r_m$ tel que*

$$B(z) = \frac{1}{\overline{B(0)}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{1 - \bar{z}_j z}. \tag{4.3.7}$$

Preuve. l'existence de la représentation de fraction partielle ci-dessus de B(z) est évidente, l'unicité découle de l'indépendance linéaire de l'ensemble $\{(1 - \bar{z}_j z)^{-1}\}_{j=1}^{m}$.Enfin, aucun des r_j n'est nul découle de la comparaison des pôles des deux côtés de (4.3.7). ■

Théorème 37 *[25] Si $\beta \in (N)$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{k_n} = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{|z_j|}.$$

Preuve. d'après le lemme 4.3.3, chaque sous suite $\{\gamma_n/k_n\}_{n=0}^{\infty}$ contient une sous suite convergente. Soit $R > 0$ un point limite de cette sous-suite , $\Lambda \subseteq \{0, 1, 2, ...\}$ satisfaire

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} \frac{\gamma_n}{k_n} = R, \tag{4.3.8}$$

noter que l'orthogonalité de $\varphi_n(z)$ donne (en écrivant $\psi_n(z) = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(z)+p_n(z),$ *avec* $p_n \in P_{n-1}$)

$$\frac{1}{2\pi}\int \psi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}d\beta = \frac{\gamma_n}{k_n}$$

d'autre part l'orthogonalité de $\psi_n(z)$ donne (en écrivant $\varphi_n(z) = \frac{k_n}{\gamma_n}\psi_n(z)+q_n(z),$ *avec* $q_n \in P_{n-1}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int \psi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}d\beta &= \frac{1}{2\pi}\int \psi_n(z)\overline{\varphi_n(z)}d\mu - \sum_{j=1}^{m} A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)} \\ &= \frac{k_n}{\gamma_n} - \sum_{j=1}^{m} A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}, \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

donc, on a

$$\frac{k_n}{\gamma_n} - \frac{\gamma_n}{k_n} = \sum_{j=1}^{m} A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}. \tag{4.3.10}$$

Maintenant on considère $\psi_n(z) - ((\gamma_n/k_n)\varphi_n(z)) \in P_{n-1}$, pour $\xi = e\xi^{i\theta}$ on a

$$\begin{aligned} \psi_n(z) - \frac{\gamma_n}{k_n\varphi_n(z)} &= \frac{1}{2\pi}\int \left(\psi_n(\xi) - \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(\xi)\right) K_n(\xi, z)d\beta(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \psi_n(\xi)K_n(\xi, z)d\beta(\theta) = -\sum_{j=1}^{m} A_j\psi_n(z_j)K_n(z_j, z) \\ &= -\sum_{j=1}^{m}\left\{A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}\varphi_n(z)\frac{(\bar{z}_jz-1)K_n(z_j,z)}{\overline{\varphi_n(z_j)}\varphi_n(z)}\right\}\frac{1}{\bar{z}_jz-1} \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \frac{\gamma_n}{k_n} - \sum_{j=1}^{m}\left\{A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}\frac{(\bar{z}_jz-1)K_n(z_j,z)}{\overline{\varphi_n(z_j)}\varphi_n(z)}\right\}\frac{1}{\bar{z}_jz-1}, \tag{4.3.11}$$

et d'après le lemme 4.3.1 on peut ecrire

$$A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}\frac{(\bar{z}_jz-1)K_n(z_j,z)}{\overline{\varphi_n(z_j)}\varphi_n(z)}\frac{1}{\bar{z}_jz-1} = A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}(1+\sigma(1)) = X_j(1+\sigma(1))$$

comme $n \to \infty$ uniformément pour $j, k = 1, 2, ..., m$. D'autre part, puisque $A_j |\psi_n(z_j)|^2 \leq \int |\psi_n|^2 d\mu = 1$, $j = 1, 2, ...m$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(z_j)}{\varphi_n(z_j)} = 0$$

d'après le lemme 4.3.2, et la limite est localement uniforme pour le choix de $A_j > 0, \quad j = 1, 2, ..., m$.

Alors soit $z = z_k, \quad k = 1, 2, ..., m$, dans (4.3.11) et en utilisant la relation ci-dessus, on a

$$\frac{\gamma_n}{k_n}\mathbf{1} = T_m\left[X(1 + \sigma(1))\right] + \sigma(\mathbf{1})$$

où $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)^t$, T_m est défini dans lemme 4.3.4, $X = (X_1, X_2, ..., X_m)^t$, alors d'après le lemme 4.3.4 ,

$$X(1 + \sigma(1)) = \frac{\gamma_n}{k_n} T_m^{-1}\mathbf{1} + \sigma(\mathbf{1}). \tag{4.3.12}$$

Enfin $z = z_k \quad k = 1, 2, ...m$, le lemme 4.3.5 donne,

$$\frac{1}{\overline{B(0)}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{\bar{z}_j z_k - 1}, \quad k = 1, 2, ...m,$$

c'est à dire,

$$T_m(r_1, r_2, ...r_m)^t = \frac{1}{\overline{B(0)}}\mathbf{1},$$

alors

$$T_m^{-1}\mathbf{1} = \overline{B(0)}(r_1, r_2, ...r_m)^t,$$

et d'après (4.3.12)

$$X(1 + \sigma(1)) = \frac{\gamma_n}{k_n}\overline{B(0)}(r_1, r_2, ...r_m)^t + \sigma(\mathbf{1}),$$

en utilisant (4.3.8), on a

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} X_j = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}} A_j\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)} = R\overline{B(0)}r_j, \quad j = 1, 2, ...m. \tag{4.3.13}$$

