

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمّار تليدجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUCAT



كلية التكنولوجيا  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



## Thèse

Présentée pour obtenir le **Diplôme de Doctorat en Sciences**  
**Spécialité : Génie Mécanique**  
**Option : Energétique**

### Thème

**CONVECTION NATURELLE À DOUBLE DIFFUSION AVEC  
ET SANS CHAMP MAGNÉTIQUE**

Présentée par Mme. **Badia GHERNAOUT**

Soutenue le **15/01/2015**

#### Devant le Jury composé de :

Président : Mr. Mohamed SEBAA, Professeur à l'Université Amar Telidji de Laghouat.

Encadreur : Mr. Ahmed BENCHATTI, Professeur à l'Université Amar Telidji de Laghouat.

Co-Encadreur : Mr. Saïd BOUABDALLAH, Maître de Conférences à l'Université de Laghouat.

Examineurs : Mr. Brahim MADANI, Professeur à l'USTHB.

Mr. Elhacene MEZAACHE, Professeur à l'Université de Skikda.

Mr. Ahmed MEDJELLED, Professeur à l'Université de Laghouat.

Mr. Mebrouk AIT SAADA, Maître de Conférences à l'USTHB.

**Année Universitaire 2014/2015**

## Préface

La Thèse présentée est réalisée au niveau du *Laboratoire de Mécanique*, agréé récemment (en 2009), dans l'équipe : *Transferts Thermiques et Energies Renouvelables*, à l'Université de Laghouat. Quatre ans d'efforts énormes ont été fournis d'une façon continue pour la réussite de ce sujet de recherche. Un très grand nombre d'essais numériques et différentes situations du problème posé étaient nécessaires pour décrocher les lacunes numériques.

La Thèse présentée examine le problème de la convection naturelle à double diffusion d'un mélange binaire en présence et non du champ magnétique. Plusieurs variantes du problème sont examinées, telles que la nature du mélange (deux mélanges), le régime d'écoulement stationnaire (laminaire) ou oscillatoire, l'effet du rapport des forces de flottabilité  $N$  pour les deux mélanges. L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle à double diffusion en régime stationnaire et en régime oscillatoire a été discuté. Le seuil du régime oscillatoire, la stabilité magnétique de l'écoulement à double diffusion a été présenté par la dépendance du nombre de Rayleigh critique thermique et le nombre de Hartmann.

*B. GHERNAOUT*

## Résumé de la Thèse

# Convection Naturelle à Double Diffusion avec et sans Champ Magnétique

Dans cette Thèse, une étude numérique de la convection naturelle à double diffusion d'un mélange binaire contenu dans une cavité carrée a été réalisée. Un champ magnétique externe est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ), séparément. L'approche numérique de la résolution des équations de conservation est basée sur la méthode des volumes finis, l'Algorithme SIMPLER pour traiter le couplage vitesse-pression et l'Algorithme TDMA, pour la résolution des systèmes d'équations résultant de la discrétisation. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux des travaux numériques et expérimentaux de la littérature. L'étude a été présentée pour deux mélanges. Dans la première partie, nous avons étudié la convection à double diffusion pour un mélange binaire sans appliquer un champ magnétique. L'effet du rapport des forces de flottabilité ( $N$ ) sur la convection naturelle oscillatoire à double diffusion pour le cas des gradients opposants est présenté par la détermination du nombre de Rayleigh thermique critique et la fréquence d'oscillations de l'écoulement oscillatoire en fonction de  $N$ , pour l'intervalle ( $0 \leq N \leq 2$ ) valeurs inférieures et valeurs supérieures à l'équilibre de la flottabilité thermique-solutale valeur ( $N = 1$ ). Dans la deuxième partie, nous avons étudié un mélange binaire conducteur d'électricité utilisé pour la production des monocristaux. L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle à double diffusion en régime stationnaire et en régime oscillatoire a été présenté et discuté. Le seuil du régime oscillatoire est déterminé par le nombre de Rayleigh thermique critique correspond à chaque rapport des forces de flottabilité, ainsi que la fréquence des oscillatoires correspondantes. Les diagrammes de stabilité magnétique ( $Ra_{TCr}-Ha$ ), ( $Nu-Ha$ ), ( $Sh-Ha$ ) et ( $\psi_{max}-Ha$ ) sont déterminés, pour les deux orientations du champ magnétique : directions horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ) séparément, et pour un nombre de Hartmann allant de 0 à 100. Ces diagrammes montrent bien l'effet stabilisant du champ magnétique. Le champ magnétique vertical provoque la forte stabilisation magnétohydrodynamique. Les valeurs de ( $Ra_{TCr}$ ) augmentent vers des valeurs suffisamment élevées, ce qui ralentisse la transition de l'écoulement de la double diffusion vers l'instabilité et leurs conséquences néfastes sur la production des monocristaux.

**Mots clés** : Convection à Double Diffusion, Magnétohydrodynamique (MHD) - Stabilité - Méthode des Volumes Finis - Convection Naturelle – Mélange Binaire.

## Abstract of the Thesis

# Double Diffusive Natural Convection with and without Magnetic Field

In this thesis, a numerical study of double diffusive natural convection in binary mixture contained in a square cavity was performed. An external magnetic field is applied in both directions: horizontal ( $B_x$ ) and vertical ( $B_y$ ), separately. The numerical approach to solve the conservation equations was based on the finite volume method, the SIMPLER Algorithm, to clinch the velocity-pressure coupling and TDMA Algorithm for solving the resulting systems of equations of discretisation. The obtained results are in good agreement with those of numerical and experimental studies in the literature. The study is performed for two mixtures. In the first part, we have studied the double diffusive natural convection for a binary mixture without magnetic field. The effect of the buoyancy ratio forces ( $N$ ) on the oscillatory natural double diffusion convection in the case of opposing gradients is presented by determining of critical thermal Rayleigh number and the frequency of the oscillatory flow according the buoyancy ratio  $N$ , for studied interval ( $0 \leq N \leq 2$ ) values less than and values higher than the equal of the thermal and solutal buoyancy force ( $N = 1$ ). In the second part, we have studied a conducting electrically binary mixture used to produce the single crystals. The effect of magnetic field on double diffusive natural convection in steady and oscillatory state was presented and discussed. The onset of the oscillatory flow is determined by the critical thermal Rayleigh number for each buoyancy ration, also the corresponding oscillatory frequency. Magnetic stability diagram ( $Ra_{TCr}-Ha$ ), ( $Nu-Ha$ ), ( $Sh-Ha$ ) and ( $\psi_{max}-Ha$ ) are determined, for both horizontal ( $B_x$ ) and vertical ( $B_y$ ) magnetic field, separately and for Hartmann number ranging from 0 to 100. This diagram shows the stability effect of magnetic field and that the vertical magnetic field provide a strong magnetohydrodynamic stability, and the increasing the value  $Ra_{Cr}$  to high sufficiently values, which slows the transition of double diffusive natural convection to instability and their adverse effects in single crystals production.

**Keywords:** Convection Double Diffusion, Magnetohydrodynamics (MHD) - Stability – Finite Volume Method - Natural Convection- Binary Mixture.

## ملخص الأطروحة

### الحمل الطبيعي ثنائي الانتشار مع ودون حقل مغناطيسي

في هذه الأطروحة، دراسة عددية للحمل الحراري الطبيعي مزدوج الانتشار لخليط مزدوج محتوى داخل تجويف مربع قد قدمت. الحقل المغناطيسي الخارجي المطبق موجه في كلا الاتجاهين: الأفقي (Bx) والعمودي (By) بشكل منفصل. التقريب العددي لحل معادلات الانحفاظ يعتمد على طريقة الحجوم المنتهية، خوارزمية سيمبلر (SEMPLE) لفك الازدواج ضغط-سرعة وخوارزمية التيدياما (TDMA) لحل جمل المعدلات الناتجة عن التجزئة. النتائج المحصل عليها في اتفاق جيد مع نتائج التقريبات العددية والنتائج التجريبية. الدراسة قدمت من اجل خليطين. في الجزء الأول، درسنا الحمل الحراري ثنائي الانتشار لخليط مزدوج مفعول نسبة قوى الطفو على الحمل الطبيعي الاهتزازي ثنائي الانتشار للتدرج المتعاكس قد قدم عن طريق استخراج عدد رايلي الحراري الحرج و تردد الاهتزازات للتدفق الاهتزازي بدلالة النسبة  $N$ ، وهذا في المجال  $(0 \leq N \leq 2)$  : قيم اقل من التكافؤ للطفو الحراري-الانحلاي، قيمة التكافؤ لقوى الطفو  $(N = 1)$ ، قيم اكبر من تكافؤ الطفو حراري/انحلاي. في الجزء الثاني، درسنا خليط مزدوج ناقل للكهرباء مستعمل لإنتاج أحادي البلورات. تأثير الحقل المغناطيسي على الحمل الطبيعي ثنائي الانتشار في النظام المستقر والنظام الاهتزازي قد قدم ونوقش. بداية النظام الاهتزازي استخراج عن طريق عدد رايلي الحراري الحرج الموافق لكل نسبة من قوى الطفو، أيضا التردد الموافق للاهتزازات. منحنيات الإخماد المغناطيسي  $(Sh-Ha)$ ،  $(Nu-Ha)$ ،  $(Ra_{TCr}-Ha)$  و  $(\psi_{max}-Ha)$  قد استخراجت لكلا توجيهات الحقل المغناطيسي : توجيه أفقي (Bx) وتوجيه عمودي (By) كل على حدا وذلك من اجل عدد هارتمان يتراوح بين 0 و 100. هذه المنحنيات تبرهن جيدا المعول الاخمادي للحقل المغناطيسي، وان الحقل المغناطيسي العمودي يحرض على الإخماد المغناطيسي القوي و أن قيمة  $Ra_{TCr}$  ترتفع نحو قيم نوعا ما عظمى وهذا يثبط المرور إلى سيلان ثنائي الانتشار نحو ألالاستقرار ونتائجه الوخيمة على إنتاج أحادي البلورات.

**الكلمات المفتاحية :** الحمل ثنائي الانتشار، المغناطيسية (MHD) - الاخماد - طريقة الحجم المنتهية - الحمل الطبيعي - خليط مزدوج.

## *Remerciements*

Je remercie vivement Monsieur Ahmed BENCHATTI, Professeur et Directeur du Laboratoire de Mécanique à l'Université de Laghouat, Encadreur de cette Thèse de Doctorat, pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa disponibilité permanente, pour son aide et son soutien permanents.

Je tiens vivement à remercier et exprimer ma profonde reconnaissance au Docteur Saïd BOUABDALLAH, Maître de Conférences à l'Université de Laghouat, Co-encadreur de cette Thèse pour sa patience, pour ses conseils, pour sa majeure contribution dans l'orientation de mes recherches.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Mohamed SEBAA, Professeur à l'Université de Laghouat, d'avoir participé à ce Jury, en tant que Président. Je lui exprime mes plus hauts respects.

Je remercie vivement Monsieur Elhacene MEZAACHE, Professeur à l'Université de Skikda, Monsieur Brahim MADANI, Professeur à l'USTHB, Monsieur Ahmed MEDJELLED, Maître de Conférences à l'Université de Laghouat, et Monsieur Mebrouk AIT SAADA, Maître de Conférences à l'USTHB, d'avoir accepté d'être les examinateurs de cette Thèse. Je leur exprime toute ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce travail et pour leurs appréciations.

Je ne saurais finir sans remercier mon frère, Docteur Djamel GHERNAOUT, Maître de Conférences à l'Université de Blida, pour le soutien inconditionnel qu'il m'a accordé durant ces longues années d'étude.

Je réserve mes mercis les plus profonds aux membres de ma famille. J'ai une grande dette auprès de mon cher père : Salah, de ma chère mère Khadidja ATCHI, de mes frères et de mes sœurs, pour leur amour, leur attachement et leur appui indéfectible lors de mon long voyage d'étude. Ils ont tellement fait pour m'aider, et les mots ne peuvent pas exprimer toute ma gratitude. Je leur suis reconnaissante de leurs amours et de leurs encouragements aux parents de mon mari.

Particulièrement, je remercie mon mari Saïd BOUABDALLAH, pour le partage avec moi de tous les moments difficiles et passionnants de ma vie, de tout son amour, de son appui et de sa foi en moi.

Je remercie tous les enseignants du Département de Génie Mécanique et de la Faculté de Technologie, et tout le personnel administratif avec qui j'ai eu le plaisir de travailler.



A

*Mes Parents*

*Mon Mari*

*Mes Frères*

*Mes sœurs*

*Ma famille.*

## SOMMAIRE

PREFACE.....	i
RESUME FRANÇAIS.....	ii
ABSTRAT.....	iii
RESUME ARABE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
DEDICACE.....	vi
SOMMAIRE.....	vii
LISTE DES FIGURES.....	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xv
NOMENCLATURE.....	xvi
<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : Revue Bibliographique; Convection Naturelle à Double Diffusion sans et avec Champ Magnétique.....</b>	<b>3</b>
<b>CHAPITRE II : Problème Physique et Formulation Mathématique.....</b>	<b>21</b>
1. Introduction.....	21
2. Problème physique.....	21
3. Equations générales de transport.....	22
3.1 Equation de continuité.....	22
3.2 Equation de quantité de mouvement.....	22
3.3 Equation de l'énergie.....	23
3.4 Equation de conservation des espèces.....	24
4. Hypothèses simplificatrices.....	26
5. Ecoulement avec champ magnétique.....	27
6. Formulation des équations de transport du problème physique étudié.....	28
7. Equations du problème sous forme adimensionnelle.....	29
8. Conditions initiales et aux limites.....	31
8.1 Conditions initiales.....	31
8.2 Conditions aux limites hydrodynamiques.....	32
8.3 Conditions aux limites thermiques et solutales.....	32
9. Transfert thermique et massique.....	33
10. Conclusion du chapitre II.....	34
<b>CHAPITRE III : Méthode Numérique &amp; Organigramme de Résolution.....</b>	<b>35</b>
1. Introduction.....	35
2. Maillage.....	35
3. Stockage des variables.....	36
4. Forme générale de l'équation de transport.....	38
5. Discrétisation des équations.....	39
5.1.Intégration l'équation générale de transport.....	39
5.2.Différents schémas de discrétisation.....	41

5.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X.....	42
5.4. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y .....	43
5.5. Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	44
5.6. Discrétisation de l'équation de concentration.....	44
6. Algorithme SIMPLER.....	45
7. Méthode de résolution.....	46
7.1. Méthode de balayage.....	46
7.2. Méthode de TDMA (Algorithme de Thomas).....	47
8. Critère de convergence.....	49
9. Organigramme de résolution.....	50
10. Conclusion du chapitre III.....	51
<b>CHAPITRE IV : Convection Naturelle à Double Diffusion dans un Mélange Binaire... 52</b>	
1. Présentation des résultats .....	52
2. Effet du maillage sur les solutions numériques.....	55
3. Validation du code de calculs.....	58
4. Convection naturelle à double diffusion dans un mélange binaire.....	62
4.1 Convection naturelle à double diffusion en régime laminaire.....	62
4.1.1 Naissance de la convection à double diffusion.....	62
4.1.2 Champ d'écoulement.....	66
4.1.3 Effet du rapport de flottabilité .....	71
4.2 Convection naturelle à double diffusion en régime oscillatoire.....	75
4.2.1 Evolution temporelle des paramètres de l'écoulement.....	75
4.2.2 Portrait de phase.....	82
4.2.3 Spectre d'énergie et fréquences des oscillations.....	84
4.2.4 Champ d'écoulement en régime oscillatoire.....	85
5. Conclusion du chapitre IV .....	91
<b>CHAPITRE V : Convection à Double Diffusion sous l'Effet du Champ Magnétique.....92</b>	
1. Intérêt d'application du champ magnétique.....	92
2. Ecoulement stationnaire sans champ magnétique.....	93
3. Ecoulement stationnaire en présence du champ magnétique.....	98
3.1 Champ d'écoulement.....	98
3.2 Taux de transfert de chaleur et de masse.....	107
4. Effet du champ magnétique en régime oscillatoire.....	109
4.1 Effet de l'intensité et d'orientation de champ magnétique .....	109
4.2 Taux de transfert de chaleur et de masse en présence du champ magnétique.....	119
5. Effet du champ magnétique associé à l'effet de (N).....	121
6. Diagrammes de stabilité magnétique.....	131
7. Conclusion du chapitre V.....	134
<b>Conclusion Générale.....135</b>	
<b>Références Bibliographiques.....137</b>	

## Liste des Figures

<i>Figure I.1. Représentation du dispositif expérimental du Han et Kuehn (1991)</i> .....	4
<i>Figure I.2. Représentation schématique du problème étudié par : Zhou et Zebib, (1994)</i> .....	8
<i>Figure I.3. Schémas du problème étudié avec un gradient horizontal de température et un gradient vertical de concentration : Bennacer et al. (2001)</i> .....	9
<i>Figure I.4. Problème physique examiné par Bouabdallah et Bessaih (2012)</i> .....	11
<i>Figure I.5. Schéma de la méthode de diffusion en phase liquide épitaxie (Liquid Phase Electroepitaxy, LPEE) cavité de croissance (Dost et al, 2002)</i> .....	13
<i>Figure I.6. Système spiral d'un champ magnétique glissant installé sur une cavité de congélation à gradient vertical (VGF) dans la croissance cristalline (Galindo et al., 2007) (a) Schéma spiral auteur d'une cavité cylindrique (b)</i> .....	17
<i>Figure II.1. Géométrie du problème physique. Notons que <math>B_x</math> et <math>B_y</math> sont respectivement deux champs magnétiques orientés suivants les directions <math>x</math> et <math>y</math> ; et <math>B_0</math> leur résultante</i> .....	21
<i>Figure II.2. Conditions aux limites dans le cas des gradients coopérants</i> .....	32
<i>Figure II.3. Conditions aux limites dans le cas des gradients opposants</i> .....	33
<i>Figure III.1. Volume de contrôle associé à la variable générale de transport</i> .....	36
<i>Figure III.2. Stockage des variables scalaires et les quantités vectorielles</i> .....	36
<i>Figure III.3. Volume de contrôle décalé vers la droite</i> .....	37
<i>Figure III.4. Volume de Contrôle décalé vers le haut</i> .....	37
<i>Figure III.5. Algorithme de calcul</i> .....	50
<i>Figure IV.1. Schéma présentant les positions locales des nœuds dans les calculs numériques</i> .....	55
<i>Figure IV.2. Influence du nombre de nœuds sur le nombre de Nusselt moyen, <math>N=1.25</math> ; <math>Pr = 10</math> et <math>Le = 10</math></i> .....	57
<i>Figure IV.3. Influence du nombre de nœuds sur le nombre de Sherwood moyen, <math>N = 1.25</math>, <math>Pr = 10</math> et <math>Le = 10</math></i> .....	57
<i>Figure IV.4. Nombre de Nusselt et de Sherwood en fonction du rapport des forces de flottabilité <math>N</math>, pour <math>Ra_T = 10^5</math> : comparaison de nos résultats avec ceux de Sezai et Mohamed (2000)</i> .....	59
<i>Figure IV.5. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Chamkha et Al-Naser (2002) : isothermes, (b) iso- concentrations, (c) lignes de courant pour <math>Le = 2</math>, <math>N = 0,8</math>, <math>Pr = 1</math>, <math>Ra_T = 10^5</math>, <math>\gamma = 0</math> et <math>Ha = 50</math></i> .....	60
<i>Figure IV.6. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Chamkha et Al-Naser (2002) : isothermes (a), iso- concentrations (b), lignes de courant (c) pour <math>Le = 2</math>, <math>N = 0,8</math>, <math>Pr = 1</math>, <math>\gamma = 0</math>, <math>Ra_T = 10^5</math> et <math>Ha = 10</math></i> .....	61

*Figure IV. 7. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Han et Kuehn (1991). Profil de la température à  $X = Y/H$  (a), et de la concentration à  $X = Y/H$  (b) :  $A = H/L = 4$ ,  $Pr = 8$ ,  $Sc = 2000$ ,  $Gr_T = 4 \times 10^5$  et  $Gr_S = 3 \times 10^6$ .....62*

*Figure IV.8. Naissance de convection double diffusive pour les trois cas : (a)  $N = 1$  (équilibre des forces d'origine thermiques et celles d'origine solutales), (b)  $N = 0.25$  (dominance des forces d'origine thermiques) et, (c)  $N = 1.75$  (dominance des forces d'origine solutales).....65*

*Figure IV.9. Evolution temporelle de la composante de vitesse verticale pour différents nombres de Rayleigh  $Ra_T$ :  $10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$  (régime laminaire), et pour  $N = 1.75$  à la sonde  $S_2$ .....67*

*Figure IV.10. Evolution temporelle de la température adimensionnelle pour différents nombres de Rayleigh  $Ra_T$ :  $10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$  (régime laminaire), et pour  $N = 1.75$  à la sonde  $S_2$ .....67*

*Figure IV.11. Variation de la vitesse Horizontale adimensionnelle  $U$  au centre de la cavité  $X = 0.5$  pour les trois nombre de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^4$ , pour  $N=1.75$  en régime laminaire.....68*

*Figure IV.12. Variation de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité  $Y = 0.5$ , pour les trois nombre de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$ , pour  $N = 1.75$  en régime laminaire.....68*

*Figure IV.13. Structure de l'écoulement pour différents nombres de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , en régime laminaire, et pour  $N = 1.75$ .....70*

*Figure IV.14. Structure de l'écoulement pour différents valeurs du rapport de flottabilité  $N$   $Ra_T = 10^5$ , en régime laminaire.....72*

*Figure IV.15. Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood en fonction du rapport des forces de flottabilité  $N$ , pour  $Ra_T = 10^5$ .....75*

*Figure IV.16a. Evolution temporelle de la composante de vitesse verticale adimensionnelle au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ ).....77*

*Figure IV.16b. Evolution temporelle de la température adimensionnelle,  $\theta$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ ).....77*

*Figure IV.16c. Evolution temporelle de la composante de vitesse horizontale adimensionnelle,  $U$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ )....78*

*Figure IV.16d. Evolution temporelle de la concentration adimensionnelle,  $W$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ ).....78*

*Figure IV.17a. Evolution temporelle de la composante de vitesse verticale adimensionnelle, en différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_5$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ ).....80*

*Figure IV.17b. Evolution temporelle de la composante de vitesse horizontale adimensionnelle, en différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_4$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ ).....80*

*Figure IV.17c.* Evolution temporelle de la température adimensionnelle, en différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1, S_2, S_4$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5, N = 1.25$ )..... 81

*Figure IV.17d.* Evolution temporelle de la concentration adimensionnelle, en différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1, S_2$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5, N = 1.25$ )..... 81

*Figure IV.18.* Portrait de température en fonction de concentration (gauche), Portrait de  $V$  en fonction de  $U$ (droite) pour un écoulement de double diffusion oscillatoire à la sonde  $S_3$  pour  $N = 1.25$  et  $Ra_T$  inférieur et supérieur du  $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ..... 83

*Figure IV.19.* Spectre d'énergie obtenu par la transformée Rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle la concentration adimensionnelle au point  $S_1$ , pour  $Ra_{TCr} = 1.505 \times 10^6$  et  $N = 2$   
 $Fr_{Cr} = 24.41$  représente la fréquence critique dominante adimensionnelle..... 84

*Figure IV.20.* Lignes de courant (droite), lignes isothermes (centre) et lignes iso concentrations (gauche), en régime oscillatoire  $Ra_{TCr}$  correspondant à  $N$  ( $N = 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1.25, 1.50, 1.75$  et  $2$ ), et au temps adimensionnel,  $\tau = 5$ ..... 86

*Figure IV.21.* Nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en régime oscillatoire et la fréquence correspondante à chaque cas en fonction du rapport des forces de flottabilité  $N$ ..... 88

*Figure IV.22.* Profils de la composante de vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  (a) et verticale adimensionnelle  $V$  (b) au centre de la cavité, pour différent rapport des forces de flottabilité  $N$  et pour  $Ra_{TCr}$  correspondant..... 89

*Figure IV.23* Evolutions temporelles de la composante de vitesse  $V$  au point 2 pour une période de temps ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$  et  $N = 1.25$ )..... 90

*Figure V.1.* Structure de l'écoulement : lignes isothermes (a), lignes de courant (b) et lignes iso concentration (c) en régime laminaire, pour  $N = 0.75$ , et pour différents nombre de Rayleigh thermique..... 94

*Figure V.2.* Profils de la composante de vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  au centre de la cavité  $X = 0.5$  entre les deux parois horizontales, pour les trois nombre de Rayleigh  $Ra_T = 1 \times 10^4, 5 \times 10^4$  et  $7 \times 10^4$ , pour  $N = 0.75, Ha = 0$  ..... 96

*Figure V.3* Profils de la composante de vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0.5$  entre les deux parois verticales, pour les trois nombre de Rayleigh  $Ra_T = 10^4, 5 \times 10^4$  et  $7 \times 10^4$ , pour  $N = 0.75, Ha = 0$  ..... 96

*Figure V.4.* Evolution temporelles du nombre de Nusselt et de Sherwood pour le cas des gradients opposants ( $N = 0.75$ ), sans champ magnétique ( $Ha = 0$ ), et pour différents nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ . ..... 97

*Figure V.5.* Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement lignes iso-concentration (gauche), ligne de courant (centre) et lignes isothermes (droite), pour  $N = 0.75$  et  $Ra_T = 7.5 \times 10^4$  (régime laminaire). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $\gamma = 0$ )..... 99

*Figure V.6.* Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement lignes iso-concentration (gauche), ligne de courant (centre) et lignes isothermes (droite), pour  $N = 0.75$  et  $Ra_T = 7.5 \times 10^4$  (régime laminaire). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $\gamma = 90^\circ$ )..... 101

- Figure V.7.* Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0.5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  (a) et vertical  $B_y$  (b), pour  $N = 0.75$  ;  $Ra_T = 7.5 \times 10^4$ , pour différents nombres du Hartmann.....104
- Figure V.8.* Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0.5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  (a) et vertical  $B_y$  (b), pour  $N = 0.75$  ;  $Ra_T = 7.5 \times 10^4$ , pour différents nombres de Hartmann.....105
- Figure V.9.* Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0.5$  en présence du champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ) :  $N = 0.75$ ,  $Ra_T = 7.5 \times 10^4$ , pour  $Ha = 0, 20$  et  $100$ .....106
- Figure V.10.* Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0.5$  en présence du champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ) :  $N = 0.75$  ;  $Ra_T = 7.5 \times 10^4$ , pour  $Ha = 0$  ;  $20$  et  $100$ .....106
- Figure V.11.* Nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 0.75$  et  $Ra_T = 7.5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$  (régime laminaire).....108
- Figure V.12.* Nombre de Sherwood ( $Sh$ ) en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 0.75$  et  $Ra_T = 7.5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$  (régime laminaire).....108
- Figure V.13.* Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement lignes iso-concentration (gauche), ligne de courant (centre) et lignes isothermes (droite), pour  $N = 0.75$  en régime oscillatoire  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ . Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ). .....111
- Figure V.14.* Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement lignes iso-concentration (gauche), ligne de courant (centre) et lignes isothermes (droite), pour  $N = 0.75$  en régime oscillatoire  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ . Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).....113
- Figure V.15.* Evolution temporelle de la composante de la vitesse horizontale en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  (a) et vertical  $B_y$  (b) en point  $S_2$ , pour  $N = 0.75$ ,  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ .....115
- Figure V.16.* Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0.5$  en présence d'un champ magnétique horizontal et vertical;  $N = 0.75$ ,  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ , pour  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ .....116
- Figure V.17.* Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité, en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ), pour  $N = 0.75$ ,  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ , et pour  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ .....117
- Figure V.18.* Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0.5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ), pour  $N = 0.75$ ,  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ , et pour  $Ha = 20$  et  $100$ .....118
- Figure V.19.* Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0.5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ), pour  $N = 0.75$ ,  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ , et pour  $Ha = 20$  et  $100$ .....118
- Figure V.20.* Variation de nombre de Nusselt  $Nu$  en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ ), pour  $N = 0.75$ .....120

*Figure V. 21.* Variation de nombre de Sherwood ( $Sh$ ) en fonction du nombres de Hartmann ( $Ha$ ), en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ ), pour  $N = 0.75$ .....120

*Figure V. 22.* Structure de l'écoulement : lignes iso-concentration (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 0.75$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).....124

*Figure V. 23.* Structure de l'écoulement : lignes iso-concentration (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 0.75$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).....125

*Figure V. 24.* Structure de l'écoulement : lignes iso-concentration (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).....126

*Figure V. 25.* Structure de l'écoulement : lignes iso-concentration (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).....127

*Figure V. 26.* Structure de l'écoulement : lignes iso-concentration (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1.25$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).....129

*Figure V. 27.* Structure de l'écoulement : lignes iso-concentration (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1.25$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).....130

*Figure V.28.* Variation de la fonction de courant maximal  $|\Psi_{max}|$  en fonction du nombre de  $Ha$  pour  $N = 0.75$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale  $B_x$ , et verticale  $B_y$ .....131

*Figure V.29* Variation de la fonction de courant maximal  $|\Psi_{max}|$  en fonction du nombre de  $Ha$  pour  $N = 1.25$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).....132

*Figure V.30.* Variation du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 0.75$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).....132

*Figure V.31.* Variation du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 1.25$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ). .....133

*Figure V.32.* Variation du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  du nombre du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 1$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ). .....133

## Liste des Tableaux

<i>Tableau II.1.</i> Signification physique des nombres adimensionnels .....	31
<i>Tableau III.1.</i> Définition de $\phi$ , $\Gamma$ et $S_\phi$ des équations gouvernantes .....	38
<i>Tableau III.2.</i> Fonction $A( P )$ pour différents schémas numériques ( <i>Patankar, 1980</i> ) .....	41
<i>Tableau IV.1.</i> Positions physiques et logiques des sondes dans la cavité .....	55
<i>Tableau IV. 2.</i> Effet de maillage sur la solution numérique, pour le cas $N = 1.25$ .....	56
<i>Tableau IV. 3.</i> Comparaison de nos résultats et ceux de <i>Beghein et al. (1992)</i> et ceux de <i>Sezai and Mohamed (2000)</i> , pour $Ra = 10^7$ , $Pr = 0.71$ , $Sc = 0.71$ et $Le = 1$ .....	58
<i>Tableau IV.4.</i> Naissance de la convection double diffusive pour différentes valeurs de $N$ ( $Pr = 0.71$ , $Sc = 3.5$ ) .....	64
<i>Tableau V.1.</i> Variation de nombre de Nusselt $Nu$ et de Sherwood $Sh$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann $Ha$ , pour $N = 0.75$ et $Ra_T = 7.5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$ (régime laminaire) .....	107
<i>Tableau V.2.</i> Evolution de $Ra_{Cr}$ avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique externe ( $Ha$ ). Le champ magnétique est orienté suivant la direction horizontale $B_x$ ( $N = 0.75$ ) .....	109
<i>Tableau V.3.</i> Variation de nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ), pour différents nombres de Hartmann ( $Ha$ ), en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ ), pour $N = 0.75$ .....	119
<i>Tableau V.4.</i> Variation du nombre de Rayleigh thermique critique $Ra_{TCr}$ avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique externe $Ha$ . Le champ magnétique est orienté suivant les deux directions horizontal ( $B_x$ ), et vertical ( $B_y$ ), séparément pour $N = 0.75, 1$ et $1.25$ .....	122

..

## NOMENCLATURE

$A$	: Rapport d'aspect géométrique.
$\vec{B}$	: Vecteur du champ magnétique [Tesla].
$B_x$	: Champ magnétique orienté suivant la direction x
$B_y$	: Champ magnétique orienté suivant la direction y
$C_1$	: Concentration de la paroi chaude
$C_2$	: Concentration de la paroi froide
$C_p$	: Chaleur spécifique à pression constante [J/kg.K].
$D$	: Terme de diffusion dans l'équation de discrétisation [-].
$dx$	: Distance entre deux points consécutifs du maillage suivant x [m].
$dy$	: Distance entre deux points consécutifs du maillage suivant y [m].
$\vec{e}_x$	: Vecteur unitaire suivant x.
$\vec{e}_y$	: Vecteur unitaire suivant y.
$F$	: Terme de convection dans les équations de discrétisation [-].
$F_{EMX}$	: Composante adimensionnelle de la force de Lorentz suivant X [-]
$F_{EMY}$	: Composante adimensionnelle de la force de Lorentz suivant Y [-]
$Fr$	: Fréquence adimensionnelle [-].
$g$	: Accélération de la pesanteur [m/s <sup>2</sup> ].
$i$	: Indice des nœuds dans la direction x [-].
$il$	: Nombre de points du maillage dans la direction x [-].
$\vec{j}$	: Vecteur du courant électrique [A/m <sup>2</sup> ].
$j$	: Indice des nœuds dans la direction y [-].
$jl$	: Nombre de points du maillage dans la direction y [-].
$k$	: Conductivité thermique [W/mk].
$L$	: Longueur de la cavité [m].
$p$	: Pression [N/m <sup>2</sup> ].
$P$	: Pression adimensionnelle [-].
$\dot{q}$	: Génération de la chaleur volumique [W/m <sup>3</sup> ]
$Q$	: Flux de chaleur [W].
$q_j$	: Densité de flux de chaleur [W/m <sup>2</sup> ]
$S$	: Terme source de l'équation de conservation [-].

---

$S_\phi$	: Terme source d'une variable dépendante $\phi$ [-].
$T$	: Température [K].
$T_1$	: Temperature locale de la paroi chaude [K]
$T_2$	: Temperature locale de la paroi froide [K]
$t$	: Temps [s].
$U$	: Vitesse horizontale adimensionnelle [-].
$u$	: Vitesse horizontale [m/s].
$V$	: Vitesse verticale adimensionnelle [-].
$v$	: Vitesse verticale [m/s].
$\vec{V}$	: Vecteur de vitesse [m/s].
$X$	: Coordonnée horizontale adimensionnelle [-].
$x$	: Coordonnée horizontale [m].
$Y$	: Coordonnée verticale adimensionnelle [-].
$y$	: Coordonnée verticale [m].

### Sympoles Greques

$\alpha$	: Diffusivité thermique [m <sup>2</sup> /s].
$\gamma$	: Angle de l'orientation du champ magnétique.
$\beta_C$	: Coefficient d'expansion massique, m <sup>3</sup> /mol.
$\beta_T$	: Coefficient d'expansion thermique, 1/K.
$\Gamma$	: Coefficient de diffusion générale [-].
$\Delta V$	: Dimension d'un volume de contrôle [m <sup>3</sup> ].
$\Delta X$	: Dimension d'un volume de contrôle suivant $x$ [m].
$\Delta Y$	: Dimension d'un volume de contrôle suivant $y$ [m].
$\Delta \tau$	: Incrément du temps adimensionnel [-].
$\delta$	: Delta de Kronecker [-].
$\Phi$	: Concentration adimensionnelle [-].
$\theta$	: Température adimensionnelle [-].
$\mu$	: Viscosité dynamique [kg/m.s].
$\nu$	: Viscosité cinématique [m <sup>2</sup> /s].
$\rho$	: Masse volumique [kg/m <sup>3</sup> ].
$\sigma_{ij}$	: Déviateur de contrainte de déformation [N/m <sup>2</sup> ].

$\tau_{ij}$	: Contrainte de cisaillement [N/m <sup>2</sup> ].
$\tau$	: Temps adimensionnel [-].
$\varphi$	: Potentiel électrique [Volt].
$\psi$	: Fonction de courant, m <sup>2</sup> /s.
$\sigma$	: Conductivité électrique [ $\Omega./m$ ].
$\mu_0$	: Permiabilité magnétique [H/m].

### Indices

$E$	: Nœud considéré du côté Est du nœud P.
$W$	: Nœud considéré du côté Ouest du nœud P .
$N$	: Nœud considéré du côté Nord du nœud P.
$S$	: Nœud considéré du côté Sud du nœud P.
$P$	: Nœud considéré du maillage.
$e$	: La face Est du volume de contrôle considéré.
$w$	: La face Ouest du volume de contrôle considéré.
$moy$	: Valeur moyenne.
$n$	: La face Nord du volume de contrôle considéré.
$s$	: La face Sud du volume de contrôle considéré.
$Cr$	: Valeur critique.

### Operateurs Mathématiques

$\nabla$	: Gradient
$\Delta$	: Laplacien.
$D$	: Dérivée totale.
$\partial$	: Dérivée partielle.
$div$	: Divergence.

### Exposant

$n+1$	: Correspond au temps $\tau + \Delta\tau$ .
$n$	: Correspond au temps $\tau$ .

**Nombres Adimensionnels**

$Gr_T$  : Nombre de Grashof thermique  $Gr_T = \frac{(g\beta_T\Delta TL^3)}{\nu^2}$

$Gr_S$  : Nombre de Grashof massique  $Gr_S = \frac{(g\beta_S\Delta CL^3)}{\nu^2}$

$Ha$  : Nombre de Hartmann ( $= BL\sqrt{\sigma/\mu}$ )

$Le$  : Nombre de Lewis ;  $Le = \frac{\alpha}{D}$

$N$  : Rapport des forces de flottabilité ;  $N = \frac{Ra_S}{Ra_T Le}$

$Nu$  : Nombre de Nusselt local

$Pr$  : Nombre de Prandtl ;  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

$Ra_T$  : Nombre de Rayleigh thermique ;  $Ra_T = \frac{(g\beta_T\Delta TL^3)}{\nu\alpha}$

$Ra_S$  : Nombre de Rayleigh massique ;  $Ra_S = \frac{(g\beta_S\Delta CL^3)}{\nu D}$

$Sc$  : Nombre de Schmidt ;  $Sc = \frac{\nu}{D}$

$Sh$  : Nombre de Sherwood local.

## Introduction Générale

Le phénomène du transfert de chaleur et de masse par convection naturelle est dû à la présence simultanée des gradients de température et de concentration. Ces gradients causent une distribution non uniforme de la masse volumique du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité (forces de flottabilité thermique et solutale). Dans la plupart des situations, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie, le fluide étudié est constitué de deux ou plusieurs composants. Ainsi que les écoulements naturels engendrés portent le nom de convection naturelle à double diffusion ou bi-diffusive ou bien thermosolutale.

Il est connu que la convection naturelle laminaire à double diffusion dans des mélanges binaires est relativement stable pour les faibles nombres de Rayleigh thermique. Cependant, la convection naturelle peut devenir oscillatoire et périodique dans le temps à partir d'une certaine valeur, appelée *valeur critique*, pour laquelle le comportement de l'écoulement devient soudain qualitativement différent du comportement antérieur. Un tel changement de comportement est appelé *bifurcation* et se traduit par une perte de symétrie du système. Les instabilités hydrodynamiques, thermiques, et massiques représentent un sous-ensemble de l'ensemble plus général des bifurcations.

Un champ magnétique est largement utilisé pour le contrôle des écoulements de la convection thermique et solutale dans la phase liquide, pour les processus de la croissance cristalline des semi-conducteurs. L'un des buts du contrôle électromagnétique est la stabilisation de l'écoulement, c'est-à-dire la suppression de la convection et des instabilités. Cette technique a été largement utilisée depuis l'expérience de base de [Hurle \(1966\)](#), ainsi que celles de plusieurs chercheurs.

Dans cette Thèse de Doctorat, une étude numérique de la convection naturelle à double diffusion d'un mélange binaire contenu dans une cavité carrée est réalisée. Un champ magnétique externe est appliqué pour les deux directions : horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ), séparément. L'étude est présentée pour deux mélanges. Dans la première partie des résultats, nous étudions la convection naturelle à double diffusion pour un mélange binaire. L'effet du rapport des forces de flottabilité  $N$  sur la convection naturelle oscillatoire à double diffusion pour le cas des gradients opposants est présenté. Le nombre de Rayleigh thermique critique et la fréquence dominante sont

déterminés pour chaque rapport des forces de flottabilité. L'étude a été faite pour couvrir l'intervalle ( $0 \leq N \leq 2$ ) avec des valeurs inférieures et valeurs supérieures à l'équilibre de la flottabilité thermique-solutale ( $N=1$ ). Dans la seconde partie, nous étudions un mélange binaire, conducteur d'électricité, qui est utilisé pour la production des semi-conducteurs. L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle à double diffusion, en régime stationnaire et en régime oscillatoire, est présenté et discuté. Le seuil du régime oscillatoire est déterminé par les nombres de Rayleigh critiques correspondant à chaque rapport des forces de flottabilité, ainsi que par les fréquences des oscillatoires correspondantes. La stabilité magnétique de l'écoulement à double diffusion est présentée par la dépendance du nombre de Rayleigh critique thermique et du nombre de Hartmann ( $Ha$ ). L'effet de l'orientation du champ magnétique est également présenté pour les deux directions : horizontale et verticale. Les nombres de Rayleigh thermiques critiques ( $Ra_{TCr}$ ) et les fréquences critiques ( $Fr_{Cr}$ ) correspondantes, pour le régime transitoire avec et sans champ magnétique appliqué séparément dans les deux directions  $X$  et  $Y$ , et pour un nombre de Hartmann, allant de 0 à 100, sont également déterminés.

La Thèse est composée de cinq Chapitres et d'une Conclusion Générale. Dans le premier Chapitre, on donne une revue bibliographique des travaux antérieurs sur la convection naturelle à double diffusion en présence ou non du champ magnétique. Dans le deuxième Chapitre, un exposé détaillé sur le problème physique, les équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices et l'adimensionnalisation des équations est présenté.

Dans le troisième Chapitre, la méthode numérique de résolution des équations gouvernantes, les différents schémas de discrétisation pour la méthode des volumes finis, et l'organigramme global de résolution sont présentés. Le quatrième Chapitre est consacré à la validation du programme de calcul élaboré, et la discussion des résultats obtenus pour la convection naturelle à double diffusion dans un mélange binaire, en régime stationnaire et en régime oscillatoire. Dans le cinquième Chapitre, nous présentons les résultats concernant l'effet du champ magnétique. Finalement, une Conclusion Générale, récapitulant les résultats obtenus et les perspectives de ce travail, est présentée.

# Chapitre I

## Revue Bibliographique :

### Convection Naturelle à Double Diffusion sans et avec Champ Magnétique

La convection à double diffusion se réfère généralement à un écoulement de fluide généré par les effets de poussée due à la fois au gradient de température et gradient de concentration. Ce type d'écoulement est rencontré dans les applications naturelles et technologiques comme les mouvements convectifs dans les océans qui sont dus, d'une part, à la présence de gradient de température et, d'autre part, à la distribution non uniforme de la concentration du sel, la dispersion des polluants dans l'atmosphère (gaz nocifs) et dans le sol (déchets nucléaires) et la migration de l'humidité ou des sels minéraux dans les sols. Les phénomènes technologiques interviennent, par exemple, lors des mécanismes de changement de phases des métaux où la convection affecte directement sur la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermo-physiques des alliages, lors des procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques, au cours de divers procédés thermochimiques et électrochimiques, lors du stockage des gaz liquides, dans les réacteurs chimiques, dans les procédés d'oxydation ou de traitement des surfaces métalliques.

Le phénomène de la convection naturelle à double diffusion a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux, théoriques, analytiques et numériques.

Le problème de convection à double diffusion dans les mélanges binaires est étudié principalement pour des géométries carrées ou rectangulaires avec des conditions aux limites thermiques et solutales différentes. On distingue :

- ✓ La convection naturelle à double diffusion où les gradients de température et de concentration sont imposés verticalement (les parois horizontales sont soumises à des températures et des concentrations différentes).
- ✓ La convection naturelle à double diffusion où les gradients de température et de concentration sont imposés horizontalement (les parois verticales sont soumises à des températures et des concentrations différentes).
- ✓ La convection à double diffusion où le gradient de température est imposé horizontalement et le gradient de concentration verticalement.

Parmi les travaux expérimentaux sur la convection naturelle thermosolutale, on peut citer les expériences de Lee et al. (1988), Kamotani et al. (1985), et Han et Kuehn (1991) qui ont utilisé un système électrochimique contenant une anode et une cathode pour imposer les concentrations sur les parois de la cavité.

Lee et al. (1988) ont examiné la convection thermosolutale dans une cavité remplie d'eau salée. En fonction de la valeur du rapport de forces de volume, ils ont observé deux types de mouvements convectifs : une avec une structure unicellulaire et l'autre avec une structure multicellulaire. En outre, le nombre de cellules dans le cas de la convection avec gradients opposants est beaucoup plus grand que celui observé dans le cas de la convection avec gradients coopérants.

Han et Kuehn (1991) ont fait des études expérimentales et numériques en utilisant une technique électrochimique avec des électrodes verticales maintenues à des températures différentes, en effectuant des photographies montrant l'évolution au cours du temps des structures multicellulaires dans une cavité dans le cas des forces de flottabilité opposantes et coopérantes (Figure I.1). Ils ont présenté aussi les caractéristiques de l'écoulement multicellulaire qui incluent les profils de température et de concentration et les caractéristiques des transferts de chaleur et de masse.

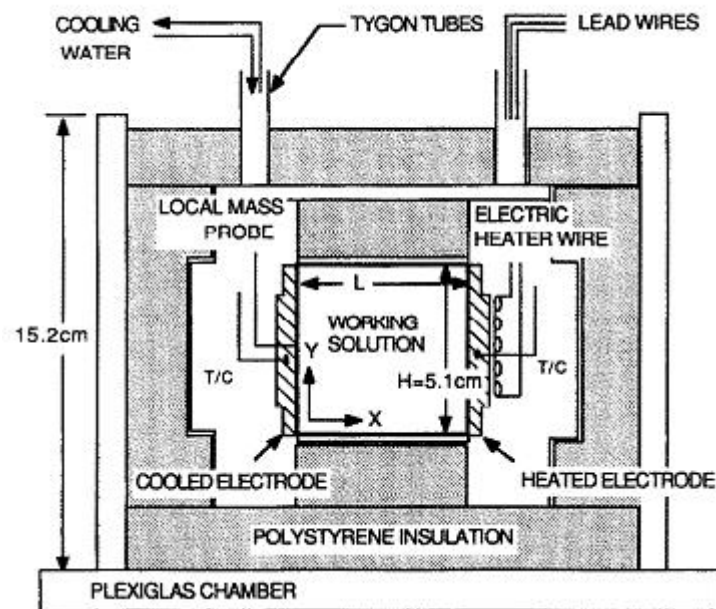


Figure I.1. Dispositif expérimental utilisé par Han & Kuehn (1991).

La convection naturelle transitoire d'un mélange binaire dans une cavité carrée a été étudiée par [Lin et al. \(1990\)](#). Ils ont illustré l'effet combiné des forces de buoyancy thermique et solutale sur l'évolution temporelle de la structure de l'écoulement associé avec le transfert de chaleur et de masse dans le cas de la convection à double diffusion pour les deux cas : gradients coopérants et gradients opposants. Ils ont trouvé que le rapport des forces de buoyancy a un effet significatif sur la structure de l'écoulement et spécialement pour le cas des gradients opposants.

Pour le cas des forces de flottabilité thermiques et solutales égaux et en sens opposées, des études analytiques et numériques de la convection dans des cavités remplies d'un mélange binaire ont été présentées. [Ghorayeb et al. \(1999\)](#) ont étudié la transition de l'écoulement stationnaire à l'écoulement oscillatoire en fonction du nombre de Lewis ( $2 < Le < 45$ ). Ils ont trouvé que l'écoulement oscillatoire apparaît pour un nombre de Grashof thermique légèrement plus grand que  $Gr_{cr}$ . L'écoulement est centro-symétrique pour  $Le \geq 17$ , ou asymétrique pour un écoulement de fréquence unique pour  $Le \leq 17$ . Pour des valeurs élevées du nombre de Grashof thermique, les deux régimes se produisent pour des valeurs fixes de  $Gr_T$  et  $Le$ . En outre, les calculs montrent que  $Gr_{cr}$  atteint un minimum égal à  $4,75 \times 10^4$  pour  $Le \approx 7$ .

[Nikbakhti et Rahimi \(2012\)](#) ont trouvé dans la convection de la double diffusion pour le cas des gradients opposants ( $N = 1$ ), le nombre de Nusselt moyen est diminué. Après le point critique ( $N = 1$ ), l'écoulement rotatif change l'orientation avec une augmentation du rapport de flottabilité, l'augmentation du nombre de Nusselt moyen, de sorte que le taux de transfert de chaleur dans la cavité est augmenté. [Belaziaia et al. \(2012\)](#) ont montré que le l'écoulement est stable et permanent pour le  $Ra_T < 7 \times 10^4$  et le régime devient transitoire et apparaît par la formation des oscillations régulières (périodiques) quand  $Ra_T = 7 \times 10^4$ .

[Chen et al. \(2012\)](#) ont constaté que, pour des couches finies et infinies, l'analyse de la stabilité linéaire montre que : lorsque l'inclinaison de la cavité par rapport à la gravité diminue de 0 à 90°, le seuil de l'instabilité stationnaire augmente d'une façon exponentielle tandis que le seuil d'instabilité oscillatoire décroît exponentiellement.

[Sezai et Mohamed \(2000\)](#) ont indiqué que l'écoulement à la double diffusion, dans des cavités avec des forces de flottabilité opposantes, est strictement tridimensionnel pour la gamme des paramètres étudiés : ( $10 < Ra < 2 \times 10^5$ ), rapport de flottabilité :  $-2 < N < 0$  et nombre Lewis :  $0,1 < Le < 150$ .

Chen et al. (2010) ont trouvé que, lorsque  $N < 1$ , l'écoulement est principalement dominé par des effets de flottabilité thermiques, tandis que, pour  $N > 1$ , l'écoulement est principalement dominé par des effets de flottabilité massiques. Pour l'écoulement convectif, avec  $Ra = 10^6$  et  $N < 1$ , il n'y a qu'une seule grande recirculation dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'enceinte thermique, indépendamment de  $K$  (rapport des rayons) et  $A$ . Au contraire, le nombre de tourbillons varie en fonction de  $K$  et  $A$  lorsque  $N > 1$ . Le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) moyen et le nombre de Sherwood ( $Sh$ ) moyen sur la paroi intérieure à la fois sont une fonction croissante monotone de  $K$ . Ils ont constaté que les deux sont aussi fonction croissante monotone de  $A$  à  $N > 1$ . Pour les valeurs de Raleigh au-delà de  $10^7$ , l'écoulement devient instable.

Yan (1999) a montré que la distribution des nombres de Nusselt et Sherwood est caractérisée par la décomposition à proximité de l'orifice d'entrée dans lequel l'effet d'entrée à convection forcée domine, mais la décroissance est atténuée par l'apparition de l'écoulement secondaire entraînée par  $N$  ( $Ra \leq 10^5$ , rapport d'aspect de 0.5, 1 et 2, et le rapport de flottabilité  $N$  allant de 0,8 à 2,0).

Dans une cavité cylindrique, Kefeng et Wendiang (2006) ont montré de nouveaux caractères de stratifications non-horizontales du champ thermique et solutale : dans l'état de stratification, les lignes iso-thermiques près de la paroi latérale sont plus élevées que celles près de l'axe de symétrie, tandis que les lignes iso-concentrations à proximité de l'axe de symétrie sont relativement élevées. Pour  $N$  variant de 0 à 2, ils ont montré que les lignes iso-concentrations ont tendance à être horizontales tandis que les gradients des lignes isothermes augmentent.

Dans un cylindre vertical, Shi et Lu (2006) ont trouvé que dans le cas de  $N > 0$ , un domaine avec une température plus élevée et un faible débit (zone morte) se forme sur la paroi de fond près de la ligne de symétrie et le domaine de la région morte augmente lorsque  $N$  varie de 0,5 à 1,5. Pour  $N < 0$ , ils ont trouvé plus des stratifications du champ solutale sont formées et la circulation près de la paroi de fond est en constante évolution. La fréquence des fluctuations augmente pour  $N$  variant de -0,5 à -1,5.

L'effet du rapport de la flottabilité ( $N$ ) sur la structure de l'écoulement a été investigué numériquement pour un mélange gazeux binaire dans une enceinte rectangulaire par Nishimura et al. (1998). Ils ont prédit numériquement que la convection à double diffusion oscillatoire avec des cellules secondaires de l'écoulement se produit pour une certaine gamme de rapport de flottabilité ( $Ra_T = 10^6$ ,  $Pr = 1$ ,  $Le = 2$ ,  $N = 0 - 2$  et  $A = 2$ ). Pour le mécanisme clé

de l'écoulement oscillatoire, ils ont constaté que, dans la région instable un décalage d'espèces de la partie centrale de l'enceinte vers les parties supérieure et inférieure, et vice versa dans une période de temps, en raison de l'interaction du transfert de chaleur et de masse avec différentes diffusivités près des parois verticales.

Mahapatra et al. (2013) ont montré que lorsque le rapport de flottabilité augmente l'épaisseur de la couche limite devient plus mince dans une enceinte à moteur (lid-driven) carrée. Pour un rapport de flottabilité élevé ( $N = -50$ ), la modification de la structure de l'écoulement a une influence notable sur le champ de concentration, ce qui accumule une stratification verticale de l'enceinte.

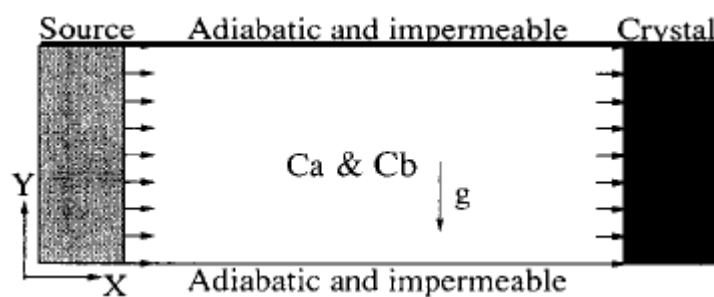
Les résultats analytiques et numériques de la convection thermosolutale à gradients coopérants dans une cavité ont été présentés par Bennacer et Gobin (1996-A). Ils ont proposé des corrélations générales de transfert de masse validées pour une large gamme de paramètres. Par la suite, ces mêmes auteurs ont traité numériquement le transfert de chaleur et la structure de l'écoulement de la convection à double diffusion dans un système binaire contenu dans une cavité 2D (Bennacer et Gobin (1996-B)). Ils ont montré que pour des nombres de Lewis élevés, le transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du rapport de flottabilité  $N$ .

