REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERCITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHS ET INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en Mathématiques

Option : Mathématiques

Thème

Les Réductions des Formes Quadratiques.

Application à la loi de Gauss dans le plan.

Proposé et Encadré par :

Prof : A.Mokhtari.

Présenté par :

- **Kendouz Salma.**
- **Abdelouahab Hanane.**
- **Massaoudi Sabrina.**

N d'ordre :……2013-PFE/DGI

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste thèse.

Nos profonds remerciements à notre encadreur Mr Mokhtari Abdelkader, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat, qui a accepté de nous encadrer. Nous n'oublions plus particulièrement Mr.Belabbaci Youcef, ainsi qu'aux Mrs.Nouiri ; Benyettou Abderrahmane grâce à leur précieux conseil et leurs aide durant tout la période de nos études.

Nos remerciements vont également à Mr. Messelmi Mohamed, chef de département d'informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres ; sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat (Telidji Amar).

Enfin nos remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de notre objectif.

Dédicace

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes.

Nous souhaitons ici les en remercier.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement Prof : A.MOKHTARI qui nous a permis de bénéficier de son encadrement.

Les conseils qu'il nous a prodigué, la patience, la confiance qu'il nous a témoignés ont été déterminants dans la réalisation de notre travail de recherche.

Nos remerciements s'étendent également à tous nos enseignants durant les années des études.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Kendouz Salma.

Dédicace

Je tiens tout d'abord à remercier Allah le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi que la réussite de cette formidable année universitaire.

Mes profonds remerciements vont non seulement a mon encadrant Mr : MOKHTARI Abdelkader, qui a accepté d'encadrer mes études, mais encore à mes professeurs : Mr NOUIRI, Mr ABASSI, Mr BEN YETTOU, grâce à leur précieux conseil et leur aide, durant tout la période de mes études.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience et mon amie SALMA, je tiens à s'exprimer ma reconnaissance envers Mr MOKHTARI, qui a eu la gentillesse de lire et corriger ce mémoire.

En fin mes remerciements ne vont à toute personne, qui a contribué de près ou de lion à l'élaboration de ce travail.

ABDELOUAHAB Hanane

Dédicace

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Prof : A.MOKHTARI, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Messaoudi Sabrina.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Un chapitre de rappels, suivi d'un chapitre le plus importante des trois sur les réductions des formes quadratiques, et le troisième chapitre résume le chapitre II sous la forme d'application.

Chapitre I : *Définition et théorèmes importants.*

***Chapitre* II :** *est consacrée à l'étude des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques qui leur sont associées.et puis nous étudie les coniques et les réductions des formes quadratiques ; et dans cette partie nous allons voir comment nous pouvons donner une forme canonique de la forme quadratique et sa classification.*

Chapitre III : *Réduction des formes quadratiques et Applications.*

Chapitre I

Rappels.

1. Espace préhilbertiens:

Définition1.1:

On appelle *espace préhilbertien* un ensemble E muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et d'une forme hermitienne positive .on dit que E est un espace préhilbertien réel (resp complexe) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2. Espace hilbertien :

Définition2.1:

On appelle *espace hilbertien* (*ou espace de Hilbert*) un espace préhilbertien séparé et complet on dit qu'une norme sur un espace vectoriel E (sur $\mathbb{K}$)est hilbertienne si elle est préhilbertienne et si l'espace normé est complet.

Définition2.2:

On appelle *produit scalaire* sur H une forme hermitienne définie positive sur H.

Proposition2.3 :

Si $(.|.)$ est *un produit scalaire* sur H, l'application

$$\|.\| : \begin{array}{l} H \rightarrow [0\,,+\infty[\\ x \rightarrow \sqrt{(x|x)} \end{array} .$$

Proposition2.4 :* (*Inégalité de Cauchy -Schwarz) :

Si $(.|.)$ est une *forme hermitienne* positive sur H , on a pour tous $x,y \in H$

$$|(x|y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 .$$

L'inégalité ci-dessus dite inégalité de *Cauchy –Schwarz* est une égalité si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non tous deux nuls tel que $\|\alpha x + \beta y\|^2 = 0$.

Le théorème de Représentation de Riesz – Fréchet :

Le théorème de représentation de Riesz caractérise le dual topologique d'un espace de Hilbert : il montre comment on obtient toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert.

Théorème : Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$, une forme $\mathbb{K}$–linéaire continue sur un espace de *Hilbert*$(H: (.|.))$ .Alors il existe un unique vecteur $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $\varphi(y) = (y|x)$.De plus la norme de l'application linéaire φ vaut $\|\varphi\| = \|x\|$.

Démonstration :

Si φ = 0 on peut prendre x = 0 .Supposons φ≠0 et posons $\mathcal{K}$=*Ker* φ puisque φ est continue, $\mathcal{K}$ est un sous espace vectoriel fermé de *H*. De plus φ est surjective car non nulle donc *dim* $\mathcal{K}^{\perp}$ =*dim* $H/\mathcal{K}$= *dim* $\mathbb{K}$ =1.

Soit alors $x_0 \in \mathcal{K}^{\perp}$ tel que $\mathcal{K}^{\perp}$= $\mathbb{K}$ x_0 ; considérons la forme linéaire continue $(.|x_0)$ sur H .son noyau est $\{x_0\}^{\perp} = (\mathcal{K}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{K} = Ker$ φ .Donc φ et $(.|x_0)$ sont propositionnelle : il existe $\alpha \in \mathbb{K}/\{0\}$ tel que φ = α $(.|x_0)$ = $(.|\overline{\alpha}x_0)$. Montrons l'unicité d'un tel vecteur. Si *x*,x' vérifient $(.|x)$ = $(.|x')$ alors pour tout $y \in H$; $(y|x-x') = 0$,donc $x - x'$ = 0. Car $(.|.)$ est non dégénéré .Enfin d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $y \in H$. $|\varphi\,(y)| = |(y|x)| \le \|x\|\,\|y\|$ Avec égalité par exemple pour *y* = *x* donc $\|\varphi\| = \|x\|$.

3. orthogonalité :

Définition3.1 :

Soit *E* un espace préhilbertien réel de produit scalaire $(.|.)$:

◊ Deux vecteurs de *E* sont dit orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

◊ Une famille de vecteurs de *E* est dite orthogonale si le produit scalaire de deux vecteurs distincts quelconques de cette famille est nul.

◊ Une famille de vecteurs de *E* est dite orthonormée si elle est orthogonale et si tous les vecteurs de cette famille sont de norme 1.

♦ Base orthonormale :

Définition3.2 :

Soit *E* un espace de Hilbert ;$(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs est dite *orthonormée* si

$$(e_i|e_j) = 0 \; ; \; i \neq j.$$

Orthonormée si de plus$\|e_i\|$ = 1 ; ∀*i*∈*I.*

4. Espace vectoriel normé :

On désignera toujours par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$.

Définition4.1 :

Soit *E* un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ .on appelle norme sur *E* toute application :

$$\|.\| : \qquad E \to [0\,,+\infty[\; . \qquad \text{Telle que :}$$

1) $\forall\, x \in E$; $\|x\|$ *=0* ⇔ *x = 0.*

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ *;* $\forall x \in E$ *;* $\| \lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3) $\forall (x, y) \in E^2$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé *espace vectoriel normé*.

Operateur linéaire sur un espace normé 4.2:

Soient $(E, \| \quad \|_1)$ $et (F, \| \quad \|_2)$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$ et $T \in L_a(E, F)$.

Définition 4.2.1 :

L'operateur linéaire T est continue a $x_0 \in E$ si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tell que :

$$\|x - x_0\|_1 < \delta \rightarrow \|Tx - Tx_0\|_2 < \varepsilon.$$

Puisque la continuité de T peut être caractérisée par les suites, T est continue a x_0 si pour toute suite $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset E$. Tell que :

$$x_n \xrightarrow{\| \quad \|_1} x_0 \text{ ; On a } \; Tx_n \xrightarrow{\| \quad \|_2} Tx_0 \text{ .}$$

Définition 4.2.2 :

$T \in L_a(E, F)$ est borné s'il existe un nombre $M > 0$ tell que ;

$\|Tx\|_2 \leq \text{M} \|x\|_2$ pour tout $x \in E$.

5. Déterminant d'ordre n :

On appelle *déterminant d'ordre n* la fonction qui associe à toute matrice carrée d'ordre *n* son déterminant. Nous définissons cette fonction par récurrence sur *n* :

- le déterminant d'une matrice carrée $A = (a)$ d'ordre 1 est a;
- supposons que le déterminant d'ordre $n — 1$ ait été défini pour un entier n supérieur à 1 ; le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre *n* est alors le nombre

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}|A_{n1}| \text{ .}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| \text{ .}$$

Proposition. Propriétés du déterminant d'ordre n 5.1 *:*

Le déterminant d'ordre *n* jouit des propriétés suivantes:

(a) $det\,(a_1, \ldots, a_j + \alpha a_k, \ldots, a_n) = det(a_1, \ldots, a_j \ldots a_n)$ ($n > 1, j \neq k$) ou, plus généralement,
$det\,(a_1, \ldots, a_j + \sum_{k_{k \neq j}} \alpha_k a_k, \ldots, a_n) = det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$

(b) $det\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$ si et seulement si les vecteurs- colonnes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont Linéairement indépendants.

Si *A et B* sont des matrices carrées d'ordre n, alors :

(c) $|AB| = |A||B|$.

(d) $\left|{}^{t}A\right| = |A|$.