Pour $n \to \infty$ et $n \in \Lambda$ on a,

$$\frac{1}{R} - R = R\overline{B(0)}\sum_{j=1}^{m} r_j = R\overline{B(0)}\left(B(0) - \frac{1}{\overline{B(0)}}\right), \tag{4.3.14}$$

Par conséquent $R = |B(0)|^{-1}$ puisque R est un point limite arbitraire de $\left\{\frac{\gamma_n}{k_n}\right\}_{k=0}^{\infty}$ on voit que la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{k_n}$ existe et égale à $|B(0)|^{-1}$. ■

Théorème 38 *[25] Si $\beta \in (N)$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \lambda B(z),$$

uniformément pour $|z| \geq 1$. Où $B(z) = \prod_{j=1}^m (z - z_j)/(1 - \overline{z_j} z)$ et $\lambda = |B(0)|/B(0)$

Preuve. on a

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \frac{\gamma_n}{k_n} - \sum_{j=1}^m A_j \Psi_n(z_j)\overline{\varphi_n}(z_j) \left[\overline{\left(\frac{\varphi_n^*(z_j)}{\varphi_n(z_j)}\right)} \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)} - 1 \right] \frac{1}{\bar{z}_j z - 1}.$$

avec (4.3.7), pour $|z| \geq 1$, on a

$$\left| \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} - \lambda B(z) \right| \leq \left| \frac{\gamma_n}{k_n} - \frac{\lambda}{\overline{B}(0)} \right| + \sum_{j=1}^m A_j \left\{ |\psi_n(z_j)\overline{\varphi_n}(z_j) - \lambda r_j| + \left| A_j \psi_n(z_j)\overline{\varphi_n}(z_j) \frac{\varphi_n^*(z_j)}{\varphi_n(z_j)} \right| \frac{1}{\bar{z}_j z - 1}, \right.$$

où on a utulisé le fait que $|\varphi_n^*(z)/\varphi_n(z)| \leq 1$. Maintenant en utilisant (4.3.13) et d'après le théorème précédent , Λ peut être pris comme $\{1, 2, 3, ...\}$, $R = |B(0)|^{-1}$ et donc les valeurs limites dans (4.3.13) sont $(\lambda r_j, \quad j = 1, 2, ...m)$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)} = 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} - \lambda B(z) \right| = 0$$

pour $|z| \geq 1$ et $A_j > 0, \quad j = 1, 2, ..., m$.

■

Théorème 39 *[22] Soit la mesure $\mu = \beta + \sum_{k=1}^m A_k \delta_{z_k}$, tel que $\beta \in (pS)$. Nous associons à la mesure μ les fonctions $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\psi}^*$ données par (4.2.1), (4.3.1), alors nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{D}(z)\widetilde{\psi}^*(z) = 1$$

pour chaque $z \in \mathbb{D}$.

Preuve. Considérons la suite des fonctions

$$h_n(z) = \frac{\widetilde{\psi}_n^*(z)}{\widetilde{\varphi}_n^*(z)} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z) \log \left| \frac{\psi_n^*(e^{i\theta})}{\varphi_n^*(e^{i\theta})} \right| d\theta \right\}$$

en utilisant le lemme 4.2.1, on trouve

$$h_n(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z) \log \left| \frac{\psi_n(e^{i\theta})}{\varphi_n(e^{i\theta})} \right| d\theta \right\}$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ et en utilisant le théorème 38 et le fait que $\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z)\log\left|B(e^{i\theta})\right| d\theta\right\}$$

et le théorème 35 implique

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{D}(z)\widetilde{\psi_n^*}(z) = \left[\widetilde{D}(z)\widetilde{\varphi_n^*}(z)\right] h_n(z) = 1$$

Cela permet d'obtenir la preuve du théorème. ∎

Lemme 4.3.6 *Sous les hypothèses du théorème 39, on a*

$$\lim_{n\to\infty} 2Re\left(\int_0^{2\pi} \widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})d\theta\right) = 4\pi$$

Preuve. On a dejas montrer dans (4.2.4) que pour φ_n^*

$$\lim_{n\to\infty} 2Re\left(\int_0^{2\pi} \widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\varphi_n^*}(e^{i\theta})d\theta\right) = 4\pi Re\left[\widetilde{D}(\varsigma_0)\widetilde{\varphi_n^*}(\varsigma_0)\right]$$

il est également vrai pour $\widetilde{\psi_n^*}$.

$$\lim_{n\to\infty} 2Re\left(\int_0^{2\pi} \widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})d\theta\right) = 4\pi Re\left[\widetilde{D}(\varsigma_0)\widetilde{\psi_n^*}(\varsigma_0)\right],$$

pour un certain $\varsigma_0 \in \mathbb{D}$.