D'un autre côté, Sun et al. (2010) ont montré que l'influence de la variation de la densité de la solution pour la convection thermique seule ou la convection solutale seule ainsi que pour la convection thermosolutale dans la cas particulier où les forces thermiques et de solutales sont égaux en intensité, quel que soit la situation des gradients aidants ou opposants. A partir de la configuration correspondante à un écoulement stationnaire basé sur le travail de Deng et al. (2004), une étude numérique a été réalisée par Ben Beya et Lili (2007). Ils ont trouvé que l'écoulement devient oscillatoire pour des nombres de Reynolds fixes ( $700 \leq Re \leq 1000$ ) lorsque le nombre de Grashof varie dans un large gamme ( $10^3 \leq Gr \leq 10^6$ ). Leurs résultats ont montré que le seuil du régime oscillatoire de l'écoulement de l'air à l'intérieur d'une cavité se produit pour des valeurs qui peuvent être corrélées comme  $Re = a \times Gr^b$ .

Récemment, Chen et al. (2013) ont obtenu des solutions symétriques différentes et la structure de l'écoulement est principalement tridimensionnelle pour : nombre de Rayleigh  $10 \leq Ra \leq 2 \times 10^5$ , rapport de flottabilité  $-2 \leq N \leq 0$ , et pour le nombre de Lewis  $2 \leq Le \leq 1000$ . Les caractéristiques de l'écoulement de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité ont été présentées par Parvin et al. (2013). Ils ont présenté l'effet de Soret et de Dufour sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse. Leurs résultats ont

montré que le transfert de chaleur et de masse augmente par l'effet de Soret et de Dufour. De même, [Nithyadevi et Yang \(2009\)](#) ont étudié l'effet de la convection naturelle à double diffusion de l'eau dans une enceinte partiellement chauffée avec l'effet Soret et Dufour. [Bhuvaneswari et al. \(2011\)](#) ont montré que les taux de transfert de chaleur et de masse sont réduits si les deux parois se déplacent dans la même direction, tandis qu'ils sont améliorés si les parois se déplacent dans le sens opposé.

Dans les modèles de croissance de cristal, [Zhou et Zebib \(1994\)](#) ont indiqué que le seuil de la convection oscillatoire se produit à un nombre de Grashof ( $Gr$ ) de l'ordre de  $10^4$ , pour la convection à double diffusion dans le cas des forces de volume opposées. Cet écoulement oscillatoire de double diffusion se produit avec des valeurs critiques ( $Gr_{Cr}$ ) considérablement réduites par rapport au cas de la convection thermique pure ([Figure I.2](#)). Ils ont constaté aussi que les flux au niveau des interfaces favorisent le déclenchement de l'écoulement oscillatoire et augmentent le taux de transfert de chaleur et de masse. [Bergman et Hyun \(1996\)](#) ont montré que dans les métaux liquides (Pb-Sn), le nombre de Sherwood, pour un fluide ayant un nombre de Schmidt élevé, est assez élevé et change notablement en fonction du régime de fonctionnement. Pour le taux de transfert de chaleur, ils ont constaté qu'il est modérément affecté par la convection en raison du faible nombre de Prandtl du bain fondu. Leurs prédictions à un nombre Rayleigh relativement important et à un rapport de flottabilité (0.1, 1 et -10) présentent un comportement fortement oscillatoire d'une manière consistante avec les observations expérimentales.



*Figure I.2. Représentation schématique du problème étudié par Zhou et Zebib (1994).*

[Bennacer et al. \(2001\)](#) ont étudié numériquement et analytiquement la transition de la convection naturelle à double diffusion dans une cavité rectangulaire avec  $A = 2$ ,  $Pr = 7$ ,  $Le = 100$  et le nombre de Rayleigh thermique variant entre  $7 \times 10^3$  et  $7 \times 10^5$ . Les parois verticales

sont différentiellement chauffées et le gradient solutal est imposé verticalement. Trois cas ont pu être distingués (Figure I.3) :

- Un régime thermique convectif pour des valeurs relativement petites de  $N$  ( $N < 1$ ).
- Un régime diffusif thermique et solutal pour des valeurs élevées de  $N$  ( $N > 8$ ).
- Une cellule convective thermosolutale pour  $N$  modéré ( $1 < N < 8$ ).

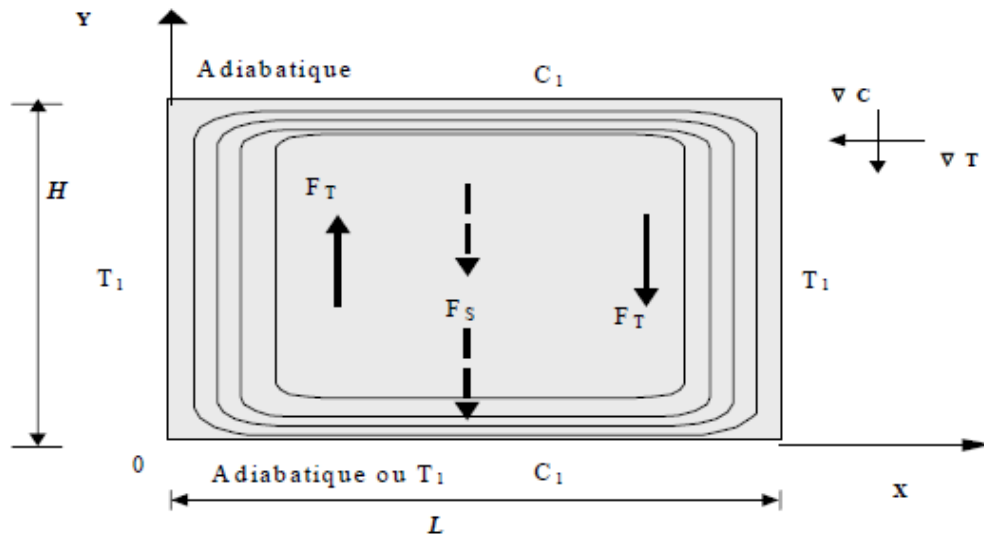


Figure I.3. Schémas du problème étudié avec un gradient horizontal de température et un gradient vertical de concentration (Bennacer et al. (2001)).

Benissaad et Afrid (2002) ont étudié l'influence du nombre de Grashof solutal ( $Gr_s$ ) sur la convection à double diffusion dans le cas des gradients opposants. A partir de  $Gr_s$  égal à  $2,2 \times 10^5$  jusqu'à  $7 \times 10^5$ , l'écoulement devient oscillatoire et périodique dans le temps. Pour  $8 \times 10^5 \geq Gr_s \geq 2,2 \times 10^6$ , l'écoulement devient multicellulaire.

Dans la croissance cristalline par la technique de Czochralski (CZ), Jana et al. (2006) ont accordé une attention particulière à l'interface Crystal-liquide et au transport de l'oxygène. Ils ont traité l'interface par la méthode du maillage explicite. L'évaporation d'oxygène à la surface libre est exprimée par le bilan des flux correspondants. La convection de Marangoni due à des gradients de température est également intégrée dans le modèle. Leurs résultats numériques ont montré que l'application d'un champ magnétique axial conduit à aplatir les interfaces et les bas niveaux de concentration en oxygène, mais elle rend la distribution de l'oxygène non uniforme près de l'interface Crystal-liquide.

Dans la plupart des processus de la croissance cristalline, comme par exemple la méthode de *Bridgman*, l'interface avance dans une direction parallèle au vecteur de gravité. Par conséquent, le gradient de la masse volumique dans la *fonte-solution* est parallèle à la gravité et la convection s'ensuit lorsque la flottabilité vainc les effets visqueux. L'initialisation de l'instabilité convective, comme dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, est caractérisée par le nombre de Rayleigh. Si la configuration de Bridgman est inversée, le *liquide* se trouve ainsi chauffé latéralement et par-dessous, il a un comportement non-linéaire très complexe. Pour des valeurs critiques des paramètres de contrôle, l'écoulement convectif dans la *fonte* devient fréquemment instable et *bifurque* à partir d'un état stationnaire (stable) vers un autre état stationnaire ou instable. Ces valeurs critiques sont appelées *bifurcations*. La bifurcation est ainsi un changement structural dans l'écoulement pour des valeurs critiques des paramètres de contrôle et elle joue un rôle important dans le développement du chaos. En outre, les instabilités de bifurcation dans les écoulements de *fonte* conduisent à l'apparition des *effets d'oscillation* de température 3-D et des structures *non-symétriques* d'écoulement, qui peuvent conduire à des inhomogénéités dans la structure des cristaux en croissance, et affectent la qualité de ces cristaux (Müller et Ostrogorsky, 1994).

L'amortissement électromagnétique des écoulements convectifs a été étudié numériquement et expérimentalement pour des écoulements dans des cavités 2D rectangulaires (exemple : Hurle et al. (1974), Hof et al. (2003)) et dans des configurations 3-D (comme dans : Okada et Ozoe (1992), Piazza et Ciofalo (2002)).

Le mécanisme de base de l'interaction d'un champ magnétique appliqué et un semi-conducteur fondu (liquide) entraîne des courants électriques induits par le mouvement d'un « fluide *conducteur* » dans un champ magnétique. Lorsque la convection est présente, l'écoulement du fluide électriquement conducteur et perpendiculaire au champ magnétique résulte en une force de Laplace qui s'oppose à ce mouvement. Pour déterminer l'efficacité du champ magnétique sur la suppression de la convection, il est nécessaire de résoudre les équations de *Maxwell* et les équations de l'écoulement de fluide pour les champs de vitesse et électromagnétique. Une dérivation complète des équations MHD, donnée dans la référence de Gelfgat et Bar-Yoseph (2001), résulte fondamentalement dans l'incorporation de la force de Laplace.

Dans les domaines de : la solidification, la convection naturelle à double diffusion en présence du champ magnétique, la croissance cristalline et les écoulements sans changement de phase (par voies numérique ou expérimentale), Les études ont dressé une variété de cas impliquant l'application des champs magnétiques dans : la stabilité de l'écoulement, la suppression d'écoulement, la stabilité de l'interface et les taux de croissance. Par exemple, l'effet des champs magnétiques appliqués aux structures de l'écoulement, la forme de l'interface de croissance, et le taux de croissance dans les techniques de croissance cristalline à partir d'une solution ou d'une fonte se trouvent dans les travaux de : Dost et al. (2000), Liu et al. (2003), Sheibani et al. (2003), Liu et al. (2004), Kumar et al. (2007), Yildiz et Dost (2007) et Armour et al. (2008).

Bouabdallah et Bessaih (2012) ont examiné l'effet du champ magnétique sur l'écoulement et le transfert de chaleur tridimensionnel lors d'un changement de phase d'un métal liquide (Figure I.4). Ils ont montré que le champ magnétique provoque une régulation importante de la forme de l'interface solide/liquide, et que pour de fortes valeurs du nombre de Hartmann ( $Ha = 100$ ), la convection est supprimée et l'interface est régulière. Ils ont montré également que le champ magnétique provoque la bidimensionalisation du transfert de chaleur le long des parois isothermes.

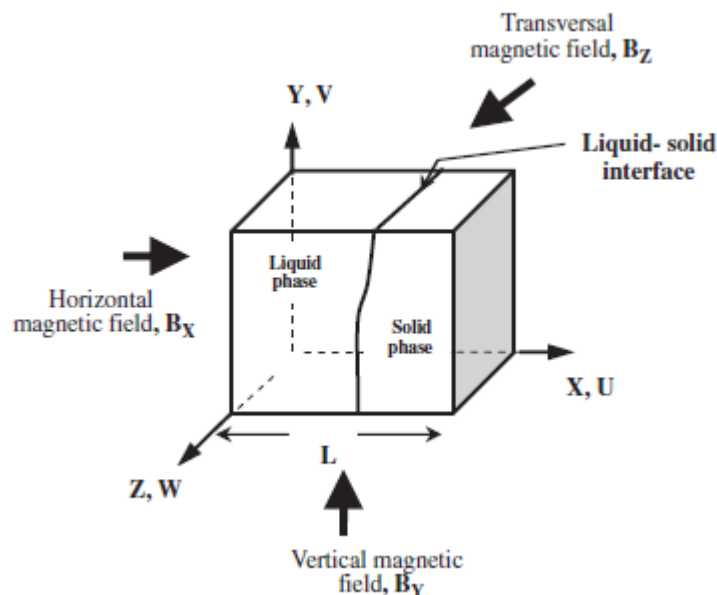
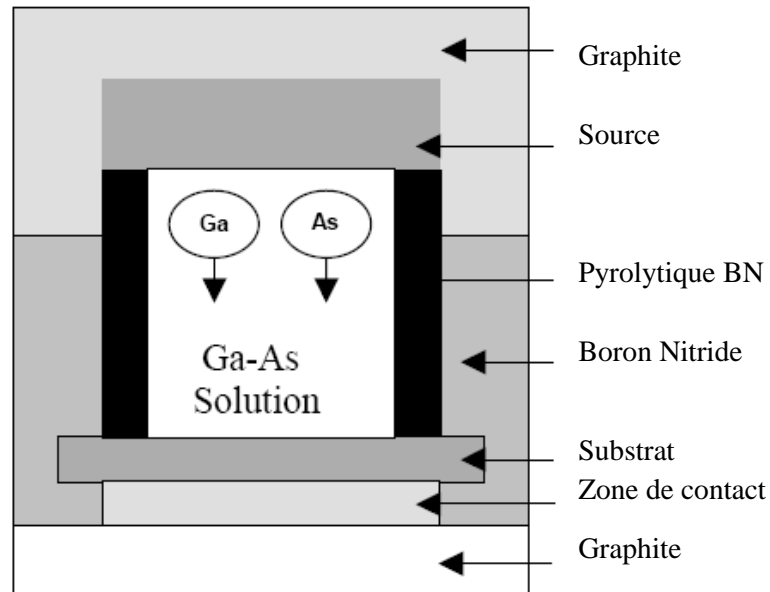


Figure I.4. Problème physique examiné par Bouabdallah et Bessaih (2012).

Les effets du champ magnétique sur l'instabilité et l'amortissement électromagnétique dans de différents écoulements ont été rapportés par : Hurle et al. (1974), Hof et al. (2003), Okada et Ozoe (1992), Piazza et Ciofalo (2002), et Gelfgat et al. (2001).

L'effet d'amortissement des champs magnétiques a été largement étudié dans la littérature pour différents types et conditions de solidification. Par exemple, [Poirier et al. \(1997\)](#) ont réalisé une étude de simulation durant la solidification directionnelle d'alliages binaires et multi-composants. [Prescott et Incropera \(1993\)](#) ont investi les effets de faibles champs magnétiques sur la solidification d'un alliage Pb-Sn dans des conditions de gravité normales. [Evans et al. \(2000\)](#) ont investi dans la suppression de la convection thermosolutale par exploitation de la dépendance de la température-composition sur la susceptibilité magnétique. [Ganapathysubramanian et Zabaras \(2004\)](#) ont examiné l'effet d'application d'un gradient du champ magnétique convenablement placé sur la croissance des cristaux simples. En particulier, la courbure d'interface, le taux de croissance et la distribution du dopant ont été examinés. Aussi, ils ont effectué une comparaison entre la croissance de cristal sous l'influence d'un champ magnétique uniforme et un gradient du champ magnétique et ont révélé les avantages significatifs d'utiliser la méthode du gradient magnétique pour donner une distribution uniforme du dopant et produire une interface plane, ainsi que la faisabilité commerciale d'une telle technique.

[Dost et al. \(2002\)](#) ont présenté les résultats d'une simulation numérique pour la croissance électro-épitaxie en phase liquide des monocristaux sous l'effet d'un champ magnétique externe. La configuration géométrique de cette étude est présentée sur la [Figure I.5](#). L'effet de l'augmentation des composantes du champ magnétique et de la densité du courant électrique a été pris en considération dans cette étude. Les auteurs ont simplifié le problème par un modèle axisymétrique et un système d'un mélange binaire (Ga-As). Leurs résultats ont indiqué que la structure de l'écoulement et la distribution de la concentration dans la zone liquide sont affectées par la variation de l'application des composantes du champ magnétique. Cependant, la forte contribution du courant électrique sur les composantes de force magnétique est de réduire l'effet négatif de telle sorte que la variation dans le champ magnétique maintienne la croissance de l'interface stable. De plus, l'écoulement convectif dû aux variations du champ magnétique donne un développement pour le brassage dans le plan horizontal ; ceci est très bénéfique dans la stabilisation de la croissance de l'interface et provoque le brassage dans la solution liquide.



*Figure I.5. Schéma de la méthode de diffusion en phase liquide épitaxie (Liquid Phase Electroepitaxy, LPEE) cavité de croissance (Dost et al, 2002).*

Liu et al. (2002) ont présenté une simulation numérique tridimensionnelle pour la croissance Electroépitaxie en phase liquide de Ga-As sous un champ magnétique stationnaire vertical dans la même configuration de Dost et al. (2002). L'effet de l'intensité et de la non-uniformité du champ magnétique sur le champ de l'écoulement dans la solution liquide a été investigué. Leurs résultats numériques ont montré que la structure de l'écoulement se présente en trois caractères de stabilité différents : un champ de l'écoulement est stable pour  $Ha < 150$ , il est transitoire quand  $150 < Ha < 220$ , et il est instable lorsque  $Ha > 220$ . Dans la région stable, l'application du champ magnétique supprime l'écoulement et l'intensité de l'écoulement diminue avec l'augmentation du champ magnétique suivant la loi de puissance ( $U_{max} \approx Ha^{-4/5}$ ) pour la vitesse maximale  $U_{max}$ . Dans la région transitoire, l'intensité de l'écoulement augmente considérablement avec l'augmentation du champ magnétique, la structure de l'écoulement diffère de celle de la région stable, le champ de l'écoulement n'est pas divergé, mais reste toujours stable. Dans la région instable, la structure et l'intensité de l'écoulement changent avec le temps. L'application du champ magnétique maintient les cellules de l'écoulement confinées au voisinage des parois verticales et présentent une non-uniformité près de l'interface. Les auteurs ont montré également que les fortes fluctuations de l'écoulement et la non-uniformité de la structure près de l'interface ont des effets inverses sur le processus de la croissance et conduisent à une croissance insuffisante. Dans cette région, la

vitesse maximale obéit à la loi de la puissance ( $U_{\max} \approx Ha^{5/2}$ ). Ils ont conclu que, pour une croissance suffisante, l'intensité du champ magnétique doit être optimisée. Ces résultats sont confirmés plus tard par une équipe scientifique utilisant la croissance du Crystal Cd-Te (Dost et al. 2003).

Sheibani et al. (2003), avec la même équipe scientifique de Dost et al. (2002), ont utilisé la même configuration Electroépitaxie en phase liquide (LPEE) sous l'influence du champ magnétique statique pour le système binaire (Ga-As) et ternaire (In-Ga-As). Ils ont examiné numériquement et expérimentalement l'effet du champ magnétique sur deux principaux axes de mécanismes de croissance LPEE, à savoir l'électro-migration et la convection naturelle dans la zone liquide. Leurs résultats numériques ont montré que l'écoulement et les structures de la concentration présentent trois caractéristiques distinctes de la stabilité : des structures stables au niveau du champ magnétique de 2,0 kG (kilo Gauss), les structures de transition entre 2,0 et 3,0 kG, et des structures instables au-dessus de 3,0 kG. Dans la région stable, l'application du champ magnétique supprime les structures de l'écoulement, leur intensité diminue avec l'augmentation du champ magnétique. Dans la région de transition, l'intensité de l'écoulement augmente considérablement avec l'intensité du champ magnétique, et la structure de concentration montre des configurations très différentes conduisant à la vibration de l'interface de croissance. Sous l'influence de fortes intensités du champ magnétique, les cellules de l'écoulement sont confinées au voisinage de la paroi verticale et présentent une non-uniformité près de l'interface de croissance. Des expériences effectuées pour différentes intensités du champ magnétique, montrent que le processus de croissance avec une intensité de 4,5 kG donne des croissances satisfaisantes. Toutefois, les expériences de croissance à des intensités magnétiques plus élevées étaient instables et donc pas satisfaisantes. Cependant, la diminution des champs magnétiques et électriques a eu des effets très bénéfiques, des interfaces de croissance à savoir la croissance prolongée due à une convection faible dans la zone liquide, et une augmentation consistante du taux de croissance (environ 5-10 fois plus élevée) en raison de l'effet du champ magnétique sur les mécanismes de l'électro-migration.

Aleksandrov et Molokov (2004) ont considéré la convection tridimensionnelle dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient horizontal de température et un champ magnétique, par un modèle asymptotique. L'efficacité de l'application du champ magnétique dépend considérablement du rapport d'aspect et de la valeur du nombre de Hartmann. L'analyse du transfert de chaleur convectif pour des faibles valeurs du nombre de Peclet a

montré que les deux champs vertical et longitudinal sont plus efficaces dans la réduction du transfert de chaleur convectif.

Une étude numérique comparative du champ magnétique rotatif et glissant sur la forme de l'interface, et la tension thermique dans la croissance du Crystal InP par la méthode de congélation à gradient vertical (Vertical Gradient Freezing, VGF), a été présentée par [Schwesig et al. \(2004\)](#). Les deux types du champ magnétique ont été étudiés pour une configuration réaliste VGF à l'égard de la courbure de l'interface solide/liquide, ce qui entraîne des contraintes thermo-élastique et la stabilité du régime d'écoulement dans le liquide InP. Leurs résultats ont montré clairement que l'utilisation de TMFs offre au contraire une amélioration significative par rapport à la courbure de l'interface solide/liquide pour RMF, ainsi que la contrainte thermo-élastique résultant dans la croissance du Crystal InP.

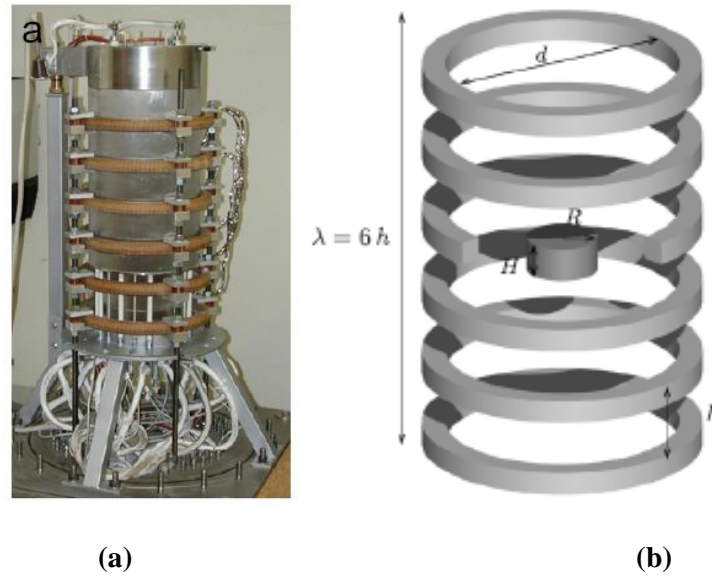
[Anwar et al. \(2005\)](#) ont présenté une étude numérique bidimensionnelle, utilisant la méthode des différences finies, sur l'effet de la tension de surface sur l'écoulement laminaire instationnaire de la convection naturelle d'un fluide électriquement conducteur ( $Pr = 0,054$ ) dans une enceinte rectangulaire sous l'action d'un champ magnétique extérieurement imposé avec génération de chaleur interne. La surface supérieure de l'enceinte est supposée libre et la surface inférieure est isolée, tandis que les parois verticales sont chauffées d'un côté et refroidies par l'autre. Ils ont conclu que le changement de la direction de la force magnétique extérieure de l'horizontale à la verticale mène à une diminution de l'intensité de l'écoulement dans les cellules primaires et secondaires et ceci a induit une augmentation dans l'effet de la force thermo-capillaire. D'un autre côté, l'augmentation dans la valeur du paramètre de génération de chaleur conduit à une augmentation dans l'intensité de l'écoulement dans les cellules primaires, et implique le développement de plus de cellules dans la cavité et la réduction du transfert de chaleur de la surface chauffée.

L'effet du courant électrique sur la convection naturelle d'un métal liquide sous un champ magnétique uniforme dans une cavité cubique a été examiné dans le travail expérimental et numérique de [Kaneda et al. \(2006\)](#). Le champ magnétique est orienté parallèlement aux parois chaude et froide. Leurs résultats ont montré que lorsque le champ magnétique est appliqué uniquement, la convection naturelle est amortie par la force de Lorentz. Cependant, lorsque le courant électrique et le champ magnétique sont appliqués, l'allure de la convection et la quantité de transfert de chaleur de la paroi chaude vers la paroi froide diffèrent par rapport au cas du champ magnétique appliqué sans le courant électrique.

Sankar et al. (2006) ont présenté une étude numérique de la convection naturelle d'un fluide de faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0,054$ ) sous l'influence d'un champ magnétique radial ou axial dans un cylindre annulaire vertical. Le cylindre est maintenu à la température uniforme et les parois horizontales sont thermiquement isolées. Cette étude est réalisée pour un rapport radial compris entre  $1 < \lambda < 10$ , un rapport d'aspect  $0,5 < A < 2$ , des nombres de Rayleigh  $10^3 < Ra < 10^6$  et des nombres de Hartmann :  $0 < Ha_r$  et  $Ha_x < 10^2$ . Leurs résultats ont montré que dans les petites cavités, l'écoulement et le transfert de chaleur sont supprimés efficacement par un champ magnétique axial alors que dans les grandes cavités un champ magnétique radial est plus efficace. Ils ont trouvé aussi que les oscillations de l'écoulement peuvent être supprimées considérablement par un champ magnétique extérieur et le nombre de Nusselt moyen augmente avec le rapport radial et il diminue avec le nombre de Hartmann.

Yildiz et al. (2006) ont présenté les résultats de la simulation numérique pour l'effet du champ magnétique sur la croissance du monocristal (Si-Ge) par la méthode de diffusion en phase liquide utilisée par la même équipe de Dost et al. (2002). Les deux types du champ magnétique, champ statique et champ rotatif, sont considérés. Ils ont développé un modèle transitoire tridimensionnel pour voir les caractéristiques d'énergie, de masse, et de quantité de mouvement de la solution (Si-Ge). Leurs résultats numériques ont indiqué que l'utilisation du champ magnétique vertical et statique est efficace pour la suppression de la convection naturelle dans la solution. Le champ statique d'une intensité de 0,3 Tesla est suffisant pour provoquer une suppression significative. Après, l'écoulement devient numériquement instable. Cependant, le champ magnétique vertical n'a pas provoqué un aplatissement notable dans la croissance de l'interface. Dans le cas d'un champ magnétique rotatif (RMF), les résultats ont montré que l'utilisation de celui-ci a effectivement provoqué un brassage suffisant dans la croissance de l'interface dans le liquide pour l'homogénéité du Crystal Si-Ge. De plus, le RMF est très bénéfique pour l'aplatissement de la croissance de l'interface. Pour une intensité égale à 0,3 mT du RMF, la croissance de l'interface devient presque plane.

Galindo et al. (2007) ont étudié numériquement et expérimentalement l'écoulement d'un fluide dans un champ magnétique glissant (TMF). Ils ont utilisé un système de six bobines (Figure I.6), dans lesquelles trois fonctionnent par puissance du courant donné, pour créer un champ magnétique glissant TMF de haut vers le bas. Une attention spéciale est fixée pour la description du champ électromagnétique pour changer la fréquence du champ et leurs influences résultantes sur la vitesse de l'écoulement.



*Figure 1.6. Système spiral d'un champ magnétique glissant installé sur une cavité de congélation à gradient vertical (VGF) dans la croissance cristalline (Galindo et al. 2007) (a)  
Schéma spiral autour d'une cavité cylindrique (b).*

Lors de la solidification, les mouvements hydrodynamiques dans la phase liquide ont une influence importante sur les propriétés du produit solidifié. Zaïdat et al. (2007) ont porté leur attention sur deux effets majeurs en présence de la convection forcée induite par un champ magnétique glissant : la macroségrégation et la structure de grains pour un alliage d'Al-3,5pds% Ni en présence ou non de particules affinés lors de la solidification. Ils ont montré que dans le cas de l'alliage choisi, la macroségrégation peut être contrôlée et que de plus, l'espacement primaire dendritique est modifié en fonction du champ appliqué. En ce qui concerne les structures de grains, l'influence de la convection forcée sur le développement de la microstructure est également déterminée. Dans le cas d'une solidification de type directionnelle, l'influence de la convection forcée sur la couche solutale et sur la distribution des particules inoculantes, montre une transition vers un régime de grains allongés. Dans le cas des alliages non affinés, un régime de grains libres allongés a pu être obtenu probablement à cause de la fragmentation.

Plus tard, les mêmes auteurs, Yildiz et al. (2007), ont examiné l'effet combiné du champ magnétique statique et rotatif sur la croissance monocristal Si-Ge par la technique de la diffusion en phase liquide (diffusion en phase liquide, LPD). Leurs résultats indiquent que la combinaison du champ magnétique statique et rotatif est plus efficace que l'utilisation unique du champ statique ou rotatif. Ils ont montré que l'utilisation de l'effet combiné est non pas pour la suppression de la convection seule mais aussi pour mener mieux le brassage dans la solution liquide et aplater la croissance de l'interface. Ils ont conclu que pour le Si-Ge,

l'application d'un champ magnétique statique de 0,3 T combiné avec 4 ou 5 mT du champ magnétique rotatif rend la croissance de l'interface presque plane.

Lantzsch et al. (2007) ont étudié numériquement et expérimentalement un écoulement d'un fluide provoqué par un champ magnétique glissant (TMF) et sa transition laminaire vers un régime instationnaire. Le dispositif expérimental qui comprend une cavité cylindrique contenant du Ga-In-Sn est similaire à celui utilisé par l'équipe scientifique de Galindo et al. (2007). Par conséquent, la force de Lorentz est induite dans partie fondue qui conduit à la structure de l'écoulement méridional. Les paramètres caractéristiques du système de modélisation de MHD sont choisis proches des conditions utilisées, dans la technique de congélation à gradient vertical en croissance cristalline. L'écoulement de base axisymétrique et sa dépendance des paramètres sans dimension  $S$  (paramètre de protection) a été examiné dans cette étude. Ils ont montré que, pour  $S = 410$ , la vitesse d'écoulement diminue significativement, et aucune influence ne se retrouve pour un paramètre de plus petit blindage. Le nombre de Reynolds critique pour l'apparition de l'instabilité se trouve dans la gamme 300-450. Une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et ceux des simulations numériques est obtenue.

Récemment, les mêmes auteurs Lantzsch et al. (2008) ont démontré l'impact d'un champ magnétique glissant (TMF) sur le transport de chaleur et de masse dans la croissance de Ge par la même technique (VGF), et ont observé un effet considérable sur la déformation de l'interface solide-liquide lors de la croissance, alors que la ségrégation des dopants ne change pas de façon significative par rapport à la croissance sans champ. En outre, les modèles stries prononcés ont été trouvés dans les cristaux, ce qui indique une fonction du temps de fluidité à chaud pendant la croissance. Un effet combiné (champ magnétique glissant et du courant continu, TMF/DC) est présenté, qui a été développé pour éviter cet effet. Des expériences sur le modèle isotherme d'un alliage GaInSn ont été faites montrant la capacité du champ de DC pour l'amortissement efficace des fluctuations de vitesse de l'écoulement. Ils ont trouvé un bon accord avec les résultats de la simulation numérique.

Pour compenser ou supprimer la convection thermosolutale, des forces externes peuvent être appliquées pour réduire ou éliminer la macro-ségrégation. Par exemple, pour les alliages métalliques, qui sont des conducteurs électriques, les champs magnétiques sont utilisés pour supprimer ou affaiblir, en fournissant les forces de Laplace parfois abusivement dites de Lorentz (Thess et al. 2007 ; Hunt et Moreau, 1976) qui permettent d'opposer le mouvement transversal du fluide aux vecteurs de champ magnétique.

Venkatachalappa et al. 2011 ont étudié numériquement l'effet du champ magnétique radial et axial sur la convection naturelle à double diffusive dans un cylindre annulaire vertical pour les gradients opposant et coopérant. Leurs résultats montrent que le champ magnétique supprime la convection double diffusive seulement pour les faibles valeurs du rapport de flottabilité. Mais pour les valeurs élevées du rapport de flottabilité, le champ magnétique est fiable pour la suppression de l'écoulement de convection thermique. Cependant, le champ magnétique est efficace lorsqu'il est appliqué en sens perpendiculaire à l'écoulement principal.

Dans le domaine de la *croissance cristalline* (comme c'était le cas dans la solidification des alliages binaires), la *macro-ségrégation* dépend fortement de la nature de l'écoulement du fluide dans le liquide. Les écoulements résultent de la *convection naturelle* induite par la *flottabilité* et sont inévitables dans tous les systèmes *non-capillaires* de *croissance cristalline* tels que par exemple ceux présentés dans (Thompson & Szekely, 1988). Ainsi, le contrôle de l'écoulement du fluide dans ces systèmes est l'un des premiers objectifs. Dans ce domaine, l'utilisation des *champs magnétiques* est une méthode prometteuse pour inhiber la convection en cours de la croissance du liquide des semi-conducteurs.

Le processus d'interaction entre un *champ magnétique* et un métal ou un semi-conducteur fondu (qui est un *conducteur électrique*) implique que « *des courants électriques* » sont générés par le mouvement convectif de la charge électrique produite en présence d'un champ magnétique. Cet écoulement (*courant électrique*) crée une *force de Laplace* opposée réduisant, ainsi, la vitesse de l'écoulement de la *fonte*. Depuis presque quatre décennies, l'utilité des champs magnétiques appliqués dans la croissance cristalline à partir d'une *fonte* est identifiée.

A travers cette étude bibliographique, on constate, à notre connaissance, que les études concernant le transfert de chaleur et de masse induit par la convection naturelle thermosolutale dans les mélanges binaires, soumis à des gradients de températures et des gradients de concentrations horizontaux et en présence ou non du champ magnétique en régime oscillatoire, restent incomplètes. Ceci nous a incités, vu le grand champ d'applications, à développer ce thème de recherche. Il s'agit donc d'étudier l'influence des paramètres gouvernant du problème sur la structure de l'écoulement et les transferts thermique et massique en régime laminaire et en régime oscillatoire, ainsi que sur la

stabilisation de la convection naturelle à double diffusion par l'action du champ magnétique externe de différentes intensités et orientations.

L'étude est présentée pour deux mélanges. Dans la première partie, nous avons étudié la convection à double diffusion pour un mélange binaire. L'effet du rapport des forces de flottabilité ( $N$ ) sur la convection naturelle oscillatoire à double diffusion pour le cas des gradients opposants est présenté par la détermination du nombre de Rayleigh thermique critique et la fréquence d'oscillations de l'écoulement oscillatoire en fonction de  $N$ , pour l'intervalle ( $0 \leq N \leq 2$ ) : valeurs inférieures à l'équilibre de la flottabilité thermique-solutale ( $N = 1$ ) et valeurs supérieures à l'équilibre de la flottabilité thermique-solutale. Dans la deuxième partie, nous étudions un mélange binaire conducteur d'électricité utilisé pour la production des monocristaux. L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle à double diffusion en régime stationnaire et en régime oscillatoire est présenté et discuté. Le seuil du régime oscillatoire est déterminé par le nombre de Rayleigh thermique critique correspondant à chaque rapport des forces de flottabilité, ainsi que la fréquence des oscillatoires correspondantes. Les diagrammes de stabilité magnétique ( $Ra_{TCr} - Ha$ ), ( $Nu - Ha$ ), ( $Sh - Ha$ ) et ( $|\psi_{max}| - Ha$ ) sont déterminés, pour les deux orientations du champ magnétique : directions horizontal  $B_x$  et verticale  $B_y$ , séparément, et pour un nombre de Hartmann allant de 0 à 100.

## Chapitre II

### Problème Physique et Formulation Mathématique

#### 1. Introduction

Dans ce Chapitre, nous décrivons le modèle physique pour la convection naturelle à double diffusion dans un mélange binaire et les hypothèses simplificatrices avec les conditions aux limites appropriées. Ainsi, nous donnons les équations gouvernantes telles que : l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement, l'équation d'énergie et l'équation des espèces. Les équations obtenues sont des équations dimensionnelles ; on les dépose sous formes adimensionnelles pour généraliser ce phénomène physique.

#### 2. Problème physique

Le système physique considéré est une cavité carrée bidimensionnelle (Figure II.1) de côté  $L$ , remplie d'un mélange binaire. Les parois verticales sont soumises à des températures ( $T_1 > T_2$ ) et des concentrations ( $C_1 > C_2$ ) constantes, de façon à créer des écoulements opposants (conditions de Dirichlet). Les parois horizontales sont adiabatiques, rigides et imperméables (conditions de Neumann). Le système global est exposé à un champ magnétique externe de différentes orientation et intensité.

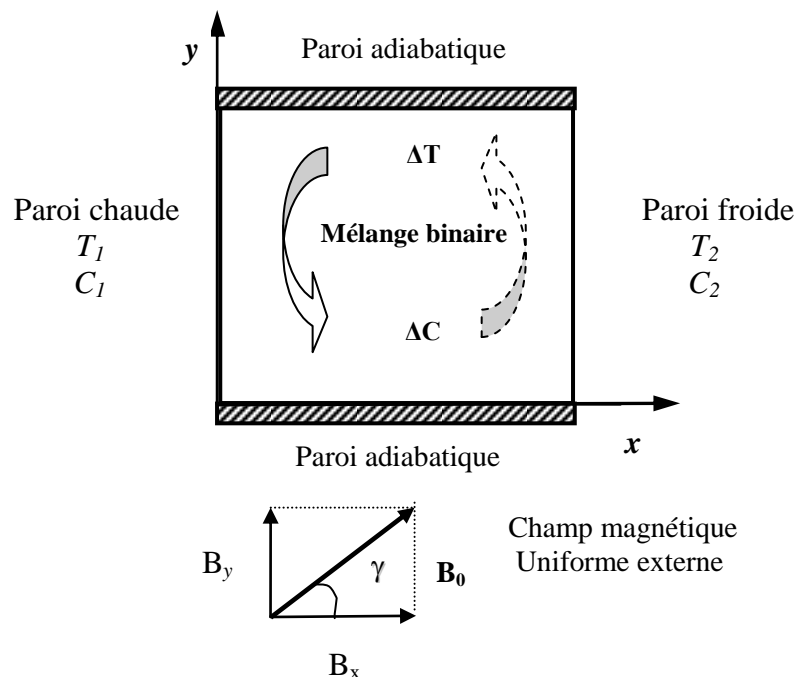


Figure II.1. Géométrie du problème physique. Notons que  $B_x$  et  $B_y$  sont respectivement deux champs magnétiques orientés suivants les directions  $x$  et  $y$  ; et  $B_0$  leur résultante.

### 3. Equations générales de transport

La convection naturelle à double diffusion induit par l'effet simultané des gradients de température et de concentration est régie par des équations générales de conservation de masse, de quantité de mouvement d'énergie et de concentration. Bien qu'elles soient traitées de façon détaillée dans de nombreux ouvrages de base de mécanique des fluides et de transfert de chaleur et de masse, nous rappelons brièvement leurs formes générales avec la signification physique des différents termes.

#### 3.1 Equation de continuité

Pour un volume de contrôle arbitraire, l'équation de conservation de masse en absence de sources internes est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II.1})$$

( $j$  : indice de somme,  $j = 1-3$ )

Dans l'équation (Eq. II.1), les termes représentant la somme de variation  $\left( \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right)$  de masse sont des flux massiques traversant les faces du volume de contrôle, et le terme  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$  représente le terme transitoire.

#### 3.2 Equation de quantité de mouvement

La deuxième loi de la dynamique qui s'annonce : *le taux de variation de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle est égal à la somme des forces extérieures appliquées sur ce volume de contrôle*. Cette loi nous permet d'écrire les équations de conservation de quantité de mouvement d'une particule fluide :

$$\frac{D}{Dt}(\rho u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (\text{II.2})$$

( $i$  : indice de direction,  $i = 1-3$ ).

( $j$  : indice de somme,  $j = 1-3$ ).

Où :

$$\left( \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) : \text{représente la dérivée totale.}$$

Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Eq. II.2), les termes du membre à gauche représentent le produit de la masse volumique et l'accélération totale. Les termes du membre à droite représentent les forces extérieures de surface, comprenant les forces de pression et de frottement visqueux, et les forces extérieures de volume qui regroupent les forces dues à un champ extérieur (gravité, magnétique, etc.).

$\tau_{ij}$  est le tenseur des contraintes visqueuses, exprimé en fonction du volume et du taux de déformation pour un fluide Newtonien par une relation linéaire suivante :

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.3})$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, il est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

### 3.3 Equation de l'énergie

En se basant sur le premier principe de la thermodynamique, l'expression de l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \dot{q} + \Phi \quad (\text{II.4})$$

( $j$  : indice de somme,  $j = 1-3$ )

Dans l'équation de l'énergie (Eq. II.4), le terme à gauche représente le taux temporel du changement d'énergie. Les termes du second membre sont définis comme suit :

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (\text{II.5})$$

( $j$  : indice de somme,  $j = 1-3$ )

$q_j$  : Densité de flux de chaleur par conduction.

( $k$  : conductivité thermique)

$\dot{q}$  : Générateur de chaleur volumétrique.

$\Phi$  : Représente la fonction de dissipation visqueuse. Elle est reliée à la dégradation de l'énergie cinétique en chaleur, du fait des frottements visqueux au sein du fluide. Elle est exprimée en fonction des gradients de vitesse comme suit :

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \quad (\text{II.6})$$

( $i, j$  et  $k$  : indices de somme ;  $i, j$  et  $k = 1-3$ )

### 3.4 Equation de conservation des espèces

Dans un mélange de  $n$  constituants de concentration molaire non uniforme  $c_i$  ( $(\sum_{i=1}^n c_i = 1)$   $c_i$  en  $kmol/m^3$ ), les gradients de masse volumique du mélange,  $\rho_m = \sum_{i=1}^n \rho_i$ , créent des mouvements de convection naturelle massique ( $\rho_i = M_i c_i$ , où  $M_i$  est la masse molaire du constituant  $i$ ). La vitesse moyenne du mélange, où vitesse du fluide, est définie par :

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho_m} \sum \rho_i \vec{v}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} \quad (\text{II.7})$$

Où  $\vec{v}_i$  est la vitesse massique du constituant  $i$ . Les différences de vitesse ( $\vec{V} - \vec{v}_i$ ) sont l'origine des flux de diffusion :

$$\vec{j}_i = \rho_i (\vec{V} - \vec{v}_i), \text{ avec } \sum_{i=1}^n \vec{j}_i = \vec{0} \quad (\text{II.8})$$

La diffusion massique obéit à la loi de *Fick* qui peut s'exprimer sous forme massique ou sous forme molaire.

- **Forme massique** ( $\rho_m, W_i$ ) :

$$\vec{j}_i = -\rho_m D_{im} \cdot \nabla W_i \quad (kg/m^2 \cdot s) \quad (\text{II.9})$$

Où  $W_i = \rho_i / \rho_m$  est la fraction massique et  $D_{im}$  est le coefficient de diffusion du constituant " $i$ " dans le mélange (unités :  $m^2/s$ ).

- **Forme molaire**

$$\vec{j}_i = -c \cdot D_{im} \cdot \nabla x_i \quad (kmol/m^2 \cdot s) \quad (\text{II.10})$$

Où  $x_i = c_i / c$  est la fraction molaire du constituant  $i$ . L'équation de conservation des espèces traduit la conservation de la masse du constituant "i". En négligeant les effets des gradients de température sur le flux de diffusion de matière (effet Soret, qui caractérise l'aptitude des constituants à se séparer dans un fluide à température non-uniforme), elle s'écrit en termes massiques :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{V}) = -\nabla \cdot \vec{j}_i + r_i \quad (\text{II.11})$$

Où  $r_i$  représente le taux de création ou de disparition d'une espèce due à une réaction chimique. La conservation de la masse du mélange implique que  $\sum_i r_i = 0$ . En sommant termes à termes toutes les équations de conservation des espèces, on obtient l'équation de conservation du mélange.

Le système d'équations de conservation décrivant les mouvements de convection naturelle d'un mélange constitué de  $n$  espèces est donc formé par  $(n + 2)$  équations :

- les équations de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie qui se rapportent au mélange.
- Les  $n$  équations des espèces.

Cependant, comme le terme de la poussée d'Archimède doit être modélisé et que les approximations de compressibilité sont définies à partir de la variation de la masse volumique du mélange, on préfère souvent utiliser  $(n - 1)$  équations des espèces et rajouter l'équation de conservation de masse du mélange.

- Pour un écoulement incompressible  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$  et donc :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho_i = \nabla \cdot (\rho_m D_{im} \nabla W_i) + r_i \quad (r_i \text{ en } \text{kg} / \text{m}^2 \cdot \text{s}) \quad (\text{II.12})$$

- Si, de plus, la masse volumique du mélange est uniforme :

$$\rho_m D_{im} \nabla W_i = D_{im} \nabla \rho_i \quad (\text{II.13})$$

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla W_i = \nabla \cdot (D_{im} \nabla W_i) + \frac{r_i}{\rho_m}$$

Où :

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla c_i = \nabla \cdot (D_{im} \nabla c_i) + \frac{r_i}{M_i} \quad (r_i \text{ en } \text{kmol/kg.m}^3 \cdot \text{s}) \quad (\text{II.14})$$

Toutes ces expressions de l'équation de conservation de la masse du constituant «  $i$  » sont formellement similaires à l'équation de l'énergie. Les conditions aux limites les plus simples sont de type fraction massique (ou concentration) imposée ou bien flux massique (ou flux molaire) imposé.

#### 4. Hypothèses simplificatrices

Dans notre étude, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie sont simplifiées en tenant compte des hypothèses simplificatrices suivantes :

1. L'écoulement de convection naturelle de double diffusion est transitoire et bidimensionnel.
2. Le fluide est supposé Newtonien et incompressible.
3. L'approximation de Boussinesq est valide : la densité est supposée constante dans tous les termes des équations de quantité de mouvement, sauf dans le terme de gravité suivant  $y$ , où elle est exprimée par la formule :  

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)]$$
, avec  $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_C$ ,  $\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial C} \right]_T$ ,  
 $\beta_T > 0$  et  $\beta_C < 0$ . Les propriétés thermo-physiques sont considérés constants et sont estimés à la température de référence  $T_0$  et la concentration de référence  $C_0$ .
4. Pas de génération de chaleur volumétrique ( $\dot{q} = 0$ ) et la dissipation visqueuse est supposée négligeable ( $\Phi = 0$ ).
5. On néglige le transfert d'énergie par rayonnement, ainsi que l'effet de Soret (rend compte de la contribution du gradient de température au flux massique) et l'effet de Dufour (rend compte de la contribution du gradient de concentration au flux thermique).
6. L'effet de Joule est négligeable. Ceci est justifié par l'estimation des nombres adimensionnels des métaux liquides et des semi-conducteurs (Gelfgat et Yoeseph, 2001). En effet, le rapport de l'induction du courant électrique et du champ magnétique est défini par le nombre de Prandtl magnétique :

$$P_m = \mu_0 \sigma \nu \quad (\text{II.15})$$

Où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique,  $\sigma$  est la conductivité électrique, et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

Pour les métaux liquides, ce nombre est de l'ordre de  $10^{-7}$ . Par ailleurs, l'effet de Joule est défini par le terme source adimensionnelle :

$$\begin{aligned} q &= \frac{H^2}{C_p \rho \nu (T_h - T_c)} \cdot \frac{J^2}{\sigma} \\ &= \frac{\sigma \cdot \nu \cdot B_0^2}{C_p \rho (T_h - T_c)} [v \times B]^2 \\ &= D \cdot \frac{Ha^2}{Gr} [v \times B]^2 \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

avec :

$$D = \frac{g \beta H}{C_p} = C^{te}$$

En plus, pour les métaux liquides, la capacité calorifique est de l'ordre de  $10^3$  [ $J/kg.K$ ] et le coefficient d'expansion thermique  $\beta$  est de l'ordre de  $10^{-5}$  [ $K^{-1}$ ]. Donc, pour une dimension de la cavité de  $L = 0.01$  [ $m$ ],  $Ha < 10^2$  et  $Gr > 10^4$  (ce sont les valeurs prises dans nos calculs), on aura :  $D \times \frac{Ha^2}{Gr} \approx 10^{-8}$ . Par conséquent, l'effet de Joule sera négligé (Gelfgat et Yoeseph, 2001 ; Bouabdallah et Bessaih, 2012).

## 5. Ecoulement avec un champ magnétique

L'écoulement du fluide de la convection naturelle double diffusive peut être exposé à un champ magnétique extérieur uniforme et orienté arbitrairement. Pour cela, on introduit les définitions suivantes à propos du vecteur de courant électrique  $\vec{J}$  et les forces électromagnétiques  $\vec{F}_{EM}$  dans les équations de quantité de mouvement. Le vecteur du champ magnétique est :

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$\begin{cases} B_0 = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\ Tang(\gamma) = B_y / B_x \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  : Vecteurs unitaires des directions  $x$  et  $y$ , respectivement.

- $\gamma$  : Angle de l'orientation.  
 $B_x$  : Composante horizontale du champ magnétique.  
 $B_y$  : Composante verticale du champ magnétique.  
 $B_0$  : Résultante du champ magnétique.

Le vecteur de courant électrique  $\vec{J}$  est défini par l'application de la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma[-\vec{\nabla}\varphi + \vec{V} \wedge \vec{B}] \quad (\text{II.19})$$

Où  $\vec{V} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$  : Vecteur vitesse dans le plan  $x$ - $y$ . Par ailleurs, le vecteur du courant électrique est conservatif, alors :

$$\text{div}\vec{J} = 0 \quad (\text{II.20})$$

La force électromagnétique  $\vec{F}_{EM}$  générée par le potentiel électrique  $\varphi$  et le champ magnétique, qui s'appelle *la force de Lorentz*, est définie par :

$$\vec{F}_{EM} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.21})$$

Tant que les frontières de la cavité sont supposées électriquement isolantes, donc le potentiel électrique  $\varphi$  est constant, ce qui permet de réécrire les équations (Eq. II.19) et (Eq. II.21) comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \vec{J} &= \sigma[\vec{V} \wedge \vec{B}] \\ \vec{F}_{EM} &= \sigma[\vec{V} \wedge \vec{B}] \wedge \vec{B} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.22})$$

## 6. Formulation des équations de transport du problème physique étudié

En tenant compte des hypothèses précédentes, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et de concentration deviennent alors :

- Equation de la continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.23})$$

- Equation de quantité de mouvement suivant  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_{EMX} \quad (\text{II.24})$$

- Equation de quantité de mouvement suivant y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta_T(T - T_0) + g\beta_C(C - C_0) + f_{EMY} \quad (\text{II.25})$$

- Equation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(u C_p T) + \frac{\partial}{\partial y}(v C_p T) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{II.26})$$

- Equation de concentration

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (\text{II.27})$$

Les expressions des composantes de la force de Lorentz suivant les directions  $x$  et  $y$  (Eq. II.22) sont explicitement comme suit :

$$f_{EMX} = \frac{\sigma}{\rho} (u B_x^2 - v B_x B_y) \quad (\text{II.28})$$

$$f_{EMY} = \frac{\sigma}{\rho} (u B_x B_y - v B_y^2) \quad (\text{II.29})$$

## 7. Equations du problème sous forme adimensionnelle

On introduit les variables adimensionnelles pour réduire le nombre de paramètres et faciliter notre étude. Pour cela, nous avons pris les grandeurs de référence par rapport auxquelles toutes les variables seront normalisées.

- Les grandeurs de références sont :

$L^2 / \nu$  : Temps caractéristique.

$L$  : Longueur caractéristique.

$\frac{\nu}{L}$  : Vitesse caractéristique.

$(T_1 - T_2)$  : Température caractéristique.

$(C_1 - C_2)$  : Concentration caractéristique.

$\rho_0 \left( \frac{\nu}{L} \right)^2$  : Pression caractéristique.

- Les variables adimensionnelles sont :

$$X = x/L, \quad Y = y/L$$

$$\tau = t / (L^2 / \nu), \quad U = u / (\nu / L), \quad V = v / (\nu / L)$$

$$P = pL^2 / \rho v^2, \quad \theta = \frac{(T - T_2)}{(T_1 - T_2)}, \quad \Phi = \frac{(C - C_2)}{(C_1 - C_2)}$$

Les équations adimensionnelles donnant la vitesse, la température, et la pression dans le domaine carré ( $0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1$ ) sont :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.30})$$

- Equation de quantité de mouvement suivant  $X$  :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + F_{EMX} \quad (\text{II.31})$$

- Equation de quantité de mouvement suivant  $Y$  :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{Ra_T}{Pr}(\theta - N\Phi) + F_{EMY} \quad (\text{II.32})$$

où  $F_{EMX}$  et  $F_{EMY}$  sont, respectivement, les forces de Lorentz adimensionnelles suivant les directions  $X$  et  $Y$  (Gelfgat et Yoeseph, 2001 ; Bessaih et Bouabdallah, 2008) :

$$F_{EMX} = Ha^2 \left[ V \cos(\gamma) \sin(\gamma) - U \sin^2(\gamma) \right] \quad (\text{II.33.a})$$

$$F_{EMY} = Ha^2 \left[ U \cos(\gamma) \sin(\gamma) - V \cos^2(\gamma) \right] \quad (\text{II.33.b})$$

où :  $Ha = B_0 L \sqrt{\sigma / \rho \nu}$  est le nombre de Hartmann (c'est le rapport des forces magnétiques aux forces visqueuses).

