

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليج
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par :
Mama Sahraoui

THEME

Stabilité de la solution d'un système de E.D.P
Avec retard

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

<i>Mme Y.Boukhatem</i>	<i>M.C.A U.Laghouat</i>	<i>Président</i>
<i>Mr D.Ouchenane</i>	<i>M.C.B U.Laghouat</i>	<i>Encadreur</i>
<i>Mr S.E.Allaoui</i>	<i>M.C.A U.Laghouat</i>	<i>Co-encadreur</i>
<i>Mr A.Boughataya</i>	<i>M.A.A U.Laghouat</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr A.A.Rahmoune</i>	<i>M.A.A U.Laghouat</i>	<i>Examineur</i>

Année Universitaire 2016/2017

Remerciement

*Je remercie tout d'abord **ALLAH** le tout puissant qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

Mon vif remerciement va également à mon encadreur Dr.Ouchenane Djamel qui m'a guidé durant ce semestre et qui ses conseils et remarques étaient très utile pour réaliser ce mémoire.

Je souhaiterais également remercier Mr.Rahmoune abdelaziz, pour ses conseils et La supervision ainsi que pour fournir les informations nécessaires concernant le mémoire.

Je remercie encore, Dr.Boukhtem et Mr.Boughataya qui ont accepté d'examiner ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, ma mère et mon père pour tout ce qu'ils ont fait que des belles choses durant toute ma vie, à mes chers frères Brahim, Yacine et le petit Moussa

À mes oncles, mes tantes, mes cousines et à tous les membres de la famille Sahraoui, Mahroug erras, Miker, Hadjadj et Metidji.

À mes professeurs et tous mes camarades de la promotion 2017.

Une spécial dédicace pour tous mes amis sans exception pour leur grand amour et leur soutien

M.Sahraoui

ملخص

في هذا البحث ، نعتبر النظام الحراري الخطي أحادي الأبعاد من نوع تيموشنكو مع تأخير في ردود الفعل . حيث النقل الحراري معطى بقانون كاتنيو . تحت فرضيات مناسبة بين تأثير التأخير و تأثير التخميد . نبرهن وجود و وحدانية الحل . علاوة على ذلك، نبرهن الاستقرار الآسي دون الافتراض المعتاد على سرعات الموجة. و لتحقيق أهدافنا، نستعمل طريقة سيميغروب و طريقة الطاقة.

مفاتيح هذه المذكرة

التناقص الآسي، التخميد الخطي، تيموشنكو، النظام الحراري، الطرف الثاني.

Résumé

Dans ce mémoire, on considère un système thermoélastique linéaire unidimensionnel de type Timoshenko avec un retard dans la contre-réaction . La conduction de chaleur donnée par la loi de Cattaneo. Sous l'hypothèse du retard et l'amortissement. On prouve l'existence et l'unicité du problème. En outre, la résultat du stabilité exponentielle est prouvé sans l'hypothèse usuelle en les vitesses des ondes. on utilise la méthode de semigroupe et la méthode d'énergie.

Mots clés :

Décroissance exponentielle, Amortissement linéaire, thermoélasticité, second membre.

Abstract

In this memory, we consider a one-dimensional linear thermoelastic system of Timoshenko type with a delay term in the feedback. The heat conduction is given by Cattaneo's law. Under an appropriate assumption between the weight of the delay and the weight of the damping, we prove the well-posedness of the problem. Furthermore, an exponential stability result is shown without the usual assumption on the wave speeds. To achieve our goals, we make use of the semigroup method and the energy method.

Keywords :

Exponential decay, linear damping, Timoshenko, thermoelasticity, second sound .

Table des matières

1	Introduction	6
2	Préliminaire	11
2.1	Espaces de Banach définition et propriétés	11
2.2	Espaces de Hilbert	13
2.2.1	Théorème de Lax-Milgram	13
2.2.2	Le théorème de Hille-Yosida	14
2.3	Les espaces $L^p(\Omega)$	14
2.4	Les espaces $L^p(0, T, V)$	16
2.5	Espaces Sobolev	18
2.6	Espaces fonctionnels	19
2.6.1	Inégalités de Young, Hölder	22
3	Existence et Unicité de la solution du problème	27
4	Stabilité exponentielle pour $\mu_1 > \mu_2$	36
	Bibliographie	49

Notations

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$D(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions tests.
$D'(\Omega)$	Espace des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
E'	Espace dual de E .
E''	Espace dual de E' .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit Scalaire dans la dualité E', E .
$H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega)$	Espaces de Sobolev.
p.p.	presque partout.
$\ \cdot\ $	Une norme associée à un produit scalaire.

Chapitre 1

Introduction

Dans ce travail, que nous présentons sous forme de mémoire, on étudie un système thermoélastique linéaire avec retard en dimension un de type Timoshenko, dans lequel le flux de chaleur est donné par la loi de Cattaneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) + \mu_1 \varphi_t(x, t) + \mu_2 \varphi_t(x, t - \tau) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b_2 \psi_{xx}(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) + \gamma \theta_x(x, t) = 0, \\ \rho_3 \theta_t(x, t) + \kappa q_x(x, t) + \gamma \psi_{tx}(x, t) = 0, \\ \tau_0 q_t(x, t) + \delta q(x, t) + \kappa \theta_x(x, t) = 0, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où $t \in (0, \infty)$ désigne la variable de temps et $x \in (0, 1)$ c'est la variable d'espace, les fonctions φ et ψ sont respectivement, le déplacement transversale du matériel solide-élastique et l'angle de rotation, la fonction θ c'est la différence de température, $q = q(t, x) \in \mathbb{R}$ est le flux de chaleur et $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma, \tau_0, \delta, \kappa, \mu_1, \mu_2$ et K sont des constantes positives $\tau > 0$ représente le terme de retard avec les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad \varphi_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où $x \in (0, 1)$ et $t \in (0, \tau)$. On considère également les conditions aux bords

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0 \quad \text{pour toutes } t \geq 0. \quad (1.3)$$

Notre but dans ce travail est de prouver, l'existence et l'unicité ainsi le comportement asymptotique de la solution du problème (1.1)-(1.3). Nous allons d'abord rappeler certains recherches liées à notre problème.

Les équations liées à la stabilité/instabilité des équations des ondes avec retard ont attiré une attention considérable. Ces dernières années et de nombreux auteurs ont montré que

les retards peuvent déstabiliser un système qui est asymptotiquement stable à l'absence de retard.

Comme cela à été prouvé par Datko, les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \omega_{xx} - a\omega_{xxt} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ \omega(0, t) = 0, \quad \omega_x(1, t) = -k\omega_t(1, t - \tau), & t > 0, \end{cases}$$

où a, k et τ sont des constantes positives deviennent instables pour toutes valeurs arbitrairement faible plus petit de τ et toutes valeurs de a et k .

Nicaise et Pignotti ont étudié le problème

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, -t) = u_0(x, t), & x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), & x \in \Omega, \quad t \in (0, \tau). \end{cases} \quad (1.4)$$

En utilisant une inégalité d'observabilité obtenue avec une estimation de Carleman, ils ont prouvé que, sous l'hypothèse

$$\mu_2 < \mu_1, \quad (1.5)$$

la solution est exponentiellement stable. Au contraire, si (1.5) n'est pas vérifié, ils ont trouvé une séquence de retards pour lesquels la solution correspondante de (1.4) est instable. Les mêmes résultats ont été montrés si l'amortissement et le retard agissent sur la frontière du domaine.

Récemment, Said-Houari et Laskri ont considérés le système de type Timoshenko avec un terme de retard dans la contre-réaction :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) + \mu_1 \psi_t(x, t) + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Sous l'hypothèse $\mu_1 \geq \mu_2$ sur les poids des deux rétroactions, ils ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution du système. Ils ont également établi pour $\mu_1 > \mu_2$ un résultat de décroissance exponentielle dans le cas d'une propagation d'onde (equal-speed), c'est à dire :

$$\frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \quad (1.7)$$

Le résultat trouvé par Said-Houari et Laskri a été étendu au cas de retard temporel de la forme $\psi_t(x, t - \tau)$ par Kirane, Said-Houari et Anwar . D'abord, en utilisant la technique de

la norme variable de Kato, et sous certaines restrictions sur les paramètres μ_1, μ_2 et sur la fonction de retard $\tau(t)$, a été démontré que le système est bien posé. Deuxièmement, sous l'hypothèse entre le poids du terme de retard dans la rétroaction, le poids du terme sous délai et les vitesses des ondes, un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie totale a été prouvé.

Le système de Timoshenko remonte aux années 1921, Timoshenko a proposé un système hyperbolique couplé qui est similaire à (1.6) avec $\mu_1 = \mu_2 = 0$, décrivant la vibration transversale d'une poutre, mais sans la présence d'amortissement. pour une dérivation physique du système de Timoshenko, nous renvoyons le lecteur.

L'absence du retard au système (1.6) c'est pour $\mu_2 = 0$, la question de stabilité des systèmes de type Timoshenko a reçu beaucoup d'attention au cours des dernières années et un certain nombre de résultats concernant la désintégration uniforme et asymptotique d'énergie ont été établis.

Une question importante de la recherche est de rechercher une dissipation minimale pour laquelle les solutions du systèmes de Timoshenko décroissent uniformément à zéro que le temps tend vers l'infini. A cet égard, plusieurs types de mécanismes dissipatifs ont été introduits, tels que l'amortissement viscoélastique et la dissipation thermique.

On ne rappelle ici que quelques résultats relatifs à la dissipation thermique dans les systèmes de Timoshenko. On se trouve plusieurs articles intéressés par les systèmes de Timoshenko avec l'amortissement viscoélastique.

Au meilleur de notre savoir, l'article [6] est le premier article dans lequel les auteurs ont traité avec le système de Timoshenko avec la dissipation thermique. Plus précisément, ils ont considéré le problème

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x = 0 & \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 & \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_3 \theta_t - k\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 & \text{dans}(0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1.8)$$

où φ, ψ et θ sont les fonctions de (x, t) qui modélisent respectivement le déplacement transversale de la poutre, l'angle de rotation du filament et la différence de température. Sous les conditions appropriées sur σ, ρ_i, b, k et γ , ont prouvé plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour le système linéarisé et un résultat de stabilité non-exponentielle pour le cas de différentes vitesses d'onde.