Et par le théorème 39, on aura

$$\lim_{n\to\infty} 2Re\left(\int_0^{2\pi} \widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})d\theta\right) = 4\pi.$$

∎

Théorème 40 *[22] Soit la mesure $\mu = \beta + \sum_{k=1}^{m} A_k\delta_{z_k}$, tel que $\beta \in (pS)$. Nous associons à la mesure μ les fonctions $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\psi^*}$ n donnée par (4.2.1), (4.3.1), alors nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta = 0.$$

Preuve. Tout d'abord, on transforme l'intégrale dans le théorème à la somme suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\widetilde{S}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})\right| d\theta - 2Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})d\theta + 1 \quad (4.3.15)$$

On commence par le second terme de la partie droite de (4.3.15). D'après le lemme 4.3.6, on vérifie que

$$\lim_{n\to\infty} 2Re\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})d\theta = 2 \tag{4.3.16}$$

Maintenant, pour le premier terme de la partie droite de (4.3.15), on a l'éstimation

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|D(e^{i\theta})\psi_n^*(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\psi_n^*(e^{i\theta})}{\varphi_n^*(e^{i\theta})}\right|^2\left|D(e^{i\theta})\varphi_n^*(e^{i\theta})\right|^2 d\theta. \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\frac{\psi_n^*(t)}{\varphi_n(t)}\right|^2\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\varphi_n(e^{i\theta})\mu'_{ac}\right|^2\mu'_{ac}d\theta\right]. \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

par passage à la limite quand $n\to\infty$ dans l'inégalité (4.3.17) , on obtient

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\widetilde{S}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \leq |B(t)| = 1. \tag{4.3.18}$$

En passant à la limite lorsque $n\to\infty$ en (4.3.15) et en utilisant (4.3.16) et (4.3.18), on obtien

$$0\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})-1\right|^2 d\theta \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\widetilde{D}(e^{i\theta})\widetilde{\psi_n^*}(e^{i\theta})-1\right|^2 d\theta\leq 0$$

Cela permet d'obtenir la preuve du théorème. ∎

Remarque 5 *[22] En conséquence du théorème précédent , nous avons*

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\psi_n(e^{i\theta})\right|^2 d\beta_s = 0$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^m A_j\left|\psi_n(z_j)\right|^2 = 0$

4.4 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux avec une partie discrète infinie

dans cette partie, on va étudier le comportement asymptotique à l'intérieur du disque unité de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de classe polynômial de Szegö et perturbé par une suite de Blaschke infinie de masses ponctuelles à l'extérieur du cercle unité [4].

Soit v une mesure définit sur $\mathbb{T}\cup\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, avec z_k points fixes à l'extérieur de $\mathbb{D}$

$$v = \beta + \sum_{k=1}^{\infty}A_k\delta(z-z_k),$$

où $\beta = \beta_{ac} + \beta_s$ est une mesure de probabilité borélienne sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et β_{ac} est la partie absolument continue de β et β_s la partie singulière et A_k satisfait

$$A_k > 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty \ et\ \sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| - 1) < +\infty, \tag{4.4.1}$$

pour $k = 1, ...$ et $\delta(z - z_k)$ est la mesure de Dirac au point z_k.

La condition $\sum_{k=1}^{\infty}(|z_k| - 1) < +\infty$ est nécessaire pour assurer la convergence du produit Blaschke infini dans H^2 , (qui n'est pas presente au cas fini), la deuxième condition qui est aussi nécessaire $\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty$ pour que la mesure $v = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\delta(z - z_k)$, soit bien definie La partie absolument continue de μ par rapport à la mesure de Lebesgue m satisfait la condition généralisée de Szegő :

$$\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \log \beta'_{ac}(e^{i\theta}) d\theta > -\infty$$

Soit $\Phi_n(z) = \gamma_n z^n + ...(\gamma_n > 0)$, le polynôme orthonormé de degré n relativement à la mesure v i.e.,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)} d\beta(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Phi_n(z_k)\overline{\Phi_m(z_k)} = \delta_{mn}. \tag{4.4.2}$$

$$m, n, ..., z = e^{i\theta}.$$

L'espace fonctionnel de base qu'on va utiliser pour étudier ce problème de comportement asymptotique est $H^2(G, \widetilde{p})$, qui est construit à partir d'une fonction éxterieure particuliere qui est la fonction de Szegö ; dans notre cas la fonction de Szegö est modifié et qu'on note $\widetilde{D}$.

Lemme 4.4.1 *[4] Soit $\mu \in (pS)$ et la fonction $\widetilde{D}$ définie par*

$$\widetilde{D}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(e^{i\theta}, z) \log \beta'_{ac}(e^{i\theta}) d\theta\right\}, \tag{4.4.3}$$

alors

1. $\widetilde{D} \in H^2(D)$,
2. $\widetilde{D}(z) \neq 0\ for\ |z| < 1$,
3. $\left|\widetilde{D}(t)\right|^2 = \beta'_{ac}(t)$ *p.p. sur* T,
4. $\widetilde{D}(0) > 0$.

Preuve.

Considérons l'intégrale de Poisson associée à la fonction $\frac{q(e^{i\theta})}{q(z)} \log \mu'_{ac}(e^{i\theta})$ notée par :

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\frac{q(e^{i\theta})}{q(z)}\log\beta'_{ac}(e^{i\theta})\right\}d\theta$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité $\mathbb{D}$ puisque $q(t) = \prod^k |t-\varsigma_k|^{2K_k} = p(t)$ et $p(e^{i\theta})\log\beta'_{ac}(e^{i\theta})d\theta \in L^1([0,2\pi], d\theta)$.

Considérons maintenant la fonction holomorphe $h(z)$ dont $u(r,x)$ est la partie réelle. et exigeons que $h(0)$ soit réel pour avoir l'unicité de h. La fonction recherchée sera donc $g(z) = \exp h(z)$. Il est clair que $Re\widetilde{D}(z) = Reg(z)$; $(z = re^{ix}, r \in [0,1[)$, de sorte que $\widetilde{D}(z) = g(z)$.