- **Equation de l'énergie**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.34})$$

- **Equation de concentration**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial Y} = \frac{1}{Le Pr} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.35})$$

Dans les équations (Eq. II.32, Eq. II.34 et Eq. II.35),  $N$  est le rapport des forces de flottabilité :  $N = \frac{Ra_S}{Ra_T Le}$ . La valeur négative du  $N$  provoque l'augmentation de la convection

(forces de flottabilités coopératives). Cependant, la valeur positive du  $N$  provoque des forces de flottabilité opposantes, les nombres adimensionnels sont présentés au [Tableau II.1](#).

Tableau II.1. Signification physique des nombres adimensionnels.

Nombre	Définition	Signification physique
Hartmann	$Ha = B_0 L \sqrt{\sigma / \rho \nu}$	Rapport de la force magnétique à la force visqueuse.
Lewis	$Le = \frac{\alpha}{D}$	Rapport de la diffusivité thermique à la diffusivité massique.
Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	Rapport de la viscosité cinématique à la diffusivité thermique, c'est une comparaison entre les épaisseurs des couches limites de quantité de mouvement et thermique.
Rayleigh massique	$Ra_S = \frac{(g\beta_S \Delta C L^3)}{\nu D}$	Rapport entre les forces d'Archimède massiques et les forces de viscosité.
Rayleigh thermique	$Ra_T = \frac{(g\beta_T \Delta T L^3)}{\nu \alpha}$	Rapport entre les forces d'Archimède thermiques et les forces de viscosité.
Schmidt	$Sc = \frac{\nu}{D} = Le.Pr$	Rapport de la viscosité cinématique à la diffusivité solutale, c'est une indication de la grandeur de la couche limite de quantité de mouvement et la couche limite solutale.

## 8. Conditions initiales et aux limites

### 8.1 Conditions initiales

Les conditions initiales du problème considéré pour les deux cas des gradients coopérants où opposants sont données comme suit :

- Au  $\tau = 0$  :  $U = V = 0, \theta = \Phi = 1$  (II.36)

### 8.2 Conditions aux limites hydrodynamiques

On considère que la condition de non glissement dans toutes les parois soit vérifiée :

$$\circ \text{ À } X = 0, \forall Y; U = V = 0 \quad (\text{II.37a})$$

$$\circ \text{ À } X = 1, \forall Y; U = V = 0 \quad (\text{II.37b})$$

$$\circ \text{ À } Y = 0, \forall X; U = V = 0 \quad (\text{II.37c})$$

$$\circ \text{ À } Y = 1, \forall X; U = V = 0 \quad (\text{II.37d})$$

### 8.3 Conditions aux limites thermiques et solutales

Les conditions aux frontières sur les deux parois horizontales adiabatiques et imperméables sont exprimées par :

$$\bullet \text{ À } Y = 0, \forall X; \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0 \text{ (Paroi inférieure, adiabatique imperméable)} \quad (\text{II.38a})$$

$$\bullet \text{ À } Y = 1, \forall X; \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0 \text{ (Paroi supérieure, adiabatique imperméable)} \quad (\text{II.38b})$$

Et pour les parois verticales, on distingue deux cas :

- Cas coopérant (Figure II.2) :

$$- \text{ À } X = 0, \forall Y; \theta = 1, \Phi = 0 \quad (\text{Paroi chaude}) \quad (\text{II.39a})$$

$$- \text{ À } X = 1, \forall Y; \theta = 0, \Phi = 1 \quad (\text{Paroi froide}) \quad (\text{II.39b})$$

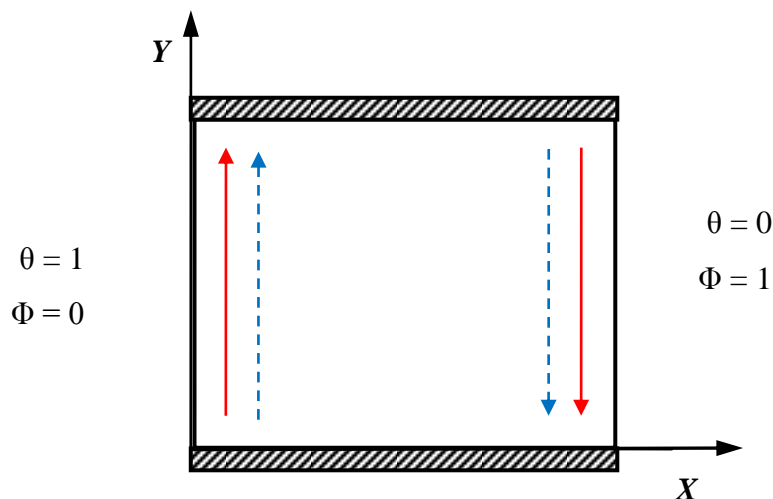


Figure II.2. Conditions aux limites dans le cas des gradients coopérants.

- Cas opposant (Figure II.3)

$$- \text{À } X = 0, \forall Y; \theta = 1, \Phi = 1 \quad (\text{II.40a})$$

$$- \text{À } X = 1, \forall Y; \theta = 0, \Phi = 0 \quad (\text{II.40b})$$

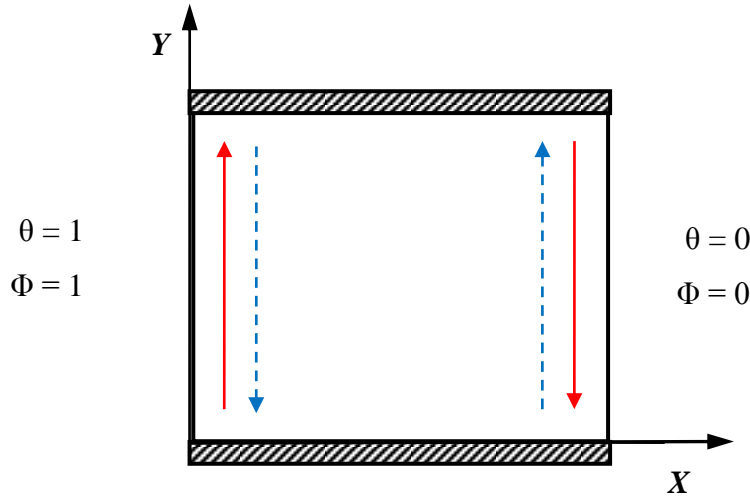


Figure II.3. Conditions aux limites dans le cas des gradients opposants.

## 9. Transfert thermique et massique

Le calcul des taux de transfert de chaleur et de masse au niveau des parois verticales est exprimé à travers les nombres de Nusselt local et de Sherwood local adimensionnels :

$$Nu = \left( - \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \quad (\text{II.41})$$

$$Sh = \left( - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \quad (\text{II.42})$$

On définit les nombres de Nusselt et Sherwood moyens par :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 \left( - \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) dY \quad (\text{II.43})$$

$$\overline{Sh} = \int_0^1 \left( - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) dY \quad (\text{II.44})$$

## **10. Conclusion du chapitre II**

Dans ce chapitre, nous avons établi les équations de la dynamique, thermique, et massique du problème de la convection naturelle à double diffusion avec et sans champ magnétique, ainsi que les conditions initiales et aux limites associées. Il s'agit d'un système complexe formé d'équations aux dérivées partielles qui sont du second ordre.

- La résolution analytique de ces équations de conservation est pratiquement impossible.
- Les non-linéarités visibles dans les équations sont principalement à l'origine des difficultés pour obtenir une solution analytique.

Pour cela, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution des équations du modèle mathématique. Dans le présent travail, la méthode des volumes finis est choisie pour la discrétisation des équations. Les questions relatives à la technique de résolution, au traitement, et à l'organigramme de résolution sont abordées dans le Chapitre suivant.

# Chapitre III :

## Méthode Numérique & Organigramme de Résolution

### 1. Introduction

La forme finale de notre modèle mathématique (Eqs. II.30-32 et Eqs. 34-35) régissant la convection naturelle à double diffusion est un système d'équations aux dérivées partielles, paraboliques et non linéaires d'une part, complexes et couplées d'autre part. Ces raisons ont fait que la résolution par voie analytique est pratiquement impossible. Dans ce cas, le recours aux méthodes numériques est indispensable. Parmi ces méthodes numériques de discrétisation, on cite la méthode des différences finies, des éléments finis et des volumes finis.

La méthode que nous avons utilisée dans notre étude est celle des volumes finis. Cette méthode consiste à intégrer les équations de transport sur un ensemble discret de volumes finis jointifs appelés *volumes de contrôle*. Elle permet une discrétisation conservative de masse, de quantité de mouvement, de l'énergie et de concentration dans tous les volumes de contrôle, et donc à travers tout le domaine de calcul. Elle permet aussi un traitement plus correct des milieux hétérogènes et facilite de la linéarisation des termes sources (Patankar, 1980).

### 2. Maillage

Le domaine physique de calcul est divisé en un certain nombre de volumes. Chaque volume de contrôle a pour dimension  $\Delta X \times \Delta Y \times 1$ , les faces d'un volume de contrôle typique sont localisées aux points  $e, w, n, s$  (voir Figure III.1). Notons que  $P$  est le centre du volume de contrôle considéré et  $E, W, N$  et  $S$  : sont les centres des volumes de contrôle adjacents situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud.

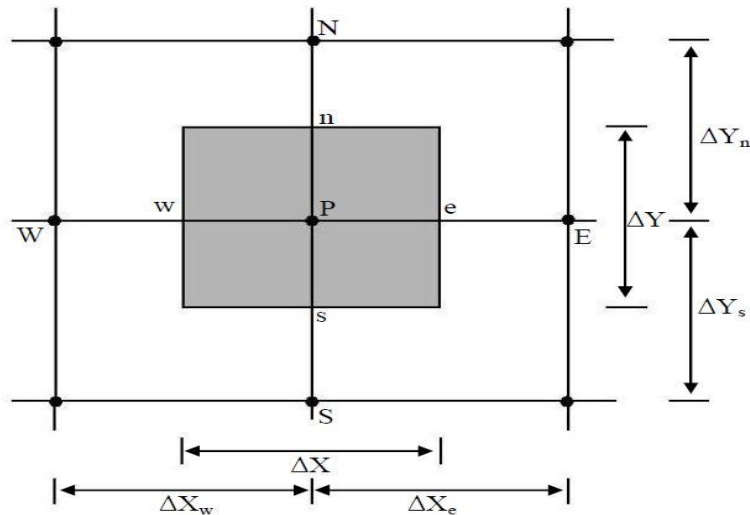
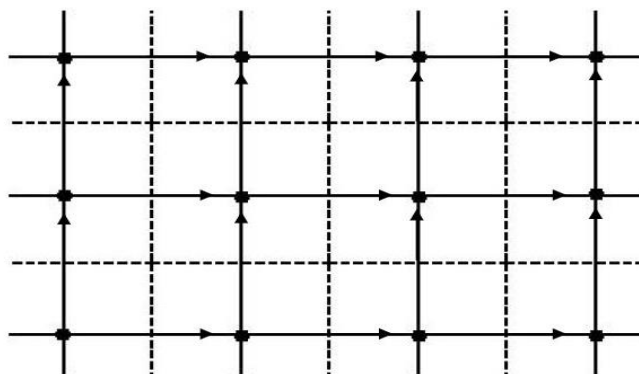


Figure III.1. Volume de contrôle associé à la variable générale de transport.

### 3. Stockage des variables

Les variables dépendantes qui sont des quantités scalaires : pression, température et concentration ( $P, \theta, \Phi$ ) sont stockées aux centres des volumes finis (Figure III.2). Par contre, les quantités vectorielles (composantes  $U, V$ ) sont localisées aux interfaces du volume de contrôle  $e, w, n, s$  (Figure III.2). Les équations de quantité de mouvement sont résolues dans des volumes finis décalés vers la droite (Figure III.3) et vers le haut (Figure III.4). Ce type de maillage permet une meilleure estimation des flux convectifs et une bonne estimation des forces de pression dans les équations de quantité de mouvement.



- : Les variables scalaires ( $P, \theta, \Phi$ ) sont stockées aux nœuds du maillage.
- : Les composantes de la vitesse horizontale  $U$  et  $F_{EMX}$  sont stockées sur la face du volume de contrôle associé à la variable scalaire.
- ↑ : Les composantes de la vitesse verticale et  $F_{EMY}$  sont stockées sur la face du volume de contrôle associé à la variable scalaire.

Figure III.2. Stockage des variables scalaires et les quantités vectorielles.

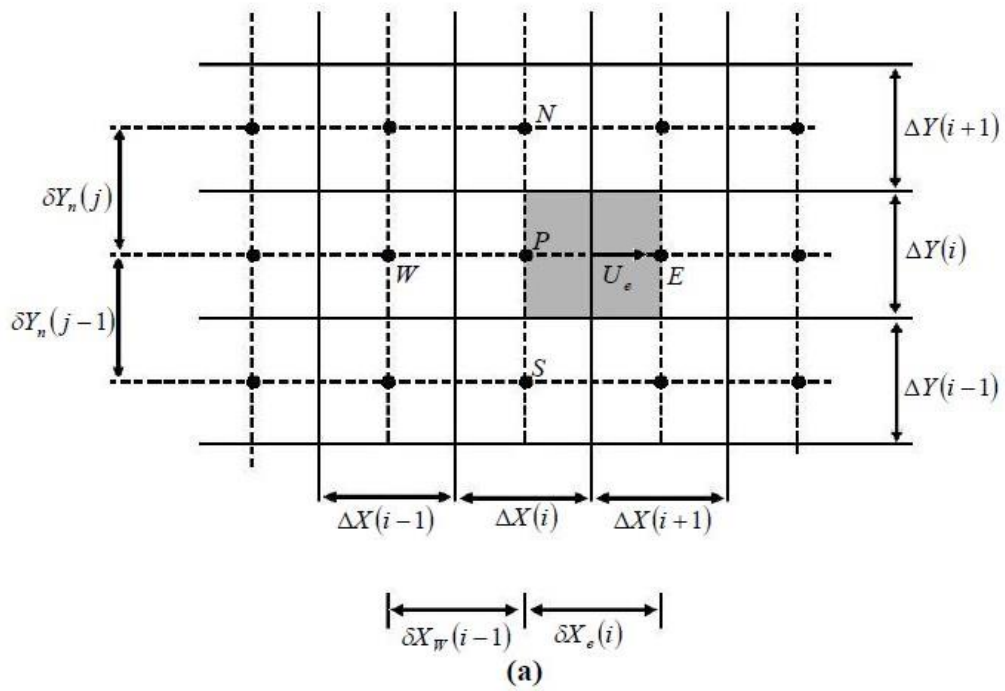


Figure III.3. Volume de contrôle décalé vers la droite.

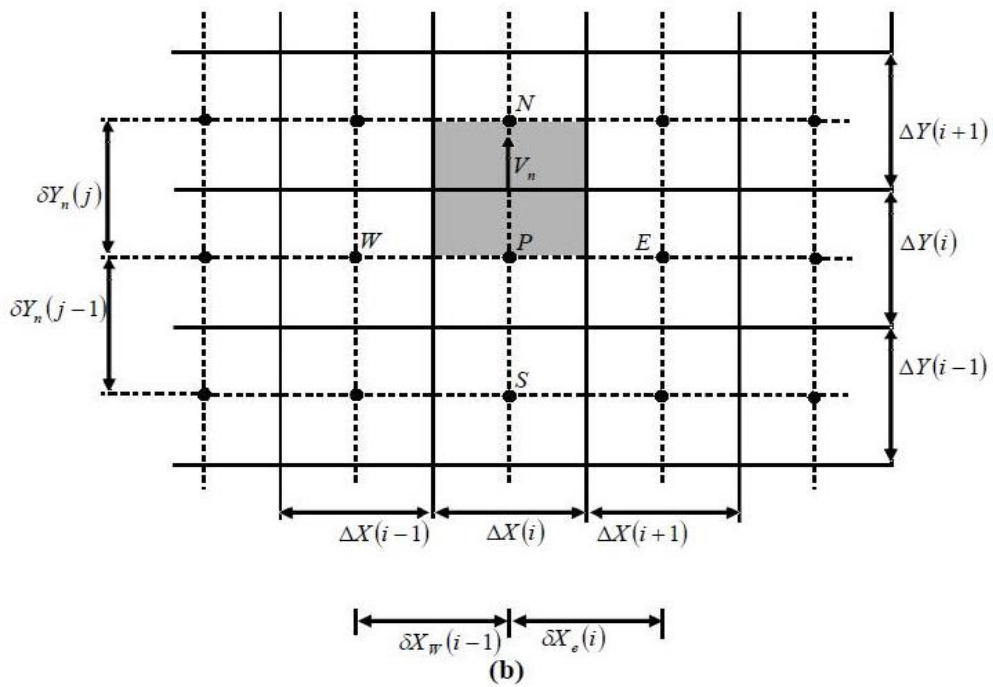


Figure III.4. Volume de contrôle décalé vers le haut.

#### 4. Forme générale de l'équation de transport

Pour une situation bidimensionnelle, en régime instationnaire, l'équation de transport peut s'écrire sous la forme indicielle suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X_j} (U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right) + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

Telle que :

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$  : Le terme temporel qui représente l'accumulation de la variable  $\phi$  dans le temps.

$\frac{\partial}{\partial X_j} (U_j \phi)$  : Le terme d'advection qui représente le transport de la variable  $\phi$  par convection.

$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X_j} \right)$  : Le terme diffusif qui correspond au transport de la variable  $\phi$  par diffusion.

$S_\phi$  : Le terme source qui représente la génération de la variable  $\phi$  dans le volume de contrôle.

Pour notre problème, nous spécifions la définition de  $\phi$ ,  $\Gamma$  et  $S_\phi$  dans le [Tableau III.1](#).

*Tableau III.1. Définition de  $\phi$ ,  $\Gamma$  et  $S_\phi$  des équations gouvernantes.*

Équation	$\Phi$	$\Gamma$	$S_\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	1	$-\frac{\partial P}{\partial X} + F_{EMX}$
Quantité de mouvement suivant Y	V	1	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Ra_T}{Pr}(\theta - N\Phi) + F_{EMY}$
Énergie	$\Theta$	$\frac{1}{Pr}$	0
Concentration	$\Phi$	$\frac{1}{Sc}$	0

Le taux de transfert de chaleur et de masse sur les parois actives de la cavité (paroi chaude et froide) est déterminé par les nombres adimensionnels de Nusselt ( $Nu$ ) et Sherwood ( $Sh$ ) (locaux et moyens).

## 5. Discrétisation des équations

Les équations aux dérivées partielles adimensionnelles, présentées dans le Chapitre II (Eq.II.10-14), peuvent se mettre sous la forme générale d'une équation de transport.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\phi)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) + S_\phi \quad (\text{III.2})$$

### 5.1. Intégration de l'équation générale de transport

On fait l'intégration sur un volume de contrôle et sur le temps, on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial U\phi}{\partial X} dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial V\phi}{\partial Y} dXdYd\tau = \\ & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e S_\phi dXdYd\tau \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

L'intégration des différents termes s'effectue comme suit :

- **Terme de la variation temporelle**

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dXdYd\tau = (\phi_P^{n+1} - \phi_P^n) \Delta X \Delta Y \quad (\text{III.3a})$$

$\phi_P^{n+1}$  et  $\phi_P^n$  représentent les valeurs du  $\phi$  au point  $P$  aux temps  $\tau$  et  $\tau + \Delta\tau$ , respectivement

- **Termes de transport convectif**

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial U\phi}{\partial X} dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial V\phi}{\partial Y} dXdYd\tau = \\ & [(U\phi)_e - (U\phi)_w]^n \Delta Y \Delta \tau + [(V\phi)_n - (V\phi)_s]^n \Delta X \Delta \tau \end{aligned} \quad (\text{III.3b})$$

- **Termes de transport diffusif**

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dXdYd\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) dXdYd\tau = \\ & \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_e - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_w \right]^n \Delta Y \Delta \tau + \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_n - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Big|_s \right]^n \Delta X \Delta \tau \end{aligned} \quad (\text{III.3c})$$

- **Terme source**

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^e \int_w^e S_\phi dXdYd\tau = \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \Delta \tau \quad (\text{III.3d})$$

Après intégration et division par  $\Delta\tau$ , l'équation (Eq.III.1) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{(\phi_P^{n+1} - \phi_P^n)}{\Delta\tau} \Delta X \Delta Y + [(U\phi)_e - (U\phi)_w]^n \Delta Y + [(V\phi)_n - (V\phi)_s]^n \Delta X = \\ & \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial X} \right)_w \right]^n \Delta Y + \left[ \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial\phi}{\partial Y} \right)_s \right]^n \Delta X + \overline{S_\phi} \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Où :  $n$  et  $n+1$  correspondent aux incréments du temps  $t$  et  $t+\Delta t$ .

$$\left. \begin{aligned} \phi_e &= \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, & \phi_w &= \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \\ \phi_n &= \frac{\phi_N + \phi_P}{2}, & \phi_s &= \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4a})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial X} \Big|_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta X)_e}, & \frac{\partial\phi}{\partial X} \Big|_w &= \frac{\phi_W - \phi_P}{(\delta X)_w} \\ \frac{\partial\phi}{\partial Y} \Big|_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta Y)_n}, & \frac{\partial\phi}{\partial Y} \Big|_s &= \frac{\phi_S - \phi_P}{(\delta Y)_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4b})$$

En remplaçant ces expressions (Eq. III.4a) et (Eq. III.4b) dans l'équation (Eq. III.4) et après réarrangement, on obtient :

$$A_P \phi_P^{n+1} = A_E \phi_E^{n+1} + A_W \phi_W^{n+1} + A_N \phi_N^{n+1} + A_S \phi_S^{n+1} + b \quad (\text{III.5})$$

$$\left. \begin{aligned} A_E &= D_e A(P_e) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(P_w) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(P_n) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(P_s) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5a})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \quad (\text{III.5b})$$

$$A_P^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta\tau} \quad (\text{III.5c})$$

Et :

$$b = \overline{S_P} \Delta X \Delta Y + A_P^0 \phi_P^n \quad (\text{III.5d})$$

Où :

$A_P^0$  est le coefficient de la variable  $\phi$  au temps  $\tau$ .

$\phi_P^n$  est la valeur de  $\phi$  calculée au temps  $\tau$ .

$\overline{S_P}$  est le terme source.

- **Les flux convectifs**

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y, & F_w &= U_w \Delta Y \\ F_n &= U_n \Delta X, & F_s &= U_s \Delta X \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5e})$$

- **Les coefficients de diffusion**

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta Y}{(\delta X)_w} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta Y}{(\delta X)_n}, & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta Y}{(\delta X)_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5f})$$

- **Les nombres de Peclet**

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e}, & P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n}, & P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5g})$$

## 5.2 Différents schémas de discrétisation

Les profils approximatifs, décrivant la variation de  $\phi$  entre les nœuds, sont exprimés par la fonction  $A(|P|)$  spécifique pour chaque schéma numérique. Patankar (1980) a présenté les cinq schémas présentés au Tableau III.2.

*Tableau III.2. Fonction  $A(|P|)$  pour différents schémas numériques (Patankar, 1980).*

Schéma	Formule de la fonction $A( P )$
Différences centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\text{Max} [0, 1 - 0.5 P ]$
Power Law	$\text{Max} [0, (1 - 0.1 P )^5]$
Exponentiel	$ P  / [\text{Exp}( P ) - 1]$

Dans notre étude, on a considéré une discrétisation des équations aux dérivés partielles en utilisant le schéma numérique des différences centrées pour évaluer les flux convectifs à l'interface de chaque volume de contrôle. L'algorithme *SIMPLER* a été utilisée pour résoudre le couplage vitesse pression et l'algorithme *TDMA* pour la résolution des systèmes d'équations résultantes de la discrétisation.

### 5.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant X sur un volume de contrôle décalé vers la droite (voir Figure III.3a) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)U^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)U^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)U^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)U^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)U^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} A_E(i, j) &= D_e A(P_e) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) &= D_w A(P_w) + \max(F_w, 0) \\ A_N(i, j) &= D_n A(P_n) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) &= D_s A(P_s) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6a})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (\text{III.6b})$$

$$A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.6c})$$

- **Discrétisation du terme source**

$$b(i, j) = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \left( -\frac{\partial P}{\partial X} \right) dXdYd\tau + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} (U^n) dXdY + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^{s_e} F_{EMX} dXdYd\tau \quad (\text{III.6d})$$

Après l'intégration, le terme source devient :

$$b(i, j) = [P(i, j) - P(i+1, j)]\Delta Y(j) + \frac{U^n(i, j)}{\Delta \tau} \Delta X(i)\Delta Y(j) + F_{EMX}(i, j)\Delta Y(j)\Delta X(i) \quad (\text{III.6e})$$

- **Les termes convectifs**

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y = \frac{1}{2} [U(i+1, j) + U(i, j)] \Delta Y(j) \\ F_w &= U_w \Delta Y = \frac{1}{2} [U(i-1, j) + U(i, j)] \Delta Y(j) \\ F_n &= V_n \delta X_e(i) = \frac{1}{2} [V(i, j) + V(i+1, j)] \delta X_e(i) \\ F_s &= V_s \delta X_e(i) = \frac{1}{2} [V(i, j-1) + V(i+1, j-1)] \delta X_e(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6f})$$

- **Les termes diffusifs**

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Delta Y(j)}{\Delta X(i+1)}, & D_w &= \frac{\Delta Y(j)}{\Delta X(i-1)} \\ D_n &= \frac{\delta X_e(i)}{\delta Y_n(j)}, & D_s &= \frac{\delta X_e(i)}{\delta Y_s(j-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6g})$$

### 5.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant Y sur un volume de contrôle décalé vers le haut (voir Figure III. 3b) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)V^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)V^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)V^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)V^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)V^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (\text{III.7})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (\text{III.7a})$$

Avec :

$$A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.7b})$$

- **Discrétisation du terme source**

$$b(i, j) = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{w}^e \left( -\frac{\partial P}{\partial Y} \right) dXdYd\tau + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{w}^e (V^n) dXdY + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{w}^e \left( \frac{Ra_T}{Pr} \times \theta \right) dXdYd\tau - \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{w}^e \left( \frac{Ra_T}{Pr} \times N \times \Phi \right) dXdYd\tau + \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \int_{s_w}^s \int_{w}^e F_{EMX} dXdYd\tau \quad (\text{III.7c})$$

Après l'intégration, le terme source dévie :

$$b(i, j) = [P(i, j) - P(i+1, j)]\Delta X(i) + \frac{Ra_T}{Pr} \left[ \frac{[\theta(i, j) + \theta(i, j+1)]}{2} + N \times \frac{[\Phi(i, j) + \Phi(i, j+1)]}{2} + \frac{V^n(i, j)}{\Delta \tau} \right] \Delta X(i)\delta Y(j) + F_{EMY}(i, j)\Delta X(i)\delta Y(j) \quad (\text{III.7d})$$

- **Les termes convectifs**

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \delta Y_n = \frac{1}{2} [U(i, j) + U(i, j+1)] \delta Y_n(j) \\ F_w &= U_w \delta Y_n = \frac{1}{2} [U(i-1, j) + U(i-1, j+1)] \delta Y_n(j) \\ F_n &= V_n \Delta X(i) = \frac{1}{2} [V(i, j) + V(i, j+1)] \Delta X(i) \\ F_s &= V_s \Delta X(i) = \frac{1}{2} [V(i, j-1) + V(i, j)] \Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.7e})$$

- *Les termes diffusifs*

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\delta Y_n(j)}{\delta X_e(i)}, & D_w &= \frac{\delta Y(j)}{\delta X_w(i-1)} \\ D_n &= \frac{\Delta X(i)}{\Delta Y(j+1)}, & D_s &= \frac{\Delta X(i)}{\Delta Y(j)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.7f})$$

### 5.5 Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'intégration de l'équation de l'énergie adimensionnelle (Eq. II.34) sur un volume de contrôle typique (voir la Figure III.1) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)\theta^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\theta^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)\theta^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)\theta^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)\theta^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (\text{III.8})$$

Où :

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (\text{III.8a})$$

Avec :

$$A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.8b})$$

$$b(i, j) = \frac{\theta^n(i, j)}{\Delta \tau} \Delta X(i)\Delta Y(j) \quad (\text{III.8c})$$

- *Les termes convectifs :*

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y = U(i, j)\Delta Y(j) \\ F_w &= U_w \Delta Y = U(i-1, j)\Delta Y(j) \\ F_n &= V_e \Delta X = V(i, j)\Delta X(i) \\ F_s &= V_s \Delta X = V(i, j-1)\Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8d})$$

- *Les coefficients de diffusion :*

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta Y}{(\delta X)_w} \\ D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta X}{(\delta Y)_n}, & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta X}{(\delta Y)_s} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8e})$$

Où :

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \frac{1}{\text{Pr}} \quad (\text{voir Tableau III.1}) \quad (\text{III.8f})$$

## 5.6 Discrétisation de l'équation de concentration

L'intégration de l'équation de conservation de l'espèce adimensionnelle (II.23) sur un volume de contrôle typique (voir la figure III.1) donne l'équation algébrique :

$$A_p(i, j)\Phi^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\Phi^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)\Phi^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)\Phi^{n+1}(i, j+1) \\ + A_S(i, j)\Phi^{n+1}(i, j-1) + b(i, j) \quad (\text{III.9})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + A_p^0(i, j) \quad (\text{III.9a})$$

$$\text{Avec :} \quad A_p^0(i, j) = \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.9b})$$

$$b(i, j) = \frac{\Phi^n(i, j)}{\Delta \tau} \Delta X(i)\Delta Y(j) \quad (\text{III.9c})$$

- **Les termes convectifs :**

$$\left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y = U(i, j)\Delta Y(j) \\ F_w &= U_w \Delta Y = U(i-1, j)\Delta Y(j) \\ F_n &= V_e \Delta X = V(i, j)\Delta X(i) \\ F_s &= V_s \Delta X = V(i, j-1)\Delta X(i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9d})$$

- **Les termes diffusifs :**

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, D_w = \frac{\Gamma_w \Delta Y}{(\delta X)_w}, D_n = \frac{\Gamma_n \Delta X}{(\delta Y)_n} \text{ et } D_s = \frac{\Gamma_s \Delta X}{(\delta Y)_s} \quad (\text{III.9e})$$

Où :

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \frac{1}{Sc} \quad (\text{Voir Tableau III.1}) \quad (\text{III.9f})$$

## 6. Algorithme SIMPLER

C'est l'abréviation de Semi-Implicite-Method-Pressure-Linked-Equation-Revised. Il a été introduit par Patankar (1980). Dans cet algorithme, l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation pour la correction de pression. Le champ de pression intermédiaire est donc obtenu directement sans utiliser de correction.

Les différentes séquences de l'Algorithme SIMPLER sont les suivantes:

- Estimer le champ de vitesse.
- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement discrétisées, et les pseudo-vitesses.
- Calculer les coefficients de l'équation de pression.

- Considérer le champ de pression de l'étape 3.
- Calculer le terme source.
- Corriger le champ de vitesse.
- Déterminer la solution des équations de discrétisation correspondantes à la température et à la concentration.
- S'il y a une convergence, arrêtez le calcul, sinon retourner à l'étape 2.

## 7. Méthode de résolution

Le système d'équations algébriques non linéaires obtenu après la discrétisation contient  $(il - 2) \times (jl - 2)$  équations, chaque équation algébrique s'écrit comme suit :

$$A_p \Phi_p = \sum_{i=E,W,N,S} A_i \Phi_i + S_\Phi \quad (\text{III.10})$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[A] [\Phi] = [S_\Phi] \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$[A]$  : Matrice de  $(il-2) \times (jl-2)$  éléments.

$[\Phi]$  : Vecteur des inconnues  $\Phi(i, j)$ .

### 7.1 Méthode de balayage

La résolution du système est basée sur la méthode de résolution semi-itérative. Elle consiste à faire les balayages ligne par ligne ou colonne par colonne à travers le domaine d'étude.

Pour déterminer la valeur de la variable ( $\Phi$ ) sur la colonne ( $i$ ) ou la ligne ( $j$ ), nous supposons que les valeurs de celle-ci sont connues sur les colonnes ( $i - 1$ ) et ( $i + 1$ ) ou sur les lignes ( $j - 1$ ) et ( $j + 1$ ), respectivement (système d'équations unidimensionnelles).

L'équation algébrique est réduite à une équation qui ne contient que trois inconnues (supposant le balayage ligne par ligne, donc  $\Phi_P, \Phi_N, \Phi_S$ ).

Pour le nœud  $(i, j)$  du maillage, l'équation algébrique pourra s'écrire :

$$\begin{aligned} -A_s(i, j)\Phi(i, j-1) + A_p(i, j)\Phi(i, j) - A_n(i, j)\Phi(i, j+1) \\ = A_e(i, j)\Phi(i+1, j) + A_w(i, j)\Phi(i-1, j) + S_\Phi(i, j) \end{aligned} \quad (\text{III. 12})$$

## 7.2 Méthode de TDMA (Algorithme de Thomas)

TDMA c'est l'abréviation de Tri-diagonal-Matrix-Algorithm. Le système des équations obtenu étant non linéaire, car les coefficients qui apparaissent dans l'équation de discrétisation dépendent des variables elles-mêmes.

On va résoudre le système d'équations itérativement par double balayage en utilisant l'Algorithme de THOMAS. L'Algorithme TDMA est une procédure de résolution des systèmes d'équations, posons :

- $a_j = A_P(i, j)$
- $b_j = A_N(i, j)$
- $c_j = A_S(i, j)$ .
- $d_j = A_E(i, j)\Phi(i+1, j) + A_W(i, j)\Phi(i-1, j) + S_\Phi(i, j)$

Donc l'équation (Eq.III.12) peut être réécrite sous la forme :

$$-c_j\Phi_{j-1} + a_j\Phi_j - b_j\Phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.13})$$

Pour tous les nœuds [ $j = 1$  à  $j = jl$ ] de la colonne ( $i$ ), nous avons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -c_1\Phi_0 + a_1\Phi_1 - b_1\Phi_2 = d_1 \\ -c_2\Phi_1 + a_2\Phi_2 - b_2\Phi_3 = d_2 \\ -c_3\Phi_2 + a_3\Phi_3 - b_3\Phi_4 = d_3 \\ \vdots \\ -c_{jl}\Phi_{jl-1} + a_{jl}\Phi_{jl} - b_{jl}\Phi_{jl+1} = d_{jl} \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

( $\Phi_0 = \Phi_{jl+1} = 0$  , Hors du domaine de calcul)

Donc :

$$c_1 = b_{jl} = 0 \quad (\text{III.15})$$

La première équation permet d'exprimer l'inconnue  $\Phi_1$  en fonction de l'inconnue  $\Phi_2$  :

$$\Phi_1 = -\frac{b_1}{a_1}\Phi_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.16})$$

Portons cette valeur de  $\Phi_1$  dans la seconde équation du système :

$$c_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\Phi_2 + \frac{d_1}{a_1}\right) + a_2\Phi_2 + b_2\Phi_3 = d_2 \quad (\text{III.17})$$

$$\left(-\frac{b_1 c_2}{a_1} + a_2\right) \Phi_2 = -b_2 \Phi_3 + d_2 - c_2 \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.18})$$

Nous avons aussi exprimé  $\Phi_2$  en fonction de  $\Phi_3$ , et ainsi de suite on exprimera chaque inconnue en fonction de la suivante. Supposons qu'on a obtenu :

$$\Phi_{j-1} = P_{j-1} \Phi_j + Q_{j-1} \quad (\text{III.19})$$

En portant cette valeur dans la  $j^{\text{eme}}$  équation du système, il vient :

$$c_j (P_{j-1} \Phi_j + Q_{j-1}) + a_j \Phi_j + b_j \Phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.20})$$

$$\Phi_j = -\frac{b_j}{c_j P_{j-1} + a_j} \Phi_{j+1} + \frac{d_j - c_j Q_{j-1}}{c_j P_{j-1} + a_j} \quad (\text{III.21})$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_j &= P_j \Phi_{j+1} + Q_j \\ P_j &= -\frac{b_j}{c_j P_{j-1} + a_j} \\ Q_j &= \frac{d_j - c_j Q_{j-1}}{c_j P_{j-1} + a_j} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.22})$$

En faisant  $j = 1$  dans les équations [Eq.III.19](#) et en comparant avec l'équation [Eq. III.14](#), nous pouvons voir que :

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 0 \\ Q_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.23})$$

Les équations ([Eq.III.22-23](#)) nous permettent de calculer aisément, étant donné :

$$P_0 = 0 \text{ et } Q_0 = 0, \text{ les couples } (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), \dots, (P_j, Q_j) \quad (\text{III.24})$$

Le calcul des coefficients  $P_j, Q_j$  a donc été rendu possible en utilisant un « premier balayage » de  $j = 1$  à  $jl$ . Nous allons maintenant effectuer un second balayage, de  $j = jl$  à 1, qui va nous permettre de calculer les inconnues. En effet, la dernière équation de ([Eq.III.20](#)) s'écrit :

$$c_{jl} \Phi_{jl-1} + a_{jl} \Phi_{jl} = d_{jl} \quad (\text{III.24})$$

D'où :

$$\Phi_{jl} = \frac{d_{jl} - c_{jl} Q_{jl-1}}{c_{jl} P_{jl-1} + a_{jl}} \quad (\text{III.25})$$

C'est-à-dire, d'après ([Eq. III.22](#)),  $i = n$  :

$$\Phi_{jl} = Q_{jl} \quad (\text{III.26})$$

On a aussi obtenu la valeur cherchée  $\Phi_{jl}$ , Nous déduisons :

$$\Phi_{jl-1} = P_{jl-1} \Phi_{jl} + Q_{jl-1} \text{ (Puis } \Phi_{jl-2}, \text{ etc..... Jusqu'à } \Phi_1) \quad (\text{III.27})$$

## 8. Critères de convergence

En régime permanent, la convergence de nos calculs a été vérifiée pour chaque incrément de temps par le calcul de bilan des flux traversant les parois verticales de la cavité :

- Le long de la paroi chaude imperméable :

$$q_{r1} = \sum_{j=2}^{jL-1} \left[ \frac{\theta(1, j) - \theta(2, j)}{dX(1)} \right] \Delta Y(j) \quad (\text{III.28a})$$

$$q_{s1} = \sum_{j=2}^{jL-1} \left[ \frac{\Phi(1, j) - \Phi(2, j)}{dX(1)} \right] \Delta Y(j) \quad (\text{III.28b})$$

- Le long de la paroi froide imperméable :

$$q_{2r} = \sum_{j=2}^{jL-1} \left[ \frac{\theta(il-1, j) - \theta(il, j)}{dX(il-1)} \right] \Delta Y(j) \quad (\text{III.29a})$$

$$q_{2s} = \sum_{j=2}^{jL-1} \left[ \frac{\Phi(il-1, j) - \Phi(il, j)}{dX(il-1)} \right] \Delta Y(j) \quad (\text{III.29b})$$

La convergence est satisfaite quand la tolérance ( $10^{-6} \leq \varepsilon \leq 4 \times 10^{-4}$ ) est respectée:

$$|q_1 - q_2| \leq \varepsilon \quad (\text{III.30})$$

A cet instant, la variation de n'importe quelle variable (U, V,  $\Phi$  et  $\theta$ ) entre deux instants consécutifs  $\tau$  et  $\tau + \Delta\tau$  est négligeable.

En régime transitoire (oscillatoire), on arrête le calcul après un nombre d'incrément de temps assez long, afin de s'assurer que les oscillations obtenues soient de nature physique. La conservation massique a été vérifiée pour chaque incrément de temps  $\Delta\tau$ .

## 9. Organigramme de résolution

Notre programme du calcul a été élaboré en langage *Fortran 90*. Les différentes étapes et séquences de calculs sont données sur l'organigramme présenté à la [Figure III. 5](#).

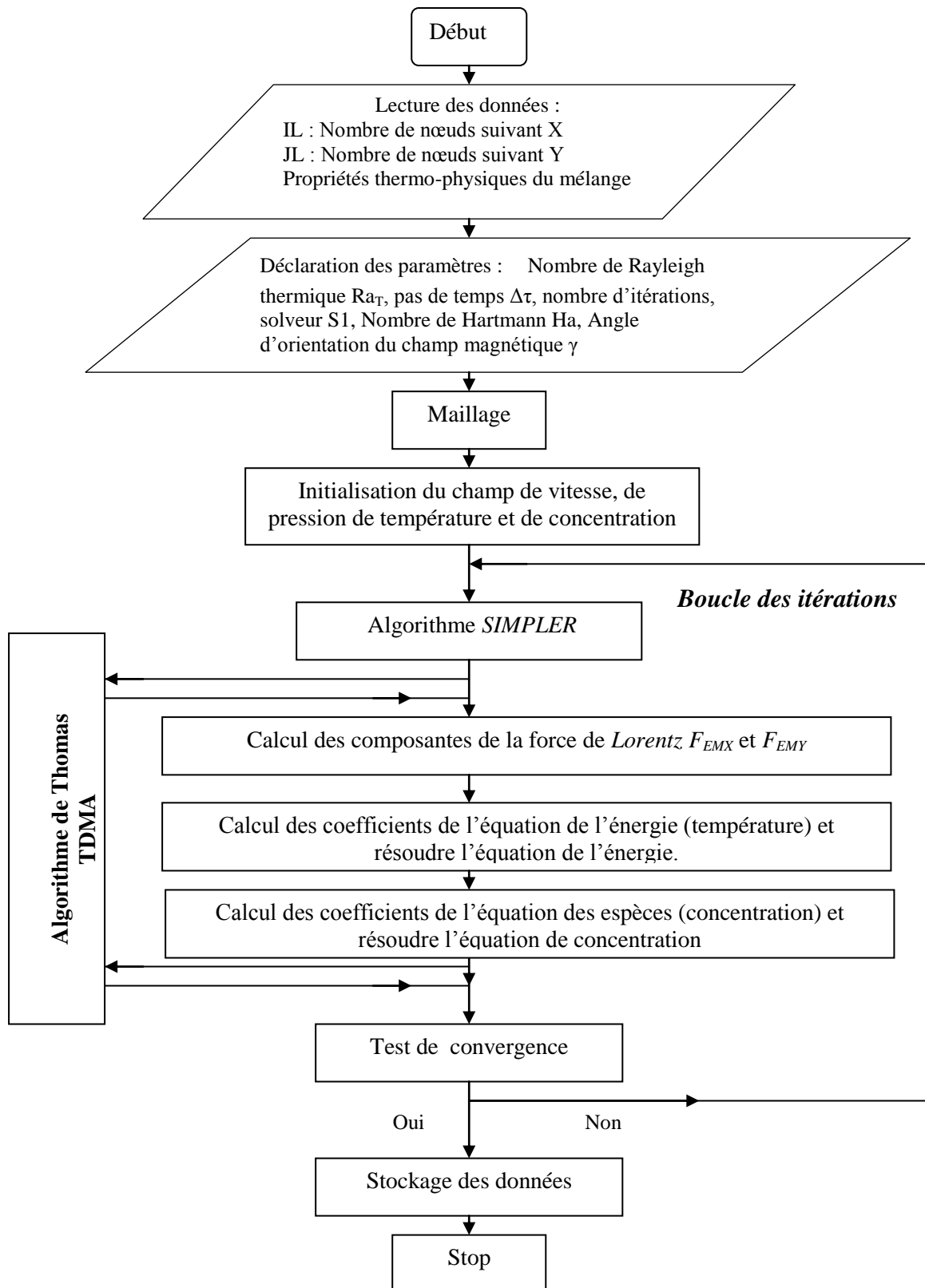


Figure III.5. Algorithme du programme de calcul.

## 10. Conclusion du Chapitre III

Au cours de ce Chapitre, nous avons présenté la méthode numérique des volumes finis d'une façon détaillée pour la discrétisation des équations gouvernantes du problème. En plus, nous avons présenté :

- l'Algorithme SIMPLER de résolution du couplage vitesse-pression et l'Algorithme TDMA pour la résolution des systèmes d'équations résultant de la discrétisation.
- Les schémas de discrétisation : schéma d'Euler du premier ordre, pour la discrétisation des termes temporels, et le schéma des différences centrées pour la discrétisation des termes spatiaux (convectifs et diffusifs).
- L'algorithme du programme de calcul qui récapitule les différents boucles et séquences de calcul numérique.

Les résultats obtenus de la simulation seront présentés et discutés dans les Chapitres IV et V.

## Chapitre IV

# Convection Naturelle à Double Diffusion dans un Mélange Binaire

### 1. Présentation des résultats

Les équations adimensionnelles gouvernantes (Eqs.II.30-35) du phénomène de convection à double diffusion en présence du champ magnétique, constituent le modèle magnétohydrodynamique. Ce modèle fait apparaître la dépendance de notre problème aux paramètres suivants :

- Le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$ .
- Le nombre de Schmidt,  $Sc$ .
- Le rapport des forces de flottabilité solutale/thermique,  $N$ .
- Le nombre de Prandtl,  $Pr$ .
- Le nombre de Hartmann,  $Ha$ .
- L'angle de l'orientation du champ magnétique,  $\gamma$ .

Dans cette Thèse, nous avons étudié numériquement la convection naturelle thermique solutale simultanément dans un mélange binaire en régime laminaire et oscillatoire. Par la suite, l'étude est faite en présence ou non du champ magnétique. La transition du régime laminaire-oscillatoire est également prise en compte dans le cas de deux mélanges : mélange à faible nombre de Prandtl,  $Pr = 0,71$  avec  $Sc = 3,5$  et un deuxième  $Pr = 10$  avec  $Sc = 100$  sous l'influence du champ magnétique pour un seul mélange. L'orientation du champ magnétique est étudiée pour deux directions : horizontale et verticale.

La détermination du seuil de la transition du régime laminaire-oscillatoire se réduit à la détermination d'un nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ) caractérisant l'écoulement sous-jacent, à partir duquel il devient instable (ne présente pas des solutions uniques quand le temps augmente).

L'exécution du code de calcul a été faite sur une station de calcul (Work Station) CPU Core 2 Quad Q9625, 3.00 GHZ - 12 Mo. L2. Le temps moyen de calcul pour un cas typique du régime oscillatoire est de l'ordre de 7 heures.

Du point de vue des systèmes dynamiques, quand un système rentre dans l'instabilité, il présente au début un caractère oscillatoire ou périodique, puis en raison du phénomène de bifurcation, ce système deviendra apériodique, et enfin, il rentre dans le chaos (où la turbulence). Les nombres de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ) caractérisant les écoulements périodiques sont des nombres critiques ; et par suite, elles leurs correspondent des fréquences d'oscillations des particules fluides, ces fréquences  $F_{Cr}$  peuvent être aussi considérées comme critiques.

Numériquement, pour détecter la transition physique, on effectuera une succession de calculs numériques, en augmentant le nombre de Rayleigh thermique dans des intervalles prédéterminés. Les résultats de cette étude sont considérés en deux parties :

- Une première partie est consacrée à l'étude du transfert de chaleur et de masse dans un mélange binaire, en régime laminaire et en régime oscillatoire, par la détermination des facteurs affectant le phénomène, tels que le rapport des forces de flottabilité  $N$  et le seuil de la transition du régime d'écoulement  $Ra_{TCr}$  et leurs influences sur le taux de transfert de chaleur et de masse.
- La seconde partie concerne un mélange binaire conducteur d'électricité. Les transferts de chaleur et de masse en présence ou non d'un champ magnétique externe uniforme sont examinés. Le champ magnétique est appliqué pour les deux directions : horizontale  $B_x$  et verticale  $B_y$ , séparément. Les valeurs des nombres de Hartmann  $Ha$  considérés sont :  $Ha = 0 ; 25 ; 50 ; 75$  et  $100$ .

La visualisation graphique de la structure de l'écoulement et du champ thermique/solutale a été faite par des contours de la fonction de courant, des lignes iso-concentrations, des isothermes, des vecteurs de vitesse, des trajectoires des particules fluides, ainsi que des courbes d'évolutions temporelles de la température  $\theta$  de la concentration  $\Phi$ , et des composantes de vitesse horizontale  $U$  et verticale  $V$ .

Les lignes de courant sont définies à l'aide de la fonction de courant  $\psi$ , donnée par :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad (IV.1)$$

et :

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (IV.2)$$

La différence entre deux lignes de courant représente le débit du fluide en écoulement à travers la distance séparant ces deux lignes :

$$\int_1^2 \partial \psi = \int_1^2 U dY = -\int_1^2 V dX \quad (\text{IV.3})$$

Après l'intégration, on a :

$$\psi_1 = \psi_2 = \int_1^2 U dY = U \Delta Y = -V \Delta X \quad (\text{IV.4})$$

Les lignes isothermes sont des lignes constituées par des points ayant les mêmes températures et les lignes iso-concentrations sont des lignes constituées par des points ayant les mêmes concentrations. Le vecteur de vitesse est la résultante des deux composantes de la vitesse ( $U$  et  $V$ ), dont le module est :

$$\|\vec{V}_v\| = \sqrt{\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2} \quad (\text{IV.5})$$

Les trajectoires des particules sont des lignes où les vecteurs de vitesse sont tangentiels à celles-ci. Ce sont des lignes où les particules fluides se déplacent.

Le calcul des taux de transfert de chaleur et de masse est exprimé à travers les nombres de Nusselt et de Sherwood locaux et moyens, qui sont définis dans le Chapitre II (Eqs. II.41-44).

Avec le maillage  $82 \times 82$ , les nœuds utilisés pour enregistrer le champ de l'écoulement sont illustrés sur la [Figure IV.1](#). Un incrément de temps adimensionnel  $\Delta \tau = 5 \times 10^{-5}$  a été considéré le long du régime d'écoulement laminaire. Par ailleurs, pour le régime oscillatoire, des tests de réduction de temps et de vérification de l'origine du signal oscillatoire peuvent minimiser le pas de temps jusqu'à  $10^{-6}$ .

Sept sondes de mesures numériques sont considérées pour couvrir le domaine de calcul :  $S_1$  (52,12),  $S_2$  (32,32),  $S_3$  (12,42),  $S_4$  (41,41),  $S_5$  (72,42),  $S_6$  (52,52) et  $S_7$  (32,72). Ces points enregistrent simultanément l'évolution temporelle des composantes de vitesse adimensionnelles  $U$  et  $V$ , la fonction de courant adimensionnelle  $\psi$ , la température adimensionnelle  $\theta$ , la concentration adimensionnelle  $\Phi$  ([Tableau IV.1](#)).

- Dans chaque partie des résultats, on commence par la discussion des figures, puis leurs représentations.
- La représentation graphique est obtenue en utilisant les logiciels graphiques tels que : Tecplot 360, Origin 6.0, Golden Software-Surfer 9.

Tableau IV.1. Positions physiques et logiques des sondes de mesure dans la cavité.

Sondes		$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$
Position physique	X	0,634	0,390	0,146	0,5	0,878	0,634	0,390
	Y	0,146	0,390	0,512	0,5	0,512	0,634	0,878
Position logique		(52,12)	(32,32)	(12,42)	(41,41)	(72,42)	(52,52)	(32,72)

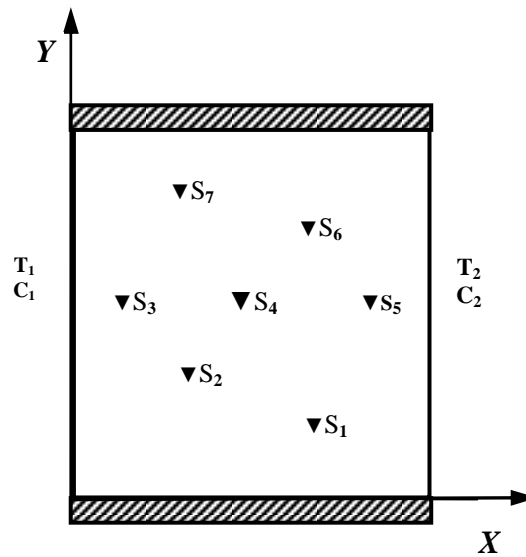


Figure IV.1. Schéma présentant les positions locales des noeuds dans les calculs numériques.

## 2. Effets du maillage sur les solutions numériques

La précision des résultats numériques dépend fortement de la dimension des volumes du contrôle choisi. Afin de montrer l'influence du maillage sur les résultats numériques, on a réalisé plusieurs tests sur une cavité carrée pour un nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T = 10^5$  et  $N = 1,25$  et pour un écoulement de double diffusion avec des gradients (thermiques et solutales) opposants. Neuf maillages irréguliers :  $22 \times 22$ ,  $32 \times 32$ ,  $42 \times 42$ ,  $52 \times 52$ ,  $62 \times 62$ ,  $72 \times 72$ ,  $82 \times 82$ ,  $92 \times 92$  et  $102 \times 102$  pour  $\varepsilon = 1.07$  (où  $\varepsilon$  représente le coefficient d'expansion géométrique) sont choisis. L'écart entre les maillages est très faible et ne dépasse pas 4%. A cet effet, le maillage  $82 \times 82$  est satisfaisant pour une bonne résolution des couches limites et des zones de forts effets visqueux proches des parois de la cavité.

Tableau IV. 2. Effet du maillage sur la solution numérique, pour le cas de  $N = 1,25$   $Pr = 10$  et  $Le = 10$ .