En d'autres termes, le déterminant du produit de deux matrices carrées du même ordre est égal au produit de leurs déterminants et le déterminant de la transposée d'une matrice carrée est égal au déterminant de cette matrice.
Il résulte aussitôt de *(c)* que :

$$|A^k| = |A|^k \ .$$

Pour tout entier positif *k*.

6. *Espaces affines euclidiens :*

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction *E*. On dit que $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien si *E* est un espace vectoriel euclidien.

7. Vecteur normal à un hyperplan :

Lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension finie non nulle, on appelle vecteur normal à un hyperplan $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{E}$ tout vecteur normal à la direction S de $\mathscr{Y}$ Ainsi, une droite Orthogonale à un hyperplan $\mathscr{Y}$ a pour vecteur directeur un vecteur normal à $\mathscr{Y}$.

8. Théorème. Diagonalisation des transformations symétriques :

Si une application linéaire φ de *E* dans *E* satisfait à l'une des trois conditions suivantes, alors elle satisfait aux deux autres.

(a) φ est une transformation symétrique.
(b) *E* admet une base constituée de vecteurs propres de φ orthogonaux deux à deux.
(c) φ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

9. *Diagonalisation des matrices symétriques :*

Soit A une matrice symétrique d'ordre *n*. En prenant pour φ l'application linéaire associée canoniquement à A, du théorème (8) nous déduisons les deux conclusions équivalentes suivantes:

(a) A admet n vecteurs propres orthogonaux deux à deux.
(b) il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale *D* telles que

$$D = {}^{t}PAP \quad ou \quad A = PD\,{}^{t}P \quad .$$

Chapitre II

Les Réductions Des Formes Quadratiques.

1. *Opérateur adjoint :*

Théorème 1.1 :

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique opérateur continue de H dans H .noté T^* et appelé l'adjoint de T tel que :

$$(T x, y) = (x, T^*y) \qquad \forall (x, y) \in H.$$

En autre, on a $(T^*)^*=T$ et $\| T^* \|= \| T \|= \| T^*T\|^{1/2}$.

Démonstration :

Pour tout y dans H l'application qui a x associe $(T x, y)$ et une forme linéaire continue sur H, dont la norme n'excède pas $\| T \| \| y \|$, en vertu de théorème de Représentation de Reisz. Il existe un unique $Z \in H$ tel que pour tout x dans H.

$$(T x, y) =(x, Z) \quad \text{et} \quad \| Z \| \leq \| Z \| \| y \|.$$

Posons :

$Z = T^*y$ on montre aussitôt, en fixant x que $y \longrightarrow T^*y$. est une application linéaire et $\| T^*y \|\leq \| T \| \| y \|$.

Donc $\| T^* \|\leq \| T \|$, l'opérateur $(T^*)^*$ est caractérise par la

Propriété 1.2:

- $(T^* x, y) = (x, (T *)^*y)$ pour $x, y \in H$.

Or

- $(T^* x, y) = \overline{(y,T^*x)} = \overline{(Ty,x)} = (x, Ty)$.

On en déduit immédiatement que $(T^*)^*= T$ et par suite $\| T^* \|=\| T \|$. De plus l'inégalité :

$\|Tx\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2 \qquad \forall (x, y) \in H.$

Montre que : $\|T\|^2\leq\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\|$ comme $\| T^*\|= \|T\|$, On a l'égalité $\|T^*T\|= \|T\|^2$.

Propriétés l'adjoint 1.3: soient T et L deux élément de $\mathcal{L}(H)$ on a :

(a) $(\lambda T+ \mu L)^*= \overline{\lambda}\, T^*+ \overline{\mu}\, T^*$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(b) $(T L)^*= T^*L^*$

(c) si T est inversible, T^* L'est aussi et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(d) $e^{T^*} = (e^T)^*$

Exemple1:

Considérons l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$ et $(e_1 \ldots\ldots, e_n)$ une base orthonormale pour $\mathbb{C}^n$ soit :

$$x \in \mathbb{C}^n: \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \, e_k$$

Et soit $A = (\alpha_{i\,j})$ une matrice d'ordre n sur$\mathbb{C}$, Alors l'application :

$$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad \text{donnée par :}$$

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \xi_j) e_k$$

Est un opérateur linéaire continue nous avons :

$$(Tx , y) = (\sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \xi_j) e_k, \sum_{i=1}^{n} n_i e_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \xi_j \overline{n_k} \ .$$

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{kj} \xi_j} n_k} = \overline{(y, Tx)} = \overline{(T^* y, x)} = (x, T^* y)$$

D'où

$$T^* y = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_{kj}} n_j e_k \ .$$

Et la matrice correspondant à T^* dans cette base est$\overline{(A\ )}^*$, i.e. La matrice complexe conjuguée et transposée de A.

Soit H est un espace de Hilbert séparable et soit (e_n) une base hilbertienne de H ; et on a tout élément A de $\mathcal{L}(H)$ est représenter par la matrice infinie (a_{ij}) avec $a_{ij} = (Ae_j, e_i)$; on peut voir de même que l'operateur adjoint A^* est représenter par la matrice (a_{ij}^*) donnée par

$$a_{ij}^* (A^* e_j, e_i) \text{ comme } (A^* e_j \ , e_i) = \overline{(A\ e_i, e_i)} = \overline{a_{ji}} \ .$$

On en déduit comme en dimension finie, que l'adjoint A^* est représenter par la matrice transposée conjuguée.

Théorème 1.4 :

Soit H un espace de Hilbert alors :

i) $T \in \mathcal{L}_o(H) \to T^* \in \mathcal{L}_o(H)$

ii) $T \in \mathcal{L}_c(H) \to T^* \in \mathcal{L}_c(H)$

Démonstration :

a) Soit $T \in \mathcal{L}_o(H)$ est soit $\{e_i \ ; i \in I\}$ une base orthonormée pour H .sans perdre la généralité nous pouvons supposer que ;

$TH = [e_{1,}\ldots\ldots,e_n]$ nous avons pour tout x et $y \in H$

$$(x,T^{*}y) = (Tx, y) = \sum_{k=1}^{n}(Tx,e_k)\ (e_k, y) = (Tx\ , \sum_{k=1}^{n}c_k(\mathrm{y})\ e_k)$$

$$= (x, T^{*}\,(\sum_{k=1}^{n}\overline{c_k(\mathrm{y})}\ e_k))$$

Donc : $T^{*}\mathrm{y} = T^{*}(\sum_{k=1}^{n}\overline{c_k(\mathrm{y})}e_k)$ et $T^{*} \in \mathcal{L}_{\circ}(H)$.

De même argument s'applique pour montrer $T^{*} \in \mathcal{L}_{\circ}(H) \Rightarrow T \in \mathcal{L}_{\circ}(H)$.

b) soit $T \in \mathcal{L}_{c}(H)$, alors il existe d'après (voir le rappelle) une suite $\{ T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(H) \cap \mathcal{L}_{\circ}(H)$ tell que $T_n \overset{\|\ \|}{\longrightarrow} T$. puis que $T_n^{*} \in \mathcal{L}(H) \cap \mathcal{L}_{\circ}(H)$ pour tout n$\in \mathbb{N}$ et $T_n^{*} \overset{\|\ \|}{\longrightarrow} T^{*}$

Nous avons $T^{*} \in \mathcal{L}_{c}(H)$ le même argument s'applique pour $T^{*} \in \mathcal{L}_{c}(H) \Rightarrow T \in \mathcal{L}_{c}(H)$.

Définition 1.5 :

Un opérateur $T\in \mathcal{L}(H)$ est dit auto adjoint (ou par fois hermitien) s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si quels que soient x et y dans H,

$$(Tx\ , y) = (x, Ty).$$

Exemple2 :

L'operateur T de l'exemple (1) est auto adjoint si pour la matrice A lui correspondant dans une base quelconque de $\mathbb{K}^n$.mais avons $\overline{A}=A^{*}$, c.à.d. la matrice A est hermitienne d'où la démonstration d'opérateur hermitien.

Introduction

La présente section est consacrée à l'étude des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques qui leur sont associées. Ces nouveaux objets jouent un rôle important aussi bien en algèbre linéaire qu'en géométrie. On les rencontre également en analyse, en physique et en statistique. Un des problèmes clefs de la théorie des formes bilinéaires symétriques est le problème de la réduction.

Dans cette section, *E* désignera un espace vectoriel initialement de dimension Quelconque et par la suite de dimension finie.

2. Forme bilinéaire et formes quadratique :

2.1Forme bilinéaire :

Une application f entre deux $\mathbb{R}$-espace vectoriels *E et F* est qualifiée d'application linéaire l'lorsqu'elle vérifié l'assertion suivant :

i. $\forall(x, y)\in E^2$; $\forall(\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$. $f(\lambda x+\mu y) =\lambda f(x)+ \mu f(y)$.

Le même principe, une application f << a deux variable >> de $E\times E$ *vers F*. est appelée application bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ces deux variables .plus précisément, on a la définition suivant

Définition 2.1.1:

Soient *E* et f deux $\mathbb{R}-$espace vectoriels ; l'application :

$$\varphi : E\times E \to F.$$

$$(x, y) \to \varphi (x, y) .$$

Est qualifiée d'application bilinéaire si :

$\forall(x, y, z)\in E^3$; $\forall(\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$

$$\varphi (\lambda x+\mu y, z) = \lambda \varphi (x, z) + \mu \varphi (y, z).$$

et $$\varphi (x, \lambda y+\mu z) = \lambda \varphi (x, y) + \mu \varphi (x, z).$$

Il découle de cette définition que si les vecteurs *x* et *y* s'expriment comme des combinaisons linéaire a coefficient réels d'éléments de E.ie : si $x=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $y=\sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j$ avec λ_i et μ_j des réels et x_i , y_j des éléments de E.