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{D}(z)\right| &= \left|\exp\{Reh(z) + Imh(z)\}\right|,\\
&= \exp\{Reh(z)\},\\
&= \exp\{u(r,x)\}.
\end{aligned}$$

Alors, pour $(z = re^{ix}, r \in [0,1[)$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{D}(re^{ix})\right|^2 &= 2\exp\{u(r,x)\},\\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{q(e^{i\theta})}{q(z)}\log\beta'_{ac}(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\right\}d\theta. \qquad (4.4.4)
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\widetilde{D}(re^{ix})\right|^2 dx &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{q(e^{i\theta})}{q(z)}\log\beta'_{ac}(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{q(e^{i\theta})}{q(z)}\beta'_{ac}(e^{i\theta})\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\right)d\theta,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{q(e^{i\theta})}{q(z)}\log\beta'_{ac}(e^{i\theta})d\theta = C,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le premier point. Le deuxième point est évident. Le troisième point est déjà prouvé dans [7]. Pour prouver le dernier point, nous notons que $\widetilde{D}(0) = \exp\{h(0)\} > 0$, ($h(0) \in \mathbb{R}$ par construction). ■

Soit G l'ensemble suivant de nombres complexes

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}.$$

Définition 29 *On dit que* $f \in H^2(G)$, *si* f *est analytique sur* G *et* $\int_{C_r} |f(z)|\,|dz| \leq C,\ r > 1,\ C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, *et* C *est une constante indépendante de* r.

Lemme 4.4.2 *[4] Soit* $\mu \in (pS)$ *et la fonction* $\widetilde{D}^{out}$ *définie à l'extérieur du cercle unité par*

$$\widetilde{D}^{out}(w) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{w + e^{-i\theta}}{w - e^{-i\theta}} \frac{q(e^{i\theta})}{q(w)} \log \beta'_{ac}(e^{i\theta}) d\theta\right\}.$$

Alors

1. $\widetilde{D}^{out} \in H^2(G)$,
2. $\widetilde{D}^{out}(w) \neq 0$ *for* $w \in G$,
3. $\left|\widetilde{D}^{out}(t)\right|^2 = \beta'_{ac}(t)$ *p.p. sur* T,
4. $\widetilde{D}^{out}(\infty) > 0$.

Preuve. Considérons la fonction $\widetilde{D}$ défini dans (4.4.3), et construisons la fonction $\widetilde{D}^{out}$ comme suit :

$$\begin{cases} \widetilde{D}^{out}(w) &= \widetilde{D}(\frac{1}{w}) \text{ for } w \in G/\{\infty\}. \\ \widetilde{D}^{out}(\infty) &= \widetilde{D}(0). \end{cases}$$

Alors, la preuve découle immédiatement du lemme ci-dessus.

■

Définition 30 *[4] On dit que* $f \in H^2(G, \widetilde{p})$ *si* $f(z)$ *est analytique sur* G *et* $(f.\widetilde{D}) \in H^2(G)$.

L'espace $L^2(\mathbb{T}, \beta'_{ac}|d\xi|)$ est l'ensemble des fonctions f défini sur le cercle unité $\mathbb{T}$,à valeur dans $\mathbb{C}$ avec $\int_{-\pi}^{+\pi} \left|f(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta < +\infty$.
Soit f et g deux fonctions dans $L^2(\mathbb{T}, \beta'_{ac}|d\xi|)$, on définit

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{T},\beta'_{ac}|d\xi|)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\beta'_{ac}(\theta)d\theta,$$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T},\beta'_{ac}|d\xi|)} = \langle f, f\rangle_{L^2(\mathbb{T},\beta'_{ac}|d\xi|)},$$

alors $(L^2(\mathbb{T}, \beta'_{ac}|d\xi|), \|.\|_{L^2(\mathbb{T},\beta'_{ac}|d\xi|)})$, est un espace de Hilbert.
Les propriétés de l'espace $H^2(G, \widetilde{p})$ sont donnés dans le théorème suivant :

Théorème 41 *Soit* $f \in H^2(G, \widetilde{p})$. *Alors* f *admet en presque tous les points de* $\mathbb{T}$ *une limite radiale notée* $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)$. *De plus,*

1. $\tilde{f} \in (L^2(\mathbb{T}, \beta'_{ac} |d\xi|)$

2. $(H^2(G, \widetilde{p}), \|.\|_{\beta'_{ac}})$ *est un espace de Hilbert, où*

$$\|f\|^2_{\beta'_{ac}} = \langle f, f \rangle_{\beta'_{ac}},$$

$$\langle f, g \rangle_{\beta'_{ac}} = \left\langle \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T}, \beta'_{ac}|d\xi|)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \widetilde{f}(e^{i\theta}) \overline{\widetilde{g}(e^{i\theta})} \beta'_{ac}(\theta) d\theta.$$

Pour f, g *dans* $\in H^2(G, \widetilde{p})$.

3. *si* $f \in H^2(G, \widetilde{p})$*, alors pour tout compact* $K \subset G$*, il existe une constante* $C(K)$ *(* $C(K)$ *ne dépend que de* K*) tel que*

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C(K) \|f\|_{\mu'_{ac}}$$

Pour la preuve voir [21].