Régime laminaire, $Ra_T = 10^5$									
Maillage	22×22	32×32	42×42	52×52	62×62	72×72	82×82	92×92	102×102
$Nu_{moy}$	2,122	2,104	2,072	2,066	2,063	2,060	2,059	2,058	2,056
$Sh_{moy}$	6,204	5,894	5,756	5,710	5,694	5,681	5,677	5,678	5,670
$ \psi_{max} $	0,723	0,736	0,708	0,705	0,700	0,698	0,697	0,697	0,693
$ U_{max} $	3,327	3,390	3,342	3,350	3,348	3,346	3,346	3,346	3,343
$ V_{max} $	4,585	4,792	4,650	4,605	4,600	4,566	4,567	4,567	4,548
Régime oscillatoire ( $N = 1,25$ )									
$Ra_{TCr} \times 10^{-5}$	2,725	2,701	2,681	2,610	2,551	2,251	2,100	1,910	1,8575

L'influence de la taille et la répartition des nœuds sur la solution exprimée par des taux de transferts thermiques et massiques moyens à la paroi active « gauche » est illustrée sur les Figures IV.2-3, celle-ci est donnée pour neuf maillages  $22 \times 22$ ,  $32 \times 32$ ,  $42 \times 42$ ,  $52 \times 52$ ,  $62 \times 62$ ,  $72 \times 72$ ,  $82 \times 82$ ,  $92 \times 92$  et  $102 \times 102$ , et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique :  $5 \times 10^4$ ,  $10^5$ ,  $5 \times 10^5$  et  $10^6$ .

A partir des Figures IV.2-3, il semble que le nombre des nœuds de la grille augmente avec le nombre de Rayleigh thermique. Les taux des transferts thermique et massique deviennent insensibles au nombre de nœuds à partir de la grille  $72 \times 72$ .

Dans la suite de notre travail, on adoptera, pour des raisons de compromis précision/temps de calcul, un maillage  $82 \times 82$  avec  $\varepsilon = 1.07$ .

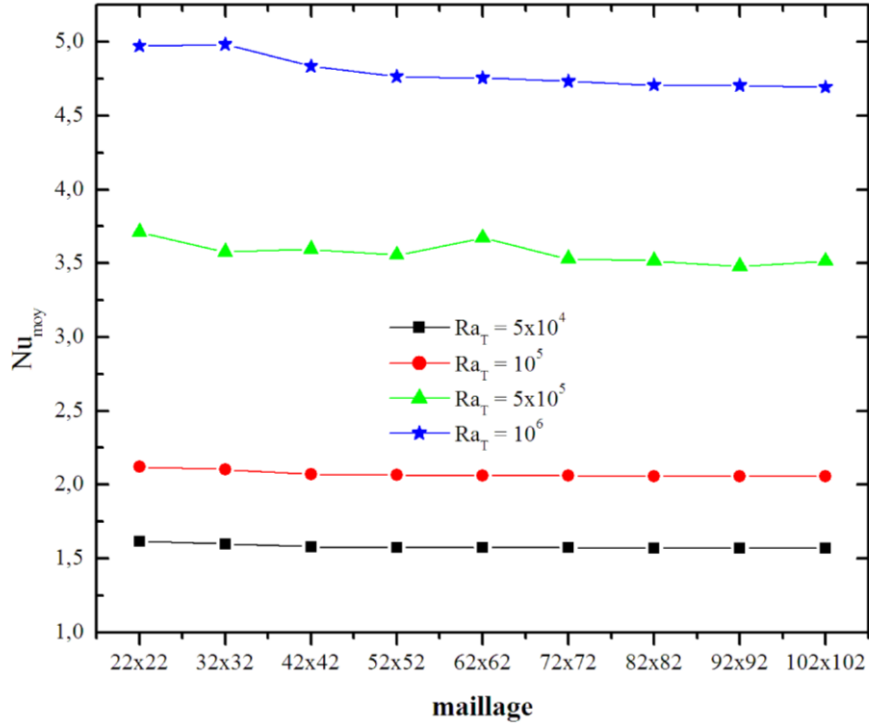


Figure IV.2. Influence du nombre de nœuds sur le nombre de Nusselt moyen ( $N = 1,25$  ;  $Pr = 10$  et  $Le = 10$ ).

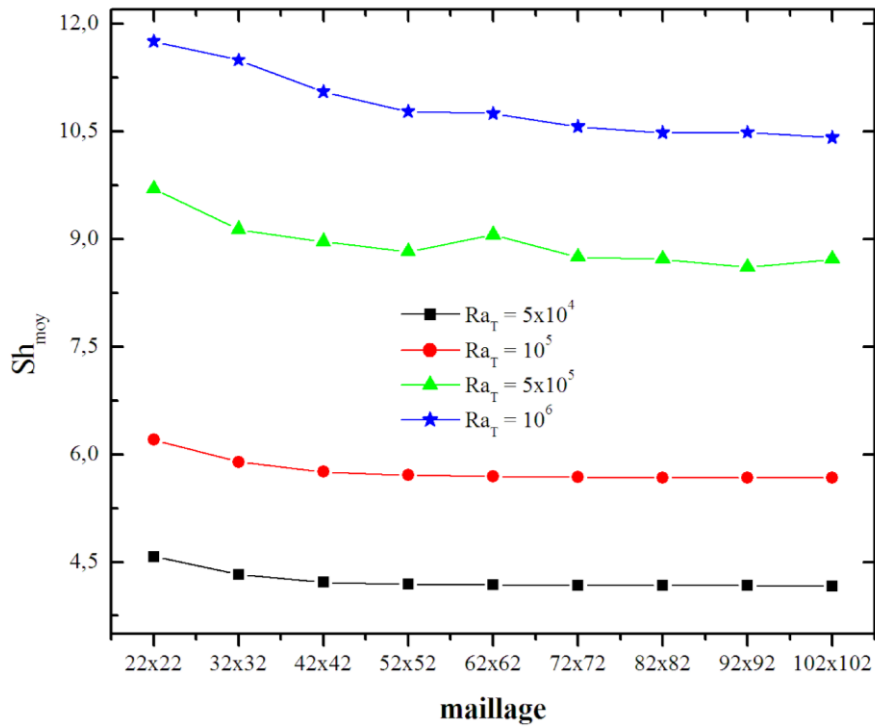


Figure IV.3. Influence du nombre de nœuds sur le nombre de Sherwood moyen ( $N = 1,25$ ,  $Pr = 10$  et  $Le = 10$ ).

### 3. Validation du code de calculs

Afin de valider notre code de calcul, nous avons comparé nos résultats avec les travaux de [Beghein et al. \(1992\)](#), [Sezai et Mohamed \(2000\)](#), pour  $Ra = 10^7$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sc = 0,71$ ,  $Le = 1$  et  $A = 1$ , où les valeurs du nombre de Nusselt moyen sont présentés dans le [Tableau IV.3](#). Nous constatons que nos résultats numériques sont en bon accord avec leurs résultats. L'erreur relative maximale est observée entre nos calculs et ceux de [Sezai et Mohamed \(2000\)](#) : 2%.

*Tableau IV. 3. Comparaison de nos résultats avec ceux de [Beghein et al. \(1992\)](#) et [Sezai et Mohamed \(2000\)](#), pour  $Ra = 10^7$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $Sc = 0.71$  et  $Le = 1$ .*

$N$	$Nu$ présent travail Maillage 82×82	$Nu$ <a href="#">Beghein et al. (1992)</a> Maillage 45×45	$Nu$ <a href="#">Sezai et Mohamed (2000)</a> Maillage 80×80×80	Erreur relative entre nos résultats et ceux de <a href="#">Sezai et Mohamed (2000)</a>
<b>0,01</b>	16,50	16,40	16,27	0,014
<b>0,1</b>	16,09	16,00	15,87	0,013
<b>0,2</b>	15,59	15,50	15,37	0,014
<b>0,5</b>	13,73	13,60	13,53	0,015
<b>0,8</b>	10,70	10,60	10,51	0,018
<b>0,9</b>	08,82	08,80	08,64	0,020
<b>1,5</b>	13,73	13,60	13,54	0,014
<b>5</b>	23,91	23,70	23,55	0,015

Pour des valeurs du rapport des forces de flottabilité :  $0 < N < 2$ , nous avons présenté, sur la [Figure IV.4](#), la variation du nombre de Nusselt moyen et le nombre de Sherwood moyen en fonction de  $N$ , pour un nombre de Rayleigh thermique qui vaut  $Ra_T = 10^5$ .

Un bon accord est obtenu entre nos résultats et ceux de [Sezai et Mohamed \(2000\)](#).

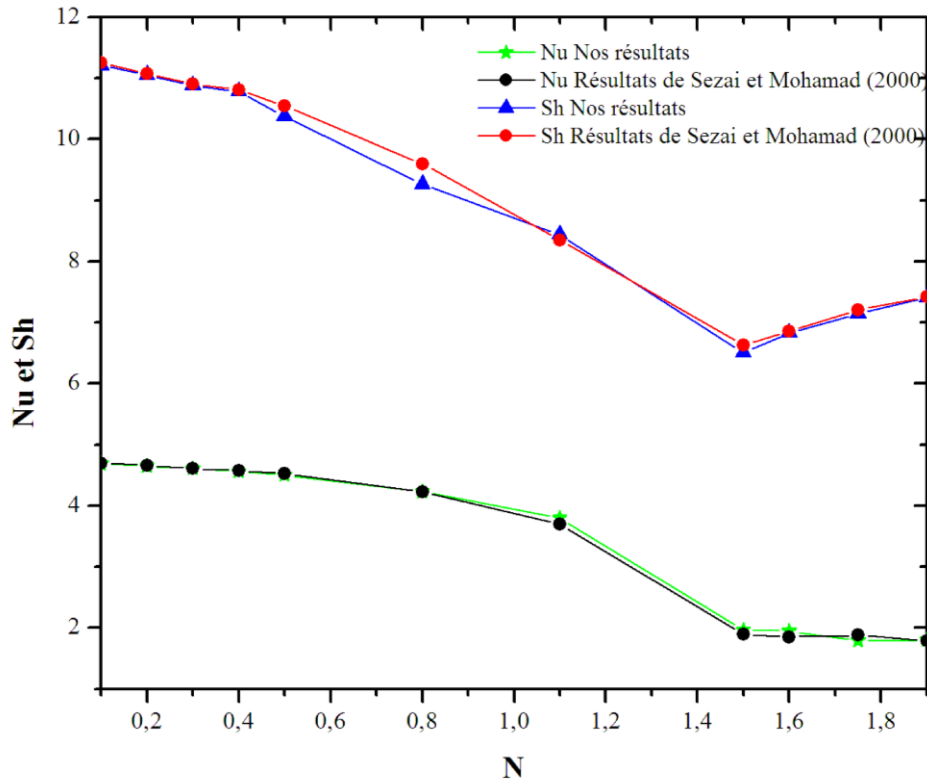
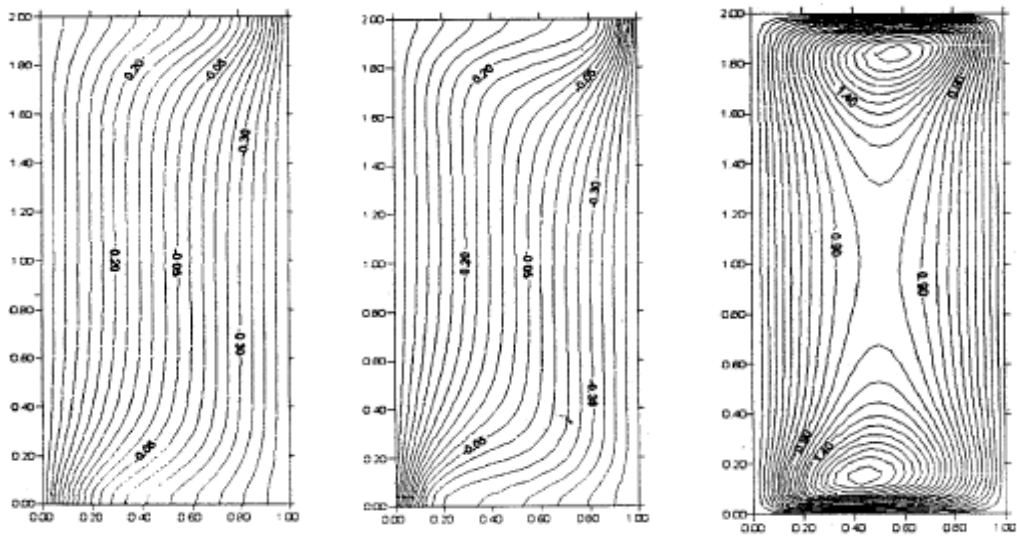


Figure IV. 4. Nombre de Nusselt et de Sherwood en fonction du rapport des forces de flottabilité  $N$ , pour  $Ra_T = 10^5$  : comparaison de nos résultats avec ceux de *Sezai et Mohamed (2000)*.

En présence du champ magnétique, une deuxième comparaison a été faite avec les résultats numériques de *Chamkha et Al-Naser (2002)*. Le cas de la convection naturelle à double diffusion en présence d'un champ magnétique est considéré pour les paramètres suivants :  $Le = 2$ ,  $N = 0,8$ ,  $A = H / L = 2$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ra_T = 10^5$ ,  $\gamma = 0$  (champ magnétique horizontal  $B_x$ ),  $Ha = 10$  et  $50$ .

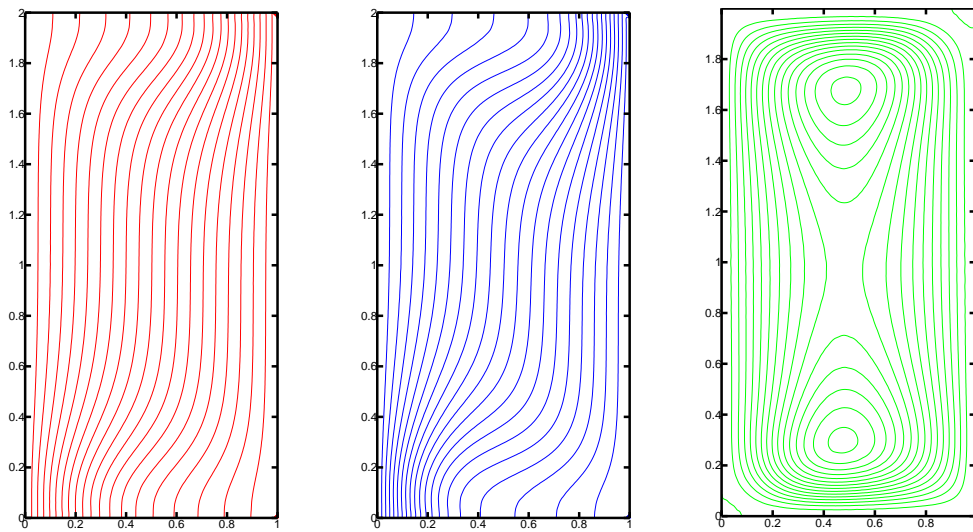
Les *Figures IV.5-6* montrent un bon accord de la structure de l'écoulement, le champ thermique, et le champ de concentration obtenus pour *Chamkha et Al-Naser (2002)*.

Une autre validation a été réalisée par la comparaison de nos résultats avec les résultats expérimentaux de *Han et Kuehn (1991)*, dans le cas de la convection naturelle à double diffusion où les forces de volumes sont opposantes et les paramètres suivants sont considérés :  $A = 4$ ,  $Pr = 8$ ,  $Sc = 2000$ ,  $Gr_T = 4 \times 10^5$  et  $Gr_S = 3 \times 10^6$ . La longueur de la cavité vaut  $L = 15$  cm (le maillage utilisé dans la simulation est  $34 \times 130$ ). Le pas de temps est de 30s qui correspond à  $10^{-4}$  en échelle adimensionnelle et le temps de l'expérience a duré 6 heures en régime laminaire.



(a) Lignes isothermes (b) Lignes iso-concentrations (c) Lignes de courant

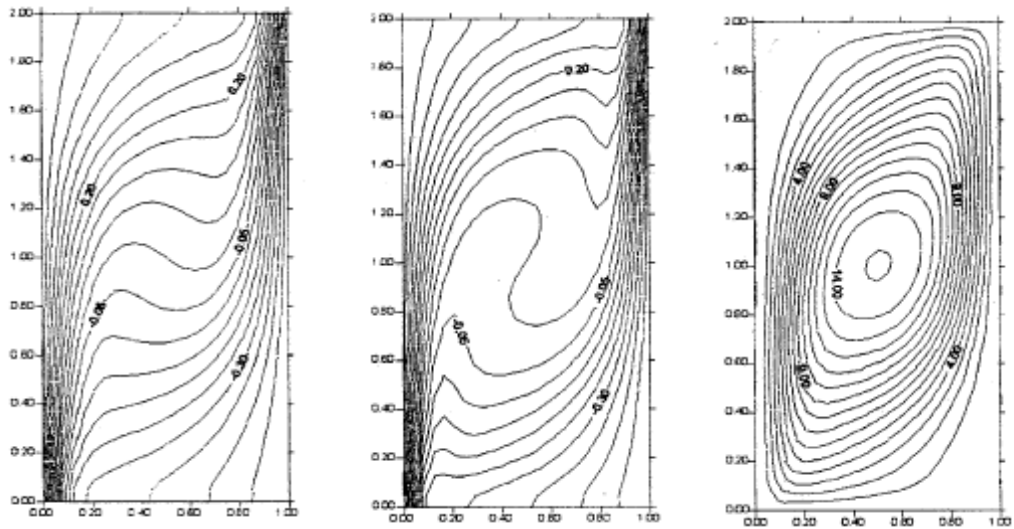
**Résultats numériques de Chamkha et Al-Naser (2002).**



(a) Lignes isothermes (b) Lignes iso-concentrations (c) Lignes de courant

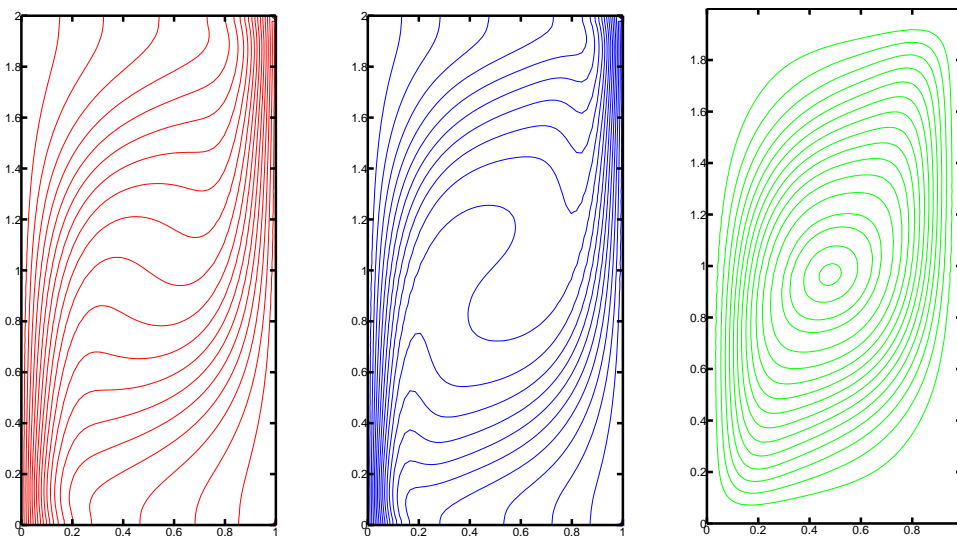
**Nos résultats numériques.**

Figure IV. 5. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Chamkha et Al-Naser (2002): (a) isothermes, (b) iso- concentrations, (c) lignes de courant, pour  $Le = 2$ ,  $N = 0,8$ ,  $Pr = 1$ ,  $A = 2$ ,  $Ra_T = 10^5$ ,  $\gamma = 0$  et  $Ha = 50$ .



(a) Lignes isothermes (b) Lignes iso-concentrations (c) Lignes de courant

**Résultats numériques de Chamkha et Al-Naser (2002).**

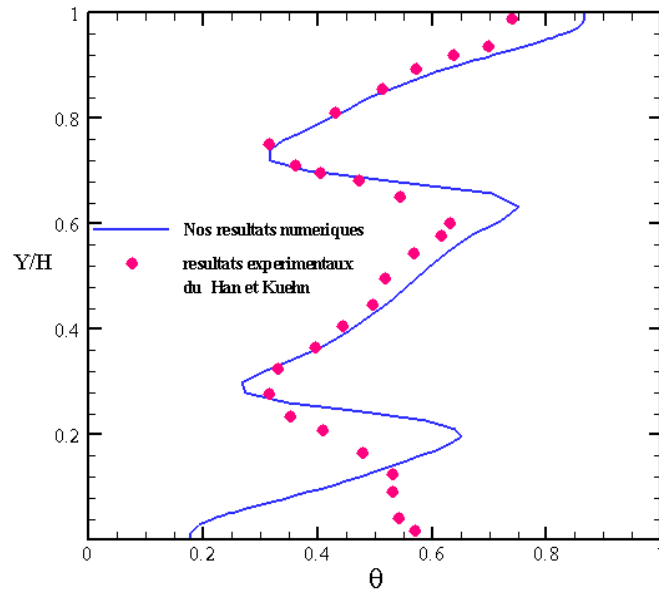


(a) Lignes isothermes (b) Lignes iso-concentrations (c) Lignes de courant

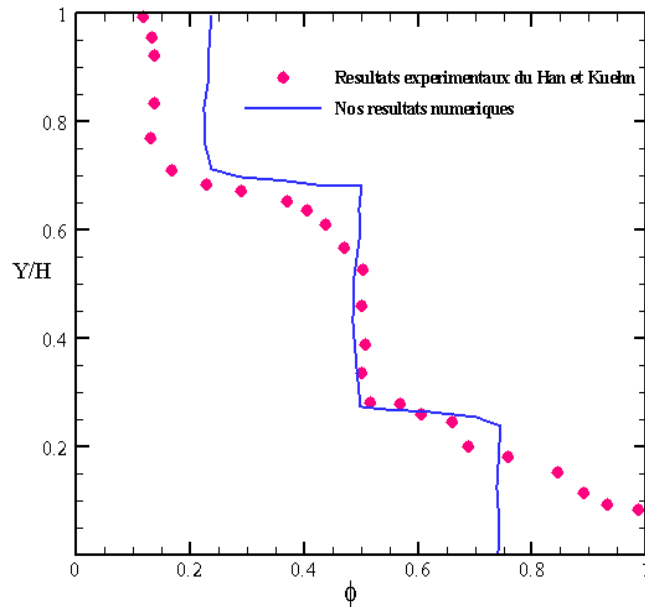
**Nos résultats numériques.**

*Figure IV. 6. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Chamkha et Al-Naser (2002): isothermes (a), iso- concentrations (b), lignes de courant (c) pour  $Le = 2$ ,  $N = 0,8$ ,  $Pr = 1$ ,  $A = 2$ ,  $\gamma = 0$ ,  $Ra_T = 10^5$  et  $Ha = 10$ .*

Les Figures IV.7a-b, représentent les variations de la température et de la concentration à la demi-longueur de l'enceinte ( $X=L/2$ ). Ces figures montrent un bon accord entre nos résultats numériques et ceux de l'expérience. Néanmoins, il existe une légère différence au niveau des parois horizontales (parois adiabatiques) qui peut être expliquée par la difficulté de réaliser la condition adiabatique sur les parois horizontales.



(a)



(b)

Figure IV. 7. Comparaison des résultats obtenus avec ceux de Han et Kuehn (1991). Profils de la température à  $X = L/2$  (a), et de la concentration à  $X = L/2$  (b), pour :  $A = H/L = 4$ ,  $Pr = 8$ ,  $Sc = 2000$ ,  $Gr_T = 4 \times 10^5$  et  $Gr_S = 3 \times 10^6$ .

## 4. Convection naturelle à double diffusion dans un mélange binaire

Dans la première partie des résultats, nous examinons la convection à double diffusion dans un mélange binaire pour le cas des gradients de températures et de concentration opposés. Suivant la valeur du nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ), nous traitons le régime d'écoulement laminaire stationnaire et le régime d'écoulement oscillatoire.

### 4.1 Convection à double diffusion en régime laminaire stationnaire

Dans cette section, nous nous intéressons à la solution laminaire stationnaire de l'écoulement de la convection naturelle double diffusive pour un mélange binaire ( $Pr = 10$  et  $Sc = 100$ ) et un rapport des forces de flottabilité (solutale/thermique)  $N = 1,75$ . La solution laminaire stationnaire est obtenue pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T < Ra_{TCr}$ .

#### 4.1.1 Naissance de la convection à double diffusion

Connaissons que le transfert de chaleur convectif résulte par l'action combinée de l'accumulation d'énergie et le mouvement du fluide, alors la naissance de la convection double diffusive se manifeste d'abord par l'accumulation de l'énergie thermique/massique au niveau des parois actives (conduction), ensuite le mouvement du fluide commence après la provocation d'un grand nombre de particules du fluide près des parois actives (chaude/froide) et imperméables.

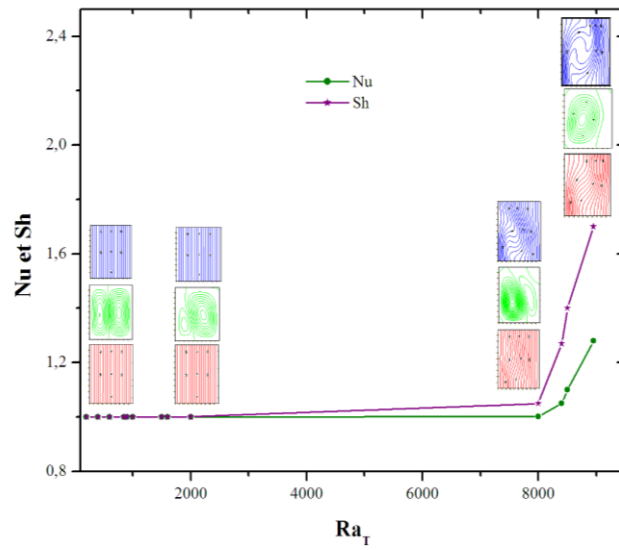
En effet, la naissance de la convection double diffusive d'un mélange binaire ( $Pr = 0,71$ ,  $Sc = 3,5$ ), pour différentes valeurs du rapport de flottabilité  $N$ , consiste à déterminer le nombre de Rayleigh thermique qui correspond à la naissance de la convection massique. Ceci est obtenu pour les valeurs du nombre de Sherwood,  $Sh > 1,1$ . La naissance de la convection thermique est obtenue pour les valeurs du nombre de Nusselt,  $Nu > 1,1$ . Les résultats obtenus sont illustrés sur le [Tableau IV.4](#). On constate que la convection massique se déclenche avant la convection thermique quel que soit le rapport de flottabilité ( $0 < N < 2$ ), sauf pour le cas d'équilibre des forces d'origine thermique et celles d'origine solutale ( $N = 1$ ) où les deux mécanismes se déclenchent en parallèle ( $Ra_T = 8400$ ).

Au début, les particules fluides se déplacent sans transporter de la chaleur pour les nombres de Rayleigh thermiques faibles (régime de transfert de chaleur conducteur). En augmentant le rapport des forces de la flottabilité  $N$ , le nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ) est en croissance linéaire pour les valeurs de  $N < 1$ . En plus, pour  $N > 1$ ,  $Ra_T$  est en décroissance mais avec des valeurs plus élevées. Ceci se traduira par un retardement de la naissance de la convection à double diffusion proportionnellement à des valeurs plus élevées lorsque les forces solutales sont dominantes par rapport au cas de la dominance des forces thermiques.

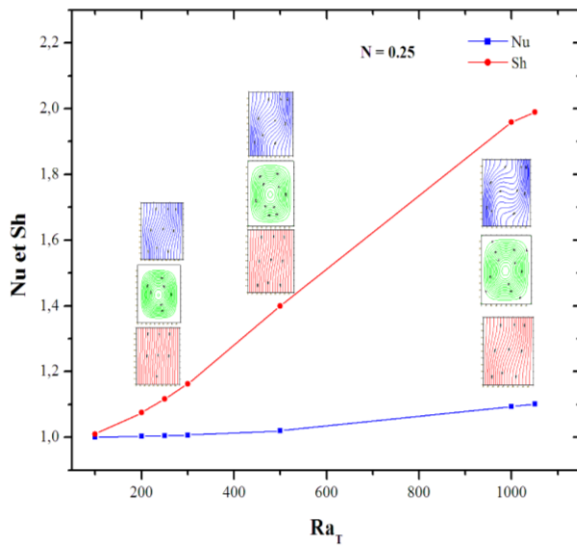
La naissance de la convection double diffusive est présentée par trois valeurs de  $N$  : le premier concerne la naissance de la convection massique qui se manifeste par la modification de l'allure des iso-concentrations (la courbure des lignes iso-concentrations se déclenche). En régime purement conducteur, les lignes iso-concentrations sont parallèles aux parois verticales. Dans le second intervalle, on présente la naissance de la convection thermique où le changement de la forme des isothermes se déclenche. Ceci est visible pour  $Nu = 1,1$  et  $Sh = 1,1$  (dominance des forces d'origine thermiques  $N = 1,75$ ). Dans le dernier intervalle, le changement des isothermes et des iso-concentrations commence en parallèle pour le cas  $N = 1$  (cas d'équilibre des forces d'origine thermiques et celles d'origine solutales), et la convection double diffusive se déclenche (Figures IV.8a-c). Alors, on peut conclure que le transfert de masse se déclenche avant la convection thermique et que les particules du fluide se déplacent sans transporter la chaleur.

*Tableau IV.4. Naissance de la convection double diffusive pour différentes valeurs de  $N$  ( $Pr = 0.71$ ,  $Sc = 3.5$ ).*

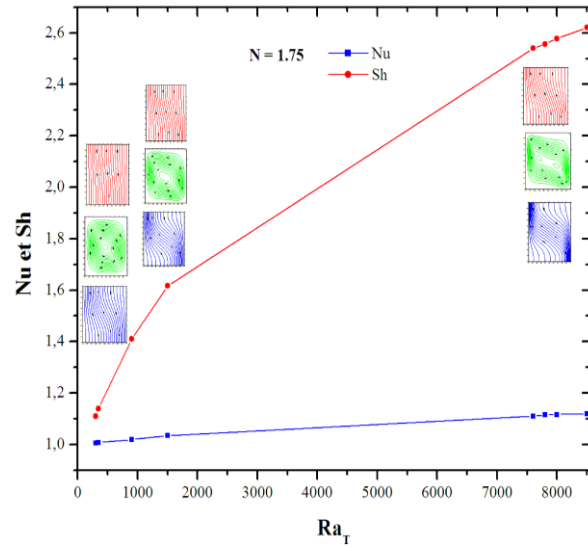
<b>N</b>	<b>0.25</b>	<b>0.5</b>	<b>0.75</b>	<b>1</b>	<b>1.25</b>	<b>1.5</b>	<b>1.75</b>	<b>2</b>
$Ra_T$ ; naissance de la convection massique	250	350	620	8400	895	445	301	200
$Ra_T$ ; naissance de la convection thermique	1050	1250	1500	8400	20200	12500	7600	4800



(a) pour  $N = 1$



(b) pour  $N = 0,25$



(c) pour  $N = 1,75$

Figure IV.8. Naissance de la convection double diffusive pour les trois cas : (a)  $N = 1$  (équilibre des forces d'origine thermiques et celles d'origine solutales), (b)  $N = 0,25$  (dominance des forces d'origine thermiques) et, (c)  $N = 1,75$  (dominance des forces d'origine solutales), pour  $Pr = 0.71$  et  $Sc = 3.5$ .

### 4.1.2 Champ d'écoulement

Sur les [Figures IV.9-10](#), nous avons présenté la variation temporelle de la composante de la vitesse verticale  $V$  et de la température adimensionnelle  $\theta$  à la sonde de mesure  $S_2$ , pour trois nombres de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$  et  $N = 1,75$ . Après la convergence des calculs effectués, nous constatons que l'écoulement est parfaitement stable et laminaire quand le nombre de Rayleigh thermique est inférieur à  $Ra_T = 5 \times 10^5$ . Alors, l'écoulement devient pratiquement indépendant du temps après un certain temps ( $\tau \approx 2$ ). La fluctuation initiale est causée par les conditions aux limites imposées sur les parois de la cavité.

La [Figure IV.11](#) représente les profils de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  sur le plan vertical au centre de la cavité ( $X = 0,5$ ), pour les trois valeurs du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  précédentes. Ces profils sont symétriques par rapport au plan horizontal au milieu de la cavité. L'augmentation du nombre de Rayleigh provoque une augmentation de la vitesse  $U$ . Quand  $Ra_T$  passe de  $10^5$  à  $2 \times 10^5$ , la vitesse est augmentée considérablement et passe d'une valeur à une valeur doublée, alors qu'elle est presque nulle pour  $Ra_T = 10^4$ . Ceci indique que le mouvement convectif est augmenté au sein du fluide. Les mêmes constatations pour les profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0,5$  entre les deux parois verticales ([Figure IV.12](#)).

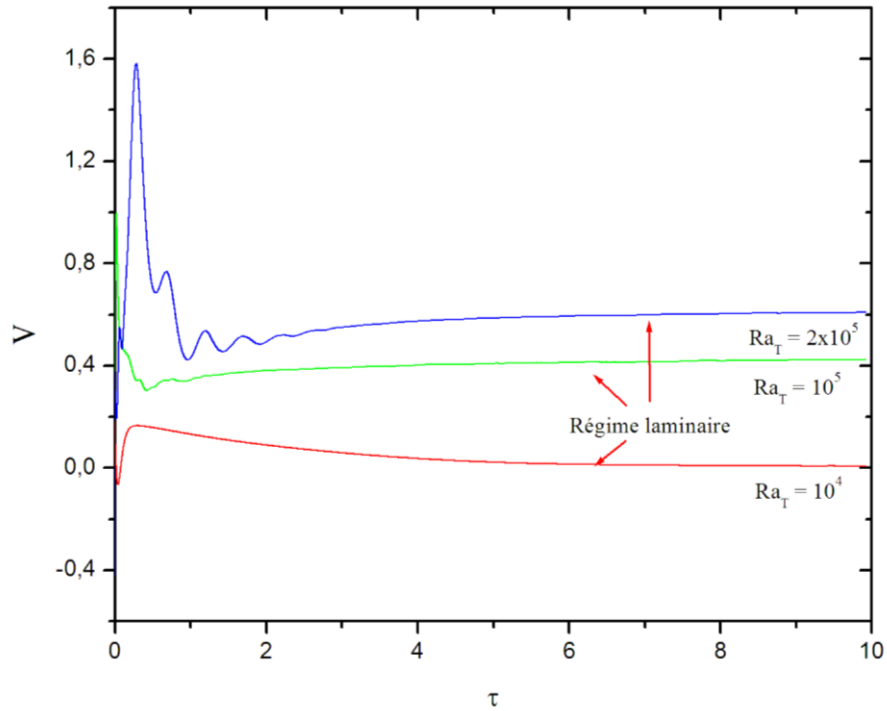


Figure IV.9. Evolution temporelle de la composante de vitesse verticale pour différents nombres de Rayleigh ( $Ra_T$ ) (régime laminaire), et pour  $N = 1,75$ ,  $Pr = 0.71$  et  $Sc = 3.5$  à la sonde  $S_2$ .

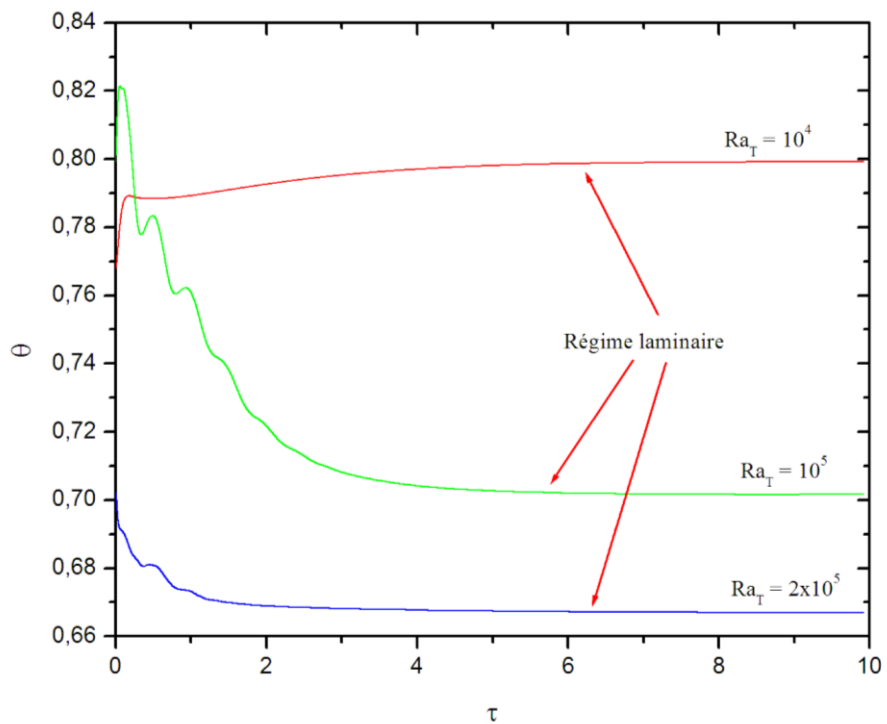


Figure IV.10. Evolution temporelle de la température adimensionnelle pour différents nombres de Rayleigh ( $Ra_T$ ) (régime laminaire), et pour  $N = 1,75$ ,  $Pr = 0.71$  et  $Sc = 3.5$  à la sonde  $S_2$ .

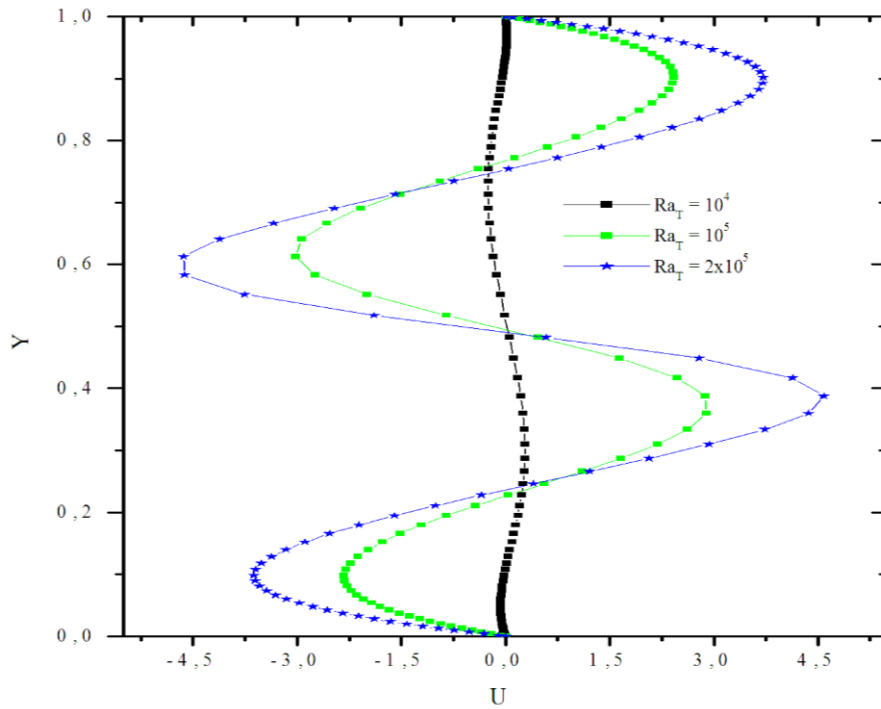


Figure IV.11. Variation de la composante de vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  au centre de la cavité ( $X = 0,5$ ), pour les trois nombres de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$ , ( $N = 1,75$   $Pr = 0.71$  et  $Sc = 3.5$  en régime laminaire).

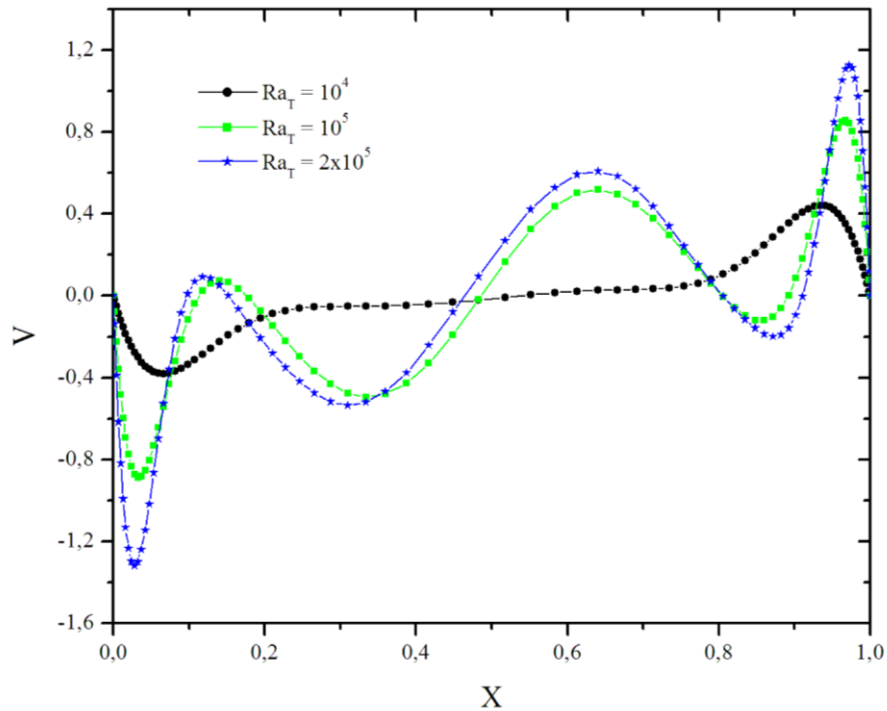
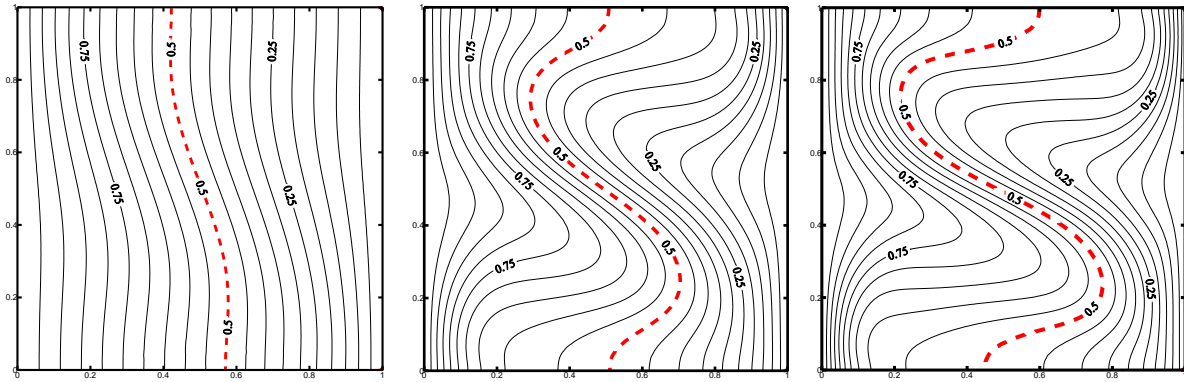


Figure IV.12. Variation de la composante de vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité ( $Y = 0,5$ ), pour les trois nombre de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$  ( $N = 1,75$   $Pr = 0.71$  et  $Sc = 3.5$  en régime laminaire).

Les distributions de la température et de la concentration au sein du fluide de la cavité pour  $N = 1,75$  et pour les trois valeurs de Rayleigh thermique :  $Ra_T = 10^4$ ,  $10^5$  et  $2 \times 10^5$ ; inférieures au  $Ra_{TCr}$ , sont représentées sur les [Figures IV.13a-c](#). On remarque que les isothermes se concentrent beaucoup plus aux parois verticales, et plus aux coins supérieurs droits et inférieurs gauches de l'enceinte. Des constatations similaires, pour les deux champs de température et de concentration, sont faites. L'augmentation du nombre de Rayleigh thermique influe sur la structure des lignes isothermes et iso-concentrations, où la forte courbure de ces lignes se trouvent proche des parois actives verticales. Ces courbures traduisent le phénomène de la convection naturelle double diffusive au milieu de la cavité et le phénomène de la conduction proche des parois verticales et principalement dans les couches limites thermiques et solutales qui se développent proche de celles-ci (parois isothermes). Alors pour la valeur du  $Ra_T$  la plus faible, ces lignes sont presque parallèles aux parois verticales.

On peut remarquer aussi sur la [Figure IV.13.b](#) que l'augmentation du nombre de  $Ra_T$  influe sur la structure des lignes de courant où la cellule principale s'étend de plus en plus pour donner naissance à trois cellules pour un nombre de Rayleigh thermique supérieur. Alors que les deux cellules supérieure et inférieure s'élargiront vers la cellule centrale pour  $Ra_T = 2 \times 10^5$ .

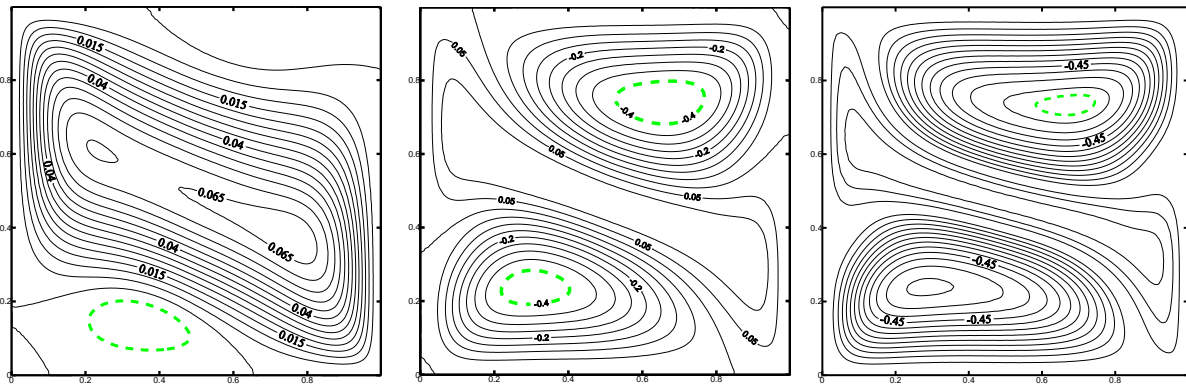


(1) Pour  $Ra_T = 10^4$

(2)  $Ra_T = 10^5$

(3)  $Ra_T = 2 \times 10^5$

(a) Lignes isothermes

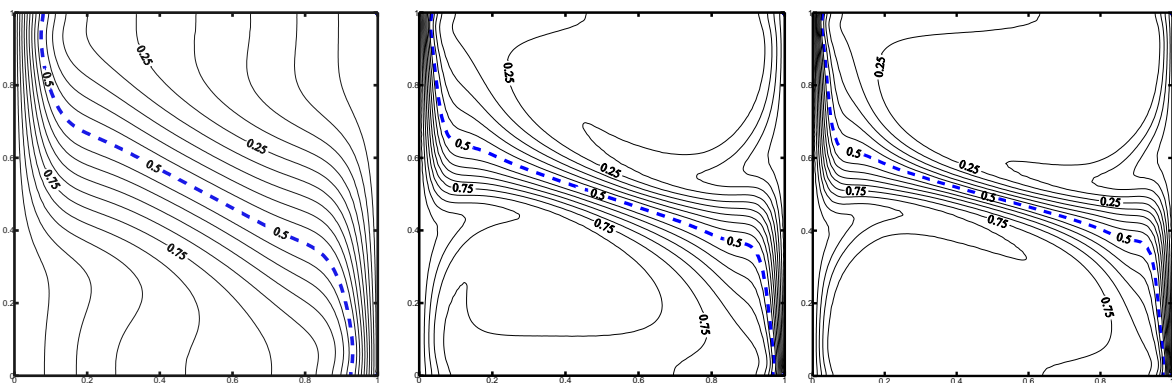


(1) Pour  $Ra_T = 10^4$

(2)  $Ra_T = 10^5$

(3)  $Ra_T = 2 \times 10^5$

(b) Lignes de courant



(1) Pour  $Ra_T = 10^4$

(2)  $Ra_T = 10^5$

(3)  $Ra_T = 2 \times 10^5$

(c) Lignes iso-concentrations

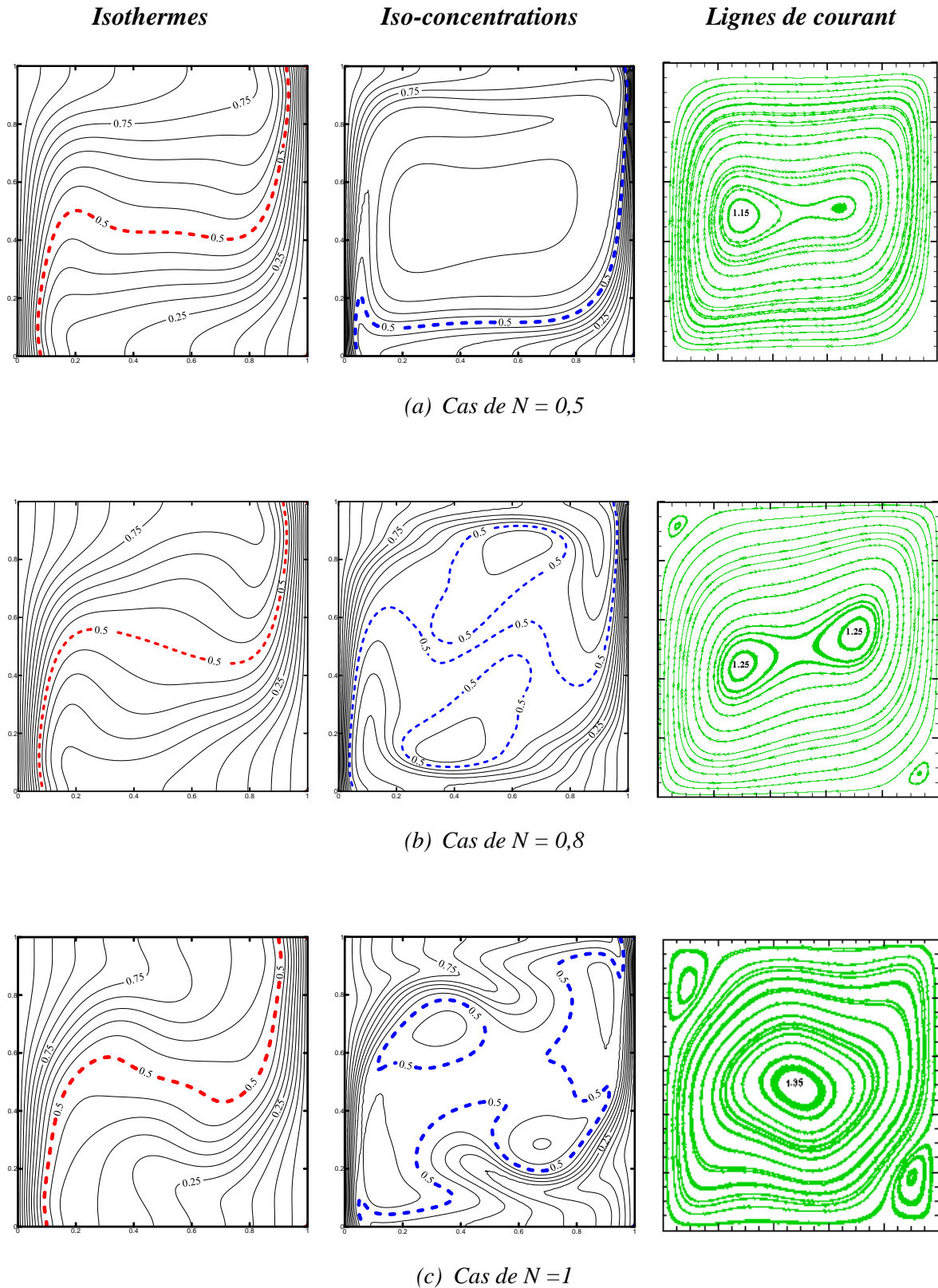
Figure IV.13. Structure de l'écoulement pour différents nombres de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , en régime laminaire, et pour  $N = 1,75$ .

### 4.1.3 Effet du rapport de forces de flottabilité

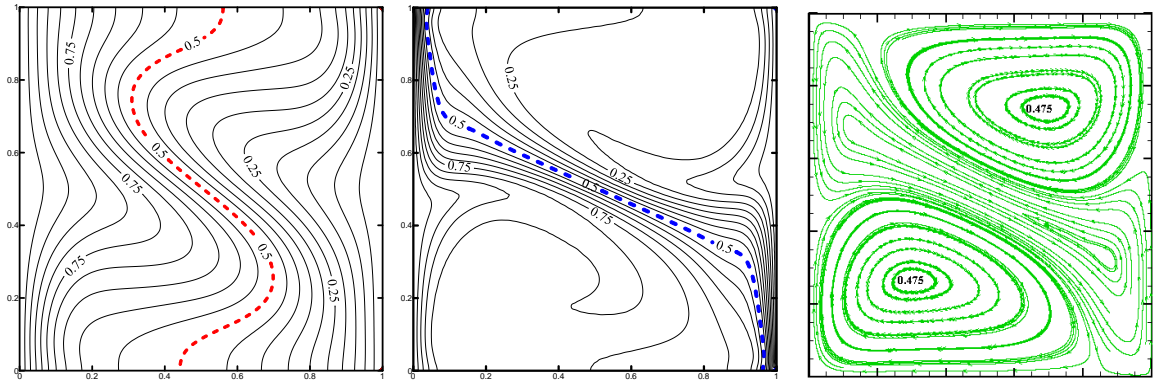
Afin d'illustrer l'effet du rapport de forces de la flottabilité  $N$ , nous avons présenté sur les Figures IV.14a-j l'évolution de la carte des iso-valeurs (lignes de courant, isothermes et iso-concentrations) pour différentes valeurs du rapport de forces de flottabilité  $N$ , et pour un mélange binaire ( $Pr = 10$ ,  $Le = 10$ ) avec le nombre de Rayleigh thermique égal à  $10^5$ . Les lignes de courant montrent que pour les valeurs de  $N < 1$ , l'écoulement représente une cellule principale dont le sens de rotation est horaire. Mais, pour  $1,5 \leq N \leq 2,5$ , la cellule principale est en sens antihoraire et les deux cellules secondaires sont en sens horaire, avec un élargissement de la cellule principale. A partir de  $N = 3$  (Figures IV.14g-j), les effets solutales s'imposent sur les effets thermiques et l'écoulement donne naissance à une structure monocellulaire circulant dans le sens trigonométrique (régime solutale dominant).