Alors on a :

$$\varphi (x, y) = \varphi (\textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i , y) =\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi (x_i , y) .$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, \varphi \, (x_i \, , \sum_{j=1}^{q} \mu_j \, y_j \,) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j \, \varphi \, (x_i, y_j)$$

Remarque 2.1.2. :

On appelle « forme » tout application définie sur un espace vectoriel qui a valeur dans le corps de base de cet espace vectoriel, ainsi une forme bilinéaire sur ℝ -espace vectoriel E est une application bilinéaire φ de $E\times E$ à valeur dans ℝ .

Dans ce chapitre le corps de base des espaces vectoriels est le corps des nombres réels ℝ. Signalons tout fois qu'une théorie similaire à celle que nous présentons dans ce chapitre existe pour des espaces vectoriels sur le corps déférent comme par exemple le corps des nombres complexes.

Exemple 2.1.3 :

Sur l'espace vectoriel $C([0,1] , \mathbb{R})$ des applications continues de [0,1] dans ℝ l'application φ :Φ([0,1], ℝ)× ([0,1], ℝ) → ℝ définie par :

$$\Phi \, (f, g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Est une forme bilinéaire ce résultat découle des propriétés de linéarités de l'intégrale.

Matrice d'une forme bilinéaire 2.1.4 :

Jusqu'à la fin de cette section nous supposerons que E de dimension finie non nuls n. Considérons une base quelconque $(e_1 \ldots\ldots, e_n)$ de E désignons les composantes des vecteurs x et y dans cette base respectivement par$x_1,\ldots, x_n$ et $y_1,\ldots, y_n$ soit φ une forme bilinéaire dans E d'après la définition bilinéaire :

$$\varphi(x, y)= \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) =\sum_{i=1}^{n} x_i \, \varphi \, (e_i, \, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i(\sum_{j=1}^{n} y_j \, \varphi \, (e_i \, ,e_j)=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i y_j.$$

Ou nous avons posé $\varphi(e_i \, ,e_j) = a_{ij.}$

On appelle la matrice carrée d'ordre n, $A=(a_{ij.})$ matrice de la forme bilinéaire φ est dans la base $(e_1 \ldots\ldots, e_n)$ lorsque φ représenter par le dernier membre, on appelle les nombres$a_{ij.}$ Coefficients de φ .

Il est évident que la matrice d'une forme bilinéaire dépend de la base choisie on outre cette matrice est symétrique si est seulement si la forme bilinéaire est symétrique.

à l'aide de la matrice A, l'égalité des deux membres extrême s'écrit plus simplement :

$$\varphi(x, y)= {}^t x_e A y_e.$$

• *Forme bilinéaire associe à une matrice :*

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on appelle forme bilinéaire associée canoniquement a A la forme bilinéaire φ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\varphi\ (x, y)= {}^{t}xAy\ .$$

• *Transformation de la matrice d'une forme bilinéaire par suite d'un changement de base :*

Soit φ une forme bilinéaire dans E, $(e_1\ldots\ldots,e_n)$ et $(e'_1,\ldots,e'_n)$ des bases de E ..A la matrice de φ dans la base $(e_1\ldots\ldots,e_n)$, et A' la matrice de φ dans la base $(e'_1,\ldots,e'_n)$ d'une part ;

$$\varphi\ (x, y)= {}^{t}x_eAy_e = (p_{ee'}x_{e'})\ A\ (p_{ee'}y_{e'})= {}^{t}x_{e'}({}^{t}p_{ee'}\ A\ p_{ee'})y_{e'}.$$

Et d'autre part $\varphi\ (x, y) = {}^{t}x_{e'}\mathrm{A}y_{e'}.$

Comme x et y sont des vecteurs quelconques cela entraine la relation :

$$A^t= {}^{t}p_{ee'}\mathrm{A}p_{ee'} \qquad (1^*)$$

Définition2.1.5 :

On appelle rang de l'application bilinéaire φ le rang de la matrice de φ dans une base quelconque de E.

2.2. Forme hermitienne :

Dans toute la suite, on désigne par $\mathbb{K}$ un corps qui est soit le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels soit le corps $\mathbb{C}$ des nombre complexe. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ on pose $\overline{\alpha} = \alpha$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\overline{\alpha}$ = le complexe conjugué de α si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .on désigne par H un espace vectoriel sur.

Définition2.2.1:

On appelle forme hermitienne sur H une application $\phi : H \times H \to \mathbb{K}$ qui vérifie, pour tous $x, y, z \in H$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

$$1)\ \phi\ (\alpha x + \beta y . z) = \alpha\phi\ (x . z) + \beta\phi\ (y . z). \qquad (2^*)$$

$$2)\ \phi\ (x . y) = \overline{\phi\ (y . x)}\ .$$

Une forme hermitienne est également appelée une forme sesquilinéaire remarquons tout de suite que ceci implique :

$\phi\,(x.\alpha y+\beta z)$ = $\overline{\alpha}\phi\,(x.y)$ + $\overline{\beta}\phi\,(x.z)$ pour tous $x, y\, z \in H$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; une forme hermitienne est donc par définition une forme bilinéaire symétrique sur H lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; ϕ est linéaire en son premier argument et anti linéaire en son second : en outre. Elle n'est pas symétrique, la définition ci-dessus entraine que $\phi\,(x.0) = 0$ pour tout $x \in H$ et $\phi\,(0.x) = 0$ pour tout $x \in H$, de plus $\phi\,(x.y) = 0$ si et seulement si $\phi\,(y.x) = 0$.

♦ Une forme hermitienne ϕ sur H est dit :

1. non dégénérée si son noyau *Ker* $\phi := \{y \in H\ ;\ \phi\,(x.y) = 0\}$ est réduit à 0.

2. positive si $\phi\,(x.x) \geq 0$ pour tout $x \in H$ **.**

3. définie positive si ϕ est positive et si $\phi\,(x.x) = 0$ implique *x= 0.*

En particulier, une forme hermitienne définie positive vérifie $\phi\,(x.x) > 0$ pour tout

$x \in H \setminus \{0\}$.

2.3. Forme quadratique associée à une forme bilinéaire :

Soit φ une forme bilinéaire dans E on appelle forme quadratique associée à φ l'application Q de E dans $\mathbb{R}$.

Par exemple **:**

(1) la forme quadratique associée au produit scalaire *(x , y)* → $(x|y)$ est l'application

$$x \to (x|x) = \|x\|^2 .$$

(2) La forme quadratique *(x, y)* → $2x_1y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_3$ est une forme bilinéaire dans $\mathbb{R}^3$

(3)La forme quadratique *(x, y)* → *det* (*x, y*) est une forme bilinéaire dans $\mathbb{R}^2$ (Antisymétrique) est l'application nulle.

Si φ est une forme bilinéaire symétrique dans *E* et *Q* la forme nulle quadratique qui lui associée alors pour tout couple *(x, y)* de vecteur de *E*.

$$\varphi\,(x, y) = \frac{1}{2}\,(Q\,(x+ y) - Q\,(x-y)). \qquad (3^*)$$

En effet :

$$Q\,(x+ y)= \varphi\,(x+ y\,,\, x +y)= \varphi\,(x, x)+2\,\varphi\,(x, x)+ \varphi\,(y, y)\ .$$

$$= Q\,(x)+2\,\varphi\,(x, y) + Q\,(y).$$

Ce que entraine la relation (3*)

La connaissance de Q permet ainsi de retrouver φ .on notera que cette reconstitution de φ a partir de Q n'est possible que si φ est symétrique. (Dans l'exemple (3), Q est nulle sans que φ le soit).

Remarque :

i) La forme quadratique Q associée à φ s'exprime donc sous la forme $Q = {}^{t}x_e A x_e$.
Si φ est symétrique on dit indifféremment que A est la matrice de la forme bilinéaire φ ou de la forme quadratique Q associée à φ.

Voici l'écriture explicite de Q (x) dans le cas ou A est symétrique et n= 2 ou 3.

n = 2 : $Q\,(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

n = 3 $Q\,(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$.

ii) on appelle forme quadratique associe canoniquement a A la forme quadratique associée a φ .

Forme quadratique définie non négative et définie positif 2.3.1:

Soit φ une forme symétrique dans E et Q la forme quadratique associée à , on dit que φ est définie non négative si $\varphi\,(x, x) = Q(x) \geq 0$ pour Tout vecteur x de E . On dit que φ est définie positif si $\varphi\,(x, x) = Q(x) > 0$. Pour tout vecteur non nul $x \in E$.

Matrice symétrique définie non négatives et définie positif 2.3.2:

On dit qu'une matrice symétrique A d'ordre n définie non négatif si la forme bilinéaire symétrique associée canoniquement à A est définie non négatives. Dire que A est définie non négative revient donc à dire que :

${}^{t}xAx \geq 0$ pour tout vecteur –colonne non nul $x \in \mathbb{R}^n$.

(${}^{t}xAx > 0$ pour tout vecteur –colonne non nul $x \in \mathbb{R}^n$) .

Si une forme bilinéaire symétrique φ dans E est définie non négative sa matrice dans toute base de E est définie non négative ; réciproquement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est définie non négative ; alors φ est définie non négative.

On remarquera que les termes diagonaux d'une matrice symétrique définie non négative ce sont en effet les valeurs que la forme quadratique associée canoniquement à cette attribue aux vecteurs de la base canonique.