La modélisation de la conduction thermique surnommé la Loi de Fourier (comme (1.8)) qui suppose que le flux q soit proportionnel au gradient de la température θ en même temps t .

$$q + \kappa \nabla \theta = 0, \quad \kappa > 0,$$

conduit au phénomène de vitesse de progration de chaleur infinie. Pour surmonter ce paradoxe physique dans la Loi de Fourier, un certain nombre de modifications de l'hypothèse de base sur la relation entre le flux thermique et la température a été faite. La caractéristique commune de ces théories et que tous conduisent à une équation différentielle hyperbolique de sorte que la vitesse des progrations devient fini. Parmi eux est la Loi de Cattaneo,

$$\tau q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0,$$

conduisant au système avec un second membre et une suggestion de Green et Naghdi pour les systèmes thermoélastiques induisant ce qu'on appelle thermolasticité de type *III*, où l'équation constitutive pour le flux de chaleur caractérisée par

$$q + \kappa^* p_x + \tilde{\kappa} \nabla \theta = 0, \quad \tilde{\kappa} > \kappa^* > 0, p_t = \theta.$$

Messouadi, Pokojovy et Said-Houari [4] ont étudié le problème

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \beta \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \\ \tau_0 q_t + q + \kappa \theta_x = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

où $(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$, $\varphi = \varphi(t, x)$ est le vecteur de déplacement, $\psi = \psi(t, x)$ est l'angle de rotation du filament, $\theta = \theta(t, x)$ c'est la différence de température, $q = q(t, x)$ est le vecteur de flux thermique et $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \gamma, \delta, \kappa, \mu, \tau_0$ sont des constantes positives, la fonction non linéaire σ est supposée être suffisamment lisse et satisfaire

$$\sigma_{\varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\psi}(0, 0) = k \quad \text{et} \quad \sigma_{\varphi_x \varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\varphi_x \psi}(0, 0) = \sigma_{\psi \psi} = 0.$$

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les cas linéaires et non linéaires ont été établis. Concernant les systèmes de Timoshenko en thermoélasticité de type *III*, nous avons des articles récents de Messouadi et Said-Houari dans lesquels les auteurs ont prouvé plusieurs résultats de stabilité.

Comme une séquence de ce que nous avons dit avant, les questions suivantes se posent naturellement :

- Condition (1.7) est significative que du point de vue mathématique puisque dans la pratique les vitesses de progration des ondes sont toujours différentes; (l'article [3]). Il est bien connu que cette condition peut être évitée en considérant deux termes d'amortissement linéaire de la forme φ_t et ψ_t du coté gauche de la première et de la

deuxième équations du système (1.6) avec $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Ce résultat a été montré dans [9] et dans d'autres articles. Mais est-il possible d'obtenir un résultat de décroissance exponentielle lorsque l'amortissement est faible et sans hypothèse (1.7)?

- En [4], les auteurs ont montré que la conduction thermique donnée par la Loi de Cattaneo avec un terme d'amortissement linéaire de la forme $\mu\varphi_t$ agissant sur la première équation en (1.9) donnent la stabilité exponentielle de l'énergie totale associé au système (1.9) sans l'hypothèse (1.7) sous quelle condition le système (1.9) reste-il exponentiellement stable indépendamment de (1.7) lorsqu'un délai est considéré dans la contre-réaction?

L'objectif principale de ce mémoire est de répondre aux deux questions ci-dessus.

Le plan de ce mémoire est :

Chapitre 1 : Introduction.

Chapitre 2 : Consacrer aux notions fondamentales utilisée.

Chapitre 3 : L'étude de l'existence et l'unicité de la solution.

Chapitre 4 : Traitement la stabilité du la solution.

Chapitre 2

Préliminaire

2.1 Espaces de Banach définition et propriétés

Définition 2.1.1 *L'espace vectoriel V est muni d'une opération binaire $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 : V \times V \rightarrow V$ ce qui en fait un groupe commutatif et on outre il est muni d'une multiplication $(a, x) \mapsto ax : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ satisfaisant $(a_1 + a_2)v = a_1v + a_2v$, $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$, $(a_1a_2)v = a_1(a_2v)$ et $1.v = v$.*

Définition 2.1.2 *Soit V un espace vectoriel. On appelle norme sur V une application $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\|v\| \geq 0$, $\|av\| = |a|\|v\|$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pour toute $v \in V$ et $a \in \mathbb{R}$ et $\|v\| = 0 \iff v = 0$.*

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé, si la dernière propriété (c.à.d $\|v\|_V = 0 \Rightarrow v = 0$.) n'est pas vérifiée on appelle une telle fonctionnelle une semi norme.

Définition 2.1.3 *Soit V un espace vectoriel normé on dit que V est complet si toute suite de Cauchy dans V est convergente dans V*

Définition 2.1.4 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet V . L'espace dual V' c'est l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires continues $u : V \rightarrow \mathbb{R}$.*

Notation 2.1.1 *On peut considérer l'espace vectoriel $\ell(V, \mathbb{R})$, étant également désigné par V' et appelé l'espace dual de V . L'espace initial V alors est appelé pré-dual de V' .*

Proposition 2.1 *V' muni de la norme $\|\cdot\|_{V'}$ définie par :*

$$\|u\|_{V'} = \sup\{|u(x)| : \|x\| \leq 1\},$$

est un espace de Banach.

Définition 2.1.5 Puisque u est linéaire on voit que

$$u : X \rightarrow X'',$$

est une isométrie linéaire de V sur un sous-espace fermé de V'' , on le note par

$$V \hookrightarrow V''.$$

Soit V un espace de Banach et $u \in V'$. Notons

$$\begin{aligned} \varphi_u : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \varphi_u(v), \end{aligned}$$

lorsque $u \in V'$, on obtient une famille $(\varphi_u)_{u \in V'}$ des formes à V en \mathbb{R} .

Définition 2.1.6 La topologie faible en V , noté par $\sigma(V, V')$, est la topologie la plus faible sur V , pour laquelle chaque $(\varphi_u)_{u \in V'}$ est continue

On va définir la troisième topologie sur V' , la topologie faible, notée par $\sigma(V', V)$. Pour tous $x \in V$. On dénote par

$$\begin{aligned} \varphi_x : V' &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \varphi_x(u) = \langle u, x \rangle_{\sigma(V', V)}, \end{aligned}$$

Lorsque $x \in V$, on obtient une famille $(\varphi_x)_{x \in V}$ des formes de V' dans \mathbb{R} .

Définition 2.1.7 La topologie faible étoile sur V' , est la topologie la plus faible sur V' pour laquelle chaque $(\varphi_x)_{x \in V}$ est continue.

Théorème 2.1 Soit V espace de Banach. alors, V est réflexif, si et seulement si,

$$B_V = \{x \in V : \|x\| \leq 1\},$$

est compact avec la topologie faible $\sigma(V, V')$.

Définition 2.1.8 soit V un espace de Banach et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans V . Alors u_n converge fortement vers u dans V , si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_V = 0,$$

et cela est noté par $u_n \rightarrow u$, ou $\lim_{t \rightarrow \infty} u_n = u$.

2.2 Espaces de Hilbert

Définition 2.2.1 Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive [i.e $(u, u) \geq 0, \forall u \in H$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$]

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

[Remarquons que pour établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz on n'utilise pas l'hypothèse $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].

Rappelons aussi que $|u| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ est une norme.

$$\text{En effet } |u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u, v) \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|.$$

Rappelons enfin \ll L'identité du parallélogramme \gg :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2) \quad \forall a, b \in H.$$

Définition 2.2.2 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Dans tout la suite H désigne un espace de Hilbert .

Exemple 2.1 (fondamental)

$L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x).dx$$

est un espace de Hilbert.

2.2.1 Théorème de Lax-Milgram

Définition 2.2.3 On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est

- **continue** s'il existe une constante C elle que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H,$$

- **coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Corollaire 2.2 (*Lax-Milgram*) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive . Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

2.2.2 Le théorème de Hille-Yosida

Définition 2.2.4 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire **non-borné**. On dit que A est **monotone** si

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A),$$

A est **maximal monotone** si de plus surjective i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \quad \text{tel que } u + Au = f.$$

Théorème 2.2 (*Hille-Yosida*) Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, \infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \text{ donnée initiale.} \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$, et soit Ω un domaine ouvert dans $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Lebesgue standard $L^p(\Omega)$, par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\} .$$

Notation 2.3.1 Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$, notons par

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Si $p = \infty$, on a

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ est mesurable et il existe une constante } C \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ dans } \Omega\}$.

Théorème 2.3 *évidemment $L^p(\Omega)$ fourni avec la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach, pour tous $1 \leq p \leq \infty$.*

Remarque 2.1 *En particulière, quand $p = 2$, $L^2(\Omega)$ équipé du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

est un espace de Hilbert

Théorème 2.4 *Pour $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace réflexif.*

Théorème 2.5 *(Lebesgue)*

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ une suite converge à certains u et $|(u_k)(x)| < v(x)$ pour certains $v(x) \in L^1(\Omega)$. Alors u dans $L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A u_k(x)dx = \int_A u(x)dx$$

pour toute $A \subset \Omega$ mesurable.

Théorème 2.6 *(Fatou)*

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ une suite de fonctions non négatives (évidemment, l'existence d'un mineur intégrable commun peut affaiblir cette hypothèse) tel que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_{\Omega} u_k(x)dx < +\infty.$$

Alors la fonction $x \mapsto \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf u_k(x)$ est intégrable et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_{\Omega} u_k(x)dx \geq \int_{\Omega} (\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf u_k(x))dx$$

En particulier, théorème 2.5 indique que l'ensemble $((u_k)_{k \in \mathbb{N}})$ est relativement faiblement compact dans $L^1(\Omega)$. Cette propriété est absolument continue et uniformément intégrable :

Théorème 2.7 *(Dunford et Pettis)*

Soit $M \subset L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est borné, alors les énoncés suivants sont équivalentes les unes aux autres :

1. *M est relativement faiblement compact dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

2. l'ensemble M est uniformément intégrable, c.à.d :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}^+ : \sup_{x \in M} \int_{x \in \Omega; |u(x)| \geq K} |u(x)| dx \leq \varepsilon,$$

3. l'ensemble M est équi-absolument continue, c.à.d :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \theta \in \mathbb{R}^+ : \sup_{x \in M} \sup_{|A| \leq \theta} \int_A |u(x)| dx \leq \varepsilon,$$

Généralisations utiles du théorème de Lebesgue de la convergence dominée 2.5 et du théorème de Fatou 2.6 sont :

Théorème 2.8 (*Vitali*)

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ une suite converge vers u . Alors $u \in L^1(\Omega)$ et $u_k \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si $(|u_k|^p)_{k \in \mathbb{N}}$ étant uniformément intégrable.

Théorème 2.9 (*Fatou généralisé*)

La conclusion du théorème 2.6 tient si $u_k \geq 0$ est remplacé par $u_k \geq v_k$ avec $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant uniformément intégrable.