Nous remarquons que pour  $N \leq 1$  (Figures IV.14a-c), l'écoulement est plus prononcé et les isothermes sont plus incurvées, indiquant que les gradients de température sont plus importants. Pour les valeurs élevées  $N > 1$ , l'effet thermique devient moins important devant celui de l'effet solutale et n'arrive plus à perturber de façon significative la zone stratifiée en concentration. Les isothermes deviennent des droites parallèles à la paroi verticale, indiquant ainsi que le transfert thermique devient principalement conductif à  $N$  plus grand.

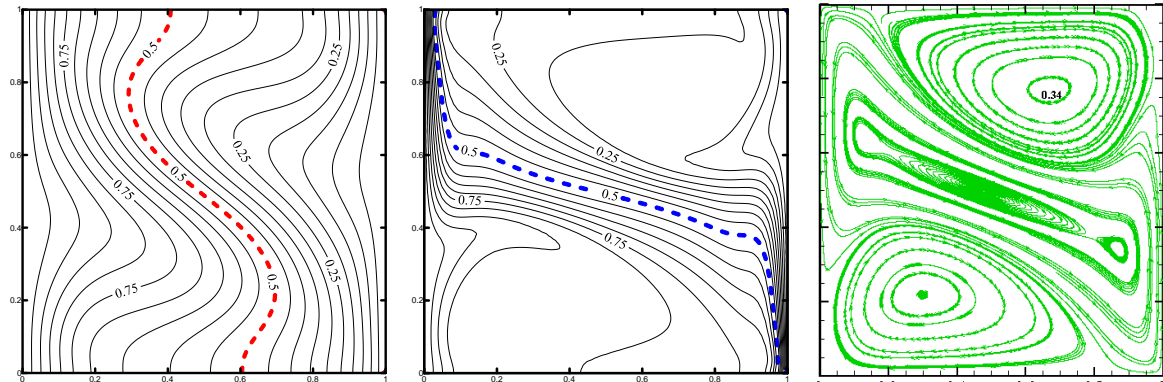
Dans le cas où la force de poussée thermique est comparable à la force de poussée massique, les iso-concentrations représentent une structure désordonnée qui est due aux interactions entre les deux forces (Figures IV.14a-d). Quand la poussée solutale est dominante  $N > 2$ , on remarque que les iso-concentrations se confinent près des parois verticales où les gradients de concentrations sont très importants et se stratifient parallèlement aux parois horizontales adiabatiques.



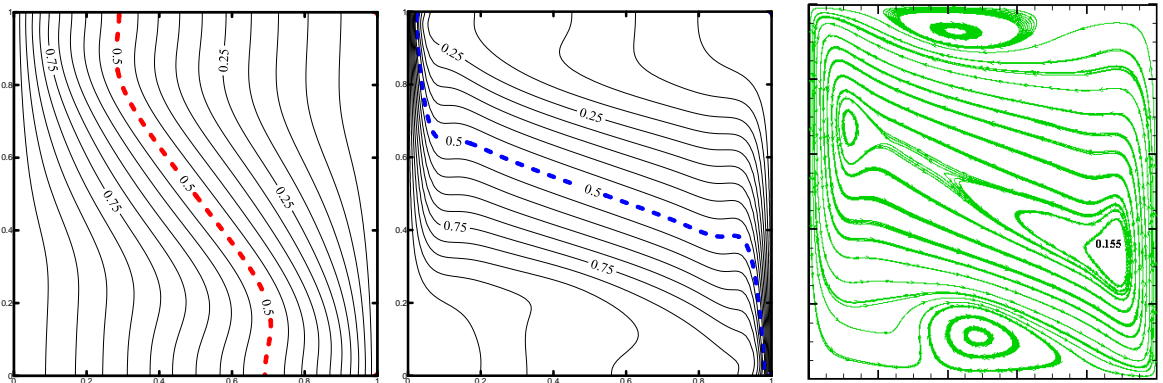
*Figure IV.14. Structure de l'écoulement pour différentes valeurs du rapport de flottabilité  $N$ ,  $Ra_T = 10^5$ , en régime laminaire.*



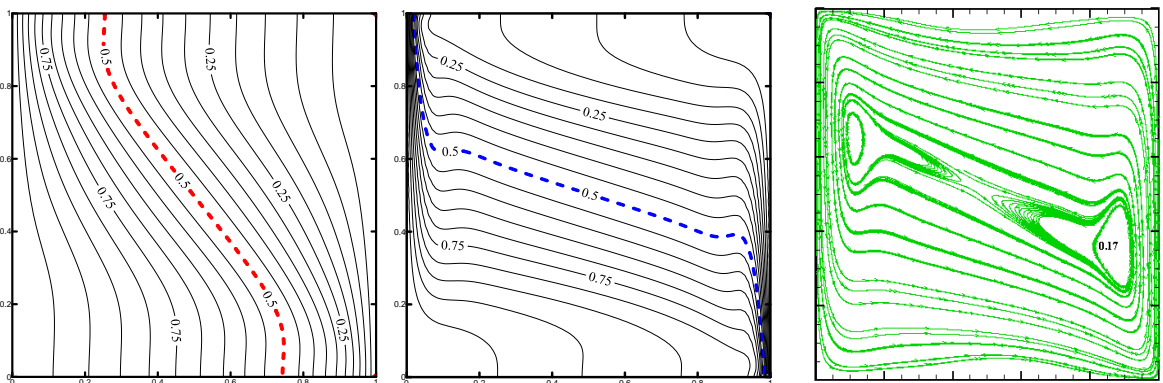
(d) Cas de  $N = 1.5$



(e) Cas de  $N = 2$

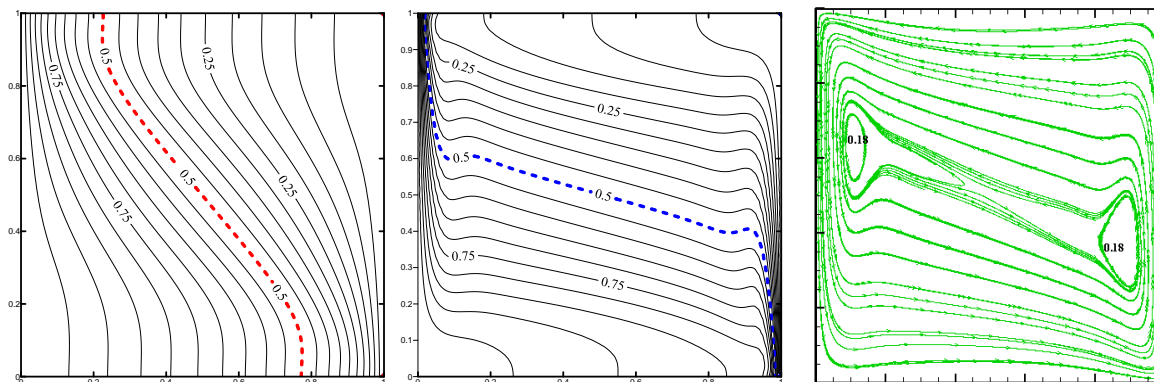


(f) Cas de  $N = 2,5$

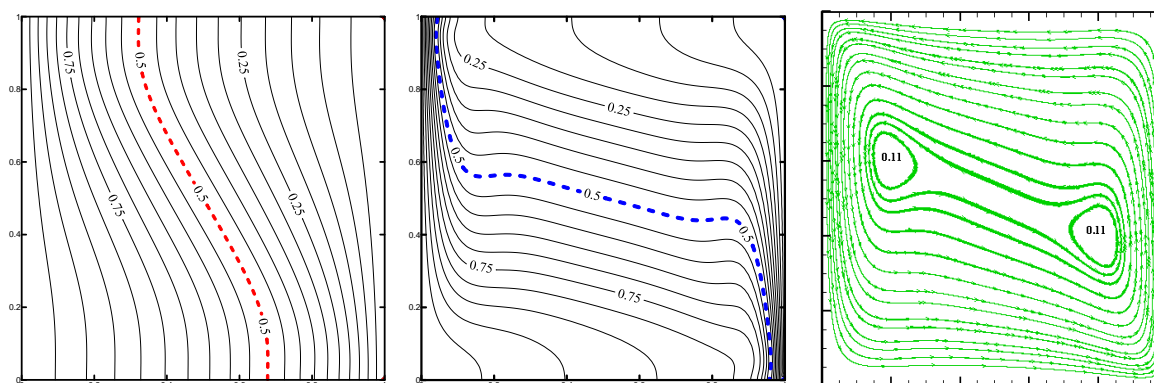


(g) Cas de  $N = 3$

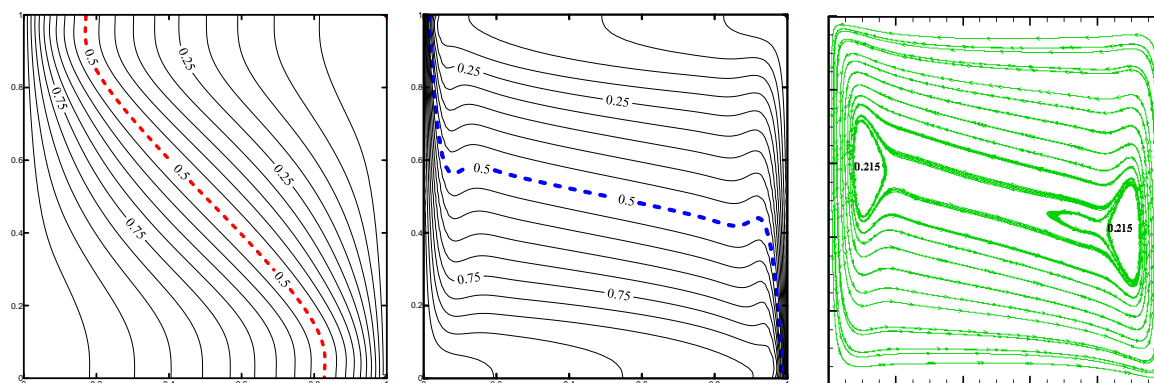
Figure IV.14. ( Suite).



(h) Cas de  $N = 3,5$



(i) Cas de  $N = 4$



(j) Cas de  $N = 5$

Figure IV.14. (Suite).

La variation des taux de transfert de chaleur et de masse, en fonction du rapport de flottabilité  $N$ , est illustrée par les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood, pour  $Ra_T = 10^5$  à la Figure IV.15. On constate que le taux de transfert de masse est plus important devant celui du transfert de chaleur sur l'intervalle du rapport de flottabilité étudié ( $0 < N < 5$ ). L'augmentation du rapport  $N$  (nombre de Rayleigh solutale) provoque la diminution des taux des transferts thermique et massique, dans l'intervalle  $N < 1.25$ . Le nombre de Sherwood décroît de 11,21 jusqu'à 5,76, et le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) décroît de 4,69 jusqu'à la valeur de 2,06. Ensuite, le taux de transfert de masse  $Sh$  se renverse en variation et augmente considérablement quand  $N$  augmente de 1,25 à 5. Par ailleurs, le taux de transfert de chaleur  $Nu$  continue la diminution puis se stabilise quand  $N$  varie de 1,25 à 5. Ceci peut être expliqué par la *tendance* des particules de fluide à transporter plus de matière pour  $N$  élevé, et son *aptitude limitée* à transporter de la chaleur ( $Nu \approx 1$ ).

On constate, d'après la Figure IV.15, que le transfert thermique est presque conductif. Ceci s'explique par le fait que le nombre de Lewis est élevé ( $Le = 10$ , la diffusivité thermique est très importante par rapport à la diffusivité massique). Ces résultats sont en bon accord avec les résultats de *Sezai et Mohamed (2000)*.

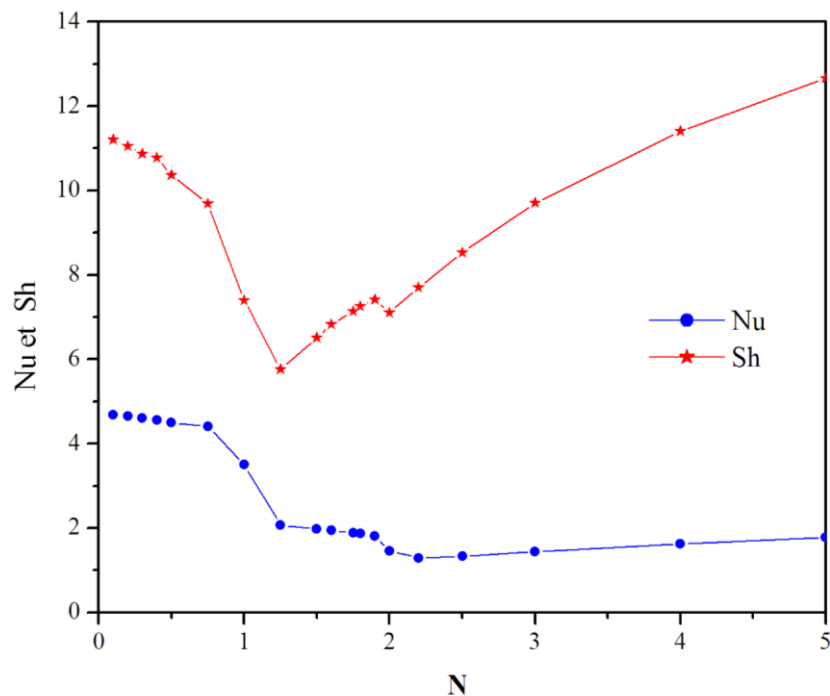


Figure IV.15. Variation du nombre de Nusselt et de Sherwood en fonction du rapport des forces de flottabilité  $N$ , pour  $Ra_T = 10^5$ .

## 4.2 Convection naturelle à double diffusion en régime oscillatoire

L'étude du régime de la convection naturelle à double diffusion repose sur la détermination de la valeur du nombre de Rayleigh thermique critique où le régime devient oscillatoire et périodique dans le temps. Au-delà de cette valeur, le régime passe au stade turbulent et le modèle des équations précédentes n'est plus valable.

### 4.2.1 Evolution temporelle des paramètres de l'écoulement

Dans cette section, nous nous intéressons à la solution oscillatoire (instationnaire) de l'écoulement de convection naturelle à double diffusive pour un mélange binaire dans une cavité carrée sans champ magnétique ( $Pr = 10$ ,  $Sc = 100$ ). Le calcul de la solution instationnaire repose sur la détermination du nombre de Rayleigh thermique critique,  $Ra_{TCr}$ , pour lequel l'écoulement devient oscillatoire et périodique dans le temps. Une légère augmentation du nombre de Rayleigh thermique (nombre de Rayleigh solutal fixe) à partir d'une valeur correspondant au régime stationnaire permet d'atteindre la valeur du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$ , valeur correspondant au régime oscillatoire et périodique dans le temps. La valeur de  $Ra_{TCr}$  représente le seuil des instabilités hydrodynamiques, thermiques et solutale. Cette technique a été largement utilisée dans les travaux de [Zhou et Zebib, 1992](#) ; [Gelfgat et Youseph, 2001](#) ; [Bessaïh et Bouabdallah, 2008](#), [Bouabdallah et al., 2011](#). Le pas du temps adimensionnel est fixé à  $\Delta\tau = 1 \times 10^{-5}$ .

Dans le but de vérifier que le régime d'écoulement oscillatoire, trouvé pour un pas de temps adimensionnel  $\Delta\tau$  donné (courbe d'évolution en bleu), est réellement physique, on recalcule la solution obtenue avec les mêmes paramètres de l'écoulement, mais cette fois-ci avec un pas de temps de  $\Delta\tau/2$  (courbe d'évolution en noir). Cette méthode éliminera bien les oscillations d'origine numérique qui peuvent être durant les calculs. Si les amplitudes et les fréquences des oscillations restent les mêmes dans tous les points après réduction du pas de temps, cette instabilité sera physique. Sinon, les oscillations obtenues sont d'origine numérique. Les [Figures IV.16a-d](#) montrent bien l'indépendance du régime oscillatoire avec le pas de temps, pour les évolutions temporelles de la température adimensionnelle  $\theta$ , de la concentration adimensionnelle  $\Phi$ , et des composantes de la vitesse verticale  $V$  et horizontale  $U$ .

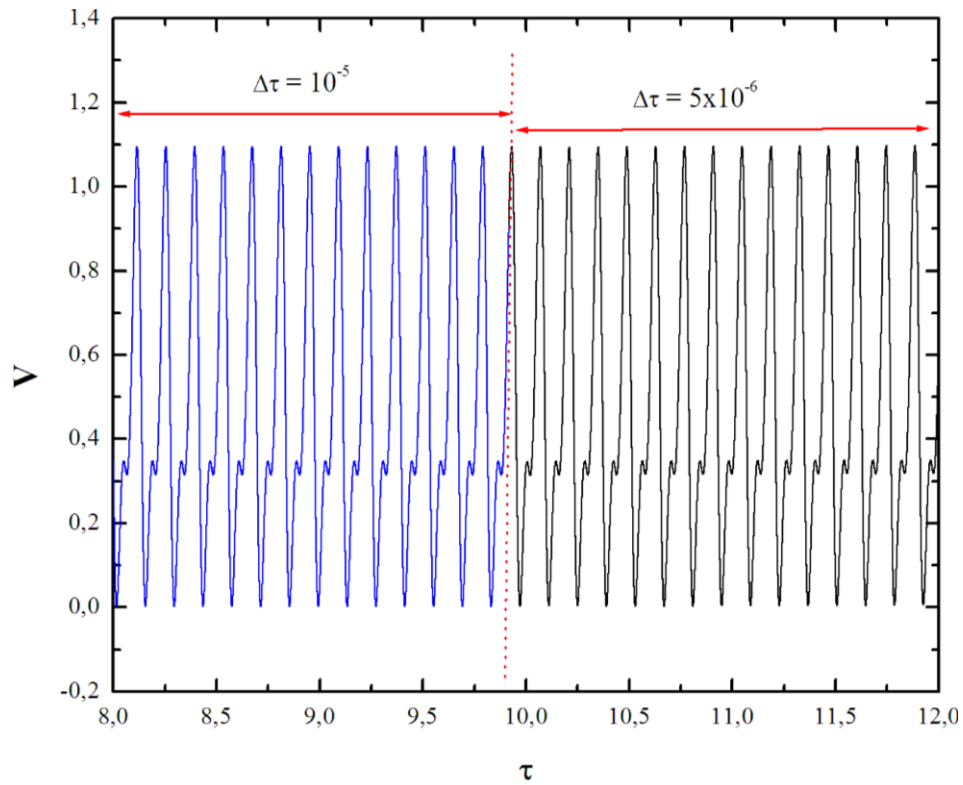


Figure IV.16a. Evolution temporelle de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle,  $V$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

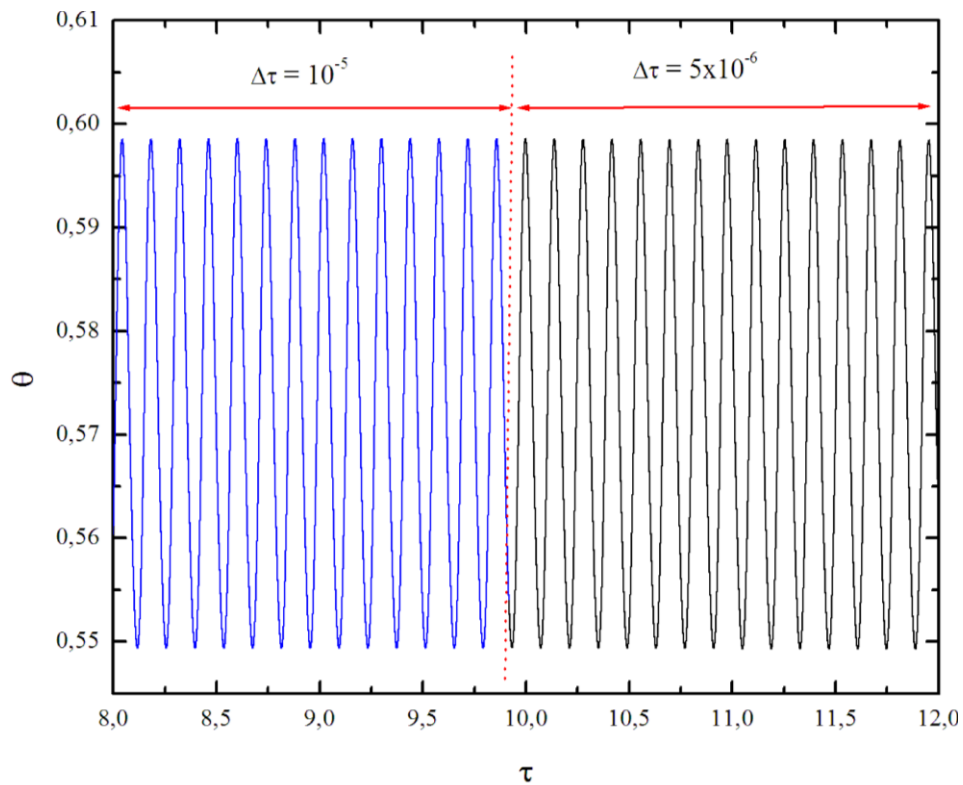


Figure IV.16b. Evolution temporelle de la température adimensionnelle,  $\theta$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

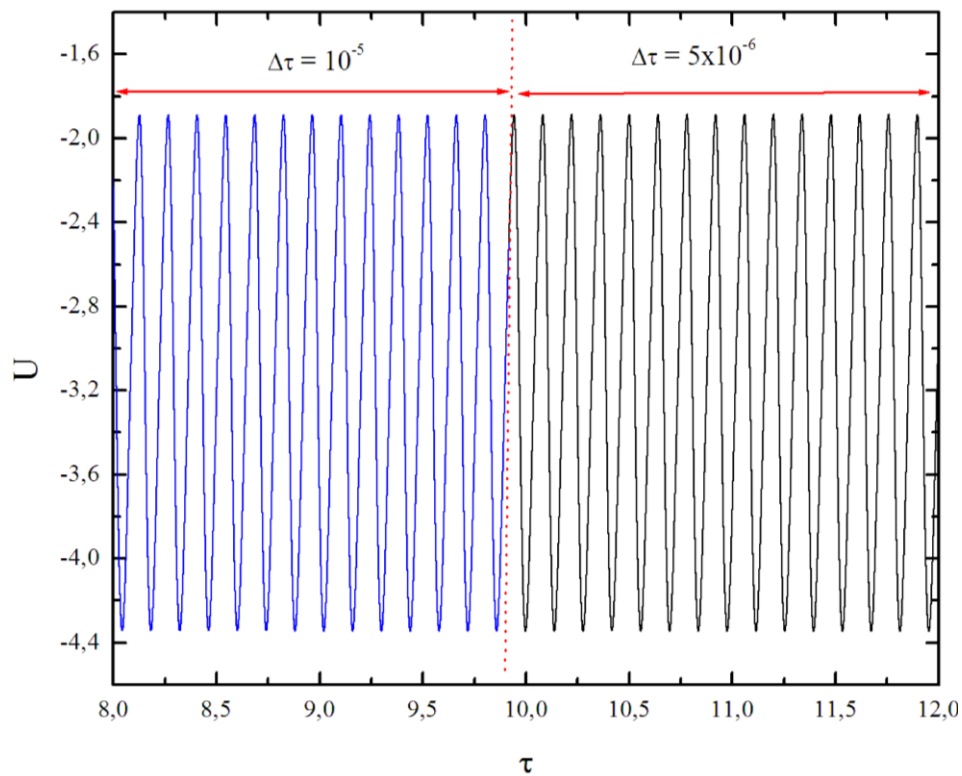


Figure IV.16c. Evolution temporelle de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle,  $U$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

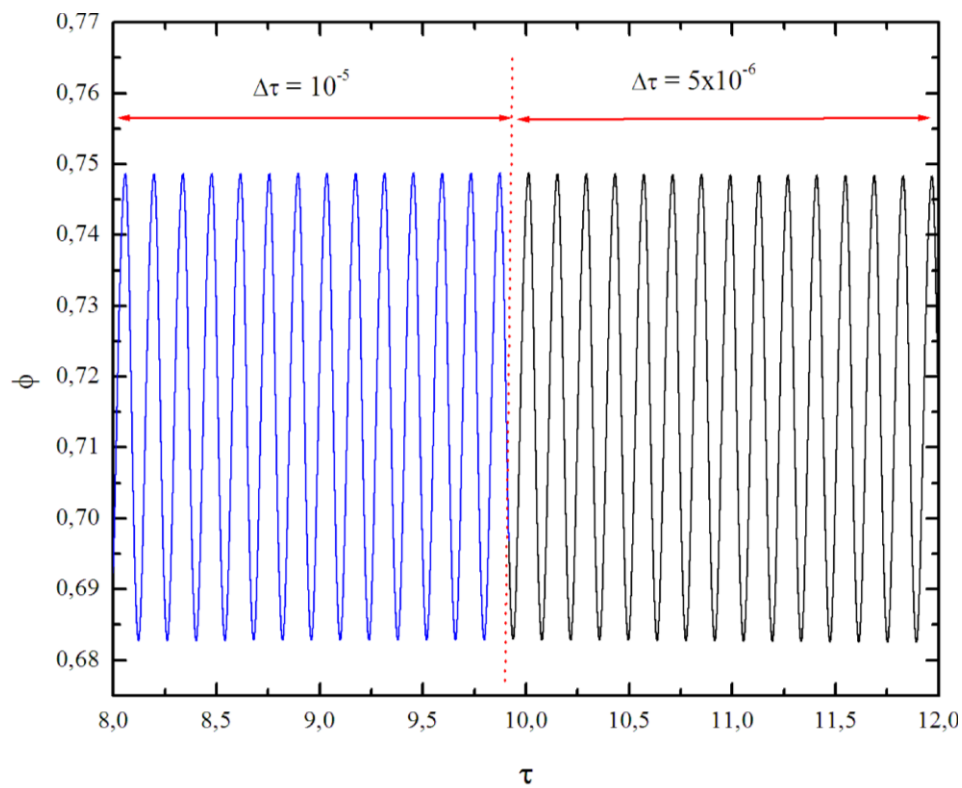


Figure IV.16d. Evolution temporelle de la concentration adimensionnelle,  $\Phi$  au point  $S_2$ , pour deux pas de temps consécutifs  $\Delta\tau$  et  $\Delta\tau/2$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

Une autre technique de vérification de l'uniformité et la périodicité d'une évolution temporelle concerne l'évolution dans le temps des paramètres hydrodynamiques et thermiques-massiques entre eux. Cette technique est bien discutée dans la Section 4.4.2.

Sur les [Figures IV.17a-d](#), nous avons présenté la variation temporelle de la composante de vitesse verticale adimensionnelle  $V$  ([Fig. IV.17a](#)), de la composante de vitesse horizontale  $U$  ([Fig. IV.17b](#)), de la température adimensionnelle  $\theta$  ([Fig. IV.17c](#)) et de la concentration adimensionnelle  $\Phi$  ([Fig. IV.17d](#)) aux différents nœuds choisis arbitrairement dans la cavité ( $S_1, S_2, S_4, S_5$  et  $S_6$ ). Nous constatons que ces courbes évoluent d'une manière sinusoïdale autour des valeurs moyennes, et ont la même fréquence d'oscillation. Si on compare les amplitudes des paramètres en oscillation, on peut remarquer que ces amplitudes présentent des grandeurs différentes, pour les différents points d'enregistrement d'historique. Cela conduit à conclure que l'amplitude du signal sinusoïdale dépend fortement de la position des particules dans la cavité. Par exemple, la température adimensionnelle à la sonde  $S_4$  évolue sinusoïdalement autour de la valeur adimensionnelle moyenne  $\theta \approx 0,70$ , et pour la sonde  $S_2$ , la température moyenne du signal est de l'ordre de 0,57 ([Fig. IV.17c](#)). De même, pour l'évolution temporelle de la concentration  $\phi$  aux sondes  $S_2$  et  $S_6$ , où  $S_2$  a une évolution autour de la valeur moyenne  $\phi \approx 0,71$  et  $S_6$  a une évolution autour de la valeur moyenne  $\phi \approx 0,26$  ([Fig. IV.17d](#)). Les particules les plus proches des parois actives (parois isothermes perméables) ont des signaux de forte amplitude par rapport à celles situées loin des parois actives, tandis que les fréquences des oscillations sont les mêmes partout (dans le fluide). Ceci confirme de plus l'originalité physique du régime oscillatoire.

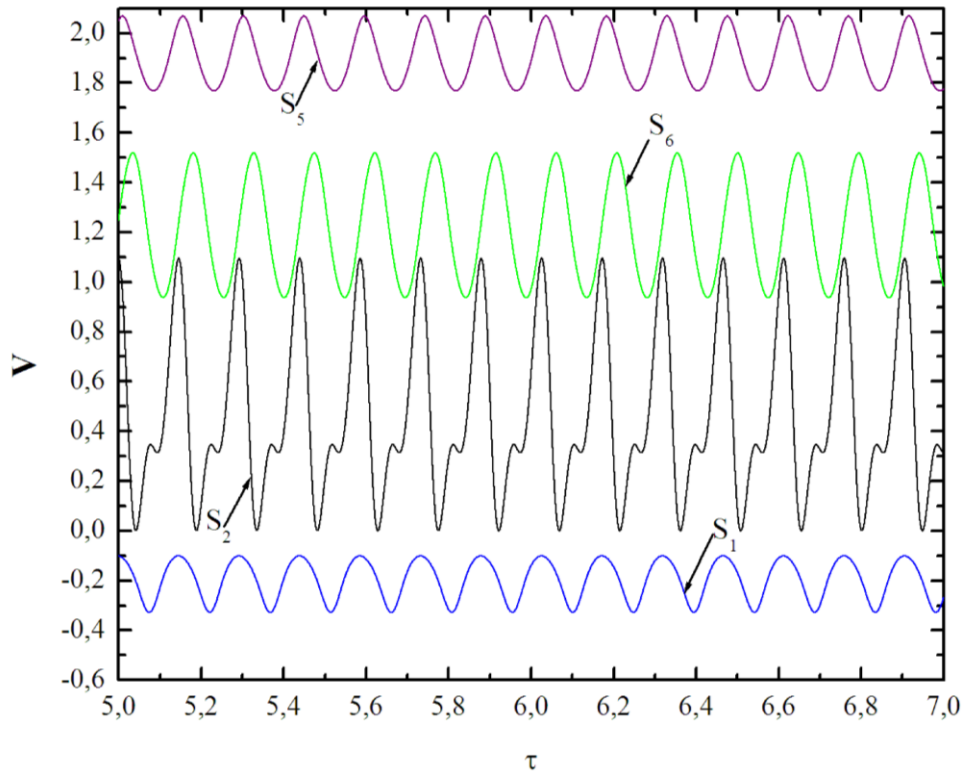


Figure IV.17a. Evolution temporelle de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle, aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_5$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

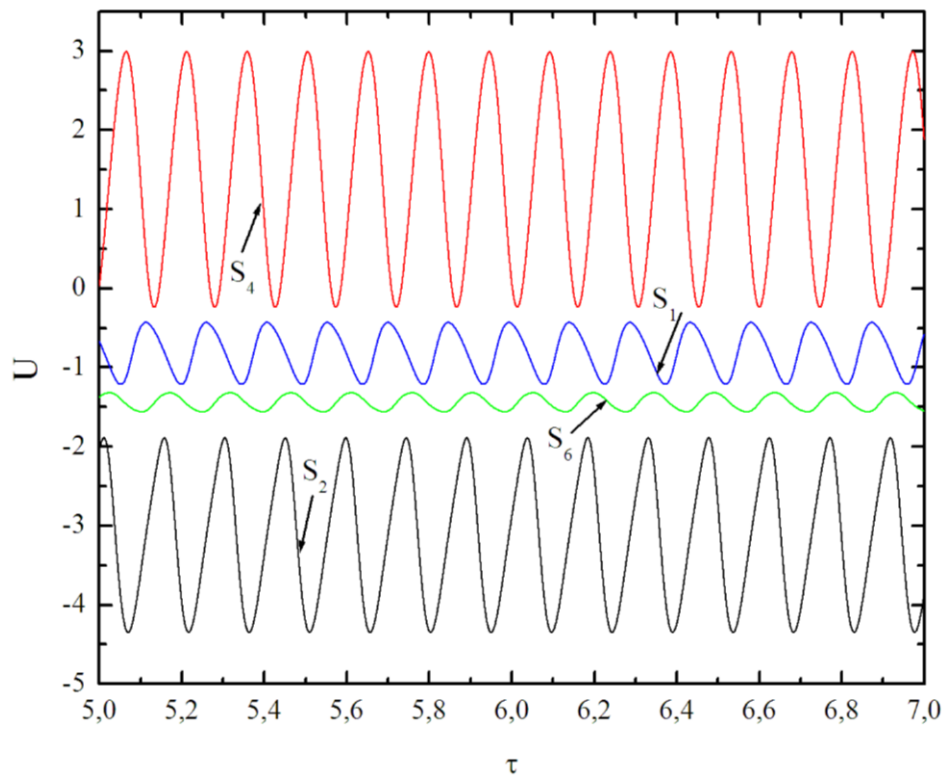


Figure IV.17b. Evolution temporelle de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle, aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_4$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

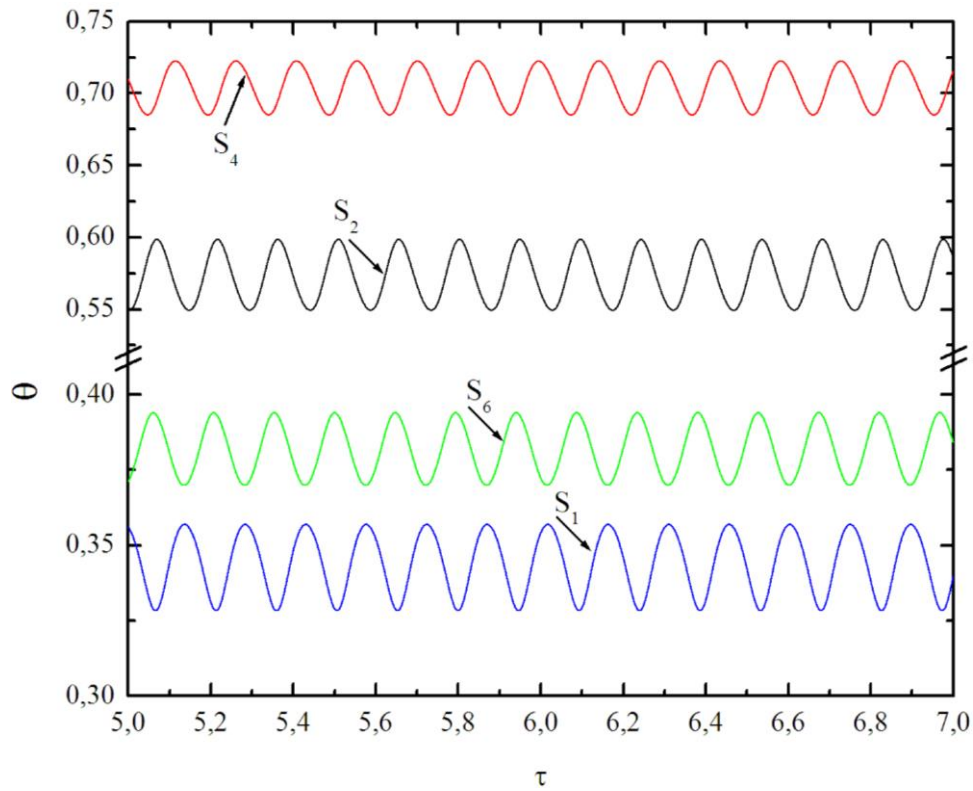


Figure IV.17c. Evolution temporelle de la température adimensionnelle, aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_4$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$ ,  $N = 1.25$ ).

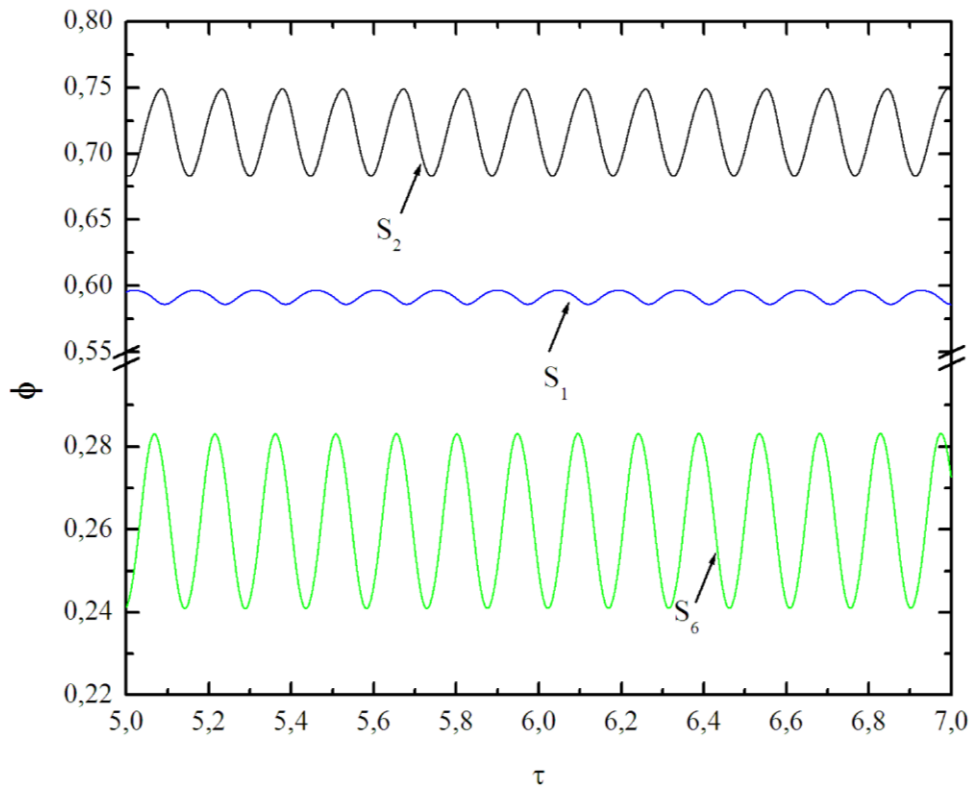


Figure IV.17d. Evolution temporelle de la concentration adimensionnelle, aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité :  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_6$  ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ ,  $N = 1,25$ ).

### 4.2.2 Portraits de phase

Les portraits de phase traduisent le changement des paramètres hydrodynamiques, thermiques et massiques entre eux. Alors, pour un régime oscillatoire et périodique, en un point (sonde de mesure) considéré, ces changements constituent des cercles fermés traduisant la périodicité du régime de l'écoulement. Par ailleurs, pour un régime de l'écoulement qui n'est pas oscillatoire et périodique, les profils de changement des paramètres de l'écoulement constituent des points limites ou d'autres structures non ordonnées.

Sur les [Figures IV.18a-c](#), nous avons présenté les portraits de phase de la température en fonction de la concentration, et les portraits de la composante de la vitesse verticale  $V$  en fonction de la composante de vitesse horizontale  $U$ , pour un écoulement de double diffusion à la sonde  $S_3$ . Les portraits sont présentés pour  $N = 1,25$  et pour trois valeurs du nombre de Rayleigh thermique : valeur inférieure de la valeur critique  $Ra_T < Ra_{TCr}$  et à une valeur critique  $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$  et la troisième valeur supérieure à celle de la valeur critique  $Ra_T > Ra_{TCr}$ .

Les cercles fermés montrent que le régime périodique est bien établi pour  $Ra_T = Ra_{TCr}$ , ce qui traduit la périodicité du régime de l'écoulement. Par contre, pour les valeurs du nombre de Rayleigh supérieures ou inférieures au nombre de Rayleigh thermique critique, les courbes ne forment pas des cercles fermés totalement ou même des formes non ordonnées pour des valeurs inférieures. Cette technique a été utilisée, successivement, dans les travaux de [Bessaïh & Bouabdallah \(2008\)](#) ; [Bouabdallah et al. \(2011\)](#).

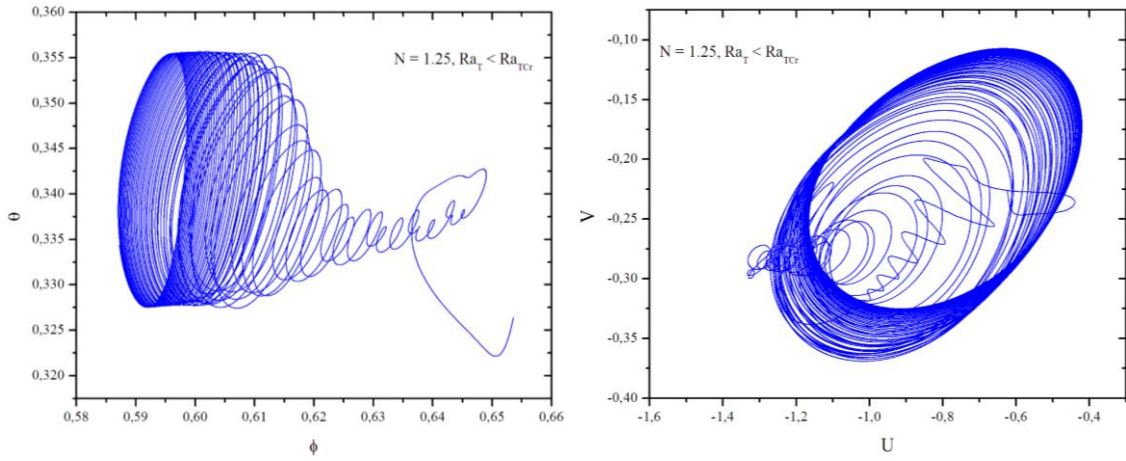
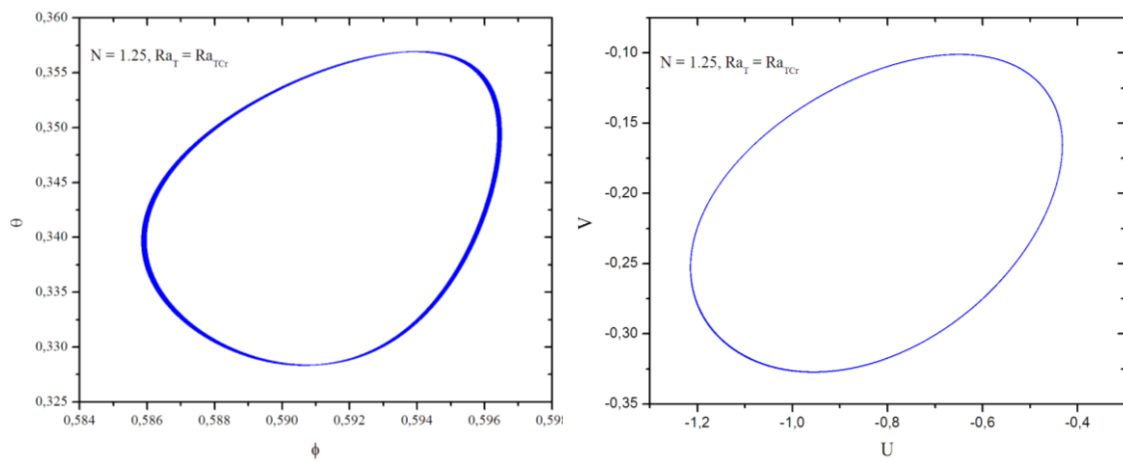
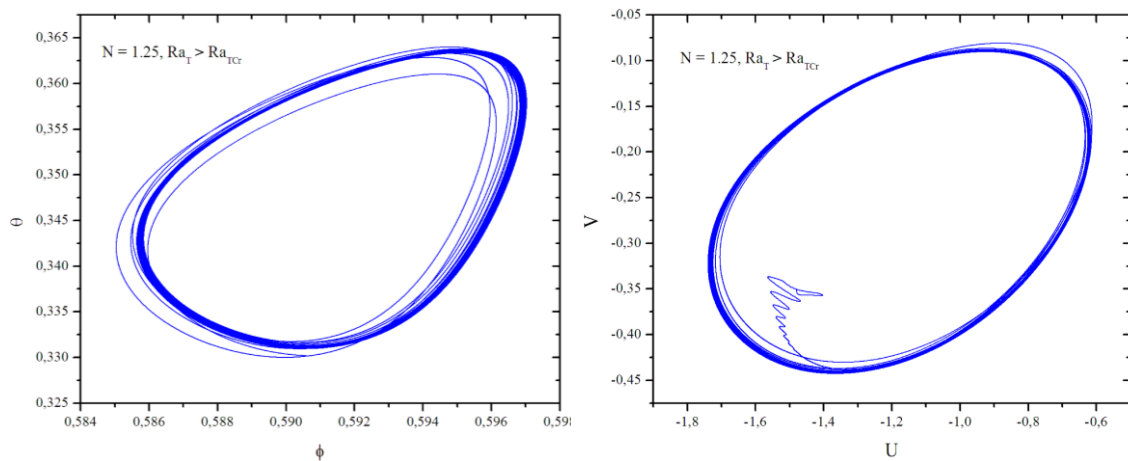
(a) Cas de  $Ra_T < Ra_{TCr}$ (b) Cas de  $Ra_T = Ra_{TCr}$ (c) Cas de  $Ra_T > Ra_{TCr}$ 

Figure IV.18. Portrait de la température en fonction de la concentration (gauche), Portrait de  $V$  en fonction de  $U$  (droite) pour un écoulement de double diffusion oscillatoire à la sonde  $S_3$  pour  $N = 1,25$  et  $Ra_T$  inférieur et supérieur au  $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$ .

### 4.2.3 Spectre d'énergie et fréquences des oscillations

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, nous avons utilisé la transformée de Fourier rapide (TFR). D'un nombre de puissance 2 de la valeur de la variation temporelle des composantes de la vitesse horizontale et verticale, cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir l'énergie  $E$  en fonction des fréquences des oscillations  $Fr$ , définies par :  $Fr = m/(n \times \Delta\tau)$ , où  $\Delta\tau$  est l'incrément du temps et  $m = 0, 1, \dots, n/2$ .

Les valeurs de  $E(Fr)$  représentent plusieurs échelles de grandeur. Dans ce cas, nous avons utilisé son logarithme décimal (Benisaad, 2003). On note que, dans le présent travail, la fréquence critique  $Fr_{Cr}$  représente le pic du spectre d'énergie ( $Fr, \text{Log}[E(Fr)/n^2]$ ), et correspond à la fréquence dominante pour  $n = 2^{16}$  et  $\Delta\tau = 5 \times 10^{-5}$  (Figure IV.19).

Les fréquences prédominantes adimensionnelles (les plus grands pics) sont considérées comme celles jouant le rôle principal dans l'oscillation de l'écoulement et donc l'échange de l'énergie cinétique et thermique. Notons que l'apparition de plusieurs pics d'une façon multiple de la fréquence dominante est entraînée par le phénomène de bifurcation de l'écoulement.

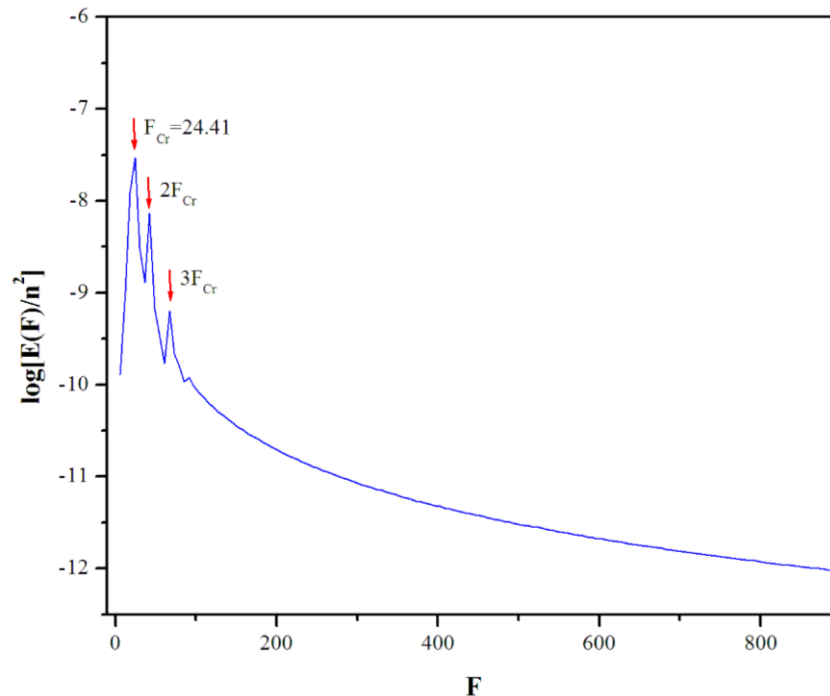


Figure IV.19. Spectre d'énergie obtenu par la transformée Rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la concentration adimensionnelle au point  $S_1$ , pour  $Ra_{TCr} = 1,505 \times 10^6$  et  $N = 2$ .  $Fr_{Cr} = 24.41$  représente la fréquence critique dominante adimensionnelle.

#### 4.2.4 Champ d'écoulement en régime oscillatoire

Pour visualiser la structure de l'écoulement en régime oscillatoire, nous avons présenté sur les [Figures IV.20a-h](#), les lignes iso-concentrations, les lignes isothermes et les lignes de courant en régime oscillatoire (au temps adimensionnel,  $\tau = 5$ ) de la convection naturelle à double diffusion, et ceci, pour chacun des rapports de force de flottabilité  $N$  (0,25, 0,50, 0,75, 1, 1,25, 1,50, 1,75 et 2). Nous constatons que le rapport de la force de flottabilité a un effet considérable sur la structure de l'écoulement double diffusive oscillatoire. Le cas de faibles rapports de la force de flottabilité ( $N = 0,25, 0,5$  et  $0,75$ ) a des structures d'iso-concentration plus compliquées par rapport aux autres cas ( $N > 1$ ). Cependant, la structure thermique (lignes isothermes) a des stratifications plus élevées au centre de la cavité. Cette situation peut être expliquée par la dominance des forces thermiques par rapport aux forces solutales. Des résultats similaires sont obtenus par [Sezai and Mohamed \(2000\)](#), pour le cas du régime laminaire ( $Ra_T = 10^5$  et  $-2 < N < 0$ ). Pour les lignes de courant, une seule cellule est montrée pour le cas d'équilibre des forces thermique et solutale ( $N = 1$ ). Par ailleurs, l'écoulement se bifurque en deux cellules horizontales pour  $N > 1,25$ . Ceci est dû à la dominance des forces massiques. Si on compare les valeurs maximales de la fonction de courant, on peut voir que le cas de  $N = 0,25$  a une valeur élevée ( $\psi = -2,6$ ). Mais, cette valeur diminue avec l'augmentation du rapport de flottabilité à  $N$  plus de 1,25. Ensuite, l'intensité de l'écoulement de la convection à double diffusion oscillatoire se stabilise autour de  $\psi = -1,2$ .

Alors, on peut conclure qu'en écoulement oscillatoire la dominance des forces thermiques ( $N < 1$ ) augmente l'intensité de l'écoulement (fonction de courant) mieux que le cas de la dominance des forces massiques ( $N > 1$ ). Pour la couche limite sur les parois verticales, son épaisseur est considérable pour les valeurs de  $N$  modérées ( $N < 1,25$ ). Ceci correspond au cas d'un écoulement monocellulaire, avec l'augmentation du  $N$ , l'épaisseur de la couche limite diminue et l'écoulement devient bicellulaire horizontal.

Pour étudier l'effet du rapport de flottabilité sur la naissance du régime oscillatoire de la convection double diffusive, on a effectué une série de calculs pour chaque valeur de  $N$ . Le nombre de Rayleigh thermique critique correspondant ainsi que sa fréquence critique ont été déterminés pour chaque  $N$ . Les résultats sont présentés sur la [Figure IV.21](#). On peut remarquer que le nombre de Rayleigh thermique critique diminue pour  $N < 1$ , et augmente pour  $N > 1$ . Les mêmes observations sont faites pour la fréquence critique. En plus, pour le cas d'équilibre des forces thermiques et solutales ( $N = 1$ ), on constate que ces valeurs sont minimales.