La réciproque n'est toutefois vraie que pour les matrices diagonale si les termes diagonaux d'une telle matrice sont non négative cette matrice est définie non négative.

Proposition caractérisation de la positivité par les valeurs propres 2.3.3 :

Pour qu'une matrice symétrique *A* soit définie non négative il faut-il et il suffit que ses valeurs propres soient non négatives.

Démonstration :

Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de la forme quadratique associée canoniquement à *A* est la matrice *D* de (3^*) les termes diagonaux de *D* étant les valeurs propres de *A* répétées un nombre de fois égale à leur multiplicité, la proposition découle de la remarque figurant dans (2.3.2).

Voici maintenant un critère pratique permettant de reconnaitre les matrices symétriques définie positif sans l'aide de leurs valeurs propres nous appellerons mineurs principaux d'une matrice carrée A= (a_{ij}) les déterminants :

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \;;\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \;;\ldots\ldots\ldots|A| \quad . \qquad (4^*)$$

Proposition caractérisation de la positivité par les mineurs principaux 2.3.4:

Pour qu'une matrice symétrique *A* soit définie positive il faut et il suffit que ses mineurs principaux soient positifs.

Démonstration :

Supposons que *A*= (a_{ij}) soit définie positive et d'ordre *n* choisissons un entier *k* de $\{1.2, \ldots, n\}$ et posons :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \qquad (5^*)$$

Soit $\tilde{x}$ un vecteur-colonne non nul quelconque de$\mathbb{R}^n$, désignons par *x* le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$, dont les *k* premiers termes sont ceux de $\tilde{x}$ et les restant sont nuls par la réglé de multiplication par blocs nous voyons aussitôt que ${}^t\tilde{x}\tilde{A}\tilde{x} = {}^t xAx$.

Le second membre étant positif par hypothèse il s'ensuit que la matrice $\widetilde{A}$ est définie positive. Son déterminant est donc positif. Puis qu'il est le produit des valeurs propre (éventuellement répétées) de $\tilde{A}$ et que ces valeurs propres sont positives d'après la proposition (2.3.3)

L'assertion réciproque sera démontrée par récurrence sur l'ordre de *A*.

Lorsque cet ordre est 1, elle est évidente. Supposons qu'elle soit vraie pour tout matrice symétrique d'ordre n-1 et considérons une matrice symétrique d'ordre n, $A= (a_{ij})$ dont les mineurs principaux sont positifs posons :

$$a = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} & \mathrm{I}_{n-1} & & \vdots & -\widetilde{A^{-1}}\, a \\ & \cdots\ \cdots & & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 \ \cdots & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ou $\tilde{A}$ est la matrice définie par (5*) avec $k= n\text{-}1$ par la règle de multiplication par blocs nous voyons aisément que :

$$^{t}PAP = \begin{pmatrix} & & & \vdots & 0 \\ & & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 \\ \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \qquad (6^*)$$

Ou b est un nombre qu'il n'est pas nécessairement de préciser désignons la matrice du second membre par A' d'après (1*) la forme bilinéaire associée canoniquement a A exprimée dans la base de $\mathbb{R}^n$ constituée des colonnes de P a pour matrice A'.

Il suffit donc de démontrer que A' est définie positive grâce aux propriétés (a) et (b) de la proposition (*Rp 5.1*), au fait que $|P|$=1 et a (*Rp5.1*) nous déduisons de que$|A|=\left|\,^{t}PAP\right|=b|\widetilde{A}\,|$. Cela preuve que b est positif puisque $|A|$ et $|\widetilde{A}|$ sont positif par hypothèse.

Considérons maintenant un vecteur-colonne non nul quelconque x de$\mathbb{R}^n$et designons par $\tilde{x}$ le vecteur –colonne de $\mathbb{R}^{n-1}$obtenu en supprimant. le dernier terme x_n de x A l'aide de la règle de multiplication par blocs, nous voyons facilement que

$$^{t}xA'x = {}^{t}\tilde{x}\tilde{A}\tilde{x} + bx_n^2 \,.$$

Or, si $\tilde{x}$ n'est pas nul, $^{t}\tilde{x}\tilde{A}\tilde{x}$ est positif, puisque la matrice $\tilde{A}$ est définie positive, par hypothèse de récurrence. D'autre part, si $\tilde{x}$ est nul,x_n n'est pas nul et donc bx_n^2 est positif.

3. Réduction d'une forme bilinéaire symétrique (Forme quadratique) :

Réduire une forme quadratique Q signifie trouver une base dans laquelle la matrice de Q, est diagonale dans une telle base .on dit que la forme quadratique est réduite.

Soit Q une forme quadratique dans E. munissons E d'une base (e_1,...,e_n) arbitrairement choisie désignons par A. le matrice de Q dans cette base .d'après (*RP 8*), il existe une matrice orthogonale .P est une matrice diagonale D t.q ;

$$D = {}^tPAP. \qquad (7^*)$$

Rappelons qu'une telle matrice P. se forme en prenant comme colonnes n vecteurs propres de A. orthogonaux deux a deux et unitaires ; les termes diagonaux de D sont alors les valeurs propres correspondantes .posons pour j=1,2,……,n.

$$e'_j = P_{1j}e_1 + P_{2j}\, e_2 + \dots\dots\dots + P_{nj}\, e_n\,. \qquad (8^*)$$

Où

P_{1j} , p_{2j},……. ,p_{nj}. sont les termes de la j-éme colonne de P. la famille de vecteurs (e_1',e_2'...,e_n') est une base de E et la matrice de passage $P_{ee'}$est égale a P .En outre ,d'après (1*) la matrice de Q dans la base (e_1',e_2'…,e_n') est la matrice D de (7^*) .nous avons ainsi démontré qu'il existe toujours une base (e_1',e_2'…,e_n') de E dans laquelle la forme quadratique Q est réduite .dans cette base φ (x ,y) et $Q(x)$ s'écrivent sous la forme :

$$\varphi\,(x, y) = d_1\, x'_1 y'_1 + d_2 x'_2 y'_2 + \dots\dots\dots + d_n x'_n y'_n.$$

$$Q(x) = d_1 x'^2_1 + d_2 x'^2_2 + \dots\dots\dots + d_n\, x'^2_n.$$

Ou x'_1 , x'_2 ,..., x'_n et y_1', y_2',..., y'_n Sont les composantes respectives de x et de y et d_1 , d_2 ,…, d_n. Les termes diagonaux de la matrice (diagonale) de φ .

On notera que si E est euclidien et la base initiale (e_1,……,e_n) orthonormale la base (e'_1,e_2'…,e_n') définie ci-dessus est également orthonormale.

Exemple:

(1) Nous nous proposons de réduire la forme quadratique Q définie dans une base (e_1,……,e_n) de E par :

$$Q(x) = 7x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2+x_2x_3+5x_3^2\ .$$

La matrice de Q est :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Les racines de son polynôme caractéristique.

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3+18\lambda^2-99\lambda+162.$$

Sont 3.6 et 9.définissons la base $(e'_1, e'_2\ e'_3)$ par :

$(e'_1)_e$= 1/3$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vecteur propre unitaire de *A* associé à la valeur propre 3).

$(e'_2)_e$= 1/3$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (vecteur propre unitaire de *A* associé à la valeur propre 6).

$(e'_3)_e$= 1/3$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteur propre unitaire de *A* associé à la valeur propre 9).

Dans la base $(e'_1, e'_2\ e'_3)$ la forme quadratique Q est réduite :

$$Q(x)=3\,x'^2_1+6\,x'^2_2+9\,x'^2_3.$$

(2) la réduction d'une forme quadratique peut également être effectuée par la procédé complétion des carrés nous nous limiterons à traiter le cas où *n=2*. Supposons que a_{11} soit no nul alors :

$$Q(x) = a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1\,x_2+a_{22}\,x_2^2 = a_{11}\,(x_1^2+2\,\frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_1\,x_2) + a_{22}\,x_2^2\ .$$

$$= a_{11}\,(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2)^2 + \left(a_{22}-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2.$$

En posant $x'_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2$ et $x'_2 = x_2$ (ce qui revient a effectué un changement de base) nous voyons que :

$$Q(x) = d_1 x'^2_1 + d_2 x'^2_2\ .$$

Où $d_1 = a_{11}$ et $d_2 = a_{22} - \left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)$ .si a_{11} est nul et a_{22} n'est pas nul, il suffit d'échanger les rôles de ces deux termes, si tous les deux sont nuls en posant $x'_1 = x_1 + x_2$ et $x'_1 = x_1 - x_2$ nous voyons que Q(x) = $d_1 x'^2_1 + d_2 x'^2_2$ où $d_1 = -\,d_2 = \frac{1}{2}\ a_{12}$.

On remarquera qu'en général la forme réduit obtenue par le procédé de complétion des carrés n'a pas pour coefficient les valeurs propres de la matrice de la forme quadratique.

(3) nous allons calculer l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(-\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j)}\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (9^*)$$

Où $a_{ij} = a_{ji}$ Pour tout couple *(i, j)* d'indices, l'exposant est une forme quadratique que l'on peut réduire par un changement de base dont la matrice est orthogonal.