2.4 Les espaces $L^p(0, T, V)$

Définition 2.4.1 Soit V un espace de Banach, désignons par $L^p(0, T, V)$ l'espace des fonctions mesurables

$$\begin{aligned} u &:]0, T[\rightarrow V \\ t &\longmapsto u(t) \end{aligned}$$

tel que :

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p(0, T, V)} < \infty, \text{ pour } 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(0, T, V)} = \sup_{t \rightarrow \infty} \text{ess} \|u(t)\|_V.$$

Théorème 2.10 L'espace $L^p(0, T, V)$ est complet.

Nous désignons par $D'(0, T, V)$ l'espace de distributions dans $]0, T[$ qui prennent ses valeurs en V , définissons :

$$D'(0, T, V) = (D]0, T[, V),$$

où (ϕ, φ) c'est l'espace des applications linéaires continues de ϕ à φ . Comme $u \in D'(0, T, V)$, nous définissons la dérivation au sens de distribution comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u \left(\frac{d\varphi}{dt} \right), \quad \forall \varphi \in D(]0, T[),$$

et comme $u \in L^p(0, T, V)$, on a :

$$u(\varphi) = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in D(]0, T[).$$

Lemme 2.3 Soit $u \in L^p(0, T, V)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T, V)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors, la fonction u est continue de $[0, T]$ à V i.e $u \in C^1(0, T, V)$.

Lemme 2.4 Soit $A =]0, T[\times \Omega$ un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et soient g_μ, g sont deux fonctions dans $L^q(]0, T[, L^q(\Omega))$, $1 < p < \infty$ tel que

$$\|g_\mu\|_{L^q(]0, T[, L^q(\Omega))} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$$

et

$$g_\mu \rightarrow g \quad \text{dans } A,$$

alors

$$g_\mu \rightarrow g \quad \text{dans } L^q(A).$$

Théorème 2.11 $L^p(0, T, V)$ équipé de la norme $\|\cdot\|_{L^p(0, T, V)}$, $1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach.

Proposition 2.5 Soit V est un espace de Banach réflexif, V' c'est dual, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors le dual de $L^p(0, T, V)$ est identifié algébriquement et topologiquement à $L^q(0, T, V')$.

Proposition 2.6 Soit V, W sont à l'espace de Banach, $V \subset W$ avec l'injection continu, alors on a $L^p(0, T, V) \subset L^p(0, T, W)$ avec l'injection continu.

Proposition 2.7 Soient B_0, B, B_1 des espaces de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$, supposons que l'intégration $B_0 \hookrightarrow B$ est compact et $B \hookrightarrow B_1$ est continue. Soit $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, supposons en outre que B_0 et B_1 sont réflexifs.

On définit

$$W \equiv \{u \in L^p(0, T, B_0) : u' \in L^q(0, T, B_1)\}.$$

Alors, l'injection $W \hookrightarrow L^p(0, T, B)$ est compact.

2.5 Espaces Sobolev

La théorie moderne des équations différentielles est basée sur des espaces de fonctions dont les dérivées existent dans un sens généralisé et bénéficier d'une intégrabilité convenable.

Proposition 2.8 *Soit Ω un domaine ouvert dans \mathbb{R}^n , alors la distribution $T \in D'(\Omega)$ est dans $L^p(\Omega)$ s'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ tel que*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \text{ pour tous } \varphi \in D(\Omega),$$

où $1 \leq p \leq \infty$, et il est bien connu que f est unique.

Définition 2.5.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, \infty]$. Le $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de toutes $f \in L^p(\Omega)$, définit comme*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \text{ tel que } \partial^{\alpha} f \in L^p(\Omega) \text{ pour tous } \alpha \in \mathbb{N}^m \\ \text{tel que } |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m, \text{ où } \partial^{\alpha} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}\}.$$

Théorème 2.12 *$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach avec sa norme usuelle*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} f\|_{L^p}, 1 \leq p < \infty, \text{ pour toutes } f \in W^{m,p}(\Omega).$$

Définition 2.5.2 *Désignons par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 2.5.3 *Quand $p = 2$, on le note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni avec la norme*

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (\|\partial^{\alpha} f\|_{L^2})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui le font à $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel avec leur produit scalaire habituel

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dx$$

Théorème 2.13 1. $H^m(\Omega)$ muni avec le produit intérieur $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

2. Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$, avec intégration continu.

Lemme 2.9 *Puisque $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, nous identifions le dual $H^{-m}(\Omega)$ de $H_0^m(\Omega)$ dans un sous-espace faible sur Ω , et on a*

$$D(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega),$$

Théorème 2.14 *Supposons que Ω est un domaine ouvert dans $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, avec une frontière régulière $\partial\Omega$, alors :*

- (i) *Si $1 \leq p \leq n$, on a $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour chaque $q \in [p, p^*]$, où $p^* = \frac{np}{n-p}$.*
- (ii) *Si $p = n$ on a $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour chaque $q \in [p, \infty)$.*
- (iii) *Si $p > n$ on a $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$, où $\alpha = \frac{p-n}{p}$.*

Théorème 2.15 *Si Ω est un borné, les injections (ii) et (iii) de théorème 2.14 sont des compacts. L'injection (i) est un compact $q \in [p, p^*)$.*

Remarque 2.2 *Pour tous $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ et pour $\partial\Omega$ suffisamment régulière, on a*

$$\|\varphi(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}$$

2.6 Espaces fonctionnels

Définition 2.6.1 *Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $D(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .*

Définition 2.6.2 *Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f en t_0 , telle que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 2.6.3 *Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions (f_n) , $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $D(0, T; X)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_X ds = 0.$$

Théorème 2.16 (Bochner) *Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $t \rightarrow \|f(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable, dans ce cas*

$$\left\| \int_0^T f(s) ds \right\|_X \leq \int_0^T \|f(s)\|_X ds.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(X)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{C > 0 / \|f(t)\|_X \leq C; \quad p.p. t \in (0, T)\} \quad \text{si } p = \infty.$$

Naturellement, on a :

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q) \quad \text{où } Q = \Omega \times]0, T[.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Théorème 2.17 1. $L^p(0, T; X)$, ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.

2. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3. $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; X)$ avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

4. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0, T; X)' \subset L^\infty(0, T; X),$$

où $L^p(0, T; X)'$ représente le dual de l'espace $L^q(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

5. D'après le théorème de Danford-Pettis (cf. par exemple Yosida [1]) l'espace

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \quad (\text{resp } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$$

est le dual de

$$L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)) \quad (\text{resp de } L^1(0, T; L^2(\Omega))).$$

Et $H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)$ muni de la structure de dual fort de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 2.6.4 Soit $u, w \in L^1(0, T; X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 < p < \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ telles que $u \in L^p(0, T; X)$ et $u' \in L^p(0, T; X)$. L'espace $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|u'\|_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 2.6.5 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\| \leq \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T; X)$.

Théorème 2.18 Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexive et soit $u \in L^p(0, T; X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(0, T; X)$.
2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; X)$.
3. Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0, T; X)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexive, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0, T)$ et $u' = \frac{du}{dt}$. Par ailleurs $W^{1,p}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0, T; X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0, T] \rightarrow X$.

Etant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; X) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; X); u' \in W^{k-1,p}(0, T; X)\}.$$

L'espace $W^{k,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

On dénote aussi par $C(0, T; X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X avec la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X,$$

Théorème 2.19 (Théorème de représentation de Riesz).

Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Théorème 2.20 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Étant donné $\varphi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

De plus on a

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}$$

2.6.1 Inégalités de Young, Hölder

Notation 2.6.1 soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On définit le produit de convolution de fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec une fonction $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Théorème 2.21 (Young) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors pour toute $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et on définit

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

En outre $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Théorème 2.22 (Young) On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Alors $(f * g) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Théorème 2.23 (l'inégalité du Hölder) On suppose que $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $(fg) \in L^1$ et

$$\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Corollaire 2.10 (l'inégalité du Hölder - forme générale)

soient f_1, f_2, \dots, f_k ; k fonctions telles que, $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ et

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors, le produit $f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et $\|f_1 f_2 \dots f_k\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}$.

Lemme 2.11 (l'inégalité du Minkowski)

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Lemme 2.12 (l'inégalité du Cauchy-Schwartz)

Chaque produit intérieur satisfait l'inégalité du Cauchy-Schwartz

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leq \|x_1\| \|x_2\|.$$

Le signe d'égalité est valable si et seulement si x_1 et x_2 sont dépendantes.

Lemme 2.13 Soit $1 \leq p \leq r \leq q$, $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$

Lemme 2.14 Si $\mu(\Omega) < \infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $L^q \hookrightarrow L^p$, et

$$\|u\|_{L^p} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q}.$$

Inégalités de Young :

Lemme 2.15 pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}$$

Ou δ est une constante positive.

Preuve

On a :

$$(2\delta a - b)^2 \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Pour tout $\delta > 0$, on a

$$4\delta^2 a^2 + b^2 - 4\delta ab \geq 0, \quad \implies \quad 4\delta ab \leq 4\delta^2 a^2 + b^2$$

Donc ;

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}.$$

■

Lemme 2.16 Pour tout $a, b \geq 0$, l'inégalité suivante tient

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

où, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Jensen

Soient g une fonction continue de $[0, 1]$ dans $]a, b[$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et φ une fonction convexe de $]a, b[$ dans \mathbb{R} . Alors,

$$\varphi\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(g(x))dx.$$

Preuve

Soit $G =]0, 1[$ et $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable tel que

$$f(x) = \begin{cases} p \log a, & 0 \leq x \leq \frac{1}{p}, \\ q \log b, & \frac{1}{p} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

pour tout $a, b \geq 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ comme $\varphi(t) = e^t$ convexe, et en utilisant l'inégalité de Jensen on a :

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(G)} \int_G f(x)dx\right) \leq \frac{1}{\mu(G)} \int_G \varphi(f(x))dx. \quad (2.1)$$

Par conséquence, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(G)} \int_G \varphi(f(x)) dx &= \int_0^1 e^{f(x)} dx, \\
&= \int_0^{\frac{1}{p}} e^{p \log a} dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 e^{q \log b} dx, \\
&= \int_0^{\frac{1}{p}} a^p dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 b^q dx, \\
&= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\mu(G) = 1$ et

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{\mu(G)} \int_G \varphi(f(x)) dx\right) &= e\left(\int_0^1 f(x) dx\right), \\
&= e\left(\int_0^{\frac{1}{p}} p \log a dx + \int_{\frac{1}{p}}^1 q \log b dx\right), \\
&= e^{(\log a + \log b)} = e^{\log ab}, \\
&= ab,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

utilisons (2.1), (2.2) et (2.3) on obtient le résultat ■

Corollaire 2.17 (inégalité de Poincaré) On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Inégalité de Poincaré-Wirtinger :

Soit Ω un ouvert connexe de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe une constante C telle que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

avec

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx.$$

où $|\Omega|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω .

Semi-groupe fortement continu

Définition 2.6.6 Une famille $T(t)$ ($0 \leq t < \infty$) d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continu (un C_0 -semigroupe) si

1. $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$,
2. $T(0) = I$,
3. Pour chaque $x \in X$; $T(\cdot)x$ est continue en t sur $[0; \infty)$.

Proposition 2.18 Soit $T(t)$ un C_0 -semigroupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{pour } 0 \leq t < \infty.$$

Chapitre 3

Existence et Unicité de la solution du problème

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1)-(1.3), en utilisant le théorème de Hille-Yosida.

Introduisons une nouvelle variable suivante :

$$z(x, \rho, t) = \varphi_t(x, t - \tau\rho), \quad x \in (0, 1), \quad \rho \in (0, 1), t > 0.$$

Comme

$$z_t(x, \rho, t) = \frac{\partial \varphi_t(x, t - \tau\rho)}{\partial(t - \tau\rho)} \times \frac{\partial(t - \tau\rho)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_t(x, t - \tau\rho)}{\partial(t - \tau\rho)}$$

et

$$z_\rho(x, \rho, t) = \frac{\partial \varphi_t(x, t - \tau\rho)}{\partial(t - \tau\rho)} \times \frac{\partial(t - \tau\rho)}{\partial \rho} = -\tau \frac{\partial \varphi_t(x, t - \tau\rho)}{\partial(t - \tau\rho)}$$

Alors, on obtient l'équation

$$\tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad (x, \rho, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty).$$

Donc, le problème (1.1) peut être réécrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) + \mu_1 \varphi_t(x, t) + \mu_2 z(x, 1, t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) + \gamma \theta_x(x, t) = 0, \\ \rho_3 \theta_t(x, t) + \kappa q_x(x, t) + \gamma \psi_{tx}(x, t) = 0, \\ \tau_0 q_t(x, t) + \delta q(x, t) + \kappa \theta_x(x, t) = 0, \\ \tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

ou $x \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1)$ et $t > 0$. Le système ci-dessus est soumis aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), & \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, 1), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), & \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, 1), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), & q(x, 0) = q_0(x), & x \in (0, 1), \\ z(x, 0, t) = \varphi_t(x, t), & & x \in (0, 1), t > 0 \\ z(x, 1, t) = f_0(x, t - \tau), & & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \tau) \end{cases} \quad (3.2)$$

En plus des conditions initiales ci-dessus, on considère les conditions aux limites suivantes :

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0 \quad \text{pour toutes } t \geq 0. \quad (3.3)$$

Pour utiliser l'approche de semi-groupe, on réécrit les systèmes (3.1)-(3.3) comme un système de premier ordre.

Soit $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta, q, z)^T$; et réécrire (3.1)-(3.3) comme

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta, q, f_0(\cdot, -\tau))^T, \end{cases} \quad (3.4)$$

ou

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ \psi \\ v \\ \theta \\ q \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ K/\rho_1(\varphi_{xx} + \psi_x) - \mu_1/\rho_1 u - \mu_2/\rho_1 z(\cdot, 1) \\ v \\ b/\rho_2 \psi_{xx} - K/\rho_2(\varphi_x + \psi) - \gamma/\rho_2 \theta_x \\ -\kappa/\rho_3 q_x - \gamma/\rho_3 v_x \\ -\delta/\tau_0 q - \kappa/\tau_0 \theta_x \\ -(1/\tau)z_\rho \end{pmatrix}$$

Où \mathcal{A} est l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K/\rho_1 \partial_{xx} & -\mu_1/\rho_1 & K/\rho_1 \partial_x & 0 & 0 & 0 & -\mu_2/\rho_1(\cdot, 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -K/\rho_2 \partial_x & 0 & -K/\rho_2 + b/\rho_2 \partial_{xx} & 0 & -\gamma/\rho_2 \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma/\rho_3 \partial_x & 0 & -\kappa/\rho_3 \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa/\tau_0 \partial_x & -\delta/\tau_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1/\tau) \partial_\rho \end{pmatrix}$$

Le domaine de \mathcal{A} est alors :

$$D(\mathcal{A}) = \{(\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T \in H : u \equiv z(\cdot, 0) \text{ en } (0, 1)\}, \quad (3.5)$$

Où

$$H := (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \times H_0^1 \times (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2((0, 1); H_0^1(0, 1)).$$

L'espace d'énergie \mathcal{H} est défini comme

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2((0, 1); L^2(0, 1)).$$

Pour $U = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T$, $\bar{U} = (\bar{\varphi}, \bar{u}, \bar{\psi}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{q}, \bar{z})^T$ et pour une constante positive ξ satisfaisant

$$\tau\mu_2 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2). \quad (3.6)$$

On définit le produit scalaire suivant dans \mathcal{H} par :

$$\begin{aligned} \langle U, \bar{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 \{ \rho_1 u \bar{u} + \rho_2 v \bar{v} + K(\varphi_x + \psi)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) + b\psi_x \bar{\psi}_x + \rho_3 \theta \bar{\theta} \} dx \\ &\quad + \int_0^1 \tau_0 q \bar{q} dx + \xi \int_0^1 \int_0^1 z(x, \rho) \bar{z}(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned}$$

Théorème 3.1 *Suppose que $\mu_2 \leq \mu_1$. Alors, pour toute $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe une solution unique $U \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$ du problème (3.1) – (3.3). De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors*

$$U \in C([0, +\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Preuve Pour prouver le théorème (3.1), on utilise l'approche de semi-groupe c'est-à-dire, on montre que l'opérateur \mathcal{A} engendre un C_0 -semigroupe dans \mathcal{H} .

Dans ce cas, il suffit de prouver que \mathcal{A} est dissipative, en effet pour $U = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T \in D(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1 \left\{ \left[\rho_1 \left(\frac{K}{\rho_1} (\varphi_{xx} + \psi_x) - \frac{\mu_1}{\rho_1} u - \frac{\mu_2}{\rho_1} z(\cdot, 1) \right) u \right] + \left[\rho_2 \left(\frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{K}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) - \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x \right) v \right] \right. \\ &\quad + \left[K(u_x + v)(\varphi_x + \psi) \right] + \left[b v_x \psi_x \right] + \left. \left[\rho_3 \left(\frac{-\kappa}{\rho_3} q_x - \frac{\gamma}{\rho_3} v_x \right) \theta \right] \right\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \tau_0 \left[\frac{-\delta}{\tau_0} q - \frac{-\kappa}{\tau_0} \theta_x \right] q dx + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{-1}{\tau} \right) z_\rho(x, \rho) z(x, \rho) d\rho dx. \\ &= \int_0^1 \left\{ K \left[u(\varphi_x + \psi)_0^1 - \mu_1 u^2 - \mu_2 z(x, 1) u + b \left[v \psi_x \right]_0^1 - \gamma \left[\theta v \right]_0^1 - \kappa \left[\theta q \right]_0^1 \right\} dx \right. \\ &\quad \left. - \delta \int_0^1 q^2 dx - \frac{\xi}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx. \right. \end{aligned}$$

On applique les conditions aux limites (3.3), on obtient :

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\delta \int_0^1 q^2 dx - \mu_1 \int_0^1 u^2 dx - \mu_2 \int_0^1 z(x, 1) u dx - \frac{\xi}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx. \quad (3.7)$$

D'autre part ,

$$\int_0^1 \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho) d\rho dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \{z^2(x, 1) - z^2(x, 0)\} dx \quad (3.8)$$

Donc, d'après (3.7), (3.8) et le domaine (3.5), on trouve :

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\delta \int_0^1 q^2 dx - \mu_1 \int_0^1 u^2 dx - \mu_2 \int_0^1 z(x, 1) u dx - \frac{\xi}{\tau} \int_0^1 z^2(x, 1) dx + \frac{\xi}{\tau} \int_0^1 u^2(x) dx \quad (3.9)$$

En utilisant l'inégalité de Young , on obtient :

$$\int_0^1 z(x, 1) u(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 [z^2(x, 1) + u^2(x)] dx$$

Alors, (3.9) devienne

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -\delta \int_0^1 q^2 dx + \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_0^1 u^2(x) dx + \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_0^1 z^2(x, 1) dx \leq 0.$$

D'après (3.6), on remarque que

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau} \leq 0$$

Par conséquent, l'opérateur \mathcal{A} est dissipative .

D'autre part, il suffit de montrer que l'opérateur $(\lambda I - \mathcal{A})$ est surjectif pour $\lambda > 0$, pour cette proposition ; on prend un élément $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}$ et cherchons un solution $U = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T \in D(\mathcal{A})$ au problème suivant :

$$\lambda I - \mathcal{A}U = F$$

Où ; de manière équivalente .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \varphi - u = f_1, \\ \lambda u - \frac{K}{\rho_1} (\varphi_{xx} + \psi_x) + \frac{\mu_1}{\rho_1} u + \frac{\mu_2}{\rho_1} z(\cdot, 1) = f_2, \\ \lambda \psi - v = f_3, \\ \lambda v - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{K}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) + \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x = f_4, \\ \lambda \theta + \frac{\kappa}{\rho_3} q_x + \frac{\gamma}{\rho_3} v_x = f_5, \\ \lambda q + \frac{\delta}{\tau_0} q + \frac{\kappa}{\tau_0} \theta_x = f_6, \\ \lambda z + \frac{1}{\tau} z_\rho = f_7. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Supposons que on a trouvé φ et ψ avec la régularité appropriée. Donc, la première et la troisième ligne en (3.10) sont donne

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \lambda \varphi - f_1, \\ v = \lambda \psi - f_3. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Il est clair que $u \in H_0^1(0, 1)$ et $v \in H_0^1(0, 1)$. En outre, on peut trouver z tel que

$$z(x, 0) = u(x), \quad x \in (0, 1). \quad (3.12)$$

Corollaire 3.1 Soient f une fonction continue sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$, α une constante et $t_0 \in I$. La solution générale de l'équation

$$y'(t) = \alpha y(t) + f(t)$$

et donnée par

$$y(t) = Ce^{\alpha t} + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} f(s) ds.$$

Où C est une constante.