4.4.1 Propriété extrémale des polynômes orthogonaux

On note Q_n les polynômes moniques de degré exactement égal à n. Définit $m_n(\beta)$, $m_n(v_l)$, $m_n(v)$, μ et $\widehat{\mu}$ comme valeurs extrêmes des problèmes suivants :

$$m_n(\beta) = \left(\frac{1}{k_n}\right)^2 = \left\|\frac{1}{k_n}\varphi\right\|^2_\beta = min\left\{\|Q_n\|^2_\beta \,; \varphi_n = z^n + ..., Q_n(\infty) = 1\right\}, \tag{4.4.5}$$

où

$$\|Q_n\|^2_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|Q_n(e^{i\theta})\right|^2 d\beta(\theta).$$

$$m_n(v_l) = \left(\frac{1}{\gamma^l_n}\right)^2 = \left\|\frac{1}{\gamma^l_n}\psi_n\right\|^2_{v_l} = min\left\{\|Q_n\|^2_{v_l} \,; Q_n = z^n + ..., Q_n(\infty) = 1\right\}, \tag{4.4.6}$$

où

$$\|Q_n\|^2_{v_l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|Q_n(e^{i\theta})\right|^2 d\beta(\theta) + \sum_{k=1}^{l} A_k |Q_n(z_k)|^2,$$

$$m_n(v) = \left(\frac{1}{\gamma_n}\right)^2 = \left\|\frac{1}{\gamma_n}\Phi_n\right\|^2_v = min\left\{\|Q_n\|^2_v \,; Q_n = z^n + ..., Q_n(\infty) = 1\right\} \tag{4.4.7}$$

où

$$\|Q_n\|^2_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|Q_n(e^{i\theta})\right|^2 d\beta(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k |Q_n(z_k)|^2 .$$

$$\mu(\widetilde{p}) = inf\left\{\|\varphi_n\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} : \varphi_n \in H^2(G, \widetilde{p}); \varphi_n(\infty) = 1\right\}, et \tag{4.4.8}$$

$$\hat{\mu}(v) = inf\left\{\|\varphi_n\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} : \varphi_n \in H^2(G,\widetilde{p}); \varphi_n(\infty) = 1; \varphi_n(z_k) = 0, k = 1, 2, ...\right\}. \quad (4.4.9)$$

Notée par $\widehat{\varphi}$ et φ^∞ les solutions optimales des problèmes extrêmes (4.4.8) et (4.4.9) , respectivement.

4.4.2 Théorèmes sur le comportement asymptotique

Lemme 4.4.3 *[3] Soit $\varphi \in H^2(G,\widetilde{p})$ tel que $\varphi(\infty) = 1$ et $\varphi(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ...$, et soit*

$$B_\infty(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z\overline{z_k} - 1} \frac{|z_k|^2}{z_k}$$

est le produit de Blashke , alors

$$B_\infty \in H^2(G,\widetilde{p}),\ B_\infty(\infty) = 1,\ \left|\widetilde{B}_\infty(e^{i\theta})\right| = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

avec

$$\widetilde{B}_\infty(e^{i\theta}) = \lim_{z\to e^{i\theta}} B_\infty(z),\ \frac{\varphi}{B_\infty} \in H^2(G,\widetilde{p})$$

Preuve.

Soit

$$K(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z\overline{z_k} - 1} \frac{|z_k|}{z_k}, \quad avec \quad |z| > 1$$

alors

$$B_\infty(z) = K(z).\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|\,,$$

K est bornée dans G, et $\left|\widetilde{K}(e^{i\theta})\right| = 1$ presque partout dans G , où $\widetilde{K}$ est la limite radiale de K.

Maintenant montrons que $\frac{\varphi}{B_\infty} \in H^2(G,\widetilde{p})$ il suffit pour cela de montrer que $\frac{\varphi(w).\widetilde{D}(w)}{B_\infty(w)} \in H^2(G)$

Ce qui revient à montrer que

$$\frac{\varphi(\frac{1}{w}).\widetilde{D}(\frac{1}{w})}{B_\infty(\frac{1}{w})} \in H^2(D)$$

Or on sait que $\varphi(\frac{1}{w}) \in H^2(D)$

et si on considdère le produit de Blaschke classique

$$K(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w - w_k}{z\overline{w_k} - 1} \frac{|w_k|}{w_k}, \quad avec \quad |w| < 1$$

et $B_1(w) = B(\frac{1}{w})$, alors

$$B_1(w) = K(w).\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|w_k|}.$$

Finallement

$$\frac{\varphi(\frac{1}{w}).\widetilde{D}(\frac{1}{w})}{K(w)}.\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|w_k|} \in H^2(D).$$

■

Lemme 4.4.4 *[3] Les fonctions extrêmes φ^* et $\widehat{\varphi}^*$ sont liés par les relations*

$$\varphi^{\infty}(z) = B_{\infty}(z).\widehat{\varphi}(z) \quad et \quad \widehat{\mu}(v) = \left[\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|\right]^2 \mu(\widetilde{p})$$

Preuve. Soit maintenant une fonction φ de $H^2(G, \widetilde{p})$ vérifiant :

$$\varphi(\infty) = 1 \quad et \quad \varphi(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, ...,$$

alors

$$\frac{\varphi}{B_{\infty}} \in H^2(G, \widetilde{p}) \quad et \quad \left[\frac{\varphi}{B_{\infty}}\right](\infty) = 1,$$

donc on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\frac{\varphi(e^{i\theta})}{B_{\infty}(e^{i\theta})}\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\widehat{\varphi}(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\varphi(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \geq \left(\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\widehat{\varphi}(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta$$

finalement

$$!\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\varphi(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\widehat{\varphi}(e^{i\theta})B_{\infty}(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \tag{4.4.10}$$