Soit P la matrice d'un tel changement de base, alors :

$$\sum\sum a_{ij}x_ix_j = d_1x'^2_1 + d_2x'^2_2 + \ldots + d_n\,x'^2_n \quad .$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Or la matrice Jacobienne de ce changement de base est évidemment

$$\left(\frac{dx_i}{dx'_j}\right) = \mathrm{P}.$$

L'intégral (9*) est donc égale a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\left(-d_1x'^2_1 - d_2x'^2_2 - \cdots - d_n\,x'^2_n\right)} |\mathrm{P}| dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n \, .$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\left(-d_1x'^2_1\right)} dx'_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{\left(-d_2x'^2_2\right)} dx'_2 \ldots\ldots\ldots \int_{\mathbb{R}^n} e^{\left(-d_nx'^2_n\right)} dx'_n \quad .$$

Il apparait ainsi clairement que cette intégral est finie si et seulement si les coefficients d_1, d_2,…., d_n sont tout positifs . Dans ce cas, sa valeur est :

$$\left(\frac{\pi}{d_1}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi}{d_2}\right)^{1/2}\cdots\left(\frac{\pi}{d_n}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^n}{d_1d_2 \ldots\ldots d_n}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^n}{|A|}\right)^{1/2}$$

Où A désigné la matrice (a_{ij}) (l'égalité $|A| = d_1d_2 \ldots\ldots d_n$ est due au fait que A est semblable à *diag* $(d_1d_2 \ldots\ldots d_n)$.

Réduction simultanée 3.1 :

Position du problème 3.1.1 :

Etant donné deux formes bilinéaire symétrique φ et ψ définies dans un espace vectoriel de dimension finie non nulle ; existe-il une base de cet espace dans laquelle les matrice de φ et de ψ sont diagonale ?

L'exemple simple suivant montre que la réponse à cette question est généralement négative. Lorsqu'elle est affirmative, on dit que φ et ψ peuvent être réduites simultanément.

Considérons les formes bilinéaires symétriques associées canoniquement aux matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après (1*) réduire simultanément ces deux formes revient à trouver une matrice de passage *P* de manière que ${}^tPAP$ *et* ${}^tPBP$ soient des matrices diagonales.

Supposons que P ait été trouvée et désignons ses termes par P_{ij} , Alors :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} p_{11}^2 - p_{21}^2 & p_{11}p_{12} - p_{21}p_{22} \\ p_{11}p_{12} - p_{21}p_{22} & p_{12}^2 - p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$${}^tPBP = \begin{pmatrix} 2p_{11}p_{21} & p_{11}p_{21} + p_{11}p_{22} \\ p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22} & 2p_{12}p_{22} \end{pmatrix}$$

Comme les deux seconds membres sont des matrices diagonales ;

$$p_{11}p_{12} - p_{21}p_{22} = 0.$$

$$p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22} = 0.$$

Où $$\begin{pmatrix} p_{11} & -p_{21} \\ p_{21} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Or, la matrice carrée de cette équation est inversible ; car son déterminant est égal au carré de la norme de la première colonne de *P*. les termes p_{12} et p_{22} devient donc être nuls ; ce qui impossible ; puisqu'ils constituent la deuxième colonne de P. il est ainsi prouver que les formes bilinéaires symétriques associée canoniquement aux matrices A et B ne peuvent pas être réduites simultanée.

Proposition. Réduction simultanée 3.1.2 :

Soit φ et ψ deux formes bilinéaire symétrique définies dans un espace vectoriel E de dimension finie non nulle, supposons que ψ soit définie positive, il existe alors une base de E dans laquelle φ et ψ sont réduites.

Démonstration :

Munissons E du produit scalaire ψ et choisissons une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de *E*. D'après ***(3)***, il existe une base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E dans laquelle φ est réduite. En outre ; cette base peut être choisie de telle manière que la matrice de passage $p_{ee'}$ soit orthogonale. Dans ce cas. La base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est encore orthonormale, autrement dit, la matrice de ψ dans cette base est la matrice –unité.

Calcule de la matrice de passage dans une réduction simultanée 3.1.3 :

Lorsque les formes bilinéaire φ et ψ de la proposition (3.1.2) sont données par leurs matrices *A et B* (dans une base de *E*) ; le calcul d'une matrice de passage *P* telle que :

$$ {}^{t}PAP = D \quad \text{(diagonale) et} \quad {}^{t}PBP = I \qquad (10^*) $$

Est assez laborieux ; c'est pourquoi allons démontrer une proposition fournissant une méthode pour l'effectuer plus aisément on appelle valeur propre de *(A, B)* tout nombre λ tel que $|A-\lambda B|=0$. Si λ est une valeur propre de *(A, B).* on appelle vecteur propre de *(A,B)* associée à cette valeur propre tout solution non nulle *X* de l'équation $(A-\lambda B)x = 0$ On notera si λ et μ sont des valeurs propres distinctes de *(A,B)* et *x* et *y* des vecteurs propres associée respectivement à ces valeurs propres, alors x et y sont orthogonaux pour le produit scalaire défini par B ,c'est - à – dire la forme bilinéaire associée canoniquement a B ,En effet

$$ \lambda\,{}^{t}xBy = {}^{t}(\lambda xB)\,y = {}^{t}(Ax)y = {}^{t}x(Ay) = {}^{t}x(\mu By) = \mu\,{}^{t}xBy\,. $$

Ce qui implique ${}^{t}xBy = 0.$

Proposition 3.1.4

Soit *A* une matrice symétrique et B une matrice symétrique définie positive. toutes deux d'ordre n .une matrice carrée P d'ordre n, vérifie les relation (10*) si et seulement si ses colonnes$p_1, p_2, \ldots, p_n$.sont des vecteurs propres de *(A,B)* et forment une famille orthonormale pour le produit scalaire défini par *B* .

Démonstration :

Commençons par. Relever qu'une matrice carrée *P* vérifie la relation ${}^{t}PBP = I$ si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormale pour le produit scalaire défini par *B* cela dit, considérons une matrice carrée *P* vérifiant cette relation .la relation ${}^{t}PAP=D$. s'écrit alors, de manière équivalente, sous la forme :

$$ {}^{t}PAP = {}^{t}PBPD. $$

Ou encore

$$ AP = BPD. $$

En égalent les colonnes respectives des deux membres de cette égalité nous concluons que ${}^{t}PAP = D$ si et seulement si :

$$ Ap_j = d_j BP_J \quad \text{ou encore} \quad (A - d_j B)P_J = 0 \qquad \text{pour } J=1,2,\ldots, n. $$

Où $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont les colonnes de P et $d_1, d_2, \dots, d_n$. Les termes diagonaux de D.

La proposition est ainsi démontrée.

4. Coniques et réduction des formes quadratiques :

Soit f un polynôme de degré 2.en les variables x et y c'est –a –dire ;

$$f(x, y) = rx^2 + 2txy + sy^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma . \qquad r,\ s,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R} .$$

Nous allons montrer que l'ensemble $c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$ est toujours une conique ; nous allons voir aussi comment en réduisant la forme quadratique $rx^2 + 2txy + sy^2$.

On retrouve facilement les paramètres de la conique et on particulier comment toujours trouver le « bon » repère.

Détermination de l'équation réduit d'un conique 4.1 :

La matrice de la forme quadratique $rx^2 + 2txy + sy^2$ est :

$$M = \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix} .$$

Elle est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormé, la matrice de changement de base P est donc une matrice de rotation est on a $M = PDP^{-1} = PD\ {}^tP$.notons $\lambda_1 \geq \lambda_2$ les valeurs propre (réelles) de M. Posons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme $rx^2 + 2txy + sy^2 = {}^tV.M.V$, on a, en posant $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = {}^tP. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $rx^2 + 2txy + sy^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_2^2$.

L'équation de (c) dans le nouveau repère est donc :

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2\alpha_1 x_1 + 2\beta_1 y_1 = \gamma_1 .$$

On note $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ les vecteurs propres (orthonormés) associée aux λ_i.

Si $\lambda_2 = 0$ alors $\lambda_1 > 0$ (car si non M étant diagonalisable elle serait nulle) .si $\beta_1 = 0$ la conique est dégénérée et réduite à une ou deux droit verticales si non posons $x_1 = X - \frac{\alpha_1}{\lambda_1}$ puis

$y_1 = y + \frac{\gamma_1 \lambda_1 + \alpha_1^2}{2\lambda_1 \beta_1}$; l'équation de la conique devient $\lambda_1 X^2 + 2\beta_1 Y^2 = 0$.

En posant p = - $\frac{\lambda_1}{4\beta_1}$ nous trouvons, enfin l'équation $Y^2 = 2pX$ et reconnaissons une parabole. Le centre Ω du nouveau repère a pour coordonnée $\Omega\left(\frac{-\alpha_1}{\lambda_1}, \frac{\gamma_1\lambda_1+\alpha_1^2}{2\lambda_1\beta_1}\right)$.

Supposons maintenant que $\lambda_2 \neq 0$ on introduit le point $\Omega\left(\frac{-\alpha_1}{\lambda_1}, \frac{-\alpha_2}{\lambda_2}\right)$ dans le repère orthonormé$(\Omega, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, l'équation de la conique prend la forme $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \breve{\gamma}$.

Le cas $\breve{\gamma} = 0$ est un cas dégénéré où la conique est vide ou intersection de deux droits si $\breve{\gamma} \neq 0$ alors il nous reste deux cas à étudier.

♦ $\lambda_1 et \lambda_2$ De même signe .si $\breve{\gamma}$ est de signe contraire, alors la courbe est vide (une somme de deux carrée ne peut pas être négative dans $\mathbb{R}$) si non posons $a := \sqrt{\frac{\breve{\gamma}}{\lambda_1}}$ et $b := \sqrt{\frac{\breve{\gamma}}{\lambda_2}}$

L'équation de la conique dans le nouveau repère devient $\frac{X^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} = 1$. Nous reconnaissons l'équation réduit d'une ellipse.