Donc ; les solutions de l'équation

$$z_\rho = -\lambda \tau z + \tau f_\tau.$$

sont Donnés par :

$$\begin{aligned} z(x, \rho) &= Ce^{-\lambda \tau \rho} + \int_0^\rho \tau e^{-\lambda \tau(\rho-\sigma)} f_\tau(x, \sigma) d\sigma \\ &= Ce^{-\lambda \tau \rho} + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho f_\tau(x, \sigma) e^{\lambda \tau \sigma} d\sigma \end{aligned}$$

De (3.11) , on obtient

$$z(x, \rho) = u(x) e^{-\lambda \tau \rho} + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho f_\tau(x, \sigma) e^{\lambda \tau \sigma} d\sigma \quad (3.13)$$

De (3.13) , on a

$$z(x, \rho) = \lambda \varphi(x) e^{-\lambda \rho \tau} - f_1 e^{-\lambda \tau \rho} + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho f_\tau(x, \sigma) e^{\lambda \tau \sigma} d\sigma.$$

tel que

$$z(x, 1) = \lambda \varphi(x) e^{-\lambda \tau} + z_0(x)$$

où $x \in (0, 1)$ et

$$z_0(x) = -f_1 e^{-\lambda \tau} + \tau e^{-\lambda \tau} \int_0^1 f_\tau(x, \sigma) d\sigma. \quad (3.14)$$

La formule ci-dessus dépend seulement de f_1 et f_7 .

En utilisant (3.10) et (3.11), les fonctions φ, ψ, θ et q satisfaisant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^2 + \frac{\mu_1}{\rho_1} + \lambda e^{-\lambda\tau} \frac{\mu_2}{\rho_1})\varphi - \frac{K}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2 + (\lambda + \frac{\mu_1}{\rho_1})f_1 - \frac{\mu_2}{\rho_1}z_0(x), \\ \lambda^2\psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{K}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x = f_4 + \lambda f_3, \\ \lambda\theta - \frac{\kappa}{\rho_3}q_x + \frac{\gamma\lambda}{\rho_3}\psi_x = f_5 + \frac{\gamma}{\rho_3}f_{3x}, \\ \lambda q + \frac{\delta}{\tau_0}q + \frac{\kappa}{\tau_0}\theta_x = f_6. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Pour résoudre le système (3.15) est équivalent à trouver

$$(\varphi, \psi, \theta, q) \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \times H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \{(\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau}\mu_2)\varphi\omega - K(\varphi_x + \psi)\omega_x\} dx = \int_0^1 (\rho_1 f_2 + (\lambda\rho_1 + \mu_1)f_1 - \mu_2 z_0(x))\omega dx, \\ \int_0^1 \{\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x + K(\varphi_x + \psi)\chi + \gamma\theta_x\chi\} dx = \int_0^1 \rho_2(f_4 + \lambda f_3)\chi dx, \\ \int_0^1 \{\rho_3\lambda\theta\omega_1 + \kappa q_x\omega_1 + \gamma\lambda\psi_x\omega_1\} dx = \int_0^1 (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x})\omega_1 dx, \\ \int_0^1 \{(\tau_0\lambda + \delta)q\chi_1 + \kappa\theta_x\chi_1\} dx = \int_0^1 \tau_0 f_6\chi_1 dx. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Pour tout $(\omega, \chi, \omega_1, \chi_1) \in W = H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

par conséquent ; le problème (3.16) est équivalent au problème

$$\xi((\varphi, \psi, \theta, q), (\omega, \chi, \omega_1, \chi_1)) = l(\omega, \chi, \omega_1, \chi_1). \quad (3.17)$$

où la forme bilinéaire $\xi : (H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et la forme linéaire $l : H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sont définis par

$$\begin{aligned} \xi((\varphi, \psi, \theta, q), (\omega, \chi, \omega_1, \chi_1)) &= \int_0^1 \{(\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau}\mu_2)\varphi\omega - K(\varphi_x + \psi)(\omega_x + \chi)\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x + \gamma\theta_x\omega_{1x}\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{\rho_3\lambda\theta\omega_1 + \kappa q_x\chi_1 + \gamma\lambda\psi_x\chi_x\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{(\tau_0\lambda + \delta)q\chi_1 + \kappa\theta_x\chi_1\} dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l(\omega, \chi, \omega_1, \chi_1) &= \int_0^1 (\rho_1 f_2 + (\lambda\rho_1 + \mu_1)f_1 - \mu_2 z_0(x))\omega dx \\ &\quad + \int_0^1 \rho_2(f_4 + \lambda f_3)\chi dx + \int_0^1 (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x})\omega_1 dx + \int_0^1 \tau_0 f_6\chi_1 dx, \end{aligned}$$

où $z_0(x)$ satisfait l'équation (3.14).

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram ; il suffit de vérifier la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire ξ et la continuité de la forme linéaire l .

1. Continuité de ξ

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} \left| \xi((\varphi, \psi, \theta, q), (\omega, \chi, \omega_1, \chi_1)) \right| &= \left| \int_0^1 \{(\lambda^2 \rho_1 + \mu_1 \lambda + \lambda e^{-\lambda \tau} \mu_2) \varphi \omega + K(\varphi_x + \psi)(\omega_x + \chi)\} dx \right. \\ &\quad + \int_0^1 \{\rho_2 \lambda^2 \psi \chi + b \psi_x \chi_x + \gamma \theta_x \omega_{1x}\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{\rho_3 \lambda \theta \omega_1 + \kappa q_x \chi_1 + \gamma \lambda \psi_x \chi_x\} dx \\ &\quad \left. + \int_0^1 \{(\tau_0 \lambda + \delta) q \chi_1 + \kappa \theta_x \chi_1\} dx \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \xi((\varphi, \psi, \theta, q), (\omega, \chi, \omega_1, \chi_1)) \right| &\leq \max\left((\lambda^2 \rho_1 + \mu_1 \lambda + \lambda e^{-\lambda \tau} \mu_2), K, \rho_2 \lambda^2, b, \gamma, \rho_3 \lambda, \kappa, \gamma \lambda, (\tau_0 \lambda + \delta)\right) \\ &\quad \left(\|\varphi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2} + \|q\|_{L^2} \right) \left(\|\omega\|_{L^2} + \|\chi\|_{L^2} + \|\omega_1\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \|\chi_1\|_{L^2} \right) \\ &\leq C_1 \left(\|\varphi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1} + \|\theta\|_{H^1} + \|q\|_{H_0^1} \right) \\ &\quad \left(\|\omega\|_{H_0^1} + \|\chi\|_{H_0^1} + \|\omega_1\|_{H^1} + \|\chi_1\|_{H_0^1} \right) \\ &\leq C_1 \left| (\varphi, \psi, \theta, q) \right|_W \left| (\omega, \chi, \omega_1, \chi_1) \right|_W. \end{aligned}$$

donc ξ est continue.

2. Coercivité de ξ

$$\begin{aligned} \xi((\varphi, \psi, \theta, q), (\varphi, \psi, \theta, q)) &= \int_0^1 \{(\lambda^2 \rho_1 + \mu_1 \lambda + \lambda e^{-\lambda \tau} \mu_2) \varphi^2 + K(\varphi_x + \psi)^2\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{\rho_2 \lambda^2 \psi^2 + b \psi_x^2 + \gamma \theta_x^2\} dx + \int_0^1 \{\rho_3 \lambda \theta^2 + \kappa q_x^2 + \gamma \lambda \psi_x^2\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \{(\tau_0 \lambda + \delta) q^2 + \kappa \theta_x^2\} dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \varphi_x \psi dx &\leq \int_0^1 |\varphi_x \psi| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \varphi_x \psi dx \geq \frac{-1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{-1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx.$$

On a

$$\begin{aligned} \xi((\varphi, \psi, \theta, q), (\varphi, \psi, \theta, q)) &\geq \int_0^1 \left\{ (\lambda^2 \rho_1 + \mu_1 \lambda + \lambda e^{-\lambda \tau} \mu_2) \varphi^2 + \frac{K}{2} \varphi_x^2 + (\rho_2 \lambda^2 + \frac{K}{2}) \psi^2 + (b + \gamma \lambda) \psi_x^2 \right. \\ &\quad \left. + \rho_3 \lambda \theta^2 + (\gamma + \kappa) \theta_x^2 + (\tau_0 \lambda + \delta) q^2 + \kappa q_x^2 \right\} dx. \\ &\geq \min \left((\lambda^2 \rho_1 + \mu_1 \lambda + \lambda e^{-\lambda \tau} \mu_2), \frac{K}{2}, (\rho_2 \lambda^2 + \frac{K}{2}), (b + \gamma \lambda), \rho_3 \lambda, (\gamma + \kappa), \right. \\ &\quad \left. (\tau_0 \lambda + \delta), \kappa \right) (\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|\theta\|_{H^1}^2 + \|q\|_{H_0^1}^2). \\ &\geq C_2 |(\varphi, \psi, \theta, q)|_W^2. \end{aligned}$$

donc ξ est coercive.

3. Continuité de l ;

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz; on trouve

$$\begin{aligned} |l(\omega, \chi, \omega_1, \chi_1)| &= \left| \int_0^1 (\rho_1 f_2 + (\lambda \rho_1 + \mu_1) f_1 - \mu_2 z_0(x)) \omega dx + \int_0^1 \rho_2 (f_4 + \lambda f_3) \chi dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x}) \omega_1 dx + \int_0^1 \tau_0 f_6 \chi_1 dx \right| \\ &\leq \left\| \rho_1 f_2 + (\lambda \rho_1 + \mu_1) f_1 - \mu_2 z_0(x) \right\|_{L^2} \|\omega\|_{L^2} + \left\| \rho_2 f_4 + \lambda f_3 \right\|_{L^2} \|\chi\|_{L^2} \\ &\quad + \left\| \rho_3 f_5 + \gamma f_{3x} \right\|_{L^2} \|\omega_1\|_{L^2} + \left\| \tau_0 f_6 \right\|_{L^2} \|\chi_1\|_{L^2}. \\ &\leq \max \left(\left\| \rho_1 f_2 + (\lambda \rho_1 + \mu_1) f_1 - \mu_2 z_0(x) \right\|_{L^2} + \left\| \rho_2 f_4 + \lambda f_3 \right\|_{L^2} + \left\| \rho_3 f_5 + \gamma f_{3x} \right\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \tau_0 f_6 \right\|_{L^2} \right) \left(\|\omega\|_{L^2} + \|\chi\|_{L^2} + \|\omega_1\|_{L^2} + \|\chi_1\|_{L^2} \right). \\ &\leq C_3 \left(\|\omega\|_{H_0^1} + \|\chi\|_{H_0^1} + \|\omega_1\|_{H^1} + \|\chi_1\|_{H_0^1} \right) \\ &\leq C_3 |(\omega, \chi, \omega_1, \chi_1)|_W \end{aligned}$$

donc l est continue.

Régularité de la solution :(retour de la solution forte)

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, On en déduit que pour tous $(\omega, \chi, \omega_1, \chi_1) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$, le problème (3.17) admet une solution faible unique $(\varphi, \psi, \theta, q) \in H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

Pour démontrer la régularité de la solution $(\varphi, \psi, \theta, q)$; on applique simplement la remarque suivante :

Remarque 3.1 Si $f \in H^k(\Omega)$ avec, k entier ≥ 1 , on vérifie aisément que la solution faible appartient à $H^{k+2}(\Omega)$.