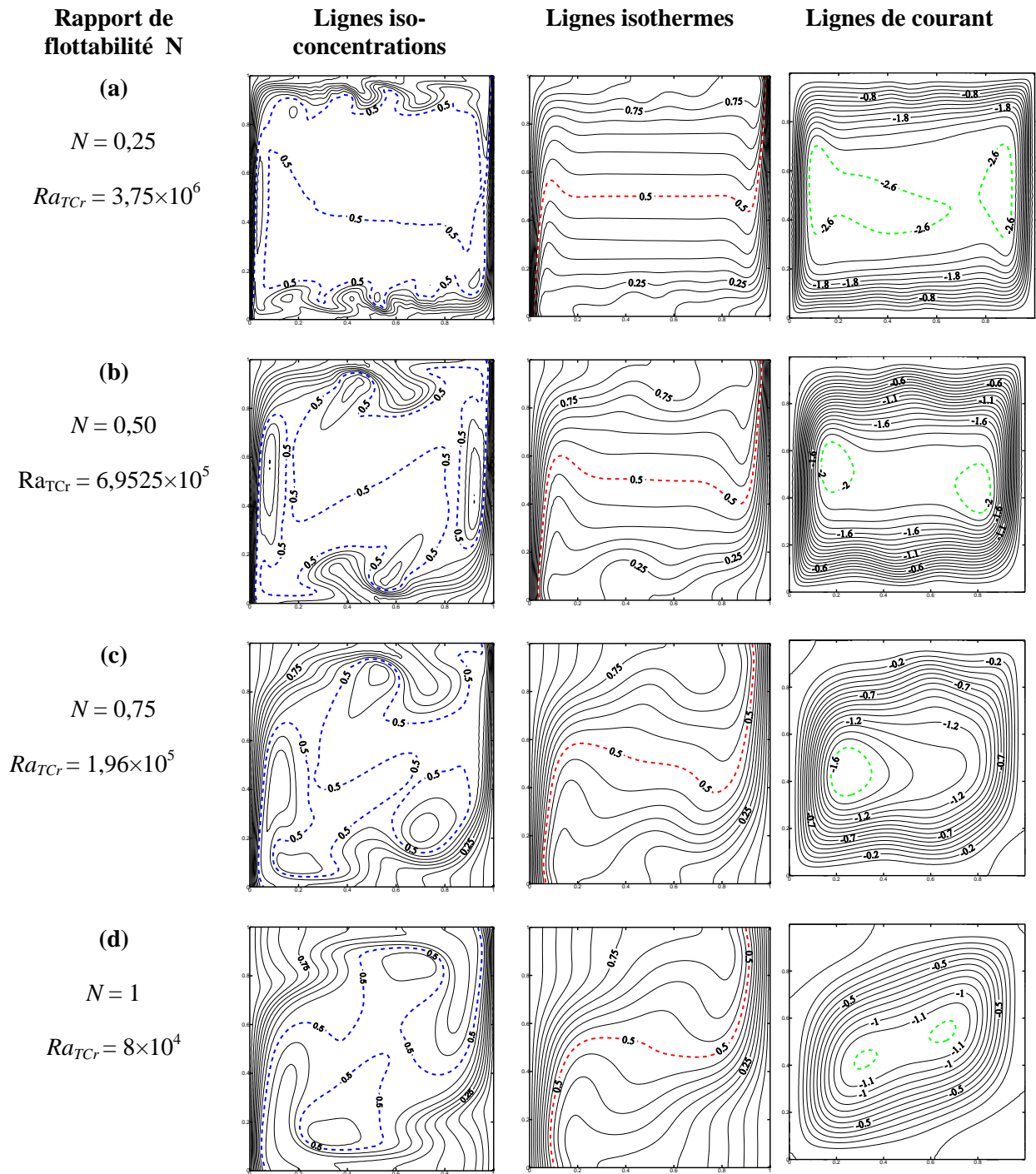


Figure IV.20. Lignes de courant (droite), lignes isothermes (centre) et lignes iso-concentrations (gauche), en régime oscillatoire  $Ra_{TCr}$  correspondant à  $N$  ( $N = 0,25, 0,50, 0,75, 1, 1,25, 1,50, 1,75$  et  $2$ ), et au temps adimensionnel,  $\tau = 5$ .

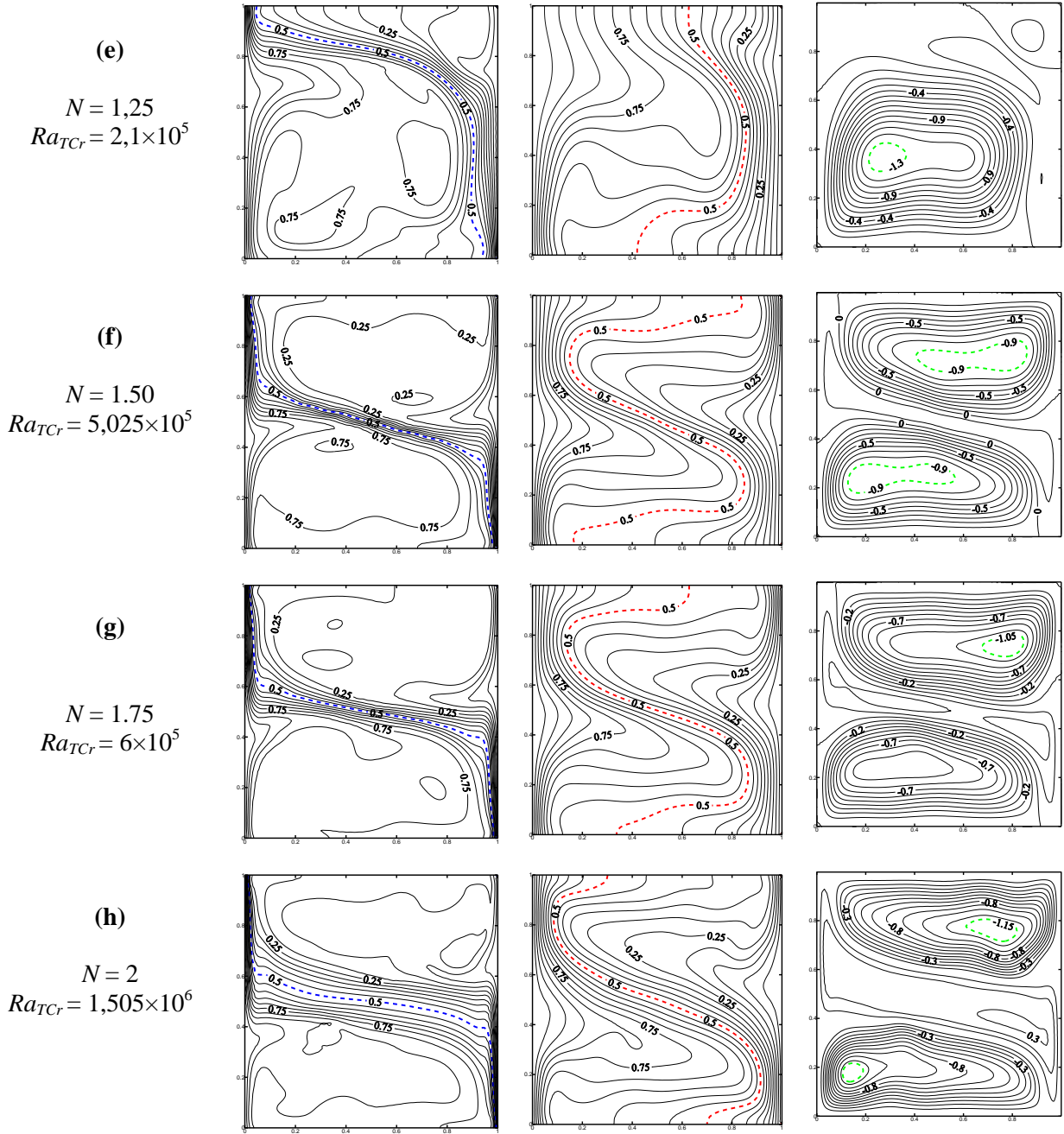


Figure IV.20. (Suite)

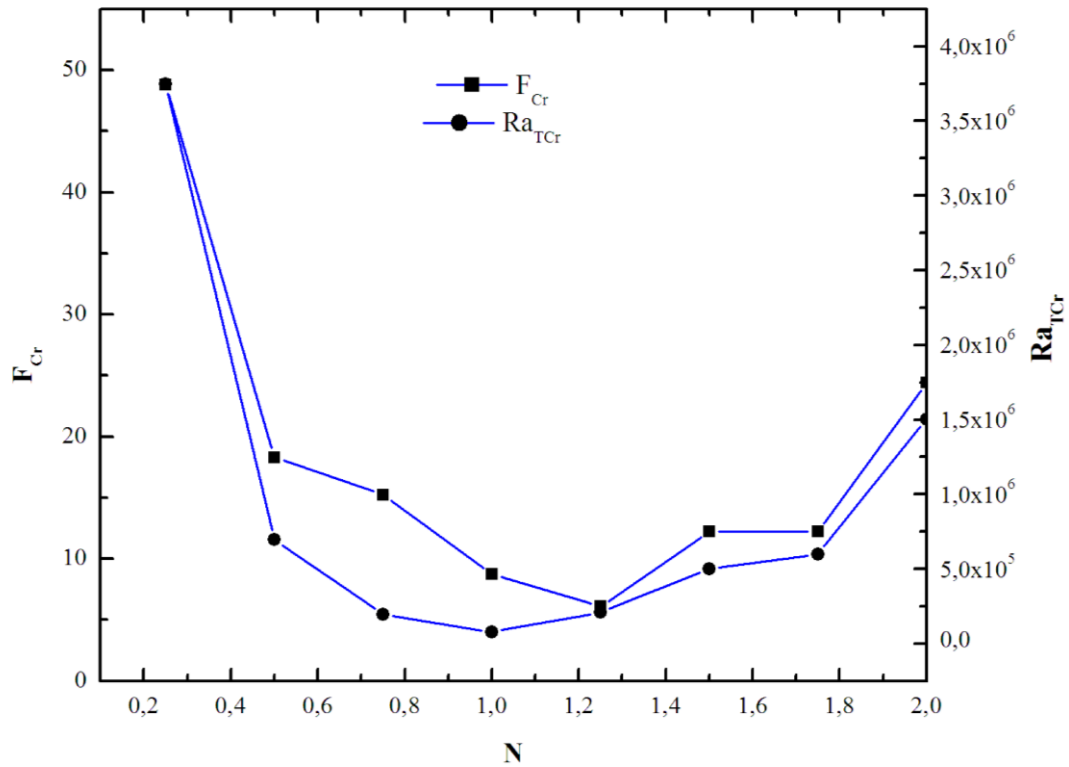


Figure IV.21. Nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en régime oscillatoire et la fréquence correspondante à chaque cas en fonction du rapport des forces de flottabilité  $N$ .

Sur les Figures IV.22a-b, nous avons présenté les profils de la composante de la vitesse horizontale  $U$  et celle de la composante de la vitesse verticale  $V$  au centre de la cavité, pour différentes valeurs du rapport de flottabilité  $N$  et pour un  $Ra_{TCr}$  correspondant à chaque rapport de flottabilité  $N$ . On constate que la valeur maximale de la composante de la vitesse horizontale  $U$  est enregistrée pour  $N = 0,25$  avec un changement de direction proche des parois actives pour  $N < 1$ . Pour  $N > 1$ , le changement du sens se fait au centre de la cavité entre 0.2 - 0.8 ; ceci est dû à la dominance des forces massiques et la vitesse  $U$  est maximale au centre de la cavité pour  $N > 1$ . Par contre, la composante de la vitesse verticale  $V$  est maximale proche des parois actives pour différentes valeurs de  $N$  avec des valeurs clairement supérieures (valeurs positives proches de la paroi droite et valeurs négatives proches de la paroi gauche) pour  $N \neq 1$ . Et elle est presque nulle ( $V \approx 0$ ) au centre de la cavité pour toutes les valeurs de  $N$ .

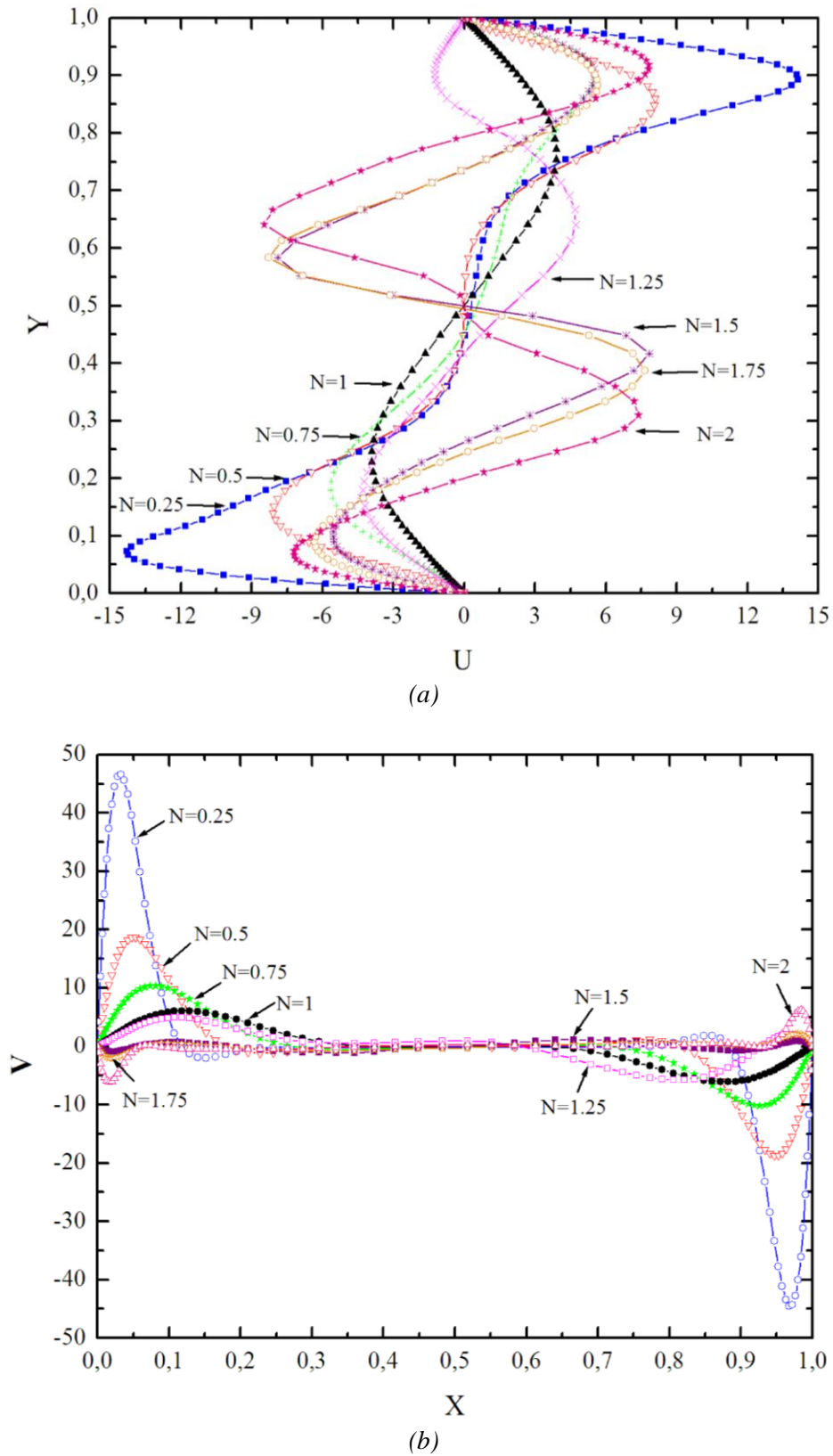
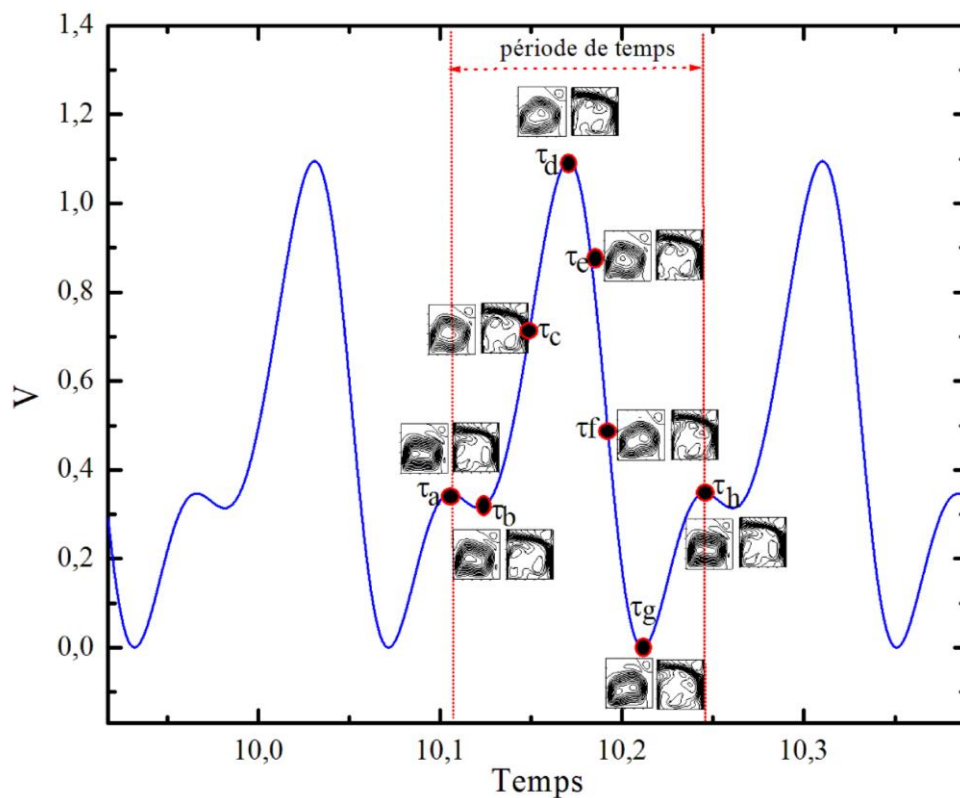


Figure IV.22. Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  (a) et verticale adimensionnelle  $V$  (b) au centre de la cavité, pour différents rapports des forces de flottabilité  $N$  et pour  $Ra_{TC}$  correspondant.

Dans le but de comprendre la nature du régime oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement dans la cavité pour le cas de la convection naturelle à double diffusion, on a choisi l'évolution temporelle au cours d'une période de la vitesse verticale  $V$  au point  $S_2$  (Figure IV.23), pour le cas ( $Ra_{TCr} = 2,1 \times 10^5$  et  $N = 1,25$ ). Et pour explorer la structure de l'écoulement, on a présenté les lignes de courant et les iso-concentrations pendant des laps de temps notés  $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f, \tau_g$  et  $\tau_h$ . On peut remarquer que les lignes de courant ont la forme d'une cellule principale concentrée aux coins inférieurs de la cavité et une cellule secondaire aux coins supérieurs de la cavité avec la création d'une troisième cellule dans les instants ( $\tau_a, \tau_b, \tau_g$ , et  $\tau_h$ ). Pour l'évolution temporelle de la concentration adimensionnelle dans une période de temps, on a une rotation dans le sens horaire de deux cellules au centre de la cavité avec une condensation des iso-concentrations dans les coins inférieurs de la paroi froide.

Egalement, on remarque que la structure à l'instant  $\tau_a$  est parfaitement semblable à celle de l'instant  $\tau_h$ , ce qui signifie que la structure de l'écoulement se répète dans chaque période de temps.



*Figure. IV.23* Evolution temporelle de la composante de vitesse  $V$  au point  $S_2$ , en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 2.1 \times 10^5$  et  $N = 1.25$ ). Ainsi, les lignes de courants et des lignes iso-concentrations pour une période de temps.

## 5. Conclusion du Chapitre IV

Dans cette partie, la convection à double diffusion dans un mélange binaire a été étudiée numériquement. Les conclusions suivantes sont tirées :

- L'écoulement de la convection naturelle à double diffusion est fortement influencé par le rapport des forces de flottabilité  $N$ , en régime laminaire stationnaire et en régime oscillatoire.
- Le seuil de la convection à double diffusion se manifeste par des oscillations périodiques régulières dans le temps, où le phénomène physique se répète à chaque période de temps.
- Le nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  et la fréquence correspondante pour le seuil de la convection oscillatoire double-diffusive ont été déterminés pour chaque rapport de flottabilité  $N$ . En plus, les résultats montrent une forte dépendance entre le rapport de la flottabilité et l'apparition de l'écoulement oscillatoire.
- Le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_{TCr}$  diminue lorsque l'effet thermique est dominant ( $N < 1$ ). Par ailleurs, il augmente lorsque l'effet solutale est dominant ( $N > 1$ ). La valeur minimale du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  est obtenue pour le cas de forces thermiques et solutales égales.
- La dominance des forces thermiques ( $N < 1,25$ ) induit une augmentation de l'intensité de l'écoulement (fonction de courant) mieux que celles des forces massiques ( $N > 1,25$ ).

# Chapitre V

## Convection à Double Diffusion sous l'Effet du Champ Magnétique

### 1. Intérêt d'application du champ magnétique

L'obtention de monocristaux des semi-conducteurs homogènes à faible défauts est d'un intérêt primordial dans l'industrie électronique où les semi-conducteurs sont employés dans une multitude d'appareils électroniques, tels que des circuits logiques, des puces de mémoire, des circuits optoélectroniques, des lasers, des détecteurs, etc. Les performances de ces appareils sont fortement influencées par les défauts induits pendant les processus de croissance (solidification) provoqués par l'incorporation de contaminants. En outre, les avancées vers la miniaturisation des circuits intégrés sont entravées par l'incorporation non-uniforme des dopants (solutés). Cette non-uniformité de composition (macro-ségrégation) est régie par les mécanismes de transport lors du processus de croissance. Par conséquent, il est important d'étudier les divers aspects des phénomènes de transport qui commandent le comportement de changement de phase lors de la croissance.

Le champ magnétique est reconnu par l'effet stabilisant des écoulements convectifs qui sont les principaux responsables des distributions des inhomogénéités compositionnelles (conduisant à la macro-ségrégation). En outre, la capacité du champ magnétique à supprimer les écoulements convectifs avec ou sans changement de phase (phénomènes des instabilités des écoulements convectifs, bifurcation) est envisageable.

Dans ce Chapitre, nous nous intéressons à étudier l'effet d'un champ magnétique externe sur un fluide conducteur de l'électricité. Pour cela, nous avons pris les mêmes propriétés du fluide que ceux du travail de [Zhou et Zebib \(1994\)](#).

Un champ magnétique externe sera appliqué pour différentes intensités et orientations en cherchant les meilleures conditions magnétohydrodynamiques de la production des cristaux de bonne qualité.

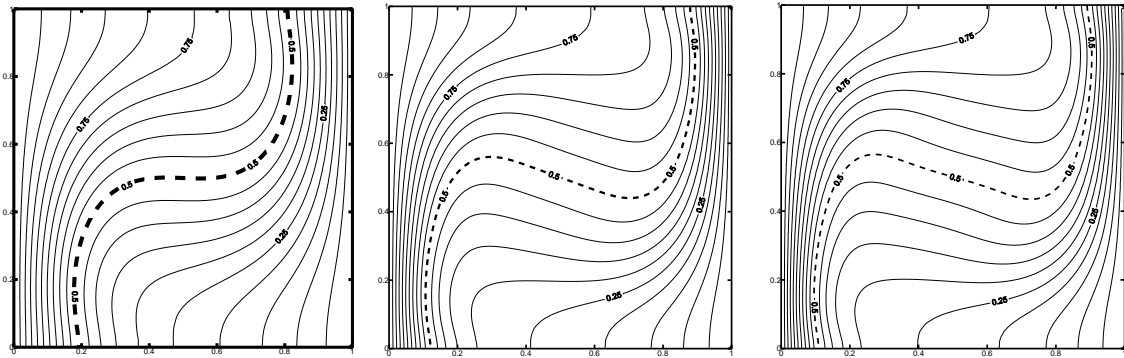
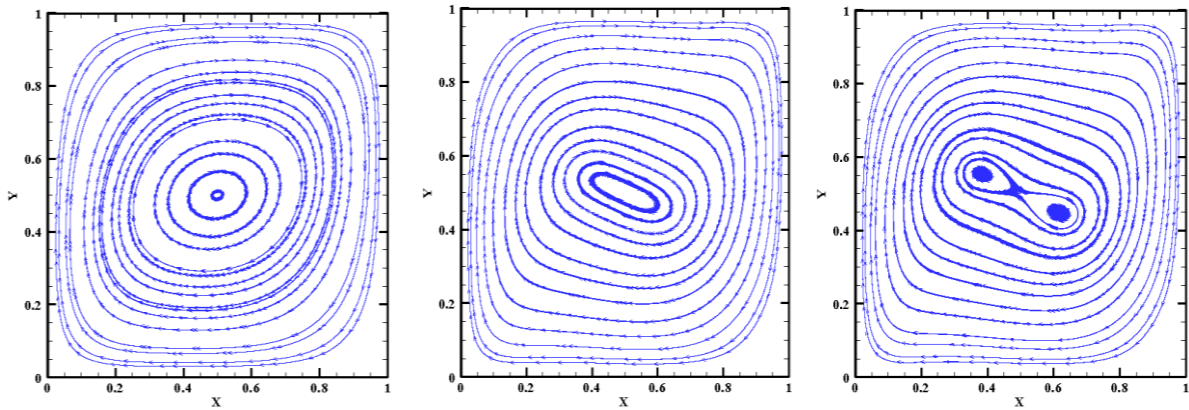
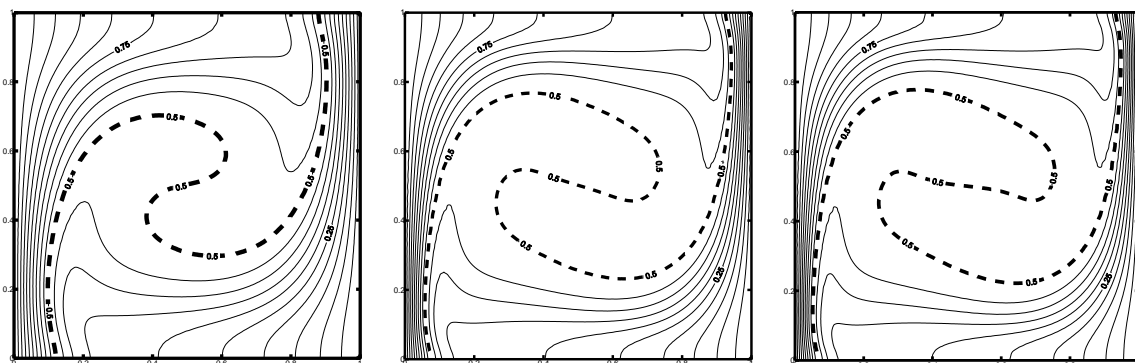
Suivant la méthodologie de l'étude d'un écoulement exposé à un champ magnétique extérieur et uniforme ([Zhou et Zebib 1994](#) ; [Gelfgat et Yoseph 2001](#) ; [Bouabdallah et Bessaih](#)

2010), nous considérons dans ce travail les valeurs de Hartmann,  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ . Un champ magnétique d'intensité moyenne où faible est choisi, pour éviter le phénomène d'échauffement magnétique qui se manifeste lorsque le champ magnétique est d'intensité forte (Dulikravich, 1999 ; Bouabdallah et Bessaih 2012). Alors que pour les métaux liquides et les semi-conducteurs avec une échelle de longueur de  $0,01$  [m], utilisée dans des ampoules de croissance, le champ magnétique appliqué est de l'ordre de  $0,1- 0,5$  Tesla. C'est un champ magnétique externe relativement faible qui a pour but de stabiliser l'écoulement conducteur d'électricité. Au-delà de ces valeurs de  $Ha > 150$ , on se trouve avec un phénomène inverse (déstabilisation de l'écoulement). Ce cas n'est pas pris en compte dans ce travail et le lecteur intéressé par les phénomènes de déstabilisation magnétique est invité à consulter les travaux de Tagawa et al. (2006).

## 2. Ecoulement stationnaire sans champ magnétique

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas du régime laminaire en absence du champ magnétique. Pour cette raison, nous avons fixé la valeur du nombre de Hartmann ( $Ha = 0$ ) dans l'équation gouvernante (Eqs. II.33a-b) avec les mêmes paramètres utilisés dans le travail de Zhou et Zebib (1994), pour le cas des gradients thermiques/solutales opposants.

Sur les Figures V.1a-c, nous avons présenté la structure de l'écoulement par les lignes isothermes, les lignes de courant et les lignes iso-concentrations, en régime laminaire, pour  $N = 0,75$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sc = 3,5$ , et pour différents nombres de Rayleigh thermique :  $Ra_T = 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  et  $7 \times 10^4$  (valeurs inférieures au  $Ra_{TCr}$ ). On constate que les isothermes se concentrent beaucoup plus proches des parois verticales. Des constatations similaires sont faites pour le champ de concentration. L'augmentation du nombre de Rayleigh thermique influe sur la structure des lignes isothermes et iso-concentrations, où la forte courbure de ces lignes se trouvent proches des parois actives verticales (isothermes perméables). Ces courbures traduisent le phénomène de la convection naturelle à double diffusive au milieu de la cavité, et le phénomène de la conduction proche des parois verticales et principalement dans les couches limites thermiques et solutales qui se développent proches de celle-ci. On peut voir également que l'augmentation du nombre de Rayleigh influe sur la structure des lignes de courants (Figure V.1c), où la cellule principale s'élargit de plus en plus pour donner naissance à un écoulement bicellulaire, pour des nombres de Rayleigh thermique élevés.

(1)  $Ra_T = 10^4$ (2)  $Ra_T = 5 \times 10^4$ (3)  $Ra_T = 7 \times 10^4$ **(a) Lignes isothermes**(1)  $Ra_T = 10^4$ (2)  $Ra_T = 5 \times 10^4$ (3)  $Ra_T = 7 \times 10^4$ **(b) Lignes de courant**(1)  $Ra_T = 10^4$ (2)  $Ra_T = 5 \times 10^4$ (3)  $Ra_T = 7 \times 10^4$ **(c) Lignes iso-concentrations**

**Figure V.1.** Structure de l'écoulement : lignes isothermes (a), lignes de courant (b) et lignes iso-concentrations (c) en régime laminaire, pour  $N = 0,75$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sc = 3,5$  et pour différents nombres de Rayleigh thermique.

La [Figure V.2](#) représente les profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  au centre de la cavité ( $X = 0,5$ ), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ . Ces profils montrent que la vitesse est considérable près des parois verticales de la cavité et le fluide est presque stagné au centre ( $U \approx 0$ ). Ensuite, la vitesse change sa direction (symétrique par rapport à l'axe vertical au milieu de la cavité). L'augmentation du nombre de Rayleigh provoque une augmentation de la vitesse  $U$ . Quand le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$  passe de  $10^4$  à  $7 \times 10^4$ , la vitesse double sa valeur de 20 à 40 puis 50. Ceci indique que le mouvement convectif s'intensifie au sein du fluide. Les mêmes constatations sont relevées pour la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité ( $Y = 0,5$ ) ([Figure V.3](#)).

Afin de bien illustrer l'effet du nombre de Rayleigh pour le régime laminaire et en absence du champ magnétique, nous avons reporté, sur les [Figures V.4a-b](#), l'évolution temporelle des nombres de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ), pour différents nombres de Rayleigh thermique :  $Ra_T = 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  et  $7 \times 10^4$ . On constate que les courbes commencent par de faibles oscillations initiales amortissantes dues principalement aux conditions initiales, puis se stabilisent après un temps adimensionnel inférieur à 0,4. En augmentant le nombre de Rayleigh thermique, le nombre de Nusselt moyen augmente à 2 pour  $Ra_T = 10^4$ , à 3,26 pour  $Ra_T = 5 \times 10^4$  et à 3,63 pour  $Ra_T = 7 \times 10^4$ . Pour le nombre de Sherwood moyen, il augmente à 3,63, 5,81 puis 6,50. Ainsi, l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique induit une augmentation des taux de transfert de chaleur et de masse. Et chaque fois le taux de transfert de masse ( $Sh$ ) plus élevé que le taux de transfert de chaleur ( $Nu$ ). Ce qui confirme, également, que les particules du fluide commencent à se déplacer en premier lieu dans la cavité sans transporter de la chaleur jusqu'à la naissance de la convection thermique.

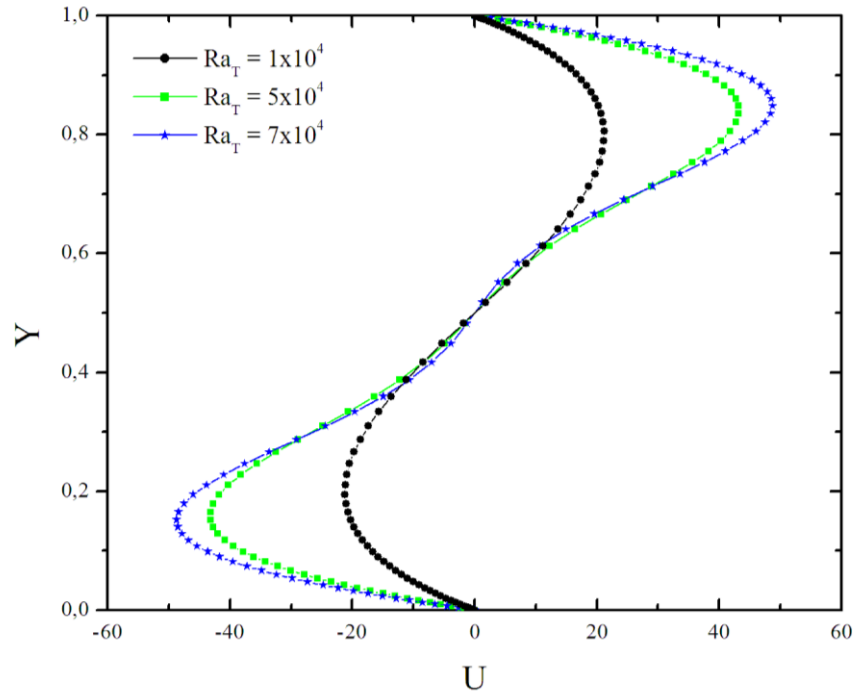


Figure V.2. Profils de la composante de vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  au centre de la cavité  $X = 0,5$  entre les deux parois horizontales, pour les trois nombres de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  et  $7 \times 10^4$ , pour  $N = 0,75$ ,  $Ha = 0$ .

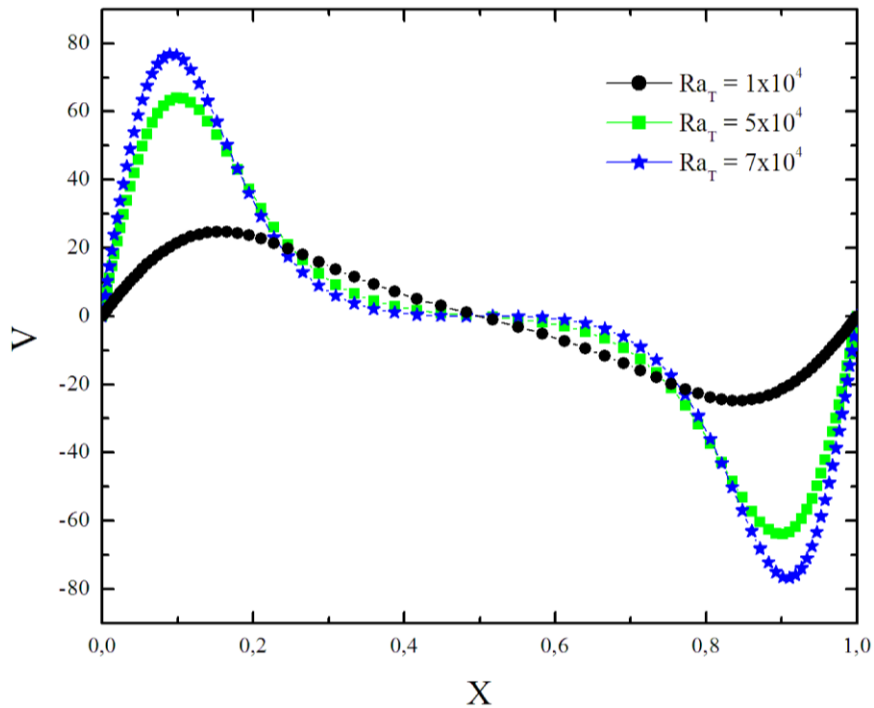
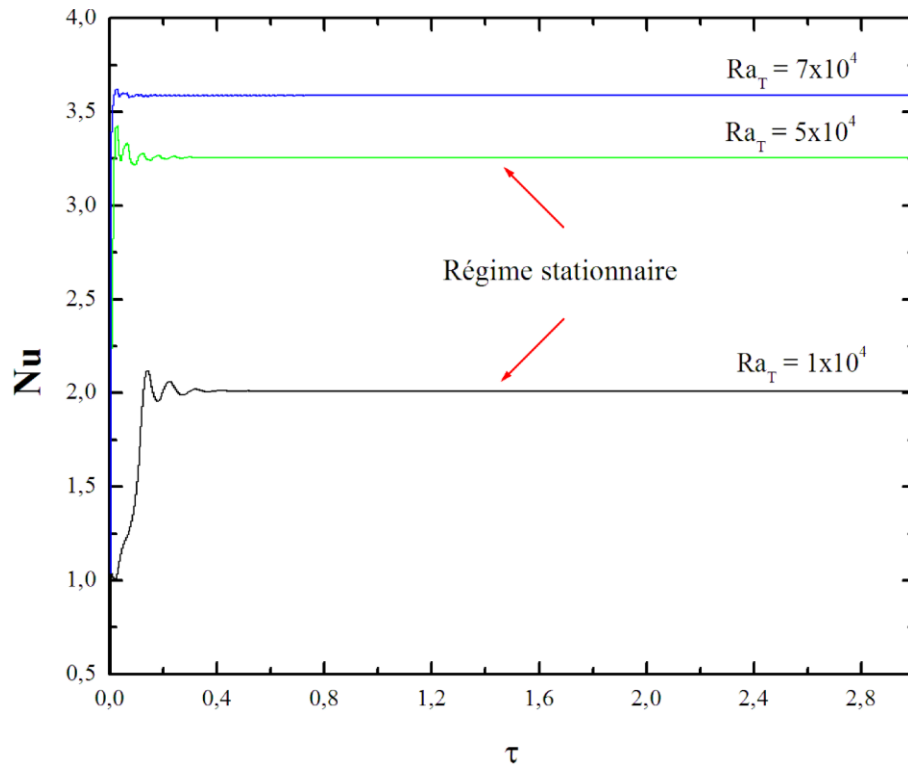
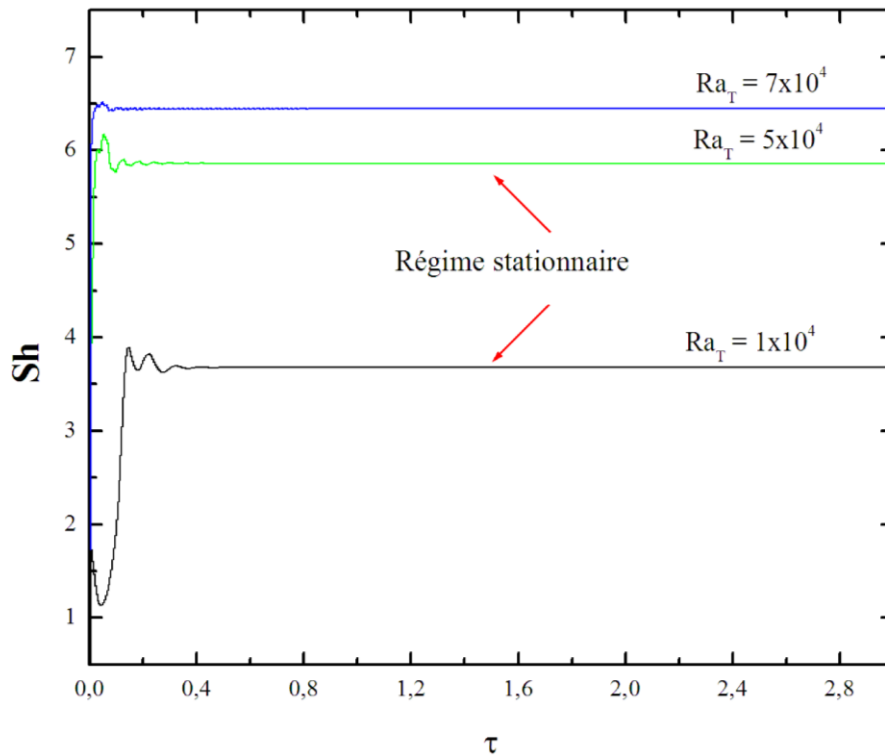


Figure V.3. Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0,5$  entre les deux parois verticales, pour les trois nombre de Rayleigh  $Ra_T = 10^4$ ,  $5 \times 10^4$  et  $7 \times 10^4$ , pour  $N = 0,75$ ,  $Ha = 0$ .



(a)



(b)

Figure V.4. Evolutions temporelles du nombre de Nusselt (a) et de Sherwood (b) pour  $N = 0,75$ , sans champ magnétique ( $Ha = 0$ ), et pour différents nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ .

### 3. Écoulement stationnaire en présence du champ magnétique

Dans le but de contribuer à la compréhension de l'effet d'amortissement d'un champ magnétique « *statique et uniforme* » appliqué au l'écoulement à double diffusion, nous avons réalisé, en particulier, des tests de calcul dans lesquels un champ magnétique externe est appliqué. En premier lieu, le champ magnétique est appliqué dans la direction horizontale et, en suite dans la direction verticale, pour  $N = 0,75$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Sc = 3,5$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$ .

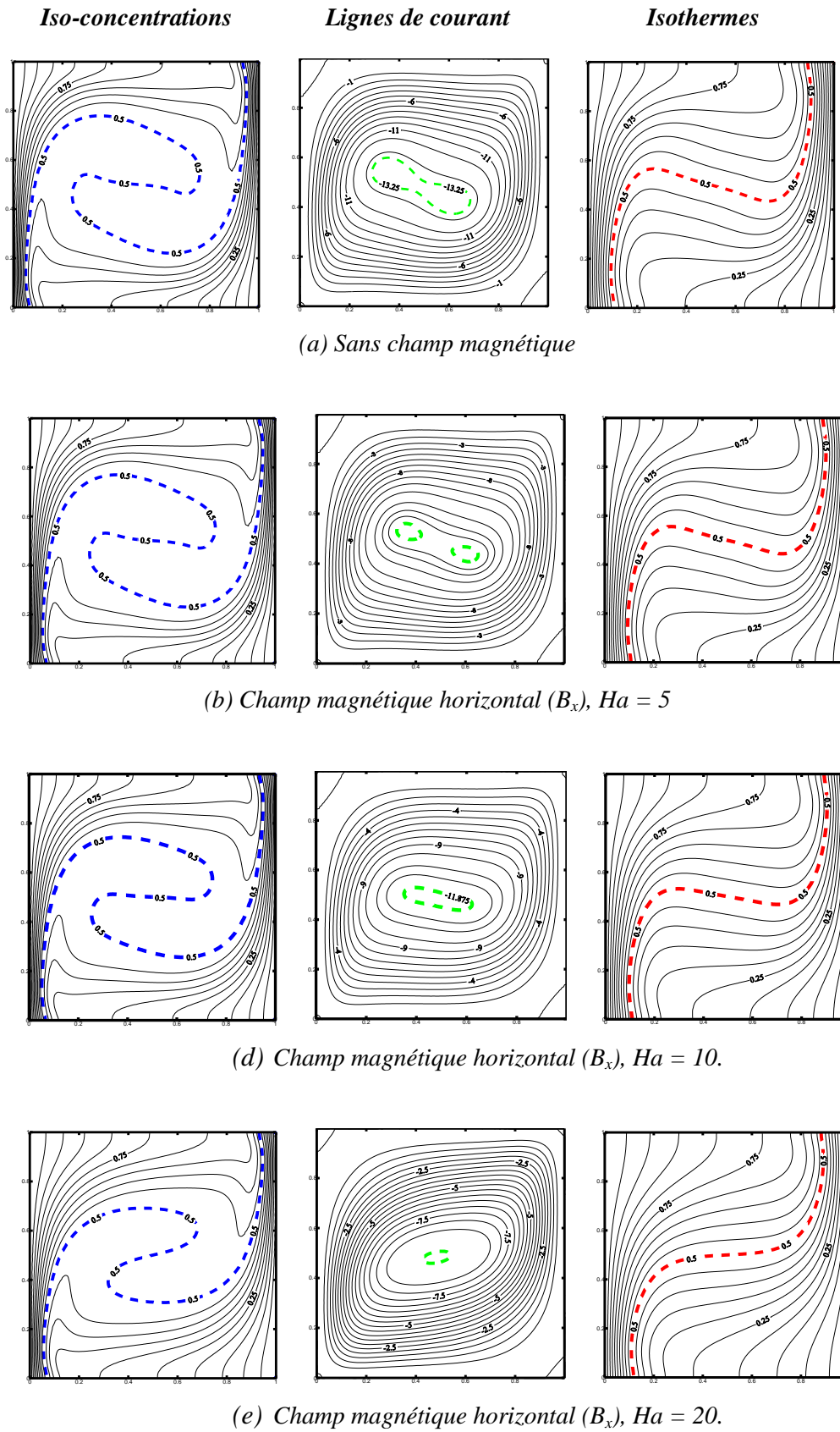
#### 3.1 Champ d'écoulement

Les Figures V.5-6 représentent la structure d'écoulement pour différentes valeurs de Hartmann ( $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ ). On remarque que l'augmentation du nombre de Hartmann influe sur la structure d'écoulement, pour les deux directions du champ magnétique verticale et horizontale.

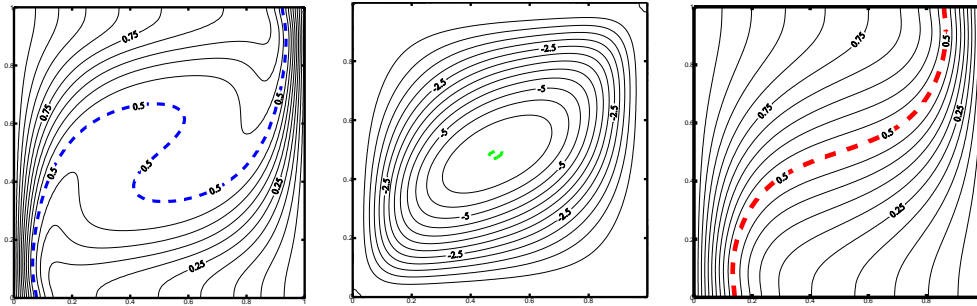
Les isothermes changent d'allure, s'étalent, et se stratifient parallèlement aux parois actives pour le champ magnétique  $B_x$  plus que  $B_y$ , même pour de faibles valeurs de  $Ha$  ; ce changement est remarquable vue la dominance des forces thermiques ( $N = 0,75$ ).

La distribution de la matière représentée par les iso-concentrations pour différentes valeurs du nombre de Hartmann est présentée : Pour un faible nombre de Hartmann ( $Ha = 10, 20$ ) on remarque que les iso-concentrations n'ont pas subi une grande modification, vue la dominance des forces thermiques. Mais pour les valeurs élevées de  $Ha$ , le champ magnétique horizontal modifie plus les iso-concentrations lorsque le champ magnétique appliqué suivant la direction verticale.

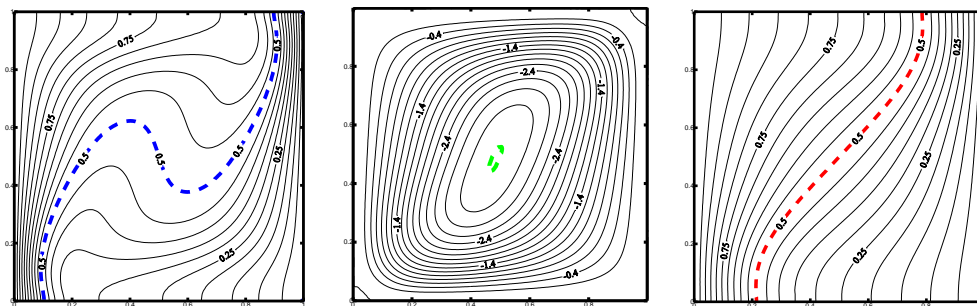
Pour les lignes de courant, on constate que la cellule principale horizontale change sa position et devient verticale pour les valeurs élevées de  $Ha$  ( $Ha = 50$  et  $100$ ). La valeur du  $|\Psi \max|$  prend des valeurs décroissantes pour les deux cas d'application du champ magnétique, vertical et horizontal, mais avec un écart entre les deux :  $|\Psi \max|$  est plus faible pour  $B_y$  que  $B_x$ . Ceci confirme les constatations des travaux de Chamkha et Al Naser (2001) et Teamah (2011), pour une cavité ayant un rapport d'aspect = 2.



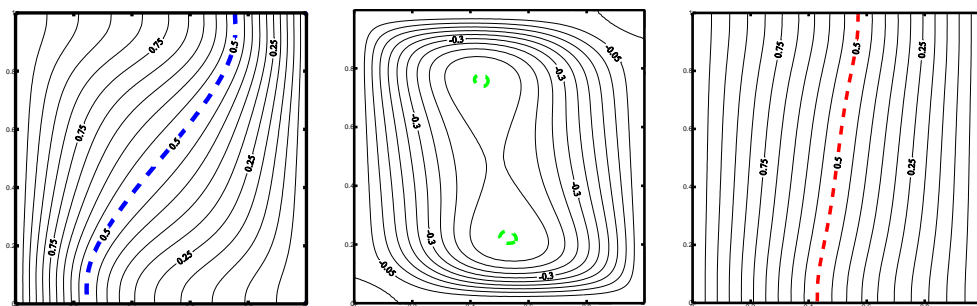
*Figure V. 5. Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), ligne de courant (centre) et lignes isothermes (droite), pour  $N = 0,75$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4$  (régime laminaire). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $\gamma = 0$ ).*



(f) Champ magnétique horizontal ( $B_x$ ),  $Ha = 30$ .

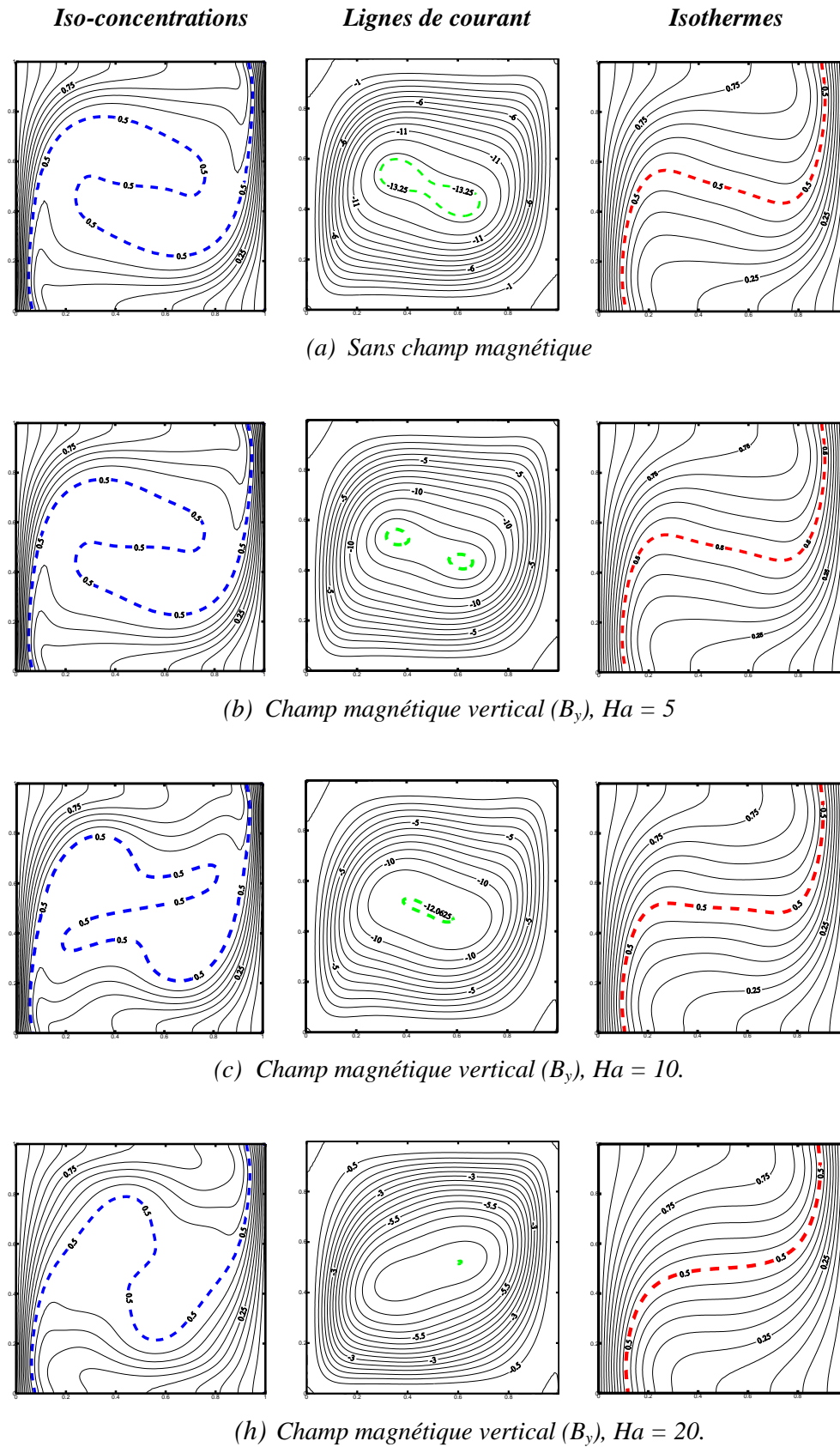


(g) Champ magnétique horizontal ( $B_x$ ),  $Ha = 50$ .

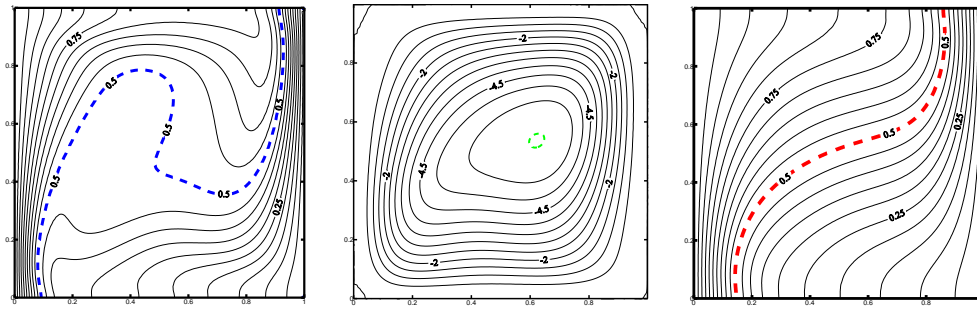


(g) Champ magnétique horizontal ( $B_x$ ),  $Ha = 100$ .