♦$\lambda_1 et \lambda_2$ De signes opposés. Le même raisonnement que ci-dessus montre que nous avons alors une hyperbole.

Etude d'une conique donnée par une forme quadratique 4.2 :

Un petit rappel :

Théorème : soit donnée une forme dans un espace $\mathbb{R}^n$ a n dimensions, rapporté a un système de coordonnées ($x_1, \dots, x_n$)de vecteurs unités $i^1, \dots, i^n$ $(x = \sum_{k=1}^{n} x_k i^k)$. il existe un système de coordonnées rectangulaires $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ de vecteurs unités $x^1, \dots, x^n$, formant une base orthogonale $(x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k i^k)$et un système de nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tels que la forme quadratique $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_k x_l$ $\quad (a_{kl} = a_{lk})$.

On la forme quadratique suivant :

$$r x_1^2 + 2t x_1 x_2 + s x_2^2 \qquad (1)$$

Pour réduire la forme (1) a une somme des carrés des coordonnées du vecteur (ξ_1, ξ_2) dans une base (x^1, x^2) il faut trouver les vecteurs unités de la base (x^1, x^2), c.à.d. les vecteurs propres de l'opérateur hermitien défini par la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix}.$$

Indiquons une méthode de recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de l'opérateur A,

Si λ_0 est une valeur propre de l'opérateur A et $x^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \neq 0$ le vecteur propre correspondant, alors

$$\mathrm{A}x^0 = \lambda_0 x^0$$

Cette équation s'écrit :

$$\begin{cases}(r-\lambda_0)x_1^{(0)} + tx_2^{(0)} = 0 \\ tx_1^{(0)} + (s-\lambda_0)x_2^{(0)} = 0\end{cases} \qquad (2)$$

Ou sous la forme opératorielle

$$(\mathrm{A} - \lambda_0 I)\, x^0 = 0 \qquad (2')$$

Où I est l'opérateur identique.

Donc le système homogène (2) ou $(2')$ est nul :

$$\begin{vmatrix}(r-\lambda_0) & t \\ t & (s-\lambda_0)\end{vmatrix} = |A-\lambda_0 I| = 0.$$

Par suite, la valeur propre λ_0 est racine de l'équation

$$|A-\lambda_0 I| = 0 \qquad (3)$$

Appelée équation caractéristique de l'opérateur *A* (ou de la forme quadratique (*Ax. x*))

La réciproque est vraie. Si λ_0 est racine de l'équation (3), alors la solution non triviale du système

$$(A - \lambda_0 I)\, x = 0 \qquad (4)$$

Sera vecteur propre de l'opérateur hermitien *A*.

Donc, les valeurs propres de l'opérateur *A* sont ici les racines de l'équation du second degré (3)

$$(r-\lambda)\,(s-\lambda) - t^2 = 0.$$

Ou encore

$$\lambda^2 - (r+s)\,\lambda + rs - t^2 = 0$$

Les racines de cette équation sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left[r + s + \sqrt{4t^2 + (r-s)^2}\right] \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[r + s - \sqrt{4t^2 + (r-s)^2}\right] \end{cases} \quad (5)$$

De (5) il résulte que les valeurs propres de l'opérateur (hermitien) A sont réelles.

Trouvons maintenant les vecteurs unités propres associés a $\lambda_1 et\ \lambda_2$ en tant que solution du système (4). Comme $|A - \lambda_1 I|$ = 0, on a

$$rang\ (A - \lambda_1 I) \leq 1$$

∗Si$\lambda_1 = \lambda_2$, la matrice A - $\lambda_1 I$ est entièrement composée de zéros ($\lambda_1 = \lambda_2$= *r = s,t=0)*et son rang est nul. Dans ce cas, la forme quadratique est déjà réduite a une somme de carrés (t =0).

Le système (4) est vérifié par tout vecteur (x_1, x_2).donc. Pour vecteurs propres on peut prendre les vecteurs unités du système de coordonnées x^1 = *i = (1,0),* x^2= *j = (0,1).*dans tout

Autre système orthonormal (x^1, x^2) la forme quadratique se réduit aussi a une somme de carrés.

∗Si $\lambda_1 > \lambda_2$, alors ou bien t ≠0 , ou bien $t = 0$,$r \neq s$,on peut ne pas traiter le deuxième cas ,puisque la forme (1) a déjà été réduite a une somme de carrés .Supposons donc que t ≠0 .

Alors

$$rang\ (A - \lambda_1 I) = 1.$$

Il suffit par conséquent de considérer une des équations du système (4) :

$$(r - \lambda_1)x_1 + tx_2 = 0.$$

D'où (puisque t ≠0)

$$x_2 = [(-r + \lambda_1)/t]x_1 .$$

Le vecteur

$$y^1 = \left(x_1, \frac{-r+\lambda_1}{t} x_1\right).$$

Est solution du système (4).En le normant on obtient le vecteur propre

$$x^1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \frac{y^1}{|y^1|} = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{1+\left(\frac{-r+\lambda_1}{t}\right)^2}} , \frac{\pm(\lambda_1 \ -r)}{t\sqrt{1+\left(\frac{-r+\lambda_1}{t}\right)^2}} \right).$$

Des transformations élémentaires nous donnent :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (r-s)/\sqrt{4t^2 + (r-s)^2}} \ . \\ x_1^{(1)} = \pm \frac{sgn\, t}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - (r-s)/\sqrt{4t^2 + (r-s)^2}} \ . \end{cases} \qquad (6)$$

Dans la suite il suffit de prendre le signe + dans les formules (6).on déterminent de façon analogue le vecteur propre x^2 associé à la valeur propreλ_2. Il se trouve que

$$x^2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (-x_2^{(1)}, x_1^{(1)}) \ .$$

Composons maintenant la matrice de l'opérateur (de la transformation orthogonal) A de passage de la base (i, j) a la base (x^1, x^2) :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ -x_2^{(1)} & x_1^{(1)} \end{pmatrix}.$$

(Les éléments des lignes sont les coordonnées des images des vecteurs unités i et j par A, c'est-à-dire que $x^1 = x_1^{(1)} i + x_2^{(1)} j$, $x^2 = -x_2^{(1)} i + x_1^{(1)} j$). Les coordonnées du vecteur (x_1, x_2) dans le système (i, j) sont reliée aux coordonnées (ξ_1, ξ_2) de ce vecteur dans le système (x^1, x^2) a l'aide des colonnes de la matrice A :

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} \xi_1 - x_2^{(1)} \xi_2 \ . \\ x_2 = x_2^{(1)} \xi_1 + x_1^{(1)} \xi_2 \ . \end{cases} \qquad (7)$$

En portant ces valeurs dans la forme quadratique (1) et en tenant compte des formules (5) et (6) on obtient

$$\mathrm{r} x_1^2 + 2\mathrm{t} x_1 x_2 + s\, x_2^2 = \lambda_1 {\xi_1}^2 + \lambda_2 {\xi_2}^2 \ . \qquad (8)$$

Le second membre de cette égalité s'appelle forme canonique de la forme quadratique (1)

Et d'après (4.2.1) on a :

- Si $\lambda_1 = 0$ on a une parabole.
- Si les valeurs propres sont de même signe on a une ellipse.

♦ Si les valeurs propres sont de signe opposé on a une hyperbole.

De (5) on voit que $\lambda_1\lambda_2$ = rs-t^2.donc, le type de la forme (1) peut être défini d'après le signe de l'expression rs-t^2.

La forme quadratique est elliptique, hyperbolique ou parabolique selon que l'expression rs-t^2 est positive, négative ou nulle.

Chapitre III

Application : loi normale multidimensionnelle.

Introduction

On appelle loi normale multidimensionnelle, ou loi de Gauss à plusieurs variables, une loi de probabilité qui est la généralisation multidimensionnelle de la loi normale.

1. *La loi gaussienne (Loi normale) :*

On dit que la variable aléatoire X est gaussienne de moyenne m et de variance δ^2. Si et seulement si elle admet la densité

$$f_{x}(X) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\delta^2}} \quad .$$

Théorème 1.1 :

Soit X un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^n$, non dégénéré c.à.d. de covariance $\sum_x$ inversible, soit m_x sa moyenne, un tel vecteur aléatoire admet la densité de probabilité

$$f_{x}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(det\Sigma_X)^{1/2}} \quad e^{-\frac{1}{2}(x-m_X)^T \Sigma_X^{-1} \ (x-m_X)}$$

D'autre part le vecteur

$$Y = A^{-1}(X-m_X).$$

Où A est une matrice carrée inversible tell que $\sum_X = AA^t$ est un vecteur gaussien standard c.à.d. dont les coordonnées sont des gaussiennes réduites indépendantes dans leur ensemble.

Théorème 1.2 :

Soit X un n vecteur aléatoire gaussien non généré dont la matrice de covariance est diagonale $\sum_x = diag\ \{\delta_1^2, \dots, \delta_n^2\}$.

Où δ_i^2 sont des nombres strictement positifs, alors les coordonnées X_i ($1 \leq i \leq n$) sont des variables gaussiennes indépendantes et de variance δ_i^2 ($1 \leq i \leq n$) respectivement.

2. *vecteur gaussien à deux dimensions (distribution normale bivariée ou loi normale multidimensionnelle)*

La distribution normale bidimensionnelle de la distribution statistique est une fonction de densité de probabilité :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\,\delta_1\delta_2\sqrt{1-\rho^2}} \quad e^{-\frac{1}{2(1-\rho 2)}\left(\left(\frac{x_1-m_1}{\delta 1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-m_1}{\delta 1}\right)\left(\frac{x_2-m_2}{\delta 2}\right) + \left(\frac{x_2-m_2}{\delta 2}\right)^2\right)} \quad (1.1.1)$$

Où

$$\rho = \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1 \delta_2}$$ .est le coefficient de corrélation de x_1 *et* x_2.