Remarquons maintenant que

$$\widehat{\varphi}.B_{\infty} \in H^2(G, \widetilde{p}) \quad et \quad \widehat{\varphi}.B_{\infty}(\infty) = 1, \quad et \quad (\widehat{\varphi}.B_{\infty})(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{4.4.11}$$

Alors (4.4.10) et (4.4.11) et l'unicité de la solution optimale nous donnent :

$$\varphi^{\infty} = B_{\infty}.\widehat{\varphi} \tag{4.4.12}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(v) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\varphi^{\infty}(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|B_{\infty}(e^{i\theta}).\widehat{\varphi}(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \\
&= \left[\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|\right]^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\widehat{\varphi}(e^{i\theta})\right|^2 \beta'_{ac}(\theta)d\theta \\
&= \left[\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|\right]^2 \mu(\widetilde{p})
\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

■

Théorème 42 *[4] Soit $v = \beta + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \delta(z - z_k)$ tel que β appartient à la classe polynômial de Szegő sur le cercle unité,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < +\infty, \quad A_k > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| - 1) < +\infty, \quad |z_k| > 1.$$

Alors

$$\lim_{l \to \infty} m_n(v_l) = m_n(v), \tag{4.4.14}$$

$$\lim_{l \to \infty} \gamma_n^l = \gamma_n. \tag{4.4.15}$$

Preuve. La propriété extrême de $\frac{1}{\gamma_n^l} \psi_n$ et le fait que $A_k > 0$ implique que

$$m_n(v_l) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Phi_n(e^{i\theta}) \right|^2 d\beta(\theta) + \sum_{k=1}^{l} A_k \left| \Phi_n(z_k) \right|^2 \leq m_n(v), et$$

ainsi

$$m_n(v_l) \leq m_n(v). \tag{4.4.16}$$

D'un autre côté, la propriété extrême de $\frac{1}{\gamma_n} \Phi_n$ implique que

$$\begin{aligned} m_n(v) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \psi_n(e^{i\theta}) \right|^2 d\beta(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left| \psi_n(z_k) \right|^2 \\ &= m_n(v_l) + \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k \left| \psi_n(z_k) \right|^2 . \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

selon la propriété de reproduction de la fonction noyau $K_n(\xi, z)$, et $\psi_n(z) \in P_n$, on a

$$\psi_n(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_n(e^{i\theta}) \overline{K_n(\xi, z_k)} d\beta(\theta) \tag{4.4.18}$$

L'inégalité de Schwarz implique que

$$\begin{aligned} \psi_n(z_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_n(e^{i\theta}) \overline{K_n(\xi, z_k)} d\beta(\theta) \\ &\leq m_n(v_l). \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_n(\xi, z_k) \right|^2 d\beta(\theta) \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

et le fait que $K_n(\xi, z_k) \in P_n$

$$|\psi_n(z_k)|^2 \leq m_n(v_l).K_n(z_k, z_k) \tag{4.4.20}$$

Les inégalités (4.4.1), (4.4.17), et (4.4.20) impliquent

$$\begin{aligned} m_n(v) &\leq m_n(v_l) + \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k m_n(v_l).K_n(z_k, z_k) \\ &= m_n(v_l)\left[1 + \sup_{k\geq l+1} K_n(z_k, z_k) \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k\right]. \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

on obtient donc

$$\frac{m_n(v)}{m_n(v_l)} \leq 1 + \delta_l \text{ où } \delta_l \to 0,\ l \to \infty. \tag{4.4.22}$$

En utilisant (4.4.16) et (4.4.22), on obtient (4.4.14).Donc , on a (4.4.15) et le théorème est prouvé. ■

Théorème 43 *[4] soit $v = \beta + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \delta(z - z_k)$ avec β appartient à la classe polynômial de Szegö sur le cercle unité et ;*

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < +\infty, \quad A_k > 0, \tag{4.4.23}$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| - 1) < +\infty, \quad |z_k| > 1, \tag{4.4.24}$$

3.
$$\frac{m_n(v_l)}{m_n(\beta)} \leq \left(\prod_{k=1}^{l} |z_k|^2\right) \tag{4.4.25}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} m_n(v) = \widehat{\mu}(v). \tag{4.4.26}$$

Preuve. On a

$$m_n(v_l) \leq \left(\prod_{k=1}^{l} |z_k|^2\right) m_n(\beta), \tag{4.4.27}$$

en passant à la limite quand l tend vers l'infini et en utilisant le théorème (42) , on obtient

$$m_n(v) \leq \left(\prod_{k=1}^{\infty} |z_k|\right)^2 m_n(\beta).$$

Cela implique, par le lemme (4.4.4) , que

$$\limsup_{n\to\infty} m_n(v) \leq \left(\prod_{k=1} |z_k|\right)^2 \mu(\widetilde{p}) = \widehat{\mu}(v).$$

D'un autre côté, on peut trouver une fonction L dans $H^2(G, \widetilde{p})$, (voir [7],[11]), dont

$$\widehat{\mu}(v) \leq \|L(z)\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} \leq \liminf_{n\leftrightarrow\infty} m_n(v),$$

$$\widehat{\mu}(v) \leq \liminf_{n\leftrightarrow\infty} m_n(v).$$

Le théorème est prouvé. ■

Théorème 44 *[4] Soit $v = \beta + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\delta(z - z_k)$ avec β appartient à la classe polynômial de Szegö sur le cercle unité et ;*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < +\infty,\ A_k > 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}(|z_k| - 1) < +\infty \text{ pour } |z_k| > 1,$$

$$\frac{k_n}{\gamma_n^l} \leq \prod_{k=1}^{l} |z_k| .$$

Soit $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ le système de polynômes orthonormés associés à v. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\gamma_n}\Phi_n - \varphi^\infty \right\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} = 0 \tag{4.4.28}$$