Et comme toute solution forte (classique) de (3.15) est de classe C^2 alors par une application simple de résultat du régularité, on obtient $(\varphi, \psi, \theta, q)$ solution forte de (3.15), ainsi $(\varphi, \psi, \theta, q) \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \times H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$.

Alors, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tous $\lambda > 0$. Par conséquent, le résultat du (3.1) résulte à l'application de théorème de Hille-Yosida. ■

Chapitre 4

Stabilité exponentielle pour $\mu_1 > \mu_2$

Dans ce chapitre, on montre que; sous l'hypothèse $\mu_1 > \mu_2$, la solution du problème (3.1)-(3.3) décroissant exponentiellement, indépendamment de l'hypothèse de vitesse de l'onde. Pour réaliser notre objectif on utilise la méthode d'énergie, on définit une fonction de Lyapunov qui vérifiée la décroissance exponentielle .

Pour appliquée l'inégalité de Poincaré à θ , posons :

$$\bar{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - \int_0^1 \theta_0(x) dx.$$

Alors, d'après la troisième équation dans (1.1). on a :

$$\int_0^1 \bar{\theta}(x, t) dx = 0 \quad \forall \quad t \geq 0.$$

Dans ce cas, l'inégalité de Poincaré est applicable à $\bar{\theta}$, d'autre part $(\varphi, \psi, \bar{\theta}, q, z)$ satisfait le système (3.1) et les conditions aux limites (3.1)-(3.3). Pour ξ satisfaisant

$$\tau\mu_2 < \xi < \tau(2\mu_1 - \mu_2), \quad (4.1)$$

Dans toute la suite, on remplace $\bar{\theta}$ par θ pour simplifié l'écriture.

on définit le fonctionnelle d'énergie de la solution du problème (3.1)-(3.3) comme :

$$\begin{aligned} E(t) = E(t, z, \varphi, \psi, \theta, q) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2\} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \{K(\varphi_x + \psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3 \theta^2\} dx \\ &+ \int_0^1 \tau_0 q^2 dx + \frac{\xi}{2} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On multiplie la première équation de (3.1) par φ_t , la deuxième équation par ψ_t , la troisième équation par θ et la quatrième équation par q , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) \varphi_t(x, t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x, t) \varphi_t(x, t) + \mu_1 \varphi_t^2(x, t) + \mu_2 z(x, 1, t) \varphi_t(x, t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) \psi_t(x, t) - b \psi_{xx}(x, t) \psi_t(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) \psi_t(x, t) + \gamma \theta_x(x, t) \psi_t(x, t) = 0, \\ \rho_3 \theta_t(x, t) \theta(x, t) + \kappa q_x(x, t) \theta(x, t) + \gamma \psi_{tx}(x, t) \theta(x, t) = 0, \\ \tau_0 q_t(x, t) q(x, t) + \delta q^2(x, t) + \kappa \theta_x(x, t) q(x, t) = 0, \end{array} \right.$$

l'intégrale par partie donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \{ \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t + K(\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} + \mu_1 \varphi_t^2 + \mu_2 z(x, 1, t) \varphi_t \} dx = 0, \\ \int_0^1 \{ \rho_2 \psi_{tt} \psi_t + b \psi_x \psi_{tx} + K(\varphi_x + \psi) \psi_t + \gamma \theta_x \psi_t \} dx = 0, \\ \int_0^1 \{ \rho_3 \theta_t \theta + \kappa q_x \theta + \gamma \psi_{tx} \theta \} dx = 0, \\ \int_0^1 \{ \tau_0 q_t q + \delta q^2 + \kappa \theta_x q \} dx = 0, \end{array} \right.$$

Alors, on obtient

$$\int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t + K(\varphi_x + \psi)(\varphi_{tx} + \psi_t) + \mu_1 \varphi_t^2 + \mu_2 z \varphi_t + \rho_2 \psi_{tt} \psi_t + b \psi_x \psi_{tx} + \rho_3 \theta_t \theta + \tau_0 q_t q + \delta q^2 \right\} dx = 0$$

D'autre part ; on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_t + \rho_2 \psi_{tt} \psi_t \right\} dx.$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left\{ K(\varphi_x + \psi)^2 + b \psi_x^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2 \right\} dx = \int_0^1 \left\{ K(\varphi_x + \psi)(\varphi_{tx} + \psi_t) + b \psi_x \psi_{tx} + \rho_3 \theta_t \theta + \tau_0 q_t q \right\} dx.$$

Alors, on trouve l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left\{ K(\varphi_x + \psi)^2 + b \psi_x^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2 \right\} dx \\ & = -\delta \int_0^1 q^2 dx - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t^2(x, t) dx - \mu_2 \int_0^1 \varphi_t(x, t) z(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

On multiplie la dernière équation dans (3.1) par $(\xi/\tau)z$ et intégrant la résultat sur $(0, 1) \times (0, 1)$ respectivement de ρ et x , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx & = \frac{-\xi}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx \\ & = \frac{-\xi}{2\tau} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ & = \frac{\xi}{2\tau} \int_0^1 \{ z^2(x, 0, t) - z^2(x, 1, t) \} dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

De (4.2),(4.3) et (4.4), on a

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\delta \int_0^1 q^2 dx - \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_0^1 \varphi_t^2(x, t) dx - \frac{\xi}{2\tau} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx - \mu_2 \int_0^1 \varphi_t(x, t) z(x, 1, t) dx. \quad (4.5)$$

On utilise l'inégalité de Young, (4.5) réécrit comme

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} \leq & -\delta \int_0^1 q^2 dx - \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^1 \varphi_t^2(x, t) dx - \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \\ & - \mu_2 \int_0^1 \varphi_t(x, t) z(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant (4.1), on en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -\delta \int_0^1 q^2 dx - C \left(\int_0^1 \varphi_t^2(x, t) dx + \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \right). \quad (4.6)$$

La dernière inégalité implique que l'énergie E est une fonction non croissante par rapport à t .

Théorème 4.1 *On suppose que $\mu_2 < \mu_1$. Alors, il existe deux constantes positives C et γ , indépendamment de t , telle que pour toute solution de problème (3.1)-(3.3) on a*

$$E(t) \leq C e^{-\gamma t} \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (4.7)$$

Remarque 4.1 *Le résultat exponentiel dans le théorème 4.1 se tient sans aucune hypothèse sur les vitesses des ondes de la première et la deuxième équation dans (1.1). A l'absence du retard et du terme d'amortissement linéaire où, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dans (1.1), il a été prouvé par Fernández Sare et Racke que l'hypothèse selon laquelle l'onde accélère sur la première et la deuxième équations ne donne pas de stabilité exponentielle lorsque la conduction de chaleur est donnée par la loi de Cattaneo. Cependant, il a été récemment qu'un nouveau nombre selon τ_0 qui conduit à une stabilité exponentielle du système. D'autre part la conduction de chaleur est donnée par la loi de Fourier stabilise l'ensemble de système de manière exponentielle lorsque les ondes ont la même vitesse.*

Remarque 4.2 *Il s'agit d'un problème ouvert intéressant pour voir si la conduction de chaleur est suffisamment forte pour stabiliser le système (1.1)(au moins polynomiale) dans le cas où $\mu_2 \geq \mu_1$.*

On construit une fonctionnelle $L(t)$ équivalente à l'énergie $E(t)$ et satisfaisant

$$\frac{dL(t)}{dt} \leq -\Lambda L(t) \quad \text{pour toute } t \geq 0,$$

Pour une constante $\Lambda > 0$. Afin d'obtenir une telle fonctionnelle L , on a besoin de plusieurs lemme, Tout d'abord, considérons la fonctionnelle I_1 donné par

$$I_1(t) := \int_0^1 \rho_1 \varphi_t \varphi dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx. \quad (4.8)$$

Lemme 4.1 Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ la solution du (3.1)-(3.3). Alors, pour toute $\varepsilon_1 > 0$, on a

$$I_1(t) \leq \left(-K + \varepsilon_1 \left(\frac{K}{2} + \frac{\mu_2 c}{2} \right) \right) \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{Kc}{2\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \quad (4.9)$$

où $c = 1/\pi^2$ est la constante de Poincaré.

Preuve On dérive (4.8) par rapport à t , on conclue que

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} \varphi dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \mu_1 \int_0^1 \varphi \varphi_t dx.$$

Alors, en utilisant la première équation dans (3.1), on trouve

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \varphi dx - \mu_2 \int_0^1 \varphi z(x, 1, t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

Par conséquent, on arrive à

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -K \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx - \mu_2 \int_0^1 \varphi z(x, 1, t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

Appliquant les inégalités de Young et Poincaré ; on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &= -K \int_0^1 \varphi_x^2 dx - K \int_0^1 \psi \varphi_x dx - \mu_2 \int_0^1 \varphi z(x, 1, t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \\ &\leq -K \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{\varepsilon_1 K}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{Kc}{2\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c\mu_2 \varepsilon_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \\ &\leq \left(-K + \varepsilon_1 \left(\frac{K}{2} + \frac{\mu_2 c}{2} \right) \right) \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{Kc}{2\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned}$$

■

Soit ω la solution de

$$-\omega_{xx} = \psi_x \quad \text{avec} \quad \omega(0) = \omega(1) = 0; \quad (4.10)$$

alors on trouve

$$\omega(x, t) = - \int_0^1 \psi(y, t) dy + x \left(\int_0^1 \psi(y, t) dy \right).$$

Lemme 4.2 *La solution de (4.10) satisfait*

$$\int_0^1 \omega_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx$$

et

$$\int_0^1 \omega_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

Preuve

on multiplie l'équation (4.10) par ω , on trouve

$$-\omega_{xx}\omega = \psi_x\omega \implies -\int_0^1 \omega_{xx}\omega dx = \int_0^1 \psi_x\omega dx.$$

L'intégrale par partie donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_x^2 dx &= \int_0^1 \psi_x\omega dx, \\ &= -\int_0^1 \psi\omega_x dx = \int_0^1 \psi \left(\int_0^x \psi_x dx \right) dx, \\ &\leq \int_0^1 \psi^2 dx. \end{aligned}$$

et d'autre part, d'après Poincaré on a

$$\int_0^1 \omega_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_{tx}^2 dx.$$

et comme $\omega_t(t, 0) = \omega_t(t, 1) = 0$

$$\int_0^1 \omega_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

■

Soit ω la solution de (4.10). Soit la fonctionnelle

$$I_2(t) := \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t \omega - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi q \right) dx. \quad (4.11)$$