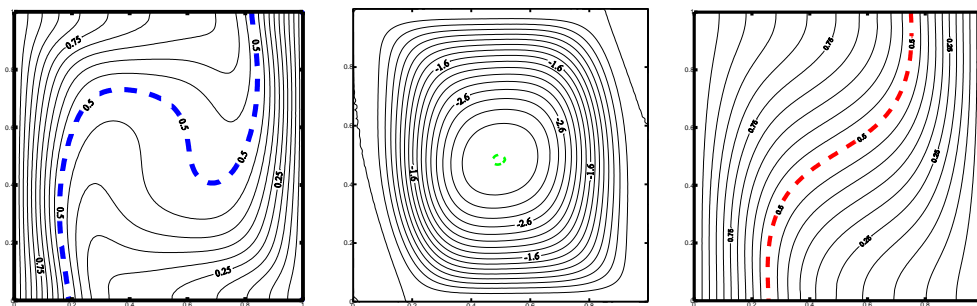
Figure V. 5. (Suite)



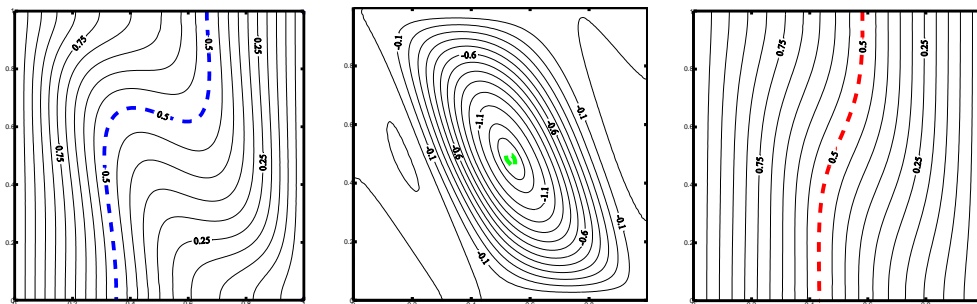
*Figure V. 6. Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes de courant (centre) et lignes isothermes (droite), pour  $N = 0,75$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4$  (régime laminaire). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $\gamma = 90^\circ$ ).*



(e) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 30$



(f) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 50$

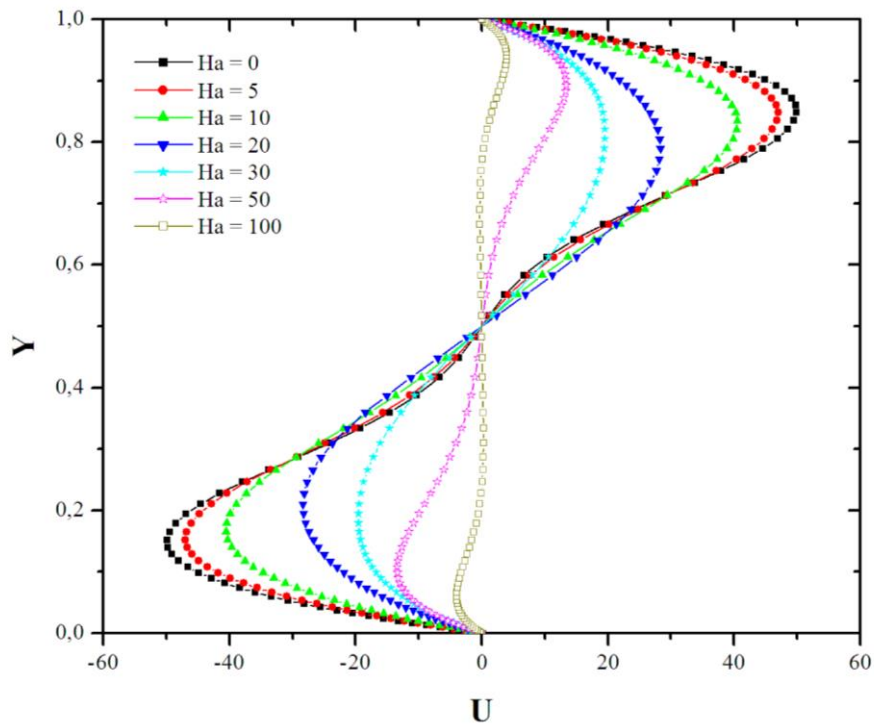


(g) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 100$ .

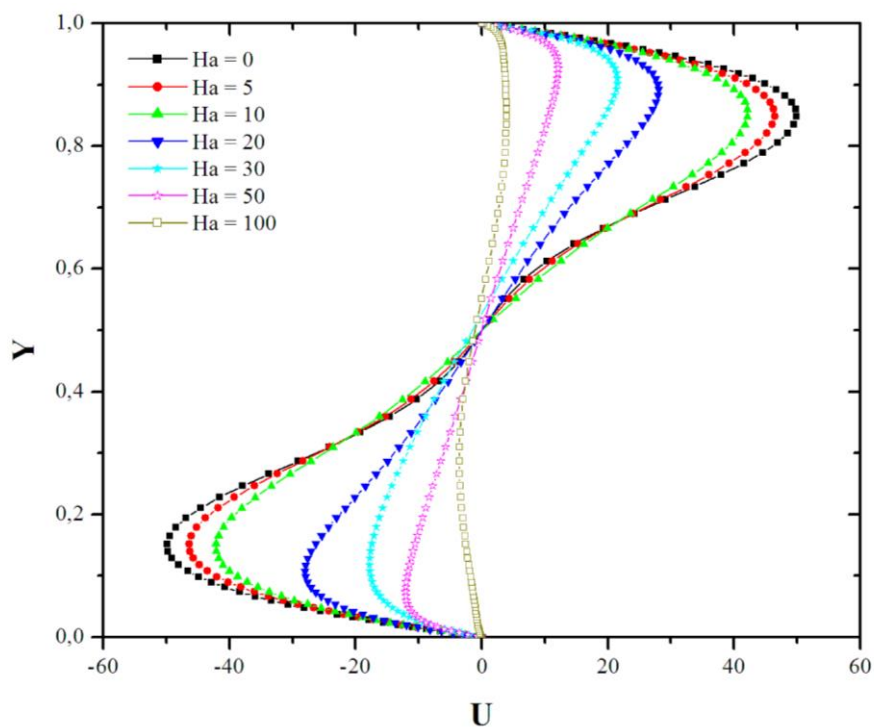
Figure V. 6. (Suite).

Les profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  au centre de la cavité ( $X = 0,5$ ) et de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité ( $Y = 0,5$ ) en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ) et pour différentes valeurs du nombre de Hartmann sont présentés sur les [Figures V.7a-b et V.8a-b](#) respectivement. On constate que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique, représentée par le nombre de Hartmann, a pour effet de diminuer la vitesse au milieu de la cavité, notamment pour la valeur  $Ha = 100$  où la vitesse est devenue très faible. Ces profils montrent aussi que la vitesse est considérable dans toute la cavité et dans les deux sens positif et négatif (elle change sa direction avec une symétrie par rapport à l'axe vertical au milieu de la cavité). Ces résultats sont en bon accord avec ceux de [Chamkha et Al-Naser \(2002\)](#).

Par la suite, nous avons cerné nos résultats sur les deux valeurs du nombre de Hartmann :  $Ha = 20$  et  $100$  ([Figures V.9-10](#)). On remarque que la vitesse verticale  $V$  est diminuée en moitié, pour  $Ha = 20$  par rapport à la vitesse de référence du cas sans champ magnétique. Ce résultat est valable pour les deux directions du champ magnétique : direction verticale  $B_y$  et direction horizontale  $B_x$ . L'augmentation du nombre de Hartmann à  $Ha = 100$  fait ralentir la vitesse qui devient presque nulle au centre de la cavité. Cette influence est plus grande lorsque le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale  $B_y$  beaucoup plus qu'il est appliqué suivant la direction horizontale. Les mêmes constatations sont faites pour la vitesse horizontale  $U$  (la vitesse se stabilise et devient presque nulle au centre de la cavité). Donc, il est clair que le champ magnétique appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ) stabilise mieux le champ de la vitesse par rapport au champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ). Ceci peut être interprété par l'action de la force de Lorentz sur le champ de la vitesse; quand le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale, la force de Lorentz se produit dans le sens horizontal (sens opposé à l'écoulement de la double diffusion).

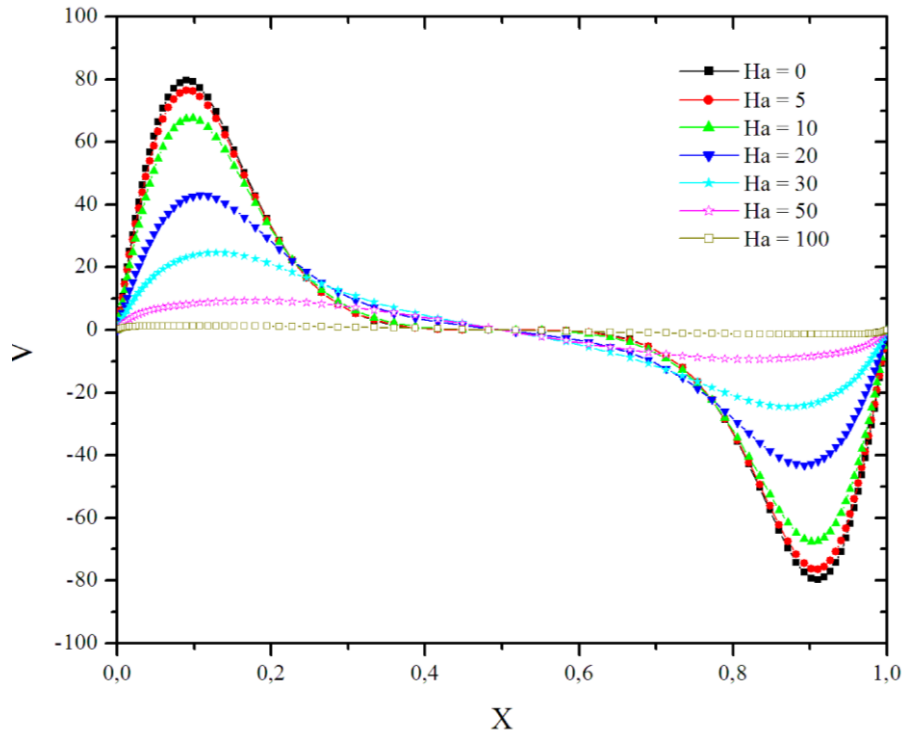


(a) En présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ).

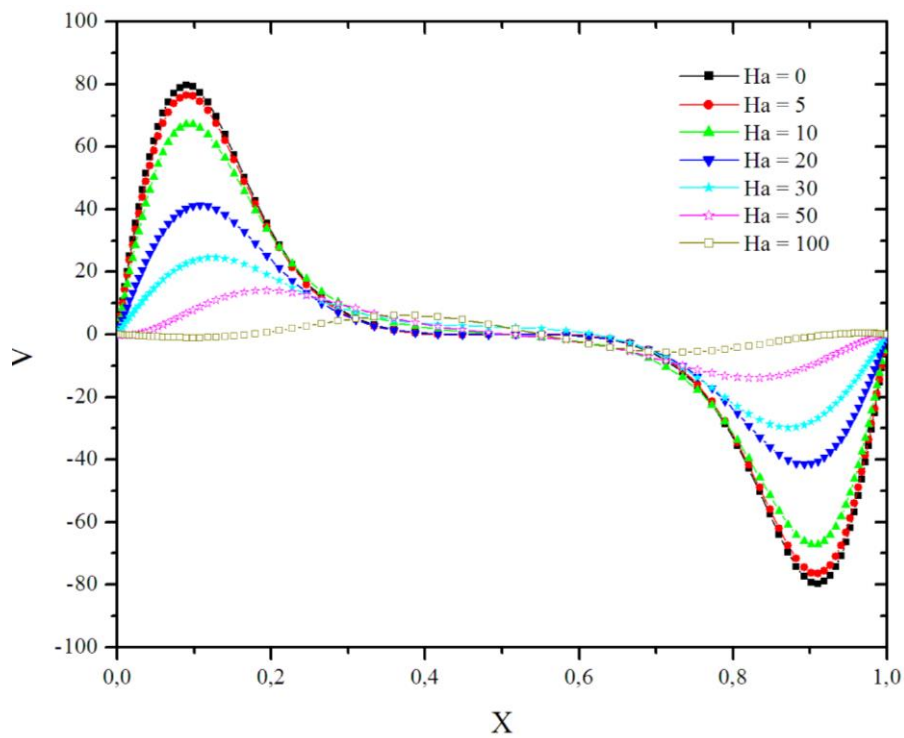


(b) En présence d'un champ magnétique vertical ( $B_y$ ).

Figure V.7. Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0,5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  (a) et vertical  $B_y$  (b), pour  $N = 0,75$  ;  $Ra_T = 7,5 \times 10^4$ , pour différents nombres de Hartmann.



(a) En présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ).



(b) En présence d'un champ magnétique vertical ( $B_y$ ).

Figure V.8. Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0,5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  (a) et vertical  $B_y$  (b), pour  $N = 0,75$  ;  $Ra_T = 7,5 \times 10^4$ , pour différents nombres de Hartmann.

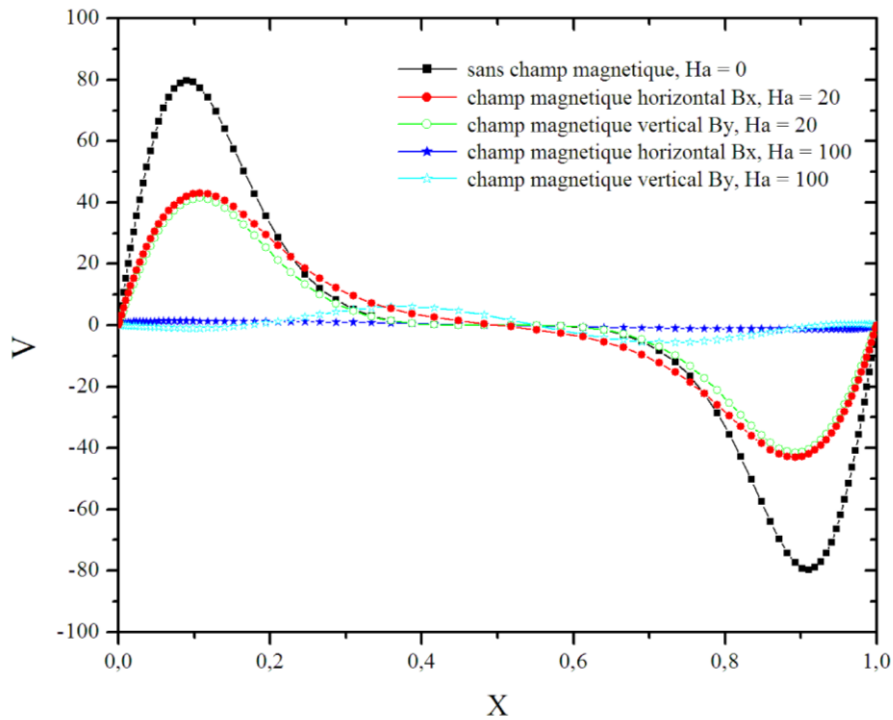


Figure V.9. Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0,5$  en présence du champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ) :  $N = 0,75$ ,  $Ra_T = 7,5 \times 10^4$ , pour  $Ha = 0, 20$  et  $100$ .

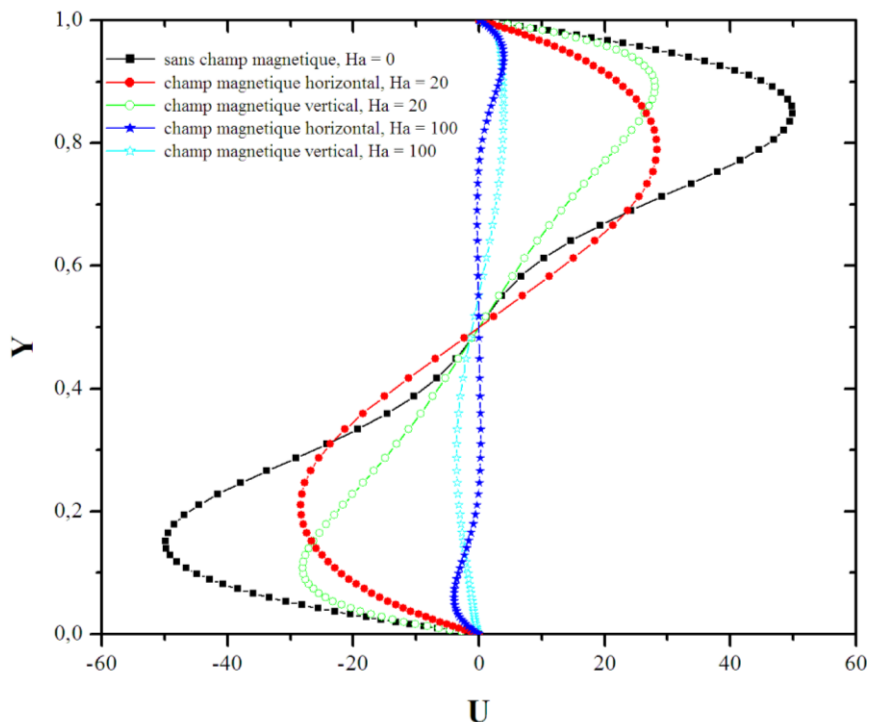


Figure V.10. Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0,5$  en présence du champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ) :  $N = 0,75$  ;  $Ra_T = 7,5 \times 10^4$ , pour  $Ha = 0, 20$  et  $100$ .

### 3.2 Taux de transfert de chaleur et de masse

La variation des nombres de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ), pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ( $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ ), pour  $N = 0,75$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$  (régime laminaire), est illustrée sur le [Tableau V.1](#). Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions horizontale et verticale, séparément. On constate que plus le nombre de Hartmann augmente, plus le taux de transfert de chaleur et de masse diminuent; le nombre de Nusselt passe de 3,7 pour  $Ha = 0$  à une valeur proche de l'unité pour  $Ha = 100$ , ce que signifie que la convection thermique s'élimine complètement (conduction pure). Par ailleurs, le taux de transfert de masse est réduit d'une valeur  $Sh = 6,569$  pour  $Ha = 0$  à une valeur  $Sh = 1,407$  pour  $Ha = 100$ , et en appliquant le champ magnétique dans la direction verticale. Si en comparant la stabilisation magnétique provoquée par les deux types de champ magnétique, on voit que le champ magnétique appliqué suivant  $B_y$  stabilise mieux le taux de transfert de masse par rapport au champ magnétique appliqué suivant  $B_x$ . Par exemple,  $Sh$  pour  $Ha = 50$  se réduit à une valeur  $Sh = 3,201$  quand le champ  $B_x$  est appliqué. Cependant, pour la même valeur de  $Ha$ , le nombre de Sherwood se réduit jusqu'à  $Sh = 2,744$  ( $Ha = 50$ ) quand le champ  $B_y$  est appliqué. Ceci est illustré également sur les [Figures V.11-12](#), qui montre que le champ magnétique permet de stabiliser l'écoulement de la convection double diffusive, et que le champ magnétique appliqué suivant la direction verticale provoque la forte stabilisation magnétique.

*Tableau V.1. Variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ) pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ( $Ha$ ), pour  $N = 0,75$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$  (régime laminaire).*

Nombre de Hartmann, $Ha$	0	5	10	20	30	50	100
$Nu$ Champ magnétique horizontal, $B_x$	3,658	3,592	3,399	2,798	2,216	1,472	1,021
$Nu$ Champ magnétique vertical, $B_y$		3,599	3,410	2,827	2,235	1,488	1,046
$Sh$ Champ magnétique horizontal, $B_x$	6,569	6,476	6,205	5,339	4,457	3,201	1,407
$Sh$ Champ magnétique vertical, $B_y$		6,484	6,150	5,261	4,408	2,744	1,500

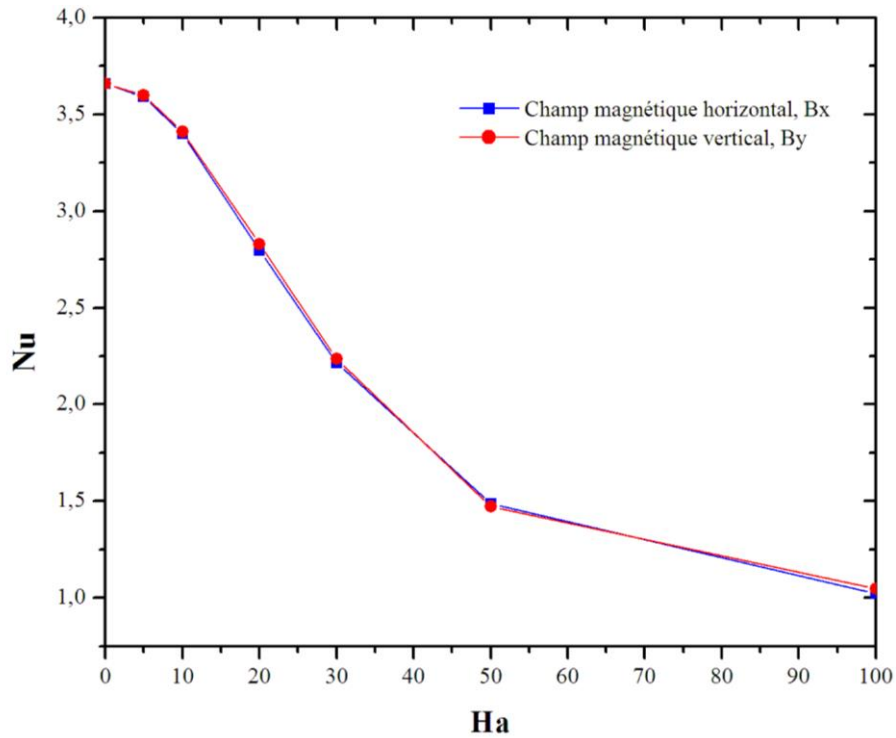


Figure V.11. Variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 0,75$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$  (régime laminaire).

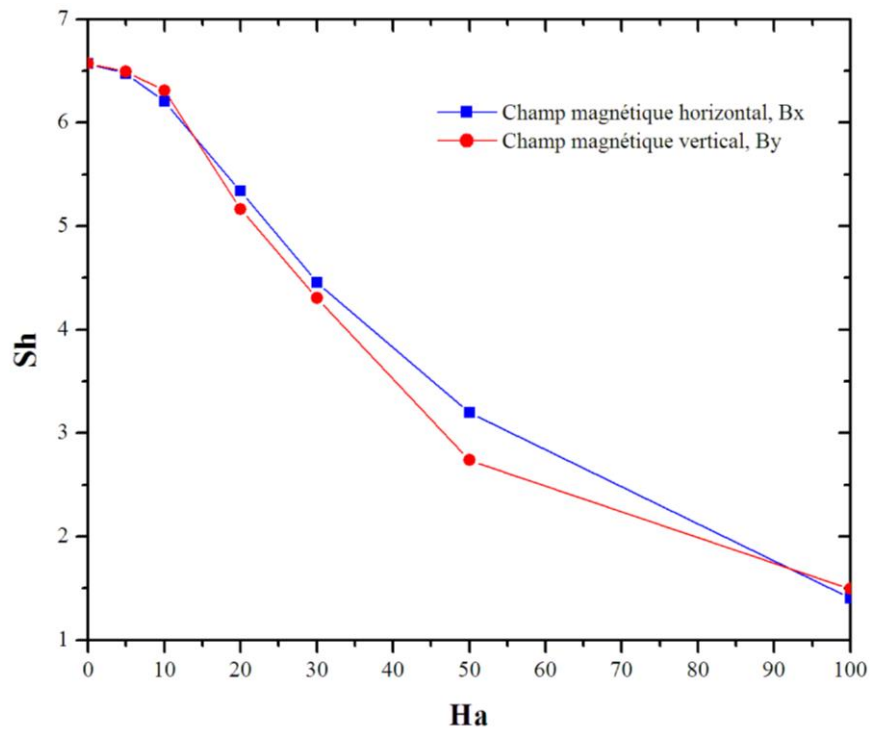


Figure V.12. Variation du nombre de Sherwood ( $Sh$ ) en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 0,75$  et  $Ra_T = 7,5 \times 10^4 < Ra_{TCr}$  (régime laminaire).

#### 4. Effet du champ magnétique sur le régime oscillatoire

Suivant la méthodologie de l'étude d'un écoulement oscillatoire (instationnaire) exposé à un champ magnétique extérieur et uniforme (Gelfgat et al., 2001 ; Bessaïh & Bouabdallah, 2008; Bouabdallah et Bessaïh 2012), nous considérons dans cette étude un champ magnétique appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ), et les nombres de Hartmann  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ . Pour les métaux liquides et les semi-conducteurs avec l'échelle de longueur de la cavité ( $L = 0,15$  m), le champ magnétique appliqué est de l'ordre de  $0,2 - 0,5$  Tesla (Gelfgat et al. 2001).

Pour chaque application du champ magnétique (différentes intensités et orientations), nous avons considéré la solution du problème correspondante au nombre de *Rayleigh thermique critique* ( $Ra_{TCr}$ ) (sans champ magnétique) comme une solution initiale.

##### 4.1 Effet de l'intensité et d'orientation du champ magnétique

Une série de calcul a été effectuée pour la détermination du nombre de Rayleigh thermique critique ( $Ra_{TCr}$ ) qui correspond à un nombre de Hartmann donné ( $Ha$ ). Pour un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ), l'évolution du nombre de Rayleigh critique ( $Ra_{TCr}$ ), en cours de l'augmentation du nombre de Hartmann, est récapitulée sur le [Tableau V.2](#).

*Tableau V.2. Evolution de  $Ra_{TCr}$  avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique externe ( $Ha$ ). Le champ magnétique est orienté suivant la direction horizontale  $B_x$  ( $N = 0,75$ ).*

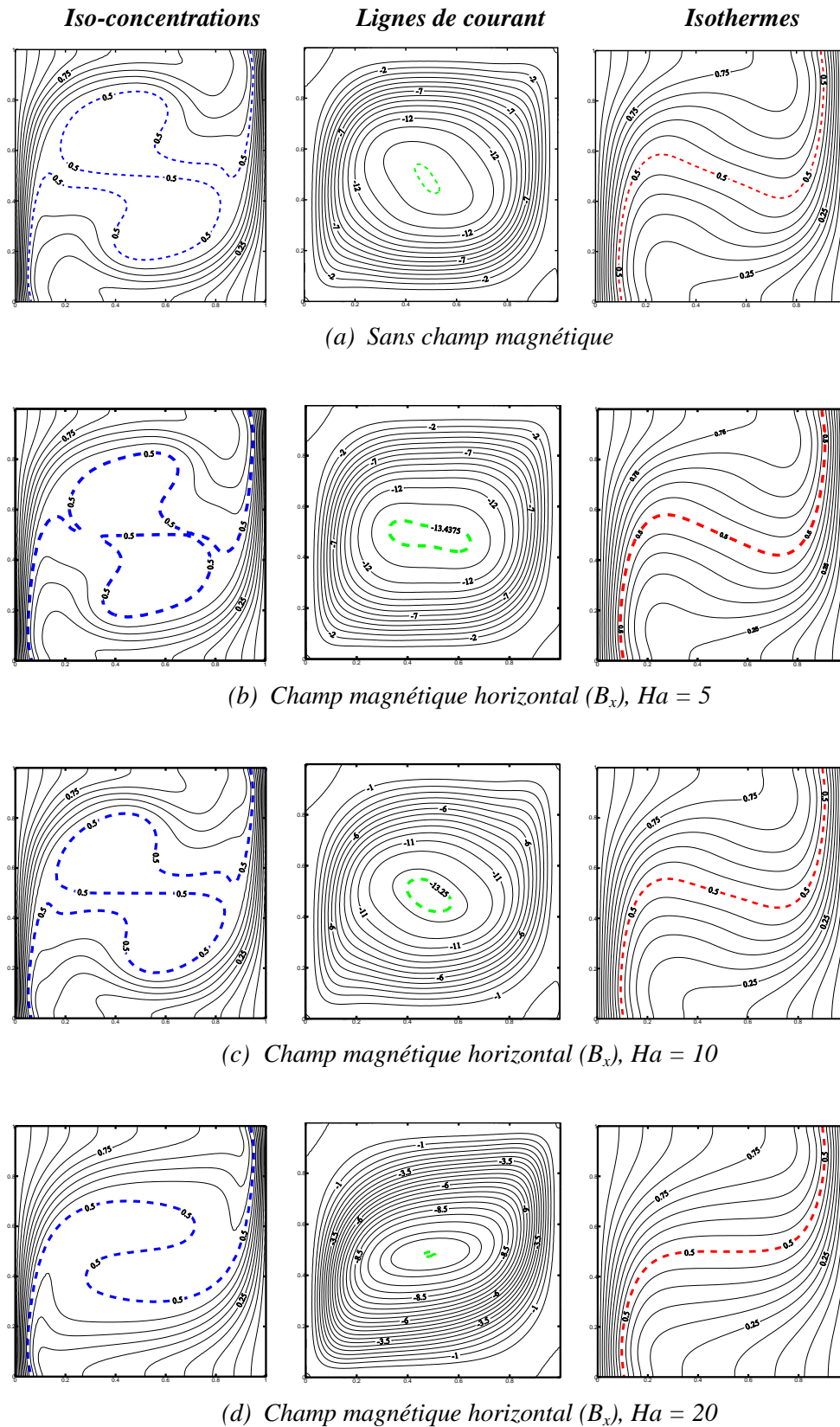
$Ha$	0	25	50	75	100
$Ra_{TCr} \times 10^{-5}$	1,01	1,5	4,001	6,3701	10,021

L'application du champ magnétique a pour effet de stabiliser l'écoulement. Nous constatons que l'augmentation du nombre de Hartmann provoque une augmentation du nombre de  $Ra_{TCr}$ , ce qui se traduit par le seuil du régime oscillatoire qui est retardé.

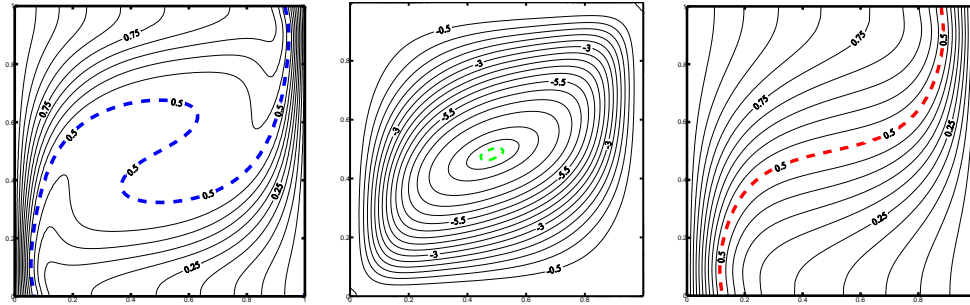
Dans ce qui suit, nous allons suivre l'effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement. Pour cela nous avons présenté, sur les [Figures V.13-14](#), les iso-concentrations, les lignes de courant et les lignes isothermes pour  $N = 0,75$  en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ ) et au temps adimensionnel,  $\tau = 1$  avec un champ magnétique appliqué suivant les

deux directions horizontale et verticale correspondant aux nombres de Hartmann ( $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ ). Comme résultats, on peut dire qu'un champ magnétique appliqué suivant la direction verticale stabilise l'écoulement mieux que le champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale en régime oscillatoire. Ceci est traduit par l'évolution temporelle de la composante de la vitesse horizontale en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  et vertical  $B_y$  au point  $S_2$  (Figures V.15). On remarque que le champ magnétique vertical stabilise l'écoulement. Ce dernier devient stable avec de faibles valeurs de la vitesse à partir d'une faible valeur du nombre de Hartmann ( $Ha = 20$ ). Ceci est dû principalement aux interactions entre les forces thermiques, solutales et électromagnétiques. Notons que pour une intensité du champ magnétique ( $Ha > 30$ , champ magnétique horizontal), l'écoulement se ralentit totalement à cause de la forte dominance des forces électromagnétiques (Force de Lorentz).

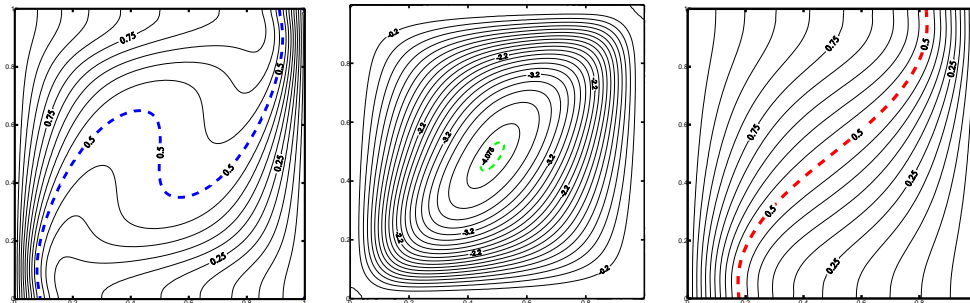
Les profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0,5$  et la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité en présence d'un champ magnétique horizontal et vertical;  $N = 0,75$ ,  $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ , pour  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ , sont présentés sur les Figures V.16-17. On constate que l'augmentation du nombre  $Ha$  provoque l'amortissement du champ de vitesse. Pour les deux directions du champ magnétique ; la vitesse est presque nulle au centre de la cavité pour une valeur élevée du nombre de Hartmann =  $100$ , ce qui est visualisé sur les Figures V.18-19. Ces figures montrent que la vitesse a diminué à la moitié lorsqu'on applique le champ magnétique suivant les deux directions, séparément ( $Ha = 20$ ), mais  $B_y$  plus que  $B_x$ .



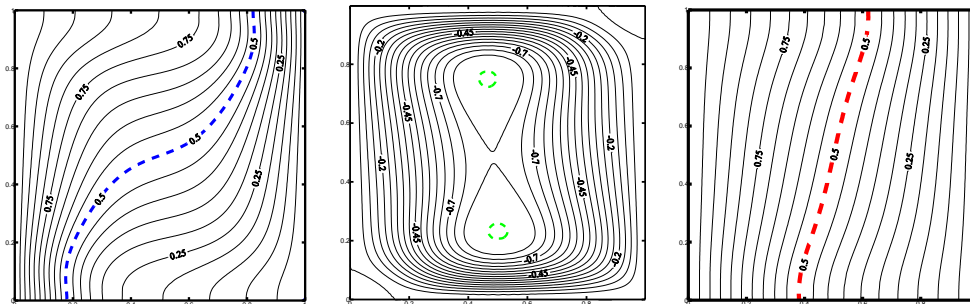
*Figure V.13.* Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement, iso-concentrations (gauche), lignes de courant (centre) et isothermes (droite), pour  $N = 0,75$  en régime oscillatoire  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$  et au temps adimensionnel,  $\tau = 1$  Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).



(e) Champ magnétique horizontal ( $B_x$ ),  $Ha = 30$

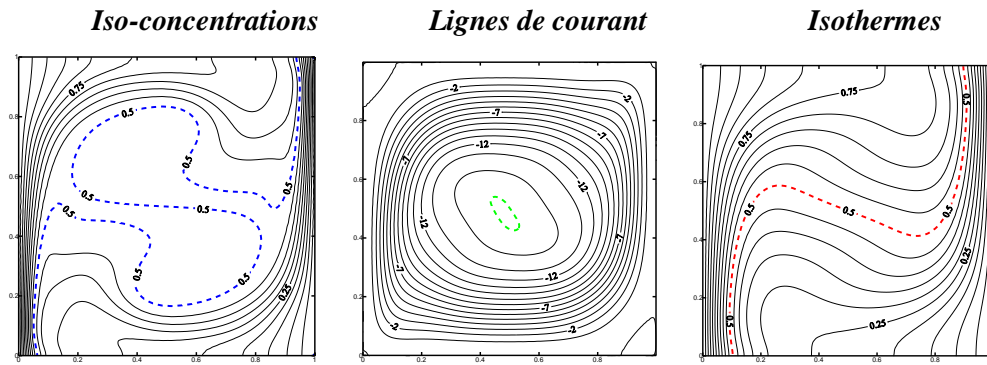


(f) Champ magnétique horizontal ( $B_x$ ),  $Ha = 50$

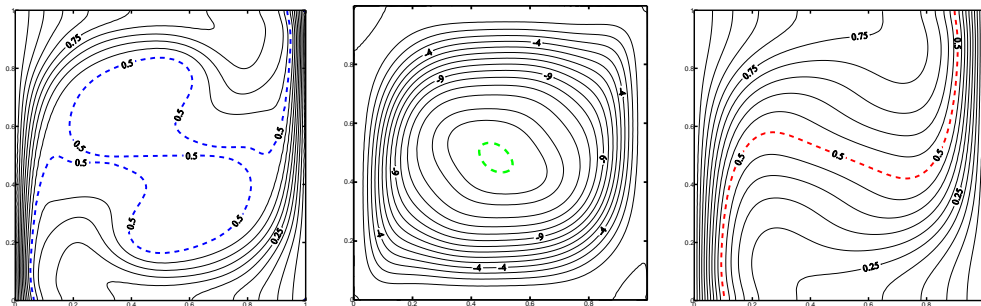


(g) Champ magnétique horizontal ( $B_x$ ),  $Ha = 100$ .

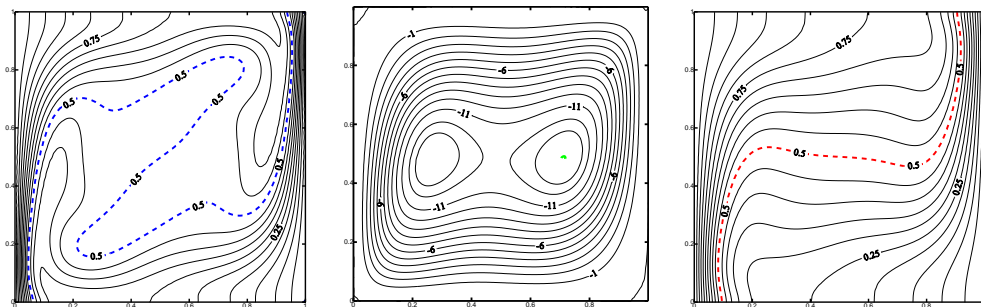
Figure V. 13. (Suite).



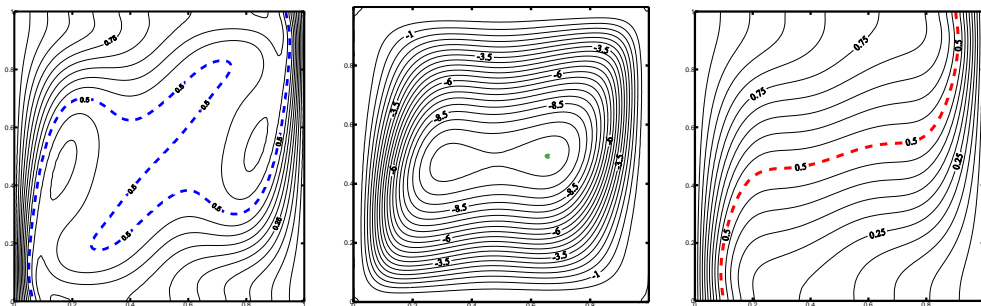
(a) Sans champ magnétique.



(b) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 5$ .

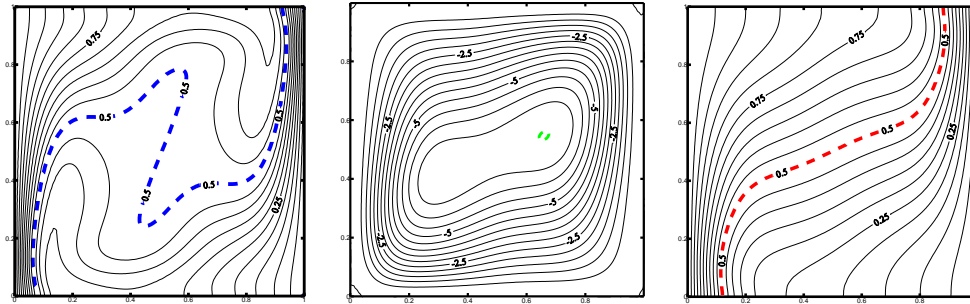


(c) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 10$ .

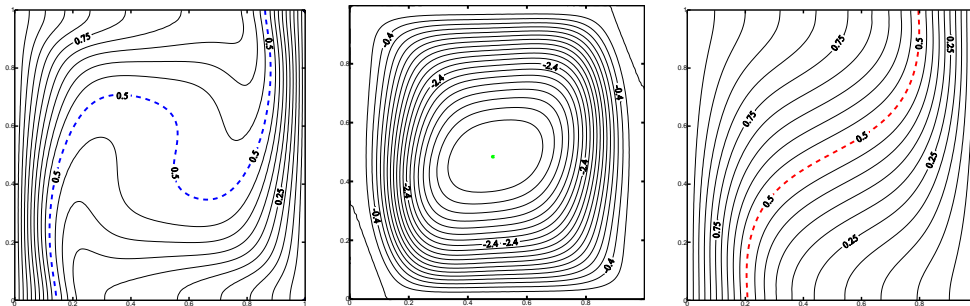


(d) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 20$ .

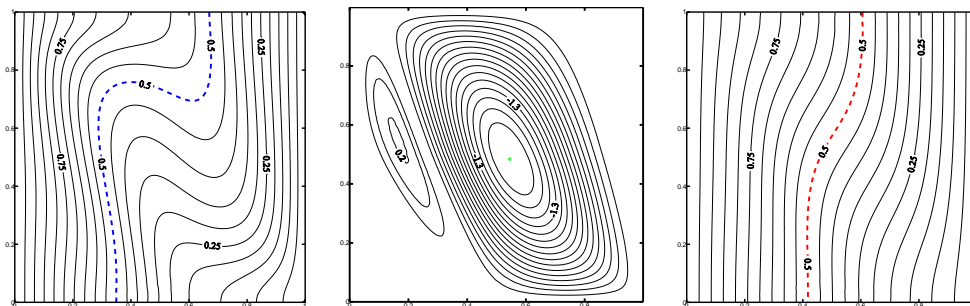
Figure V.14. Effet du champ magnétique sur la structure de l'écoulement, iso-concentrations (gauche), lignes de courant (centre) et isothermes (droite), pour  $N = 0,75$  en régime oscillatoire  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$  et au temps adimensionnel,  $\tau = 1$ . Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).



(e) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 30$ .



(f) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 50$ .



(g) Champ magnétique vertical ( $B_y$ ),  $Ha = 100$ .

Figure V.14. (Suite).

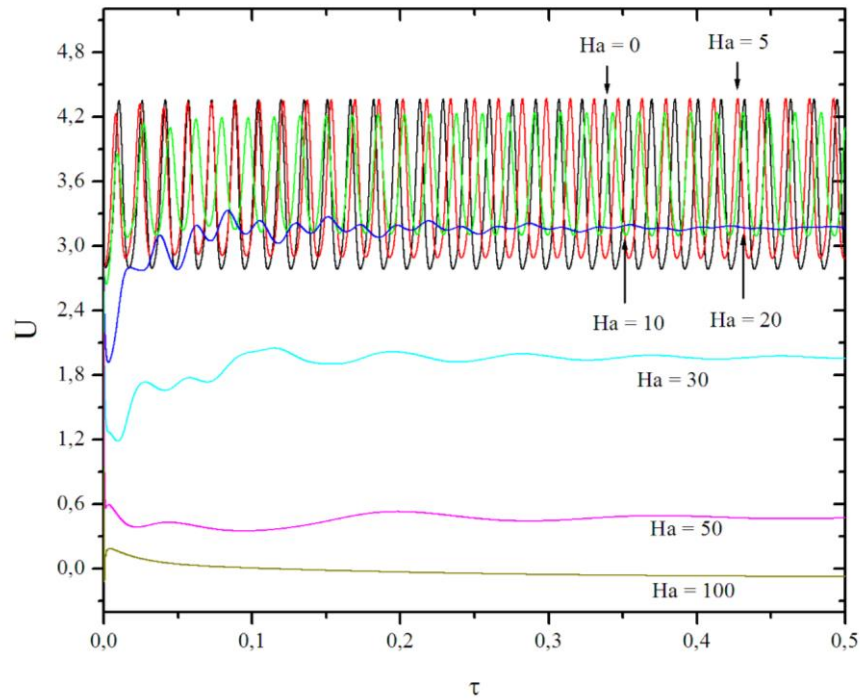
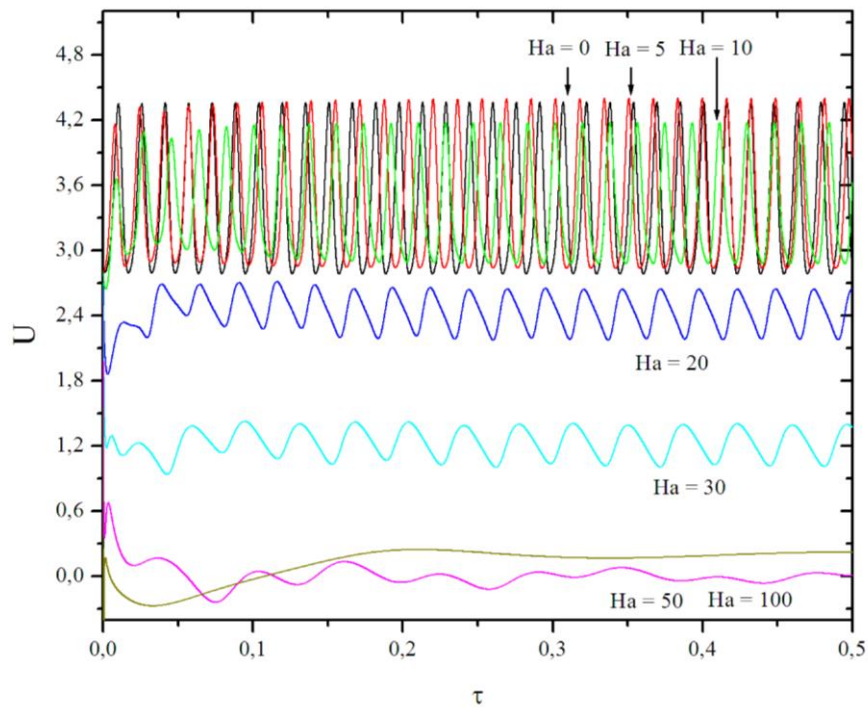
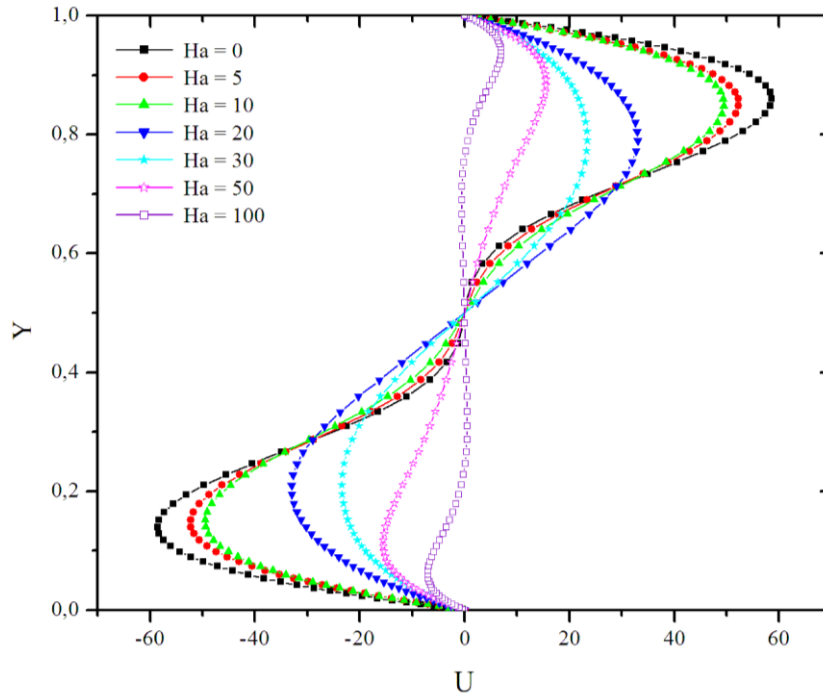
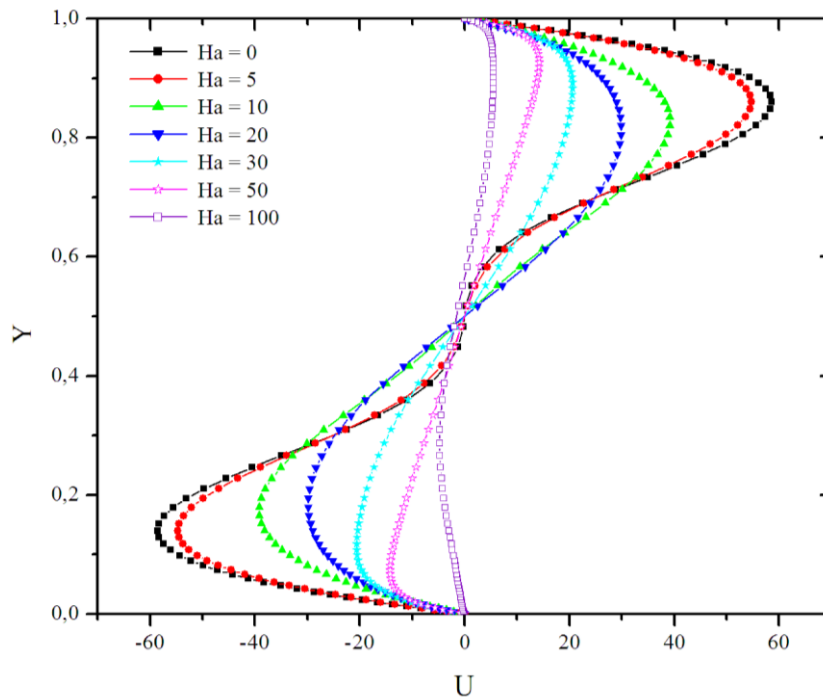
a) En présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ).b) En présence d'un champ magnétique vertical ( $B_y$ ).

Figure V.15. Evolution temporelle de la composante de la vitesse horizontale en présence d'un champ magnétique horizontal  $B_x$  (a) et vertical  $B_y$  (b) au point  $S_2$ , pour  $N = 0,75$ ,  $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ .

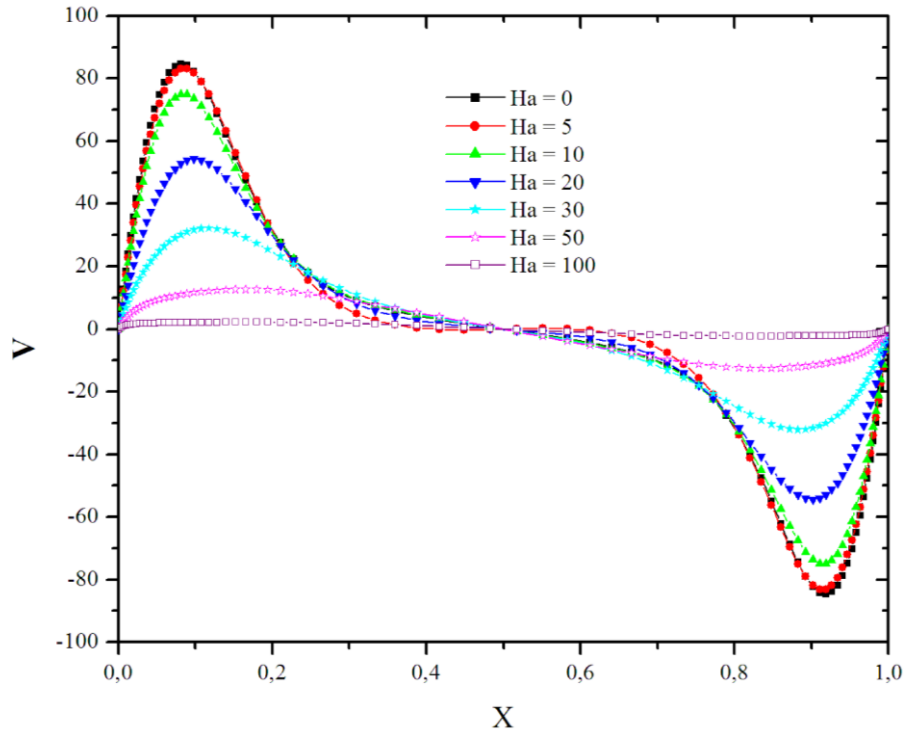


c) En présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ).

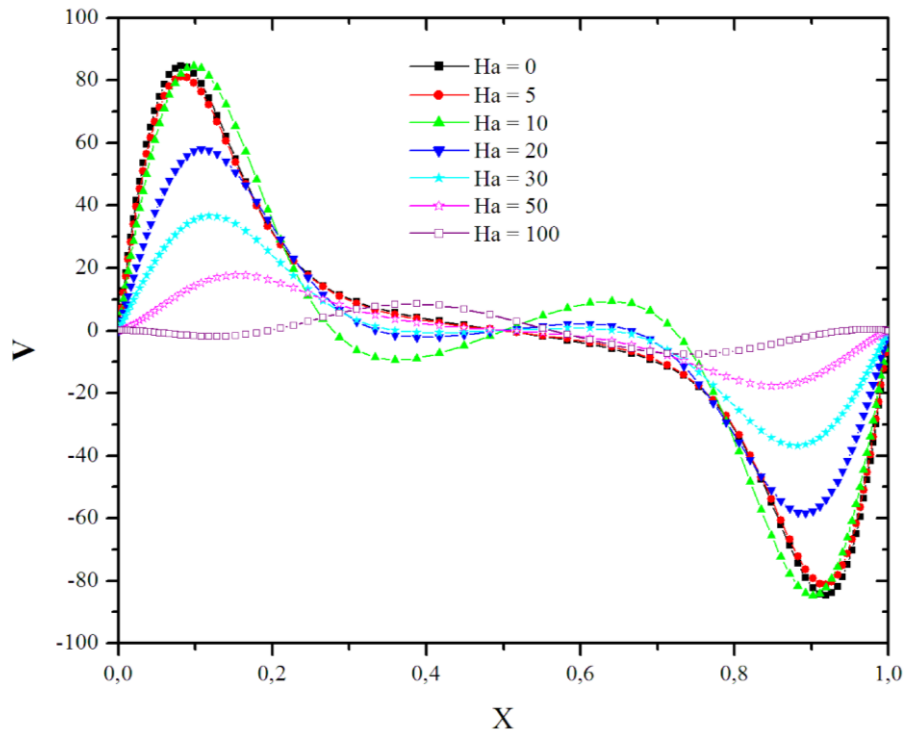


b) En présence d'un champ magnétique vertical ( $B_y$ ).