Preuve. Poser

$$H_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_n}\Phi_n + \varphi^\infty\right).$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\infty) = 1,\ H_n(z_k) = 0,\ k = 1, ...$$

Cela implique que

$$\liminf_{n\to\infty} \|H_n\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} \leq \hat{\mu}(v)$$

Utilisant Loi du parallélogramme dans $H^2(G, \widetilde{p})$, on obtient

$$\left\| \frac{1}{\gamma_n}\Phi_n - \varphi^\infty \right\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} = 2\left(\left\| \frac{1}{\gamma_n}\Phi_n \right\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} + \|\varphi^\infty\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})}\right) - 4\|H_n\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})}$$

Par conséquent

$$\limsup_{n\to\infty} \|H_n\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} \leq 2\left(\hat{\mu}(v) + \hat{\mu}(v)\right) - 4\hat{\mu}(v) = 0$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\gamma_n}\Phi_n - \varphi^{\infty} \right\|^2_{H^2(G,\widetilde{p})} = 0$$

■

Annexe

Lemme 4.4.5 (Lemme de Fatou) *Soit φ_n est une suite de fonctions positives mesurables sur $[-\pi, \pi]$, alors*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \liminf \varphi_n(t)dt \leq \liminf \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)dt.$$

Théorème 45 (Inégalité de Jensen) *Soit $f \in L^1(\mu)$ une fonction à valeurs réelles telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ avec $a \in \mathbb{R} \cup -\infty$ et $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$. Soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$. On a l'inégalité*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} (\varphi \circ f)\, d\mu$$

En particulier si $\mu(\Omega) = 1$ on obtient :

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ f)\, d\mu$$

où μ une mesure positive un ensemble Ω.

Théorème 46 (Inégalité de Hölder) *Soit X un espace mesuré, de mesure μ positive. Soient f et g deux fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, \infty]$.*

Soient p et q deux exposants conjugués, avec $1 < p < \infty$. Alors

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q},$$

L'in ́egalité de Hölder dans le cas où $p = q = 2$ s'appelle l'inégalité de (Herman Schwarz).

Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous avons apporté une contribution à un problème de comportement asymptotique des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de la forme $v = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \delta_{z_j}$ avec μ appartient à la classe polynomiale de Szegö dont le support est $\mathbb{S} = \mathbb{T} \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; où $\mathbb{T}$ est le cercle unité,$z_j \in ext(\mathbb{T})$. les resultas obtenues trouveront leurs applications dans le spectre d'un opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy voir ([2], chapitre 8).

Nos resultats sur la fonction $\widetilde{D}^{out}$ défini à l'extérieur du cercle unité, aura posé, plusieurs problèmes.

1. Le premier concerne le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure μ appartient à la classe polynomiale de Szegö dont le support est le segment $\mathbb{E} = [-1, 1]$.

2. Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de la forme $v = \mu + \sum_{j=1}^{l} A_j \delta_{z_j}$ avec μ appartient à la classe polynomiale de Szegö dont le support est $\mathbb{E} \cup \{z_j\}_{j=1}^{l}$; où $\mathbb{E}$ est Le segment $\mathbb{E} = [-1, 1]$, $z_j \in ext(\mathbb{E})$.
3. Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure de la forme $v = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \delta_{z_j}$ avec μ appartient à la classe polynomiale de Szegö dont le support est $\mathbb{E} \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$; $\mathbb{E}$ est Le segment $\mathbb{E} = [-1, 1]$, $z_j \in ext(\mathbb{E})$.

Bibliographie

[1] M. Al-Gwaiz , *Sturm-Liouville Theory and its Applications* .,Springer-Verlag, 2008.

[2] B. Barussau , *Popriété spectrales des operateurs de Toplitz* , Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, (2010)

[3] R. Benzine, *Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to a measure with infinite discrete part off a curve* ., J. Approx. Theory 89,(1997), no. 2, 257–265.

[4] F. Z. Benghia and Y. Belabbaci, *Asymptotics of orthogonal polynomials corresponding to polynomial Szegő measure with an infinite discrete part* .,Journal of the Chungchong Mathematical Society , Volume 34, No. 3, August (2021).271-283

[5] A. Cachafeiro and F. Marcellan, *Perturbation in Toeplitz matrices* , J.Math.Anal.Appl., (1991).

[6] H. F. Davis , *Fourier Series and orthogonal Functions* ,Allyn and Bacon inc., (1963).

[7] S. Denisov and S. Kupin, Asymptotics of the orthogonal polynomials for the Szego class with a polynomial weight, *J. Approx. Theory*,139, (2006), 8-28.

[8] M. Fekete and J. L. Walsh , *On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties, and of their zeros* ., J. Analyse Math. 4 (1955) 49-87.

[9] J. B. Garnett , *Bounded analytic functions. Academic Press.* , New-York, 1981.

[10] Ya. L. Geronimus , *Polynomials orthogonal on a circle and interval.*,Pergamon Press New York (1960).

[11] A. Gontchar , *n convergence of Pade approximants for certain class of meomorphic functions* ,Mat. Sb. 97 (1975), 4 ; English translation : Math. USSR-sb.