Lemme 4.3 *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ la solution du (3.1)-(3.3). Alors, pour toute $\varepsilon_2 > 0$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(t)}{dt} &\leq \left(-b + \frac{c\mu_1\varepsilon_2}{2} + \frac{c\mu_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\delta\gamma\varepsilon_2 c}{2\kappa} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_2} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \\ &\quad + \left(\rho_2 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2\kappa} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\frac{\gamma\tau_0}{2\kappa\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2\kappa\varepsilon_2} \right) \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Preuve

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_{tt} \psi + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \varphi_{tt} \omega + \rho_1 \varphi_t \omega_t - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi_t q - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi q_t \right) dx,$$

D'après la deuxième équation dans (3.1), on obtient

$$\rho_2 \int_0^1 \left(\psi_t^2 + \psi_{tt} \psi \right) dx = \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi_{xx} \psi dx - K \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \psi dx - \gamma \int_0^1 \theta_x \psi dx.$$

En utilisant la première et la quatrième équations dans (3.1) puis (4.10), on obtient

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^1 \left(\varphi_{tt} \omega + \varphi_t \omega_t \right) dx &= -K \int_0^1 \varphi \psi_x dx + K \int_0^1 \omega_x^2 dx - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t \omega dx - \mu_2 \int_0^1 z(x, 1, t) \omega dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \omega_t dx, \end{aligned}$$

Et

$$-\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^1 \left(\psi_t q + \psi q_t \right) dx = -\frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\gamma \delta}{\kappa} \int_0^1 \psi q dx + \gamma \int_0^1 \theta_x \psi dx.$$

En utilisant les égalités ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(t)}{dt} &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - K \int_0^1 \psi^2 dx + K \int_0^1 \omega_x^2 dx - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t \omega dx \\ &\quad - \mu_2 \int_0^1 z(x, 1, t) \omega dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \omega_t dx - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \int_0^1 \psi q dx \end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young et Poincaré et, en utilisant les inégalités du lemme (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dI_2(t)}{dt} &\leq \left(-b + \frac{c\mu_1 \varepsilon_2}{2} + \frac{c\mu_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\delta \gamma \varepsilon_2 c}{2\kappa} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_2} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx \\ &\quad + \left(\rho_2 + \frac{\gamma \tau_0 \varepsilon_2}{2\kappa} + \frac{\rho_1 \varepsilon_2}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\frac{\gamma \tau_0}{2\kappa \varepsilon_2} + \frac{\delta \gamma}{2\kappa \varepsilon_2} \right) \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

■

On définit la fonctionnelle

$$I_3(t) := \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (4.13)$$

Lemme 4.4 Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ la solution du (3.1)-(3.3). Alors, on a

$$\frac{dI_3(t)}{dt} \leq -I_3(t) - \frac{c_1}{2\tau} \int_0^1 z^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{2\tau} \int_0^1 \varphi_t^2(x, t) dx, \quad (4.14)$$

Où c_1 est une constante positive

Preuve

On dérive (4.13) par rapport à t et en utilisant la dernière équation dans (3.1), on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) &= \frac{-2}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &\leq \frac{-1}{\tau} \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx \\
 &\leq - \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx - \frac{1}{2\tau} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} (e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t)) d\rho dx \\
 &\leq -I_3(t) - \frac{1}{2\tau} \int_0^1 \{e^{-2\tau} z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)\} dx
 \end{aligned}$$

L'estimation ci-dessus implique qu'il existe c_1 une constante positive telle que (4.13) tient

■

Pour obtenir un terme négatif de $\int_0^1 \psi_t^2 dx$, on définit la fonctionnelle

$$I_4(t) := \rho_2 \rho_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \theta(t, y) dy \right) \psi_t(t, x) dx. \quad (4.15)$$

Lemme 4.5 Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ la solution du (3.1)-(3.3). Alors, pour toute $\varepsilon_4, \varepsilon'_4 > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_4(t)}{dt} &\leq \left(-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4 \rho_2 \kappa}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\varepsilon'_4 \rho_3}{2} (b + Kc) \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad + \frac{\varepsilon'_4 \rho_3 c K}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4} (b + K + Kc) \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\rho_2 \kappa}{2\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx.
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Preuve

On dérive (4.15) par rapport à t et en utilisant la troisième équation dans (3.1), on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_4(t)}{dt} &= \int_0^1 \left(\int_0^x \rho_3 \theta_t dy \right) \rho_2 \psi_t dx + \int_0^1 \left(\int_0^x \rho_3 \theta dy \right) \rho_2 \psi_{tt} dx \\
 &= - \int_0^1 \left(\int_0^x (\kappa q_y + \gamma \psi_{ty}) dy \right) \rho_2 \psi_t dx + \int_0^1 \left(\int_0^x \rho_3 \theta dy \right) (b \psi_{xx} - K(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta_x) dx, \\
 &= -\gamma \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_2 \kappa \int_0^1 q \psi_t dx - b \rho_3 \int_0^1 \theta \psi_x dx + K \rho_3 \int_0^1 \theta \varphi dx - K \rho_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \theta dy \right) \psi dx \\
 &\quad + \gamma \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Hölder ; on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_4(t)}{dt} &\leq -\gamma\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2\kappa \int_0^1 \left(\frac{1}{2\varepsilon_4} q^2 + \frac{\varepsilon_4}{2} \psi_t^2 \right) dx + b\rho_3 \int_0^1 \left(\frac{1}{2\varepsilon_4'} \theta^2 + \frac{\varepsilon_4'}{2} \psi_x^2 \right) dx \\
 &\quad + K\rho_3 \int_0^1 \left(\frac{1}{2\varepsilon_4'} \theta^2 + \frac{\varepsilon_4'}{2} \varphi^2 \right) dx + K\rho_3 \int_0^1 \left(\frac{1}{2\varepsilon_4'} \left(\int_0^x \theta dy \right)^2 + \frac{\varepsilon_4'}{2} \psi^2 \right) dx + \gamma\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx, \\
 &\leq \left(-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_4'\rho_3}{2} (b + Kc) \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\varepsilon_4'\rho_3 cK}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
 &\quad + \left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'} (b + K + Kc) \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\rho_2\kappa}{2\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx.
 \end{aligned}$$

■

De même pour obtenir un terme négatif de $\int_0^1 \theta^2 dx$, on introduit la fonctionnelle

$$I_5(t) := -\tau_0\rho_3 \int_0^1 q(t, x) \left(\int_0^x \theta(t, y) dy \right) dx. \quad (4.17)$$

Lemme 4.6 Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ la solution du (3.1)-(3.3). Alors, pour toute $\varepsilon_5, \varepsilon_5' > 0$, on a

$$\frac{dI_5(t)}{dt} \leq \left(-\rho_3\kappa + \frac{\varepsilon_5\rho_3\delta c}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\tau_0\kappa + \frac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'} \right) \int_0^1 q^2 dx. \quad (4.18)$$

Preuve

On dérive (4.17) par rapport à t et en utilisant la troisième et la quatrième équations dans (3.1), on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_5(t)}{dt} &= -\rho_3 \int_0^1 \tau_0 q_t \left(\int_0^x \theta dy \right) dx - \tau_0 \int_0^1 q \left(\int_0^1 \rho_3 \theta_t dy \right) dx \\
 &= -\rho_3 \int_0^1 (-\delta q - \kappa \theta_x) \left(\int_0^x \theta dy \right) dx - \tau_0 \int_0^1 q \left(\int_0^x (-\kappa q_y - \gamma \psi_{ty}) dy \right) dx \\
 &= \rho_3 \delta \int_0^1 q \left(\int_0^x \theta dy \right) dx + \rho_3 \kappa \int_0^1 \theta_x \left(\int_0^x \theta dy \right) dx + \tau_0 \kappa \int_0^1 q \left(\int_0^x q_y dy \right) dx \\
 &\quad + \tau_0 \gamma \int_0^1 q \left(\int_0^x \psi_{ty} dy \right) dx
 \end{aligned}$$

D'après les inégalités de Young et Poincaré ; on a

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_5(t)}{dt} &\leq \rho_3 \delta \int_0^1 \left(\frac{1}{2\varepsilon_5} q^2 + \frac{\varepsilon_5}{2} \left(\int_0^x \theta dy \right)^2 \right) dx - \rho_3 \kappa \int_0^1 \theta^2 dx + \tau_0 \kappa \int_0^1 q^2 dx + \tau_0 \gamma \int_0^1 \left(\frac{1}{2\varepsilon_5'} q^2 + \frac{\varepsilon_5'}{2} \psi_t^2 \right) dx \\
 &\leq \left(-\rho_3 \kappa + \frac{\varepsilon_5 \rho_3 \delta c}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_5' \tau_0 \gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\tau_0 \kappa + \frac{\rho_3 \delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon_5'} \right) \int_0^1 q^2 dx.
 \end{aligned}$$

■

Preuve (théorème 4.1) Pour prouver le théorème (4.1), on définit pour $N, N_2, N_4, N_5 > 0$

la fonctionnelle de Lyapunov L suivante :

$$L(t) := NE(t) + I_1(t) + N_2I_2(t) + I_3(t) + N_4I_4(t) + N_5I_5(t). \quad (4.19)$$