Voici un exemple avec matlab : $m = (0.2,\ 0.2)$ $\Sigma = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}$

```
% -------------  Densité de loi normale bidimensionnelle --------
mu = [.2 .2];
Sigma = [.3 0; 0 .3];
x1 = -4:.1:4; x2 = -4:.1:4;
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
F = mvnpdf([X1(:) X2(:)],mu,Sigma);
F = reshape(F,length(x2),length(x1));
surf(x1,x2,F);
caxis([min(F(:))-.5*range(F(:)),max(F(:))]);
axis([-3 3 -3 3 0 .4])
xlabel('x1'); ylabel('x2'); zlabel('Densité de probabilité');
```

Affichage :

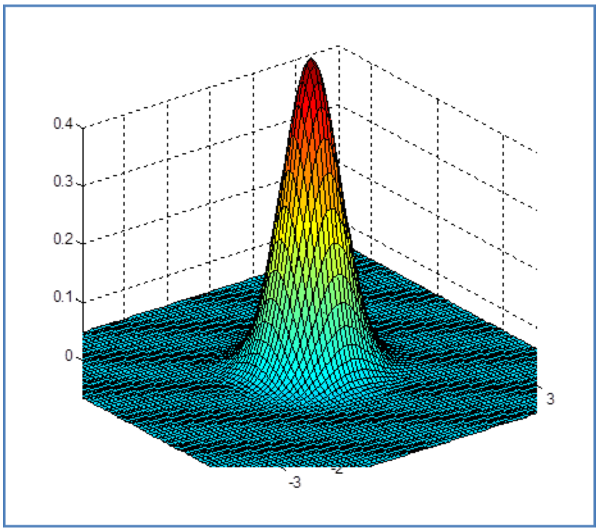

Figure 1 : exemple de Densité de probabilité d'une loi normale bivariée

Les probabilités marginales sont alors :

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\ dx_2 \quad = \frac{1}{\delta_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\ \frac{(x_1 - m_1)}{\delta^2{}_1}} \quad .$$

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\ dx_1 \quad = \frac{1}{\delta_2\ \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\ \frac{(x_2 - m_2)}{\delta^2{}_2}} \quad .$$

Soit donc $X = (x_1,x_2)$ un vecteur gaussien bidimensionnel de moyenne nulle et de matrice de covariance :

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} .$$

Note que $\delta_{12}=\delta_{21}$ on suppose que *det* $\sum_x = \delta^2_1\delta^2_2-\delta^2_{12} > 0$ .la matrice de covariance est donc inversible et son inverse est :

$$\sum_x^{-1} = (\delta^2_1\delta^2_2-\delta^2_{12})^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{21} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} .$$

D'où $$x^t \sum_x^{-1} x = \frac{\sigma_2^2 x_1^2 - 2\sigma_{21}x_1x_2 + \sigma_1^2 x_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{21}^2} = \frac{\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x_1 x_2}{\sigma_1\delta_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}}{1-\rho^2} .$$

Courbes de la densité de probabilité constante 2.1 :

∗*La fonction de densité de la loi normale bidimensionnelle :*

En peut s'écrire la fonction de densité sous la forme générale

$$f(x_1,x_2) = \mathrm{c}\ e^{\frac{-1}{2}E(x_1,x_2)} .$$

Où $$\mathrm{E}(x_1,x_2) = a_{20}\ (x_1\text{-}m_1)^2 + 2a_{11}\ (x_1\text{-}m_1)\,(x_2\text{-}m_2) + a_{02}\,(x_2 - m_2)^2 \qquad (1.2.1)$$

(1.2.1) est une forme quadratique générale a deux variables et contient cinq paramètres.

par simple calcul nous trouvons :

$\mathrm{c} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{a_{20}a_{02} - a_{11}^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{A}$. Où A c'est le déterminant de la matrice A= $det \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{02} \end{vmatrix}$

Et de plus on a :

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^2\ f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^2\ f_x\,(x_1)\,dx_1 = \frac{a_{02}}{A} = \sigma_1^2$$

$$\mu_{02} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - m_2)^2\ f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - m_2)^2\ f_x\,(x_2)\,dx_2 = \frac{a_{20}}{A} = \sigma_2^2$$

$$\mu_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2)\ f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = -\frac{a_{11}}{A} = \rho\sigma_1\sigma_2$$

$$a_{20} = \frac{\mu_{02}}{M},\quad a_{02} = \frac{\mu_{20}}{M},\quad a_{11} = -\frac{\mu_{11}}{M} \qquad (1.2.2)$$

Où *M* c'est le déterminant de la matrice :

$$\mathrm{M} = det\begin{vmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{vmatrix} = \frac{1}{A} .$$

∗*Ellipses de dispersion :(courbes de la fonction de densité constante)*

On a

$$\left(\left(\frac{x_1-m_1}{\delta_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-m_1}{\delta_1}\right)\left(\frac{x_2-m_2}{\delta_2}\right) + \left(\frac{x_2-m_2}{\delta_2}\right)^2\right) = c_i \qquad (1.2.3)$$

C’est l'équation de la famille d'ellipses concentriques homothétiques, c'est, d'une famille d'ellipses qui sont tous similaires, concentrique, et de même orientation.

donc pour transformer le system (1.2.3) dans un nouveau système de coordonnées u,v nous allons donc utiliser: :

1) la position du centre de gravité de la distribution; ses coordonnées m_1 ,m_2 définir l'origine du système de u,v.

2) l'orientation du système de coordonnées u , v préférentiel, c'est l’angle θ entre les axes u, v et les axes x, y sur lesquels se fonde la mesure des données .

3) La dispersion marginale $\sum_u$, $\sum_v$ de les coordonnées u, v.

Dans le système de coordonnées u.v. l'équation de l'ellipse de dispersion est :

$$\frac{u^2}{\Sigma_u^2} + \frac{v^2}{\Sigma_v^2} = 1 \qquad (1.2.4)$$

La nature du système de coordonnée préférentiel et des cinq paramètres m_1 ,m_2, θ,$\sum_u$, $\sum_v$ est la meilleure illustrée en ce qui concerne la surface de la fonction de densité de la distribution normale bivariate et à ses lignes de niveau elliptiques.

Puisque les ellipses de fréquence constante sont homothétiques, il est suffisant de décrire n'importe laquelle de ces ellipses. Après la coutume, nous avons choisi l'ellipse de dispersion prétendue qui a l'équation :

$$\mathrm{E}(x_1,x_2) = 1.$$

La détermination des orientations et des longueurs des axes principaux de l'ellipse de dispersion à partir de l'équation générale de l'ellipse de dispersion

$$a_{20}\,(x_1-m_1)^2 + 2a_{11}\,(x_1-m_1)\,(x_2-m_2) + a_{02}\,(x_2-m_2)^2 = 0 \qquad (1.2.5)$$

Est un problème de la géométrie analytique de section conique.

L'équation de transformation générale pour une rotation d'axes de coordonnée par l'angle θ et le changement d'origine au point m_1, m_2 est :

$$(x_1-m_1) = u\cos\theta - v\sin\theta \ . \qquad ; \qquad \begin{pmatrix} l = \cos\theta \\ m = \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$(x_2-m_2) = u\sin\theta + v\cos\theta \qquad ; \qquad l^2+m^2=1.$$

Quand nous appliquons une telle transformation à (1.2.5) l'équation de l'ellipse de dispersion dans le système u, v est :

$$b_{20}u^2 + 2b_{11}uv + b_{02}v^2 = 1.$$

Où

$$b_{20} = a_{20}\ l^2 + a_{02}\ m^2 + 2a_{11}\ lm$$

$$b_{02} = a_{20}\ m^2 + a_{02}\ l^2 - 2a_{11}\ lm \quad . \qquad (1.2.6)$$

$$b_{11} = -(a_{20} - a_{02})\ lm + a_{11}\ (l^2 - m^2).$$

Par simple calcul nous trouvons :

$$b_{20} + b_{02} = a_{20} + a_{02} \qquad (1.2.7)$$

$$b_{20}b_{02} - b_{11} = a_{20}\ a_{02} - a_{11}^2\ .$$

la deuxième de ces invariants on reconnaît que le déterminant de coefficient *A* utilisé dans l'évaluation de la constante *C*. puisque la valeur de *C* est indépendante de l'orientation de coordonnées des axes, la même chose doit être vraie pour *A*. de tous les systèmes de coordonnées u,v possibles, nous nous intéressons à celui pour lequel $b_{11} = 0$ de sorte que l'équation transformée de l'ellipse de dispersion devient:

$$b_{20}u^2 + b_{02}v^2 = 1.$$

Et est de la même forme que (1.2.4).le coefficient b_{20} et b_{02} sont donc liées aux semi-axes principaux de l'ellipse de dispersion par l'équation :

$$b_{20} = \frac{1}{\sum_u^2} \quad \text{et} \quad b_{02} = \frac{1}{\sum_v^2} \quad . \qquad (1.2.8)$$

Nous adopterons la convention qui $\sum_u > \sum_v$

Si l'on pose $b_{11} = 0$ l'équation des deux invariants (1.2.7) deviennent :

$$b_{20} + b_{02} = a_{20} + a_{02} \quad .$$

$$b_{20}b_{02} = a_{20}\ a_{02} - a_{11}^2 \quad .$$

Nous remplaçons maintenant le coefficient b_{20} et b_{02} par leur équivalent en termes de $\sum_u$et$\sum_v$. et le coefficienta_{20} , a_{02} , a_{11} par leurs équivalents (1.2.2) en fonction du moment $\mu_{20}, \mu_{02}, \mu_{11}$.

$$\frac{1}{\sum_u^2} + \frac{1}{\sum_v^2} = \frac{\mu_{02}}{M} + \frac{\mu_{20}}{M} = \frac{\mu_{02}+\mu_{20}}{M} \qquad (1.2.9)$$

$$\frac{1}{\sum_u^2}\frac{1}{\sum_v^2} = \frac{\mu_{02}\mu_{20}}{M^2} - \frac{\mu_{11}}{M^2} = \frac{1}{M} \quad (1.2.10)$$

Où le M représente le déterminant des moments $\mu_{02}\mu_{20}$ - μ_{11}^2 .