[12] G. H. Hardy , *On the mean modulus of an analytic function* ,Proc. London Mat. Soc. 14 (1915) 269-277.

[13] Hoffman. K , *Banach spaces of analytic functions* , Englewood Cliffs. N. J- Prentice-Hall. Inc. (1962).

[14] B.John Garnett. , *Bounded analytic functions* , volume 236 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, first edition, (2007).

[15] V. Kaliaguine and R. Benzine, *Sur la formule asymptotique des polynomes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur un contour plus une partie discréte finie.* , Bull. Soc. Math. Belg. B 41, (1989), 1, 29–46 (French).

[16] V.A., Kaliaguine, *On asymptotiques of Lp extrémal polynomials on a complex curve ($0 < p < 1$)*, J. Approx. Theory, 74 (1993), 226-236.

[17] P. Koossis , *Introduction to H^p Spaces* , London Math. Vol 40. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980).

[18] R. Khaldi and R. Benzine , *Asymptotic behavior of a class of orthogonal polynomials on the circle : case of measures with an infinite discrete part.*,no. 411, Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique et d'Optimisation, Lille, (2000).

[19] R. Khaldi and R. Benzine, *Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to a measure with infinite discrete part off an arc.*, Int. J. Math. Math. Sci. 26, (2001),No. 8, 449–455.

[20] R. Khaldi , *Sur le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle ou sur le segment.*, Thèse de Doctorat . Université de Annaba , (2001).

[21] R. Khaldi and R. Benzine, *Asymptotics for orthogonal polynomials off the circle.*, J. of Applied Mathematics, No.1 (2004) 37–53

[22] R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud, *Asymptotics of Orthogonal Polynomials With a Generalized Szego Condition.*, J.Open Problems Complex Analysis, Vol. 3, No. 1, (2011), ISSN 2074-2827.

[23] M. Krawtchouk , *Sur une généralisation des polynômes d'Hermite* .,Comptes Rendus Mathematiques, 189.17, (1929),620–622

[24] M. G, Krein , *On generalisation of some investigations of G. Szegö. V. Smirnoff and A. Kolmogorov* .,C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS. 46 (1945) 91-94.

[25] X. Li and K. Pan, *Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corre- sponding to measure with discrete part off the unit circle.*, J. Aprox. Theory, 79, (1994), 54-71.

[26] V. I. Lomonosov , *Invariant subspaces for operators commuting with compact operators* .,Funct. Anal. Appl., 7 :213–214, 1973.

[27] E. M. Nikishine , *Discret Sturm-Liouville operators and some problems of function theory* .,Trudy Sem. Petrovsk. 10 (1984), 3-77 ; J Soviet Math. 35 (1986), 26-2744. [17]

[28] E.A. A. Rakhmanov. , *On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials I* ., Math. USSR sb. 32 (1977).

[29] E. A. A. Rakhmanov., On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, II. *Math. USSD-SB.*, 46, (1983), 105-117.

[30] Q. Rahman et G. Schmetsser , *Analytic Theory of Polynomials* ., Presses internationales Polytechnique, 2011.

[31] J. Rostand , *Mesure et intégration* .,(notes de cours), Automne 2012.

[32] W. Rudin, *Analytic functions of class* H^p. , transaction of american mathematical Society.t.78.app.46,(1955).

[33] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York,(1966).

[34] L. Schwartz , *Analyse I : théorie des ensembles et topologie* .,volume 42. Hermann, 1991.

[35] L. Schwartz , *Analyse III : Calcul intégral* ,volume 44. Hermann, 1993.

[36] V. J. Smirnov , *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe.*,Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad. 2. (1928) 155-179.

[37] V. J. Smirnov , *Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui se rattachent* . ,Bulletin de l'Académie des Sciences de LU. R. S. S. (1932) 337-372.

[38] V. J. Smirnov , *and N. A. Lebedev, The Constructive Theory of Functions of a complex Variable* . ,Nauka. Moscow. (1964) [in Russian] ; M. I. T. Press. Cambridge. MA (1968) .

[39] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1.*, American Mathematical Society, Providence, (2005).

[40] P. Souetine , *Polynômes orthogonaux sur un contour.*,Russian Math. Surveys. T. 21 (1966) [En Russe].

[41] L. Valet , *Généralités sur les polynumes orthogonaux* ,https ://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00661847,2012.

[42] G. Szegö , *Uber die Enttwickelung einer analytischen Funktion nach den polynômen einers orthogonal systems.*, Mathematische Annalen., Mathematische zeitchrift,82 (1921) 188-212.

[43] G. Szegö , *Uber Orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehoren* .,Mathematische zeitchrift. 9 (1921) 218-270.

[44] G. Szegö , *Uber Wurzeln algebraischer Gleighungen* .,Math 13(1922), 28-55.

[45] G. Szegö , *Orthogonal Polynomials.*,American mathematical society, (1939).

[46] G. Szegö, and U. Grenander , *oeplitz forms and their applications* ., Berkley Los Angeles (1958).

[47] G. Szegö , *Orthogonal Polynomials* .,Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. ed. American Math. Society, Providence, RI. 23 (1975).

[48] H. Widom , *Extremal polynomials associated with a system of curves and arcs in the complex plane.*,J. Math. Mech. 16. (1967), 997-1013

[49] H. Widom , *Extremal polynomials associated with a system of curves and arcs in the complex plane.* ,Adv. Math. 3 (1969) 127-232

[50] A. Zygmund , *Trigonometric series.*,2nd ed. New york. Cambridge University Press (1959).