On dérive (4.19) par rapport à t et en utilisant (4.6),(4.9),(4.12),(4.14),(4.16) et (4.18), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &\leq N \left[-\delta \int_0^1 q^2 dx - C \left(\int_0^1 \varphi_t^2(x,t) dx + \int_0^1 z^2(x,1,t) dx \right) \right] + \left(-K + \varepsilon_1 \left(\frac{K}{2} + \frac{\mu_2 c}{2} \right) \right) \times \\ &\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{Kc}{2\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1} \int_0^1 z^2(x,1,t) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + N_2 \left[\left(-b + \frac{c\mu_1\varepsilon_2}{2} + \frac{c\mu_2\varepsilon_2}{2} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\delta\gamma\varepsilon_2 c}{2\kappa} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_2} \int_0^1 z^2(x,1,t) dx + \left(\rho_2 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2\kappa} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\frac{\gamma\tau_0}{2\kappa\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2\kappa\varepsilon_2} \right) \int_0^1 q^2 dx \right] - I_3(t) - \frac{c_1}{2\tau} \int_0^1 z^2(x,1,t) dx \\ &+ \frac{1}{2\tau} \int_0^1 \varphi_t^2(x,t) dx + N_4 \left[\left(-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_4\rho_3}{2}(b+Kc) \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \right. \\ &+ \left. \frac{\varepsilon_4\rho_3 cK}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}(b+K+Kc) \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\rho_2\kappa}{2\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx \right] \\ &+ N_5 \left[\left(-\rho_3\kappa + \frac{\varepsilon_5\rho_3\delta c}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\tau_0\kappa + \frac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'} \right) \int_0^1 q^2 dx \right] \\ \\ \frac{dL(t)}{dt} &\leq \left(\frac{Kc}{2\varepsilon_1} + N_2 \left(-b + \frac{c\mu_1\varepsilon_2}{2} + \frac{c\mu_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\delta\gamma\varepsilon_2 c}{2\kappa} \right) + N_4 \left(\frac{\varepsilon_4'\rho_3}{2}(b+Kc) \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \right. \\ &+ \left. \left(-K + \varepsilon_1 \left(\frac{K}{2} + \frac{\mu_2 c}{2} \right) + N_4 \frac{\varepsilon_4' K \rho_3 c}{2} \right) \int_0^1 \varphi_x^2 dx - I_3(t) \right. \\ &+ \left. \left(-CN + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1} + N_2 \frac{\mu_2}{2\varepsilon_2} - \frac{c_1}{2\tau} \right) \int_0^1 z^2(x,1,t) dx + \left(-CN + N_2 \left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} \right) + \rho_1 + \frac{1}{2\tau} \right) \times \right. \\ &\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(N_2 \left(\rho_2 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2\kappa} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2} \right) + N_4 \left(-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4\rho_2\kappa}{2} \right) + N_5 \frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &+ \left(-N\delta + N_2 \left(\frac{\gamma\tau_0}{2\kappa\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2\kappa\varepsilon_2} \right) + N_4 \frac{\rho_2\kappa}{2\varepsilon_4} + N_5 \left(\tau_0\kappa + \frac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'} \right) \right) \int_0^1 q^2 dx \\ &+ \left(N_4 \left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}(b+K+Kc) \right) + N_5 \left(-\rho_3\kappa + \frac{\varepsilon_5\rho_3\delta c}{2} \right) \right) \int_0^1 \theta^2 dx. \quad (4.20) \end{aligned}$$

À ce point, on va choisir les constantes. D'abord, on choisit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ et ε_5 assez petit tel que

$$\varepsilon_2 \left(\frac{c\mu_1}{2} + \frac{c\mu_2}{2} + \frac{\delta\gamma c}{2\kappa} \right) \leq \frac{b}{2}, \quad \varepsilon_1 \left(\frac{K}{2} + \frac{\mu_2 c}{2} \right) \leq \frac{K}{2}, \quad \varepsilon_4 \leq \frac{\gamma}{\kappa}, \quad \varepsilon_5 \leq \frac{\kappa}{\delta c}.$$

On peut choisir N_2 assez grand tel que

$$N_2 \geq \frac{2K}{b\varepsilon_1}.$$

De plus, on choisit N_4 assez grand tel que

$$N_4 \frac{\gamma \rho_2}{4} \geq N_2 \left(\rho_2 + \frac{\gamma \tau_0 \varepsilon_2}{2\kappa} + \frac{\rho_1 \varepsilon_2}{2} \right).$$

Une fois que N_2 et N_4 sont fixées, on prend ε'_4 assez petit tel que

$$\varepsilon'_4 \leq \min \left\{ \frac{N_2 b}{4N_4 \rho_3 (b + Kc)}, \frac{1}{2N_4 \rho_3 c} \right\}.$$

Puis, soit N_5 assez grand tel que

$$\frac{N_5 \rho_3 \kappa}{4} \geq N_4 \left(\gamma \rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon'_4} (b + K + Kc) \right).$$

Après cela, on fixe ε'_5 assez petit tel que

$$\varepsilon'_5 \leq \frac{N_4 \gamma \rho_2}{4N_5 \tau_0 \gamma}.$$

Enfin, une fois que toutes les constantes ci-dessus sont fixées, on choisit N assez grand tel que

$$\begin{cases} \frac{CN}{2} \geq \min \left\{ \frac{\mu_2}{2\varepsilon \varepsilon_1} + N_2 \frac{\mu_2}{2\varepsilon_2} - \frac{c_1}{2\tau}, N_2 \left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} \right) + \rho_1 + \frac{1}{2\tau} \right\}, \\ \frac{N\delta}{2} \geq N_2 \left(\frac{\gamma \tau_0}{2\kappa \varepsilon_2} + \frac{\delta \gamma}{2\kappa \varepsilon_2} \right) + N_4 \frac{\rho_2 \kappa}{2\varepsilon_4} + N_5 \left(\tau_0 \kappa + \frac{\rho_3 \delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon'_5} \right). \end{cases}$$

Par conséquent, il existe une constante positive η_1, η_2 telle que (4.20) devient

$$\frac{dL(t)}{dt} \leq -\eta_1 \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi_x^2 + \varphi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \theta^2 + q^2) dx - \eta_2 \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx, \quad (4.21)$$

Ce qui implique par (4.2) qu'il existe aussi une constante η_3 tel que

$$\frac{dL(t)}{dt} \leq -\eta_3 E(t) \quad \text{pour toute } t \geq 0. \quad (4.22)$$

Lemme 4.7 *Pour N assez grand, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 en fonction de $N, N_1, N_2, N_4, N_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon'_4, \varepsilon_5$ et ε'_5 tel que*

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t) \quad (4.23)$$

Preuve

pour prouver le lemme; on considère la fonctionnelle suivante

$$H(t) := I_1(t) + N_2 I_2(t) + I_3(t) + N_4 I_4(t) + N_5 I_5(t)$$

et montre que

$$|H(t)| \leq \hat{C} E(t)$$

Pour un constant $\hat{C} > 0$. De (4.8), (4.11), (4.13), (4.15) et (4.17), on obtient

$$\begin{aligned}
 |H(t)| \leq & \left| \int_0^1 \rho_1 \varphi_t \varphi dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx \right| + N_2 \left| \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t \omega - \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} \psi q \right) dx \right| \\
 & + \left| \int_0^1 \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right| + N_4 \left| \rho_2 \rho_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \theta(t, y) dy \right) \psi_t(t, x) dx \right| \\
 & + N_5 \left| -\tau_0 \rho_3 \int_0^1 q(t, x) \left(\int_0^x \theta(t, y) dy \right) dx \right|. \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Comme

$$\varphi_x^2 \leq 2(\varphi_x + \psi)^2 + 2\psi^2$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\int_0^1 \varphi^2 dx \leq 2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2 \int_0^1 \psi_x^2 dx.$$

D'après l'inégalité (4.24) et l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
 |H(t)| \leq & \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + N_2 \left(\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 c}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right. \\
 & + \left. \frac{\rho_1 c^2}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma \tau_0 c}{2\kappa} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma \tau_0}{2\kappa} \int_0^1 q^2 dx \right) + \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx + N_4 \left(\frac{\rho_2 \rho_3 c}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \right. \\
 & + \left. \frac{\rho_2 \rho_3}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \right) + N_5 \left(\frac{\tau_0 \rho_3}{2} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau_0 \rho_3 c}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \right). \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Alors (4.25) devienne

$$\begin{aligned}
 H(t) \leq & \alpha_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \alpha_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \alpha_3 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \alpha_4 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \alpha_5 \int_0^1 \theta^2 dx \\
 & + \alpha_6 \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx.
 \end{aligned}$$

Où les constantes positives $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ et α_6 sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 + N_2 \rho_1), & \alpha_2 = \frac{1}{2}(N_2 \rho_2 + N_4 \rho_2 \rho_3), & \alpha_3 = \rho_1 + \mu_1, \\ \alpha_4 = \frac{1}{2} \left(2(\rho_1 + \mu_1) + \frac{N_2 \gamma \tau_0 c}{\kappa} + N_2 \rho_2 c^2 + N_2 \rho_2 c \right), & \alpha_5 = \frac{1}{2} \left(N_4 \rho_2 \rho_3 c + N_5 \tau_0 \rho_3 c \right), \\ \alpha_6 = \frac{1}{2} \left(N_2 \frac{\gamma \tau_0}{\kappa} + N_5 \tau_0 \rho_3 \right). \end{cases}$$

Selon (4.25), on a

$$|H(t)| \leq \hat{C} E(t)$$

pour

$$\hat{C} = \frac{\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}}{\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, K, b, \kappa, \gamma, \delta, \tau_0\}}.$$

Parce que le problème a un sens c'est le $\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, K, b, \kappa, \gamma, \delta, \tau_0\}$ positif et ≤ 1 . Ainsi, on obtient

$$L - NE(t) \leq \hat{C}E(t).$$

Donc, on peut choisir N assez grand pour que $\beta_1 = N - \hat{C}, \beta_2 = N + \hat{C} > 0$. Alors, (4.23) est vérifiée et cela conclut la preuve du lemme ■

En combinant (4.22) et (4.23), on conclut qu'il existe certains $\Lambda > 0$ tels que

$$\frac{dL(t)}{dt} \leq -\Lambda L(t) \quad \text{pour toute } t \geq 0. \quad (4.26)$$

on intègre (4.26), on trouve

$$L(t) \leq L(0)e^{-\Lambda t} \quad \text{pour toute } t \geq 0. \quad (4.27)$$

D'après (4.23),(4.27) et comme : $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = 0$ et $L(t) \sim E(t)$ ce qui résulte $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$; donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(\varphi, \psi, \theta, q, z)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Alors finalement on dit que la solution est exponentiellement stable.

D'après la définition de la stabilité; car la solution $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ stable dans H , si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(\varphi, \psi, \theta, q, z)\|_H = 0$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un système thermoélastique linéaire de dimension un de type Timoshenko avec un retard dans la contre-réaction, ainsi que la stabilité exponentielle de la solution par la méthode d'énergie on construisant la fonctionnelle de Lyapunov.

Bibliographie

- [1] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Halsted Press, 1983.
- [2] M. Kiran, B. Said-Houari et M.N.Anwar, *Stabilty result for the Timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks*, Commun. Pure Appl. Anal, 2011.
- [3] Z.Liu et B.Rao, *Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 2009.
- [4] S.A.Messaoudi, M.Pokojovy et B.Said-Houari, *Nonlinear Damped Timoshenko systems with second sound : Global existence and exponential stability*, Math. Methods Appl. Sci, 2008.
- [5] S.A.Messaoudi et B.Said-Houari, *Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008.
- [6] J.E.Muñoz Rivera et R.Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems ?global existence and exponential stability*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002.
- [7] S.Nicaise, C.Pignotti, *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2006.
- [8] D.Ouchenane, *A stability result of a Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback*, Georgian Mathematical Journal, 2014.
- [9] C.A.Raposo, J.Ferreira, M.L.Santos et M.N.O.Castro, *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*, Applied Mathematics Letters, 2005.
- [10] K.Zennir, *Study of existence, nonexistence and asymptotic behavior of solutions of some nonlinear hyperbolic problems*, Décembre 2013.