$\sum_u$, $\sum_v$ sont évidemment les deux racines de l'équation quadratique en $\sum^2$:

$$\frac{1}{(\sum^2)^2} - \frac{1}{\sum^2}\frac{\mu_{02}\mu_{20}}{M^2} + \frac{1}{M} = 0 \quad .$$

Qui est facilement réduit à :

$$(\sum^2)^2 - \mu_{02} + \mu_{20}\,(\sum^2) + \mu_{02}\mu_{20} - \mu_{11}^2 = 0.$$

Cette expression prend la forme particulièrement simple et pratique lorsqu'il est écrit comme un déterminant:

$$\begin{vmatrix} \mu_{20} - \sum^2 & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} - \sum^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2.11)$$

Cette équation dans$\sum^2$, dont deux racines sont $\sum_u^2$et$\sum_v^2$, sert pour déterminer les axes semi principaux de l'ellipse de dispersion$\sum_u, \sum_v$ du deuxième ordre des moments centraux dans le système de coordonnée de x_1, x_2.

Et comme résultat : (d'après (1.2.2) et (1.2.6))

$$\sum_v^2 = \mu_{02}\,l^2 + \mu_{20}\,m^2 - 2\mu_{11}\,lm\ .$$

$$= \delta_2^2\cos^2\theta + \delta_1^2\sin^2\theta - 2\,\rho\delta_1\delta_2\sin\theta\cos\theta\ .$$

Et

$$\sum_u^2 = \delta_2^2\sin^2\theta + \delta_1^2\cos^2\theta + 2\,\rho\delta_1\delta_2\sin\theta\cos\theta.$$

Nous avons près de trouver l'orientation du système de coordonnées *u,v* préférentielle qui permet de réduire à zéro le coefficient b_{11}, de la durée *u,v* transformé quadratique. La condition b_{11}=0 exige que les cosinus de direction *l,m* de l'axe *u* (en ce qui concerne le *x* et les axes *y*) satisfassent la deux équation

$$-\,(a_{20} - a_{02})lm + a_{11}\,(l^2 - m^2) = 0 \quad (1.2.12)$$

Le premier de cette équation tirée de la dernière équation (1.2.6) détermine le ratio *l/m*, que nous présentons comme un auxiliaire

$$Z= \frac{l}{m} = \cot\theta$$

Substituant z dans la première équation (1.2.12), nous obtenons l'équation quadratique

$$a_{11}\, z^2 - (\,a_{20} \;- a_{02}\,)\, z + a_{11} = 0.$$

Avec les racines :

$$z = \frac{1}{2a_{11}}\left[(a_{20} - a_{02}) \pm \sqrt{(a_{20} - a_{02})^2 + 4a_{11}^2}\right].$$

L'expression figurant sous le signe de la racine carrée peut être développé en termes de l'invariant (1.2.7)

$$(\,a_{20} \;- a_{02}\,)^2 + 4a_{11}{}^2 = (\,a_{20} \;+ a_{02}\,)^2 - 4\,(\,a_{20}\; a_{02} \;- a_{11}^2\,) \quad .$$

$$= (\,b_{20} \;+ b_{02}\,)^2 \; - \; 4 \; b_{20}\; b_{02} \; .$$

$$= (\,b_{20} \;- b_{02}\,)^2 \, .$$

$$z = \frac{(\,a_{20} \;- a_{02}\,) \pm (\,b_{20} \;- b_{02}\,)}{2\; a_{11}}$$

Si l'on ajoute au numérateur de la première équation de (1.2.7)

$$(\,a_{20} \;- a_{02}\,) - (\,b_{20} \;+ b_{02}\,) = 0.$$

Nous trouvons :

$$z_1 = \frac{a_{20} \; - \; b_{02}}{a_{11}} \quad . \qquad\qquad z_2 = \frac{a_{20} \; - \; b_{20}}{a_{11}} \quad .$$

Pour une utilisation pratique, nous voulons représenter z_1 et z_2 en fonction des momentsμ.

Et on a d'après (1.2.2) et (1.2.8) et (1.2.10) les résultats de z_1 et z_2 deviennent ainsi :

$$z_1 = \frac{\frac{\mu_{02}}{M} \quad - \quad \frac{1}{\Sigma_v^2}}{-\frac{\mu_{11}}{M^2}} \qquad\qquad z_2 = \frac{\frac{\mu_{02}}{M} \quad - \quad \frac{1}{\Sigma_u^2}}{-\frac{\mu_{11}}{M^2}} \, .$$

Et, puisque $M = \sum_u^2 \sum_v^2$ d'après (1.2.10) alors :

$$z_1 = -\,\frac{\mu_{02} - \Sigma_u^2}{\mu_{11}} \qquad\qquad z_2 = -\,\frac{\mu_{02} - \Sigma_v^2}{\mu_{11}} \, .$$

La symétrie de ces expressions, il est évident que z_1 désigne l'angleθ_u, entre l'axe *u* et l'axe des *x*. z_2 à l'angleθ_v, entre l'axe *v* et de l'axe *x*. Pour simplifier, nous allons considérer que l'axe *u* et désigner avec l'indice *u* toutes les quantités se référant à l'axe *u*.

$$z_u = \cot\theta_u = -\,\frac{\mu_{02} - \Sigma_u^2}{\mu_{11}} \qquad (1.2.13)$$

Alors on a $l_u = \cos \theta_u$, $m_u = \sin \theta_u$, sont trouvées à partir de z_u.

$$l_u = \pm \frac{z_u}{\sqrt{1+z_u^2}} \qquad\qquad m_u = \pm \frac{1}{\sqrt{1+z_u^2}}.$$

Dans un système de coordonnées u, v qui utilise les axes principaux de l'ellipse de dispersion comme axes de coordonnées de la fonction de la densité normale est de la forme simple :

$$\psi(u, v) = \frac{1}{2\pi\Sigma_u\Sigma_v} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\Sigma_u^2} + \frac{v^2}{\Sigma_v^2}\right)} .$$

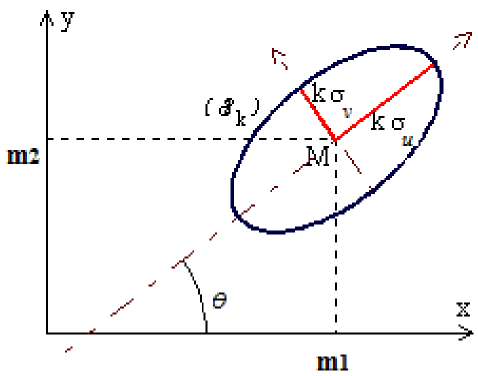

Figure 2 : des axes principaux de l'ellipse de dispersion.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous considérons un problème (les réductions des formes quadratiques) qui jouent un rôle très important dans l'algèbre linéaire.

Notre but est consacré à l'étude des formes bilinéaires et des formes quadratiques et comme application de la réduction des formes quadratiques sous forme canonique est la loi multidimensionnelle de Gauss.

Bibliographies

[T–W] Robert J. Trumpler and Harold F. Weaver. Statistical Astronomy .1935.chap:1.2;p:29-56 ,1953 .

[N–B] S. M. Nikolski, Y. Bougrov.Cours de mathématiques supérieures: calcul différentiel et intégral, éléments d'algèbre linéaire et de géométrie analytique, Volume 1. Editions de Moscou, 1983.

[BRE] Pierre Brémaud . Initiation aux Probabilités: et aux chaînes de Markov. 2éme Édition. p : 90-93 , Springer, 2009.

[BREM] Pierre Brèmaud . Introduction aux probabilités: modélisation des phénomènes aléatoires. Illustrée. p : 163-168, Springer 1984.

[SAP] Gilbert Saporta. Probabilités, analyse des données et statistique, p : 85-92, Editions TECHNIP, 2011.

[JOH] James L. Johnson. Probability and Statistics for Computer Science.

p :437-455 , John Wiley & Sons, 2011.

[CHE] Houcine Chebli. Analyse Hilbertienne. p : 126, UVT .

[MTW] Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen, Jacques-Arthur Weil. Mathématiques L2: Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés. p :53-66 Pearson Education, 2007.

[BOU] N. Bourbaki. Espaces vectoriels topologiques: Chapitres 1à 5, Partie 1 Éléments de mathématique, Éléments de mathématique. Springer, 2006.

[BOU] Corina Reischer, Marcel Lambert, Walter Hengartner.Introduction ā L'Analyse Fonctionnelle. PUQ, 1981.

[B–C] Stéphane Balac, Laurent Chupin. Cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple. PPUR presses polytechniques, 2008.