Figure V.16. Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0,5$  en présence d'un champ magnétique horizontal et vertical;  $N = 0,75$ ,  $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ , pour  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ .



a) En présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ).



b) En présence d'un champ magnétique vertical ( $B_y$ ).

Figure V.17. Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  au centre de la cavité, en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ), pour  $N = 0,75$ ,  $Ra_{TCr} = 1.01 \times 10^5$ , et pour  $Ha = 0, 5, 10, 20, 30, 50$  et  $100$ .

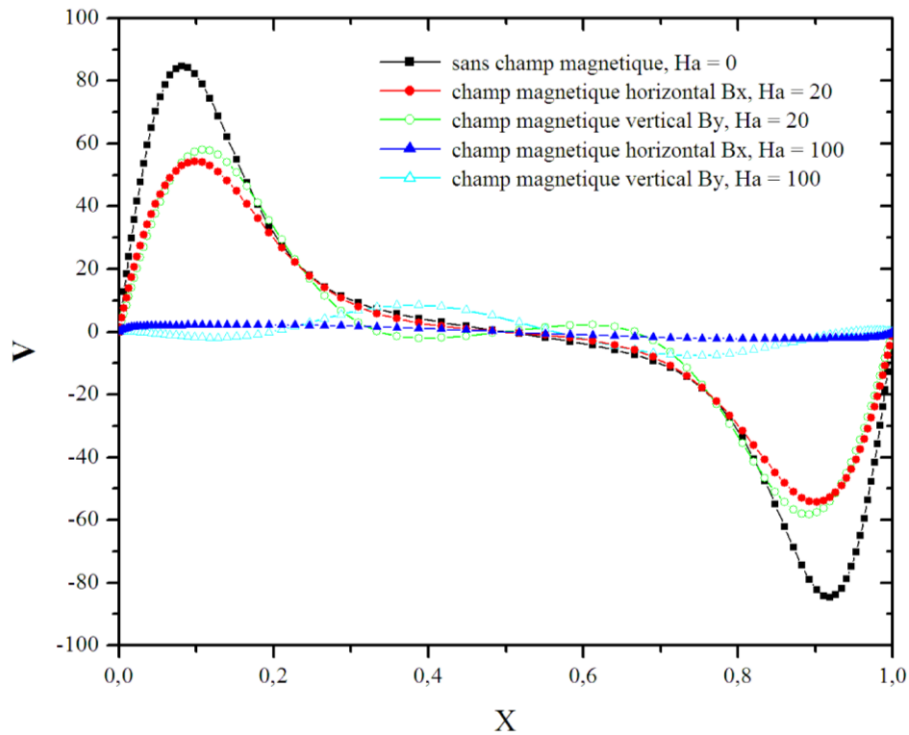


Figure V.18. Profils de la composante de la vitesse verticale adimensionnelle  $V$  à  $Y = 0,5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ), pour  $N = 0,75$ ,  $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ , et pour  $Ha = 20$  et  $100$ .

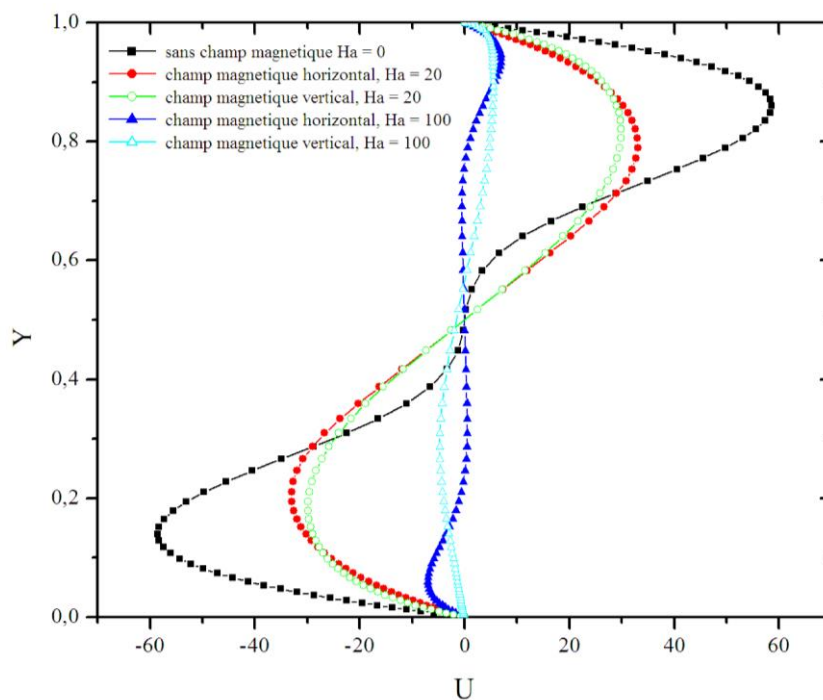


Figure V. 19. Profils de la composante de la vitesse horizontale adimensionnelle  $U$  à  $X = 0,5$ , en présence d'un champ magnétique horizontal ( $B_x$ ) et vertical ( $B_y$ ), pour  $N = 0,75$ ,  $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ , et pour  $Ha = 20$  et  $100$ .

## 4.2 Taux de transfert de chaleur et de masse en présence du champ magnétique

Sur le [Tableau V.3](#), nous avons présenté la variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et du nombre de Sherwood ( $Sh$ ), pour différents nombres de Hartmann ( $Ha$ ), en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$  et  $N = 0,75$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions horizontales ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ), séparément. Nous constatons que les valeurs du nombre de Nusselt et de Sherwood diminuent lorsque le nombre de Hartmann augmente, pour les directions du champ magnétique  $B_x$  et  $B_y$ . Le champ magnétique vertical provoque la forte diminution de ces nombres par rapport au champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale ([Figures V.20-21](#)). De même, l'intensité de l'écoulement double diffusive se stabilise, comme le montre par la diminution de la fonction de courant quand le nombre de Hartmann augmente. Ce qui montre que le champ magnétique permet de stabiliser l'écoulement de la convection double diffusive, et que le champ magnétique appliqué suivant la direction verticale provoque la forte stabilisation magnétique. Ces conclusions confirment ceux obtenus par [Chamkha et Al- Naser \(2002\)](#).

*Tableau V.3. Variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ), pour différents nombres de Hartmann ( $Ha$ ), en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$ ), pour  $N = 0,75$ .*

$Ha$	0	5	10	20	30	50	100
$Nu$							
Champ magnétique ( $B_x$ )	3,920	3,853	3,677	3,137	2,528	1,704	1,062
Champ magnétique ( $B_y$ )		3,848	3,662	3,124	2,528	1,698	1,081
$Sh$							
Champ magnétique ( $B_x$ )	6,877	6,768	6,536	5,923	5,010	3,642	1,854
Champ magnétique ( $B_y$ )		6,719	6,343	5,530	4,738	3,298	1,622
$ \psi_{max} $							
Champ magnétique ( $B_x$ )	14,25	13,75	13,25	10,5	7,75	4,05	1,7
Champ magnétique ( $B_y$ )		13,37	13,0	10,25	6,75	4,0	0,85

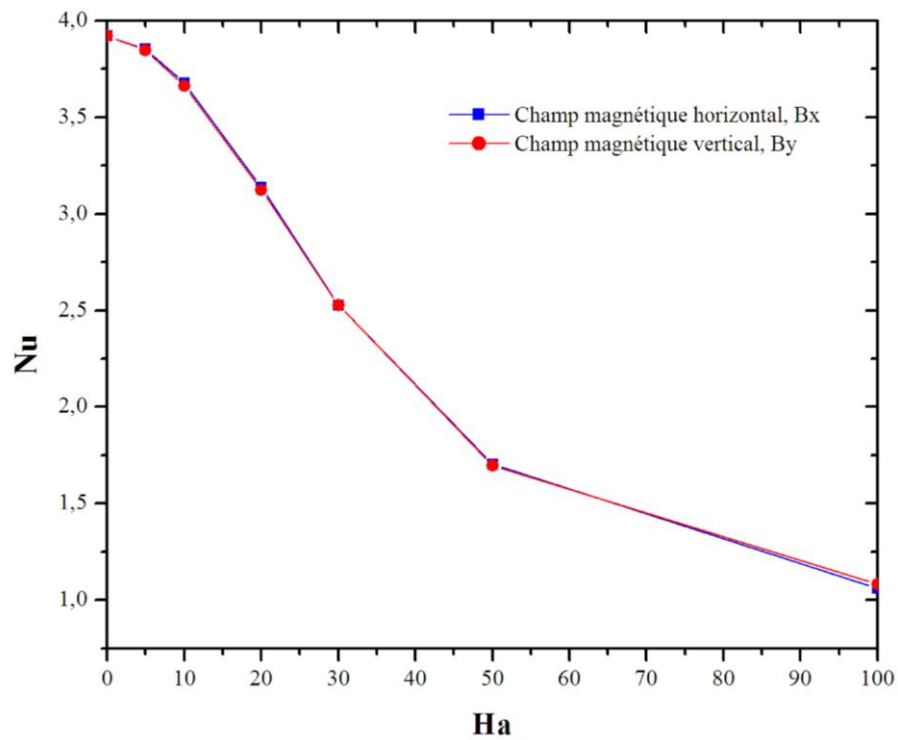


Figure V.20. Variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$  et  $N = 0,75$ ).

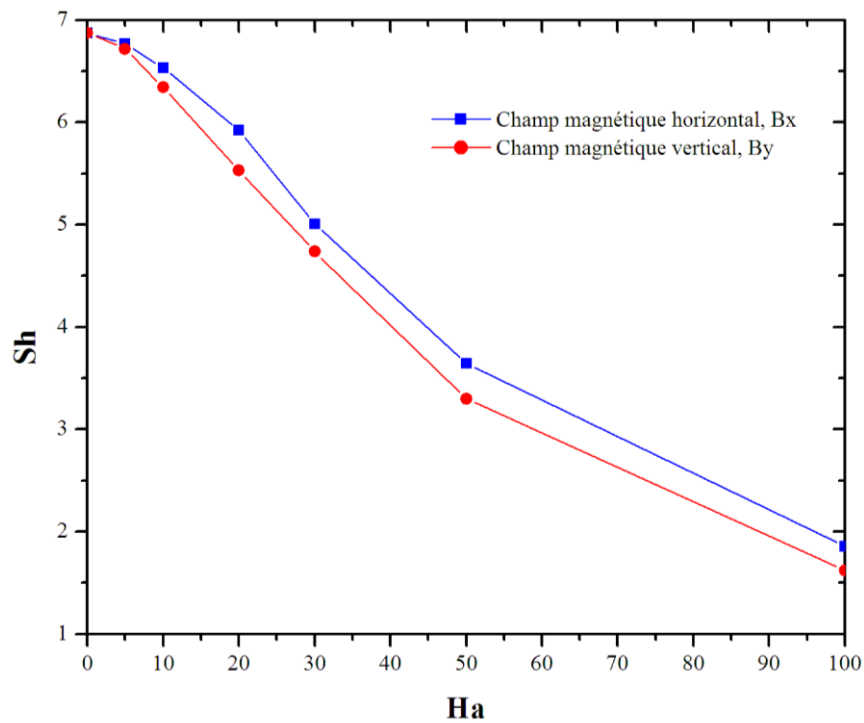


Figure V.21. Variation du nombre de Sherwood ( $Sh$ ) en fonction du nombre de Hartmann ( $Ha$ ), en régime oscillatoire ( $Ra_{TCr} = 1,01 \times 10^5$  et  $N = 0,75$ ).

## 5. Effet du champ magnétique associé à l'effet de ( $N$ )

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'examen de l'effet du champ magnétique sur le champ de l'écoulement double diffusive pour différentes valeurs du rapport des forces de la flottabilité  $N$ . Trois valeurs du rapport de la flottabilité ont été considérées pour cette raison : une valeur d'équilibre des forces de flottabilité ( $N = 1$ ), une valeur prise pour la dominance des forces thermiques ( $N < 1$ ), et finalement une valeur prise pour le cas de la dominance des forces solutales ( $N > 1$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions horizontale et verticale séparément, et le nombre de Hartmann prend les valeurs suivantes :  $Ha = 0, 25, 50, 75$  et  $100$ . Les propriétés du mélange sont les mêmes de celles du travail de [Zhou et Zebib \(1994\)](#) : convection à double diffusion oscillatoire en croissance cristalline. On détermine pour chaque cas le nombre de Rayleigh thermique critique correspondant à chaque nombre de Hartmann  $Ha$  et pour les deux orientations du champ magnétique.

Les valeurs du nombre de Rayleigh thermique critique en fonction de l'intensité du champ magnétique externe  $Ha$  et pour différent rapport de flottabilité  $N$ , sont données sur le [Tableau V.4](#). Notons que des tests sur les oscillations obtenus en régime oscillatoire ont été faites à chaque fois, pour confirmer la nature physique du signal temporel obtenu (tests expliqués au Chapitre IV).

L'analyse du [Tableau V.4](#) montre que l'augmentation du nombre de Hartmann ( $Ha$ ) induit une augmentation du nombre de Rayleigh thermique critique ( $Ra_{TCr}$ ) pour chaque cas du rapport de flottabilité, et surtout quand  $N$  varie de  $0,75$  à  $1,25$ .

Par exemple, pour  $Ha = 75$  (champ magnétique  $B_x$ ),  $Ra_{TCr}$  augmente à  $6,3701 \times 10^5$  ( $N = 0,75$ ), à  $10 \times 10^5$  ( $N = 1,0$ ) puis  $30,01 \times 10^5$  ( $N = 1,25$ ). Et de même, l'intensité de l'écoulement augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh critique pour chaque rapport de flottabilité. Ceci est traduit par l'augmentation de la fonction de courant adimensionnelle ( $|\psi_{\max}| = 9$ , puis  $12,93$  et  $13,75$ ). Alors, l'écoulement de la convection thermosolutale se stabilise par le champ magnétique.

La comparaison des valeurs du nombre de Rayleigh thermique critique ( $Ra_{TCr}$ ) et de la fonction de courant adimensionnelle montre que la valeur obtenue par l'application du champ magnétique vertical ( $B_y$ ) engendre des valeurs plus élevées que celles obtenues par l'application du champ magnétique horizontal ( $B_x$ ). Pour  $Ha = 100$  (champ magnétique  $B_x$ ,  $N = 0,75$ ),  $Ra_{TCr}$  augmente de  $10,021 \times 10^5$  à  $10,1 \times 10^5$  par l'application du champ magnétique

vertical ( $B_y$ ) et  $N = 0,75$ . Ensuite, pour un champ magnétique  $B_x$  ( $Ha = 100$  et  $N = 1$ ),  $Ra_{TCr}$  augmente de  $35 \times 10^5$  à  $40 \times 10^5$  par l'application du champ magnétique vertical ( $B_y$ ) et  $N = 1$ . Et finalement, pour un champ magnétique  $B_x$  ( $Ha = 100$  et  $N = 1,25$ ),  $Ra_{TCr}$  augmente de  $55 \times 10^5$  à  $60 \times 10^5$  par l'application du champ magnétique vertical ( $B_y$ ) et  $N = 1,25$ .

Alors, on peut conclure que le champ magnétique provoque la stabilisation de l'écoulement double diffusive oscillatoire, et que le champ magnétique vertical se stabilise plus et retarde la transition au régime oscillatoire.

*Tableau V.4. Variation du nombre de Rayleigh thermique critique ( $Ra_{TCr}$ ) avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique externe  $Ha$ . Le champ magnétique est orienté suivant les deux directions horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ), séparément pour  $N = 0,75, 1$  et  $1,25$ .*

$N$	$Ha$	Champ magnétique horizontal ( $B_x$ )			Champ magnétique vertical ( $B_y$ )		
		$Ra_{TCr} \times 10^{-5}$	$ \psi_{max} $	$Fr_{Cr}$	$Ra_{TCr} \times 10^{-5}$	$ \psi_{max} $	$Fr_{Cr}$
<b>0.75</b>	<b>0</b>	1,01	14,25	64,01	-	-	
	<b>25</b>	1,5	11,25	30,51	1,605	10,75	42,72
	<b>50</b>	4,001	10,5	27,46	4,01	9,5	57,98
	<b>75</b>	6,3701	9,0	12,20	6,5001	8,0	51,88
	<b>100</b>	10,021	8,0	12,21	10,1	7,75	57,98
<b>1</b>	<b>0</b>	0,5175	13,25	36,62	-	-	-
	<b>25</b>	1,1005	9,75	15,22	1,11	7,75	24,21
	<b>50</b>	3,001	8,5	15,26	20,001	12,5	134,28
	<b>75</b>	10	12,93	22,89	30,001	11	143,43
	<b>100</b>	35	17,75	28,42	40	9,5	126,07
<b>1.25</b>	<b>0</b>	1,005	16,75	57,98	-	-	-
	<b>25</b>	15,01	16,50	204,46	20	14,75	228,88
	<b>50</b>	18,001	13,0	88,50	21,001	9,0	134,27
	<b>75</b>	30,01	13,75	88,50	31,05	7,25	125,12
	<b>100</b>	55	14,50	137,33	60	8,5	131,22

Pour l'effet du rapport des forces de flottabilité  $N$ , nous avons présenté sur les [Figures V.22-27](#), les lignes iso-concentrations, les lignes isothermes et lignes de courant, pour différentes valeurs du rapport de flottabilité ( $N = 0,75, 1$  et  $1,25$ ) en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ), et en présence du champ magnétique horizontal et vertical, séparément.

Dans le cas de la dominance des forces thermiques ( $N = 0,75$ ), la structure de l'écoulement est monocellulaire même pour des valeurs élevées du nombre de Hartmann ( $Ha$ ), lorsque le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale  $B_x$ . Par contre, pour un champ magnétique appliqué suivant la direction verticale  $B_y$ , on observe une structure bicellulaire ([Figures V.22-23](#)) à partir d'une valeur considérablement élevée du nombre de Hartmann  $Ha = 100$ . Pour les iso-concentrations, on constate la naissance d'une deuxième cellule pour  $Ha = 25$  et plusieurs cellules pour les valeurs plus élevées du nombre de Hartmann ( $Ha$ ) pour un champ magnétique appliqué suivant la direction verticale  $B_y$ .

Pour  $N = 1$  ([Figures V.24-25](#)), les lignes de courants présentent un écoulement bicellulaire à partir de  $Ha = 50$ , pour un champ magnétique appliqué suivant la direction verticale  $B_y$ . Cependant, pour le cas du champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale, ces lignes ont une structure unicellulaire jusqu'à la valeur de  $Ha = 75$  et la deuxième cellule se manifeste pour un champ magnétique d'intensité  $Ha = 100$ . On remarque aussi que les isothermes changent d'allure et deviennent presque parallèles aux parois verticales quand on applique un champ magnétique  $B_y$  pour les valeurs de  $Ha = 50, 75$ , et  $100$ .

Pour suivre la structure solutale de l'écoulement double diffusive, nous avons choisi la ligne iso-concentration  $\phi = 0,5$  comme référence d'analyse de la structure solutale pour différents rapports de flottabilité (lignes pointées en bleu). On voit que cette ligne devient diagonale à partir de  $Ha = 50$  lorsqu'on applique un champ magnétique vertical  $B_y$ ; d'où, la diminution de l'épaisseur de la couche limite solutale par rapport au cas  $Ha < 50$ . Mais pour un champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale  $B_x$ , il y a une déformation complète des lignes iso-concentrations (lignes de référence) avec l'augmentation de  $Ha$ . Ceci est noté en plus des lignes iso-concentrations serrées proches de la partie supérieure droite et inférieure gauche des parois actives.

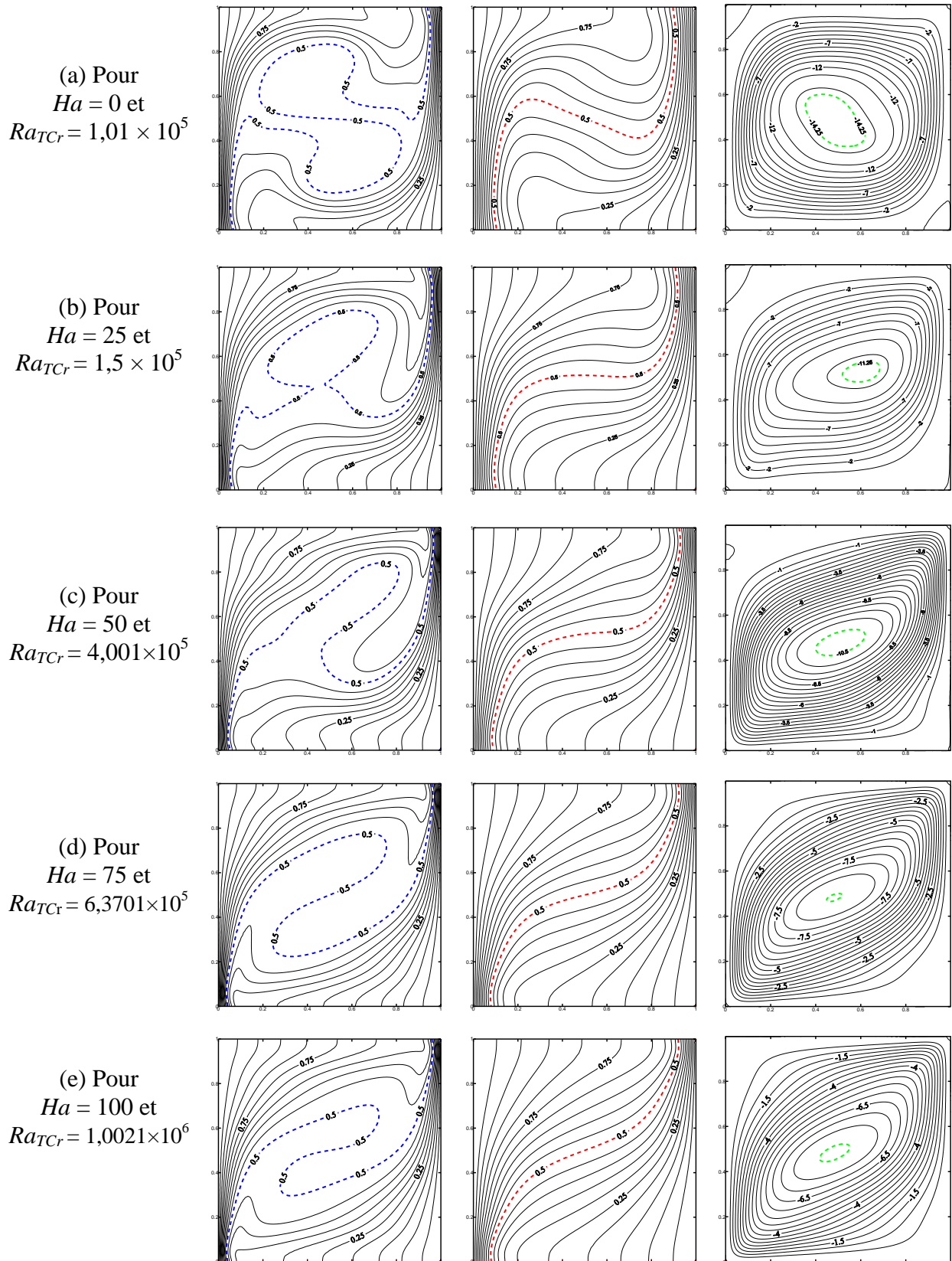


Figure V.22. Structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 0,75$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).

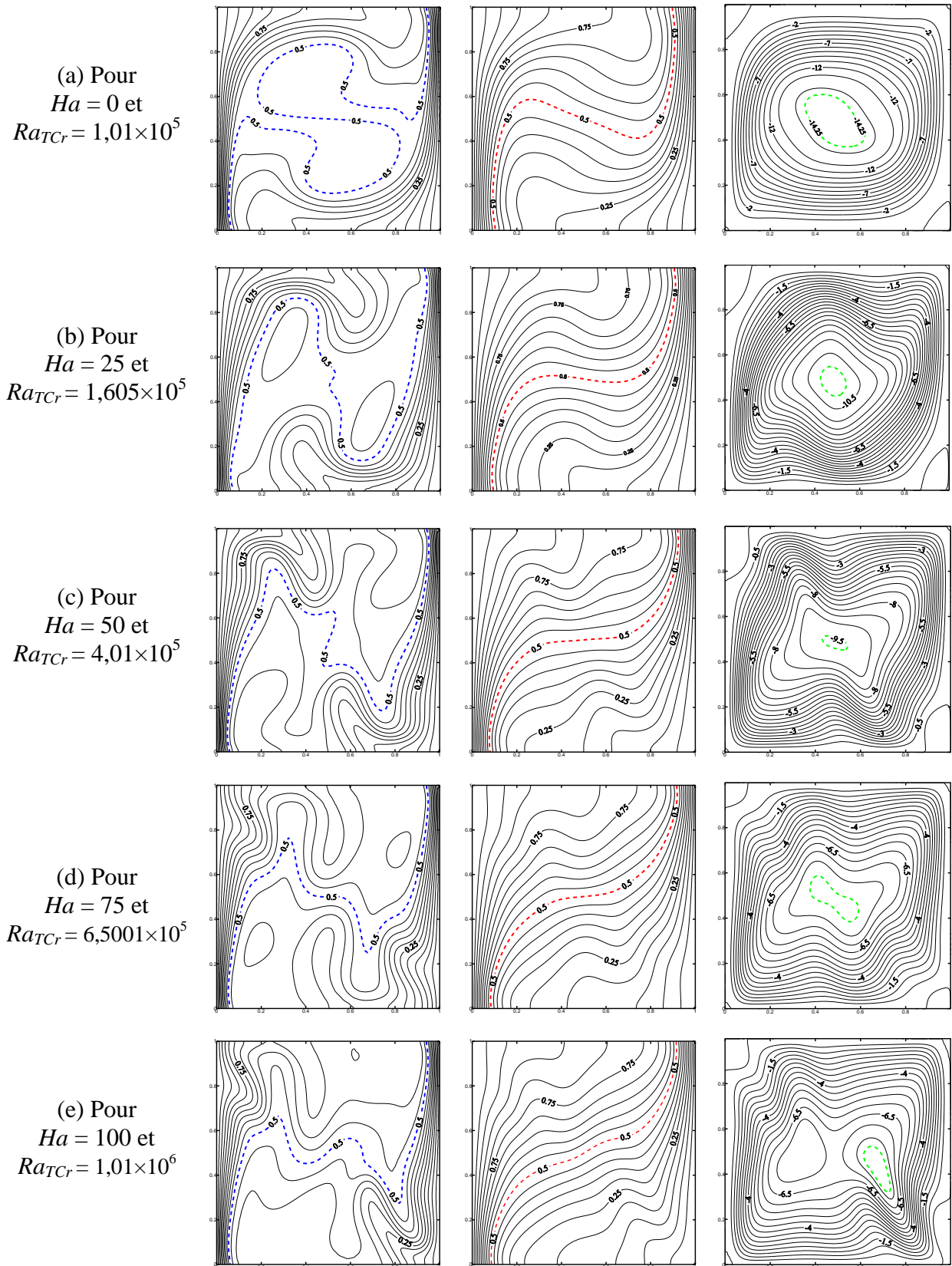


Figure V. 23. Structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 0,75$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).

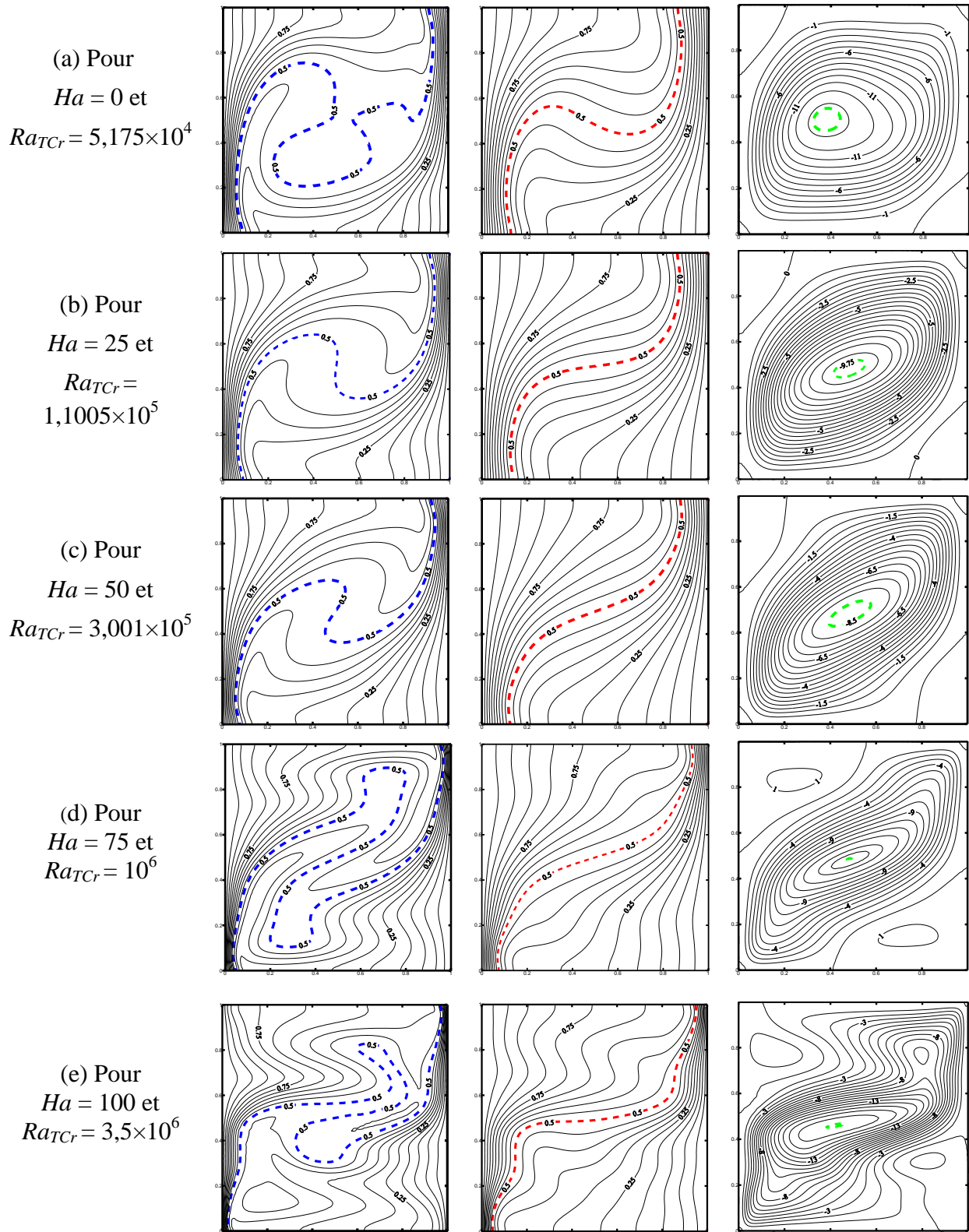


Figure V. 24. Structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).

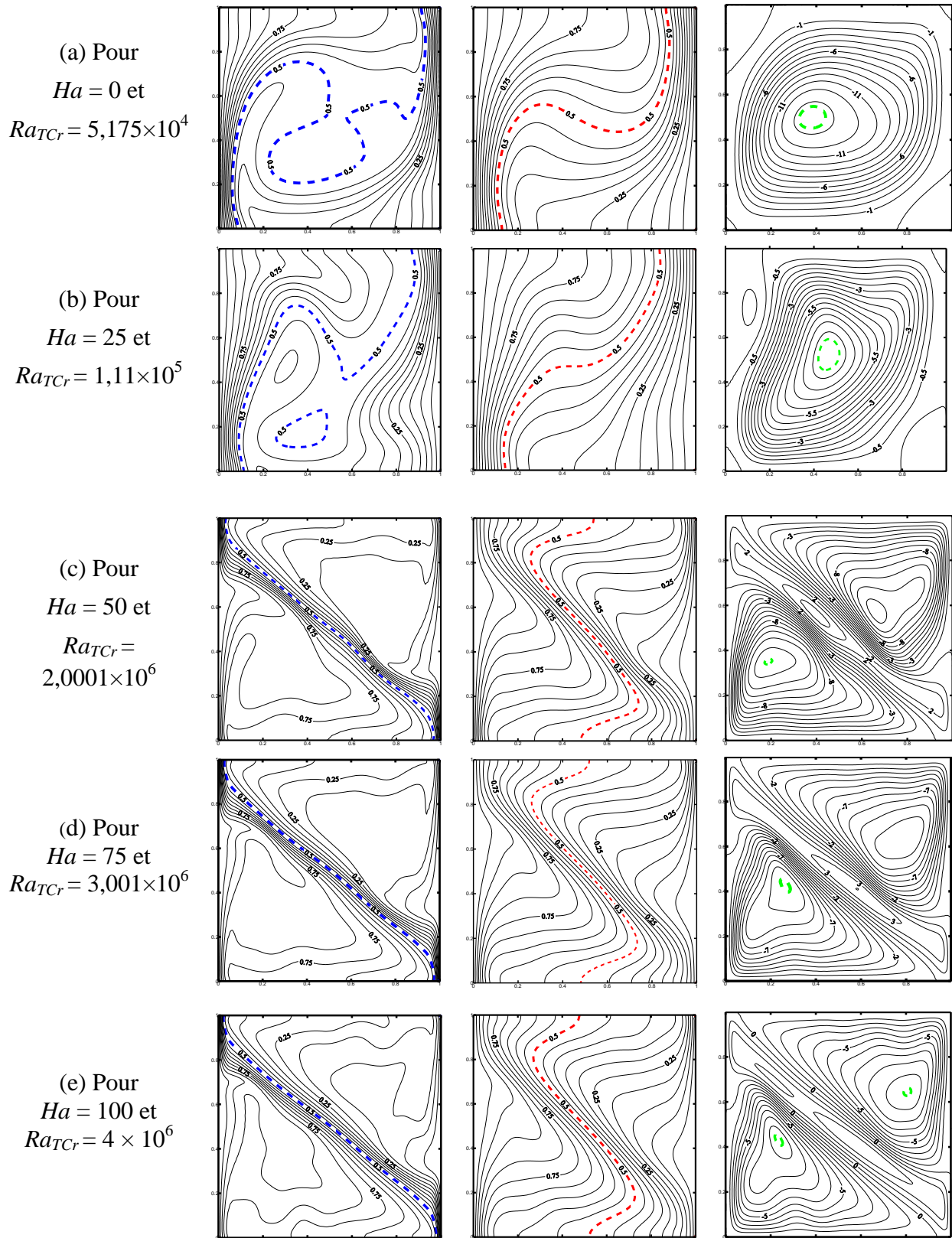


Figure V.25. Structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).

Nous constatons que pour le cas des forces solutales dominante ( $N = 1,25$ ), et pour un champ magnétique orienté suivant la direction horizontale  $B_x$ , l'écoulement se manifeste par une structure bicellulaire (lignes de courant [Figures V.26-27](#)). Même pour les faibles valeurs du nombre de Hartmann  $Ha$ , la structure est multicellulaire quelque soit la direction du champ magnétique appliqué. On remarque également que les isothermes changent d'allure et se manifestent dans la direction verticale dès qu'on applique un champ magnétique vertical ou horizontal pour toutes les valeurs du nombre de  $Ha$ , avec la création d'une deuxième épaisseur de couche limite thermique au niveau des deux parois actives.

Pour les iso-concentrations, les lignes changent de forme avec la création des cellules avec l'augmentation du nombre de  $Ha$ , avec une condensation des lignes au centre de la cavité pour un champ magnétique appliqué suivant les directions horizontale et verticale. On remarque aussi que l'épaisseur de la couche limite massique est déplacée du coin supérieur au coin inférieur pour la paroi active droite, et vice versa pour la paroi active gauche.

Alors, on peut conclure que le rapport des forces de flottabilité  $N$  joue un rôle important dans la convection double diffusive en régime oscillatoire, et en particulier lors de l'application du champ magnétique.

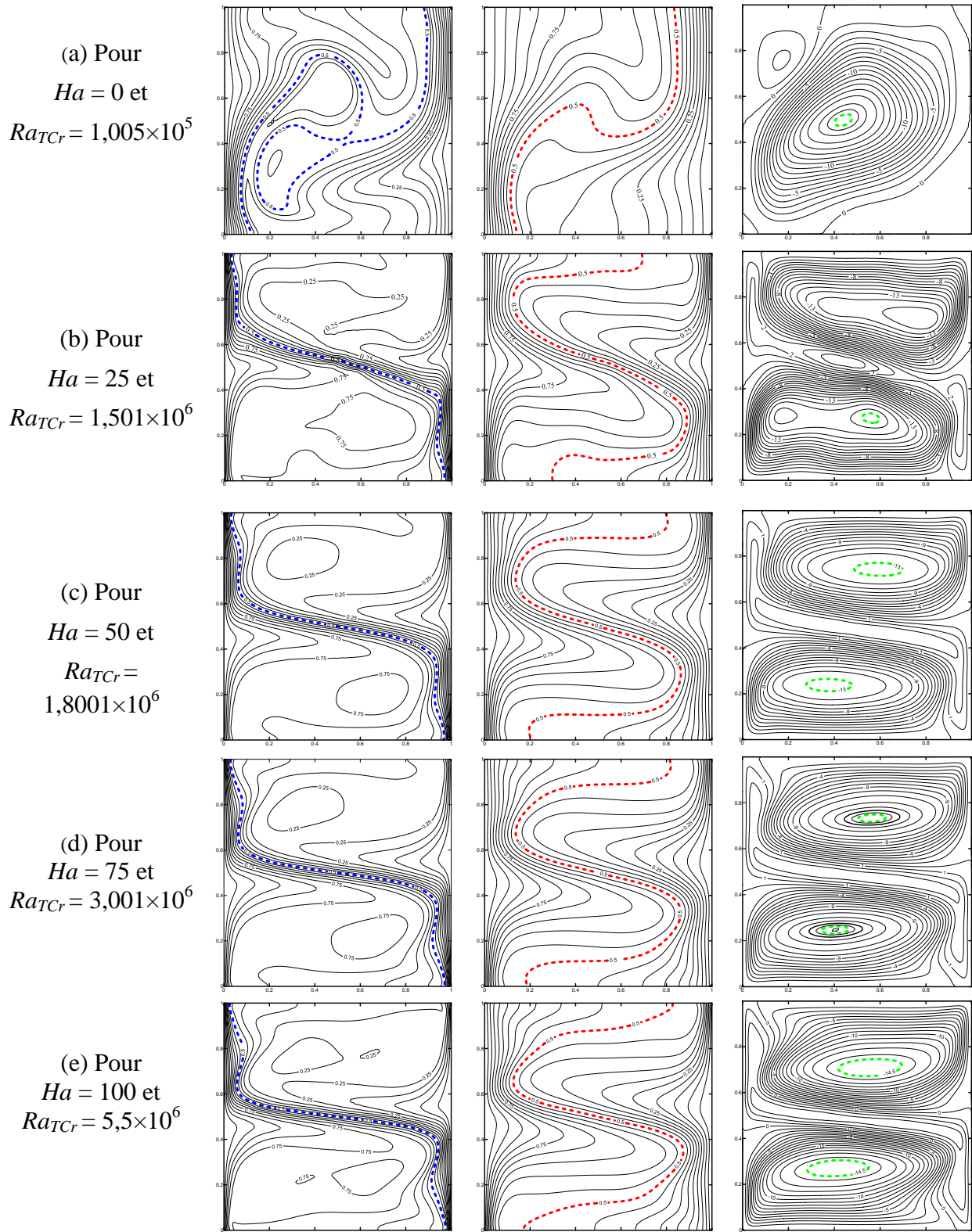
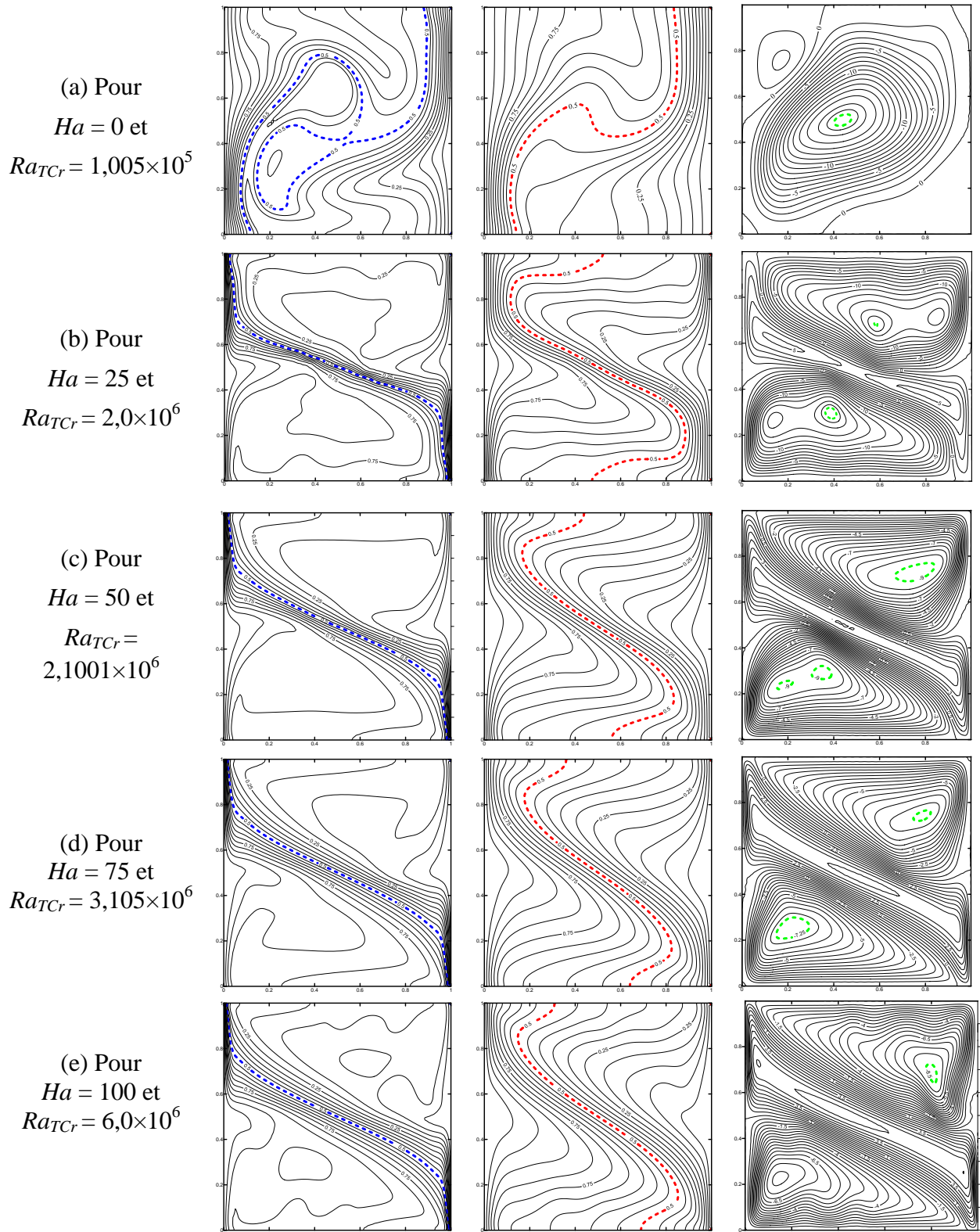


Figure V. 26. Structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1,25$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ).



*Figure V.27. Structure de l'écoulement : lignes iso-concentrations (gauche), lignes isothermes (centre) et lignes de courant (droite), pour  $N = 1,25$  en régime oscillatoire ( $\tau = 5$ ). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale ( $B_y$ ).*

## 6. Diagrammes de stabilité magnétique

Sur les Figure V.28-29, nous avons présenté la variation de la fonction de courant maximale  $|\psi_{\max}|$  (pour  $Ra_{TCr}$  correspondant) en fonction du nombre de Hartmann pour un champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale ( $B_x$ ) ou verticale ( $B_y$ ) et pour  $N = 0,75$  et  $1,25$ . On remarque que les valeurs de  $|\psi_{\max}|$  sont plus faibles quand le champ magnétique est appliqué suivant la direction verticale  $B_y$  par rapport à celles obtenues lorsque le champ magnétique est appliqué suivant la direction horizontale  $B_x$ . Les Figures V.30-32 montrent l'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Hartmann pour un champ magnétique appliqué suivant la direction horizontale  $B_x$  ou verticale  $B_y$ , et pour  $N = 0,75$ ,  $1$  et  $1,25$  (valeurs correspondantes à la dominance des forces thermique, équilibre de forces thermique et solutale et valeur correspondante à la dominance des forces solutales, respectivement). On peut distinguer deux régions d'écoulement : l'une pour l'écoulement stable et l'autre pour l'écoulement instable, qui sont séparées par la courbe : c'est le *diagramme de stabilité*. Ce diagramme indique qu'au-dessus de cette courbe, l'écoulement est instable et qu'au-dessous de cette courbe l'écoulement est stable. On remarque aussi que l'application du champ magnétique vertical permet de stabiliser l'écoulement mieux qu'un champ magnétique horizontal (pour les mêmes valeurs de  $Ha$  ;  $Ra_{TCr}$  pour un champ magnétique  $B_y$  est plus grand que celui de trouvé pour  $B_x$ ), et que l'augmentation de  $Ha$  augmente  $Ra_{TCr}$ , c'est-à-dire que l'écoulement instable est retardé par le champ magnétique.

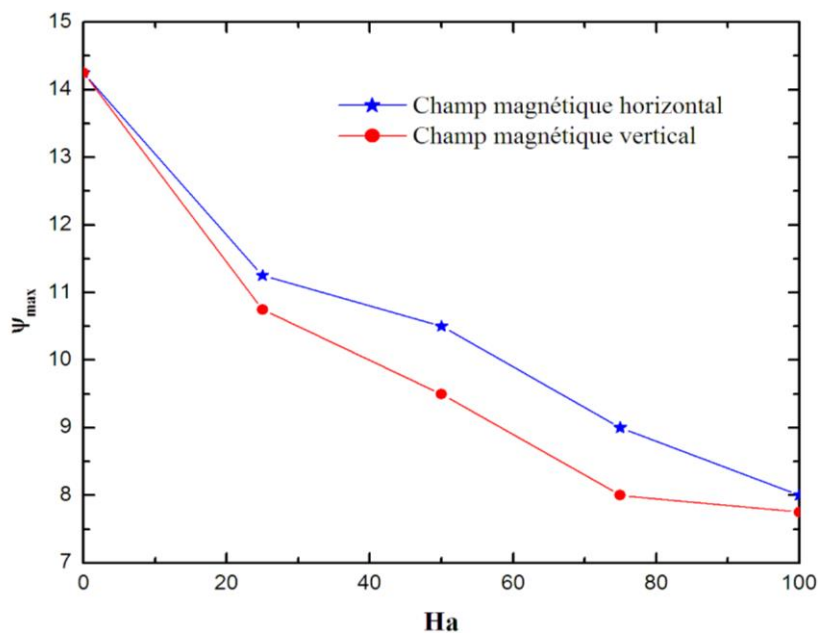


Figure V.28. Variation de la fonction de courant maximale  $|\psi_{\max}|$  en fonction du nombre de  $Ha$  pour  $N = 0,75$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).

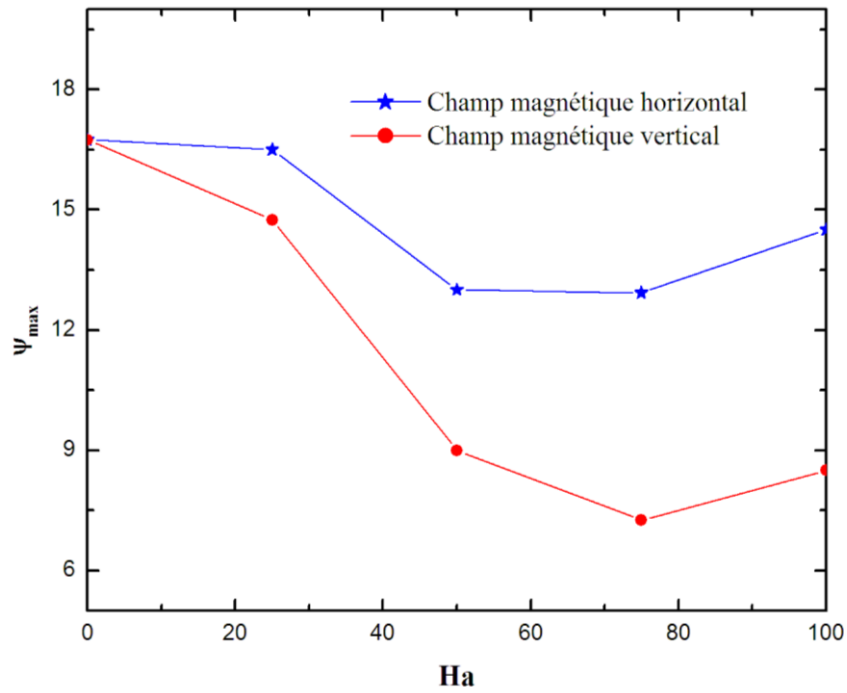


Figure V.29. Variation de la fonction de courant maximale  $|\psi_{\max}|$  en fonction du nombre de  $Ha$  pour  $N = 1,25$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).

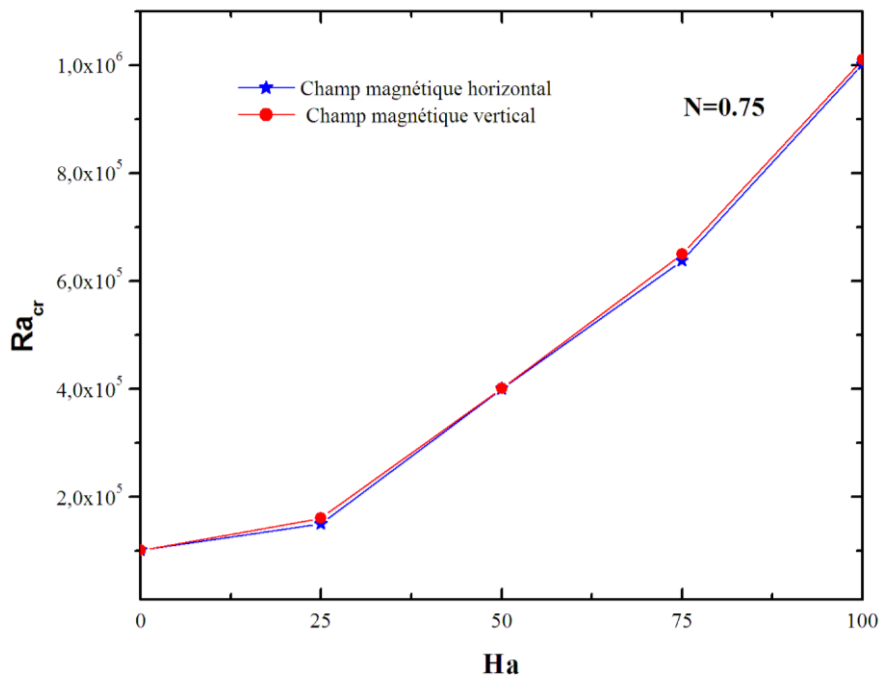


Figure V.30. Variation du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 0,75$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).

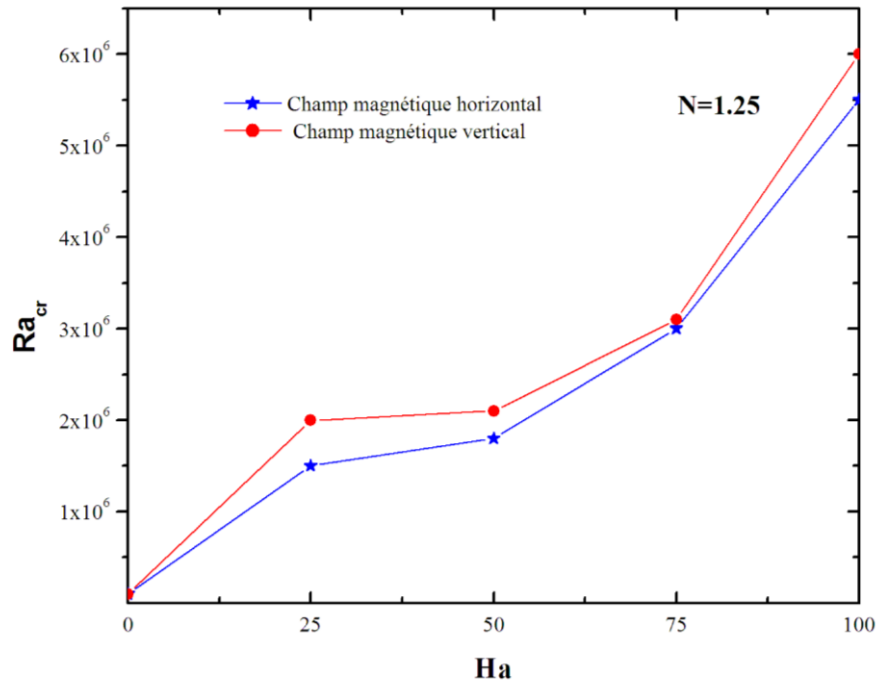


Figure V.31. Variation du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 1,25$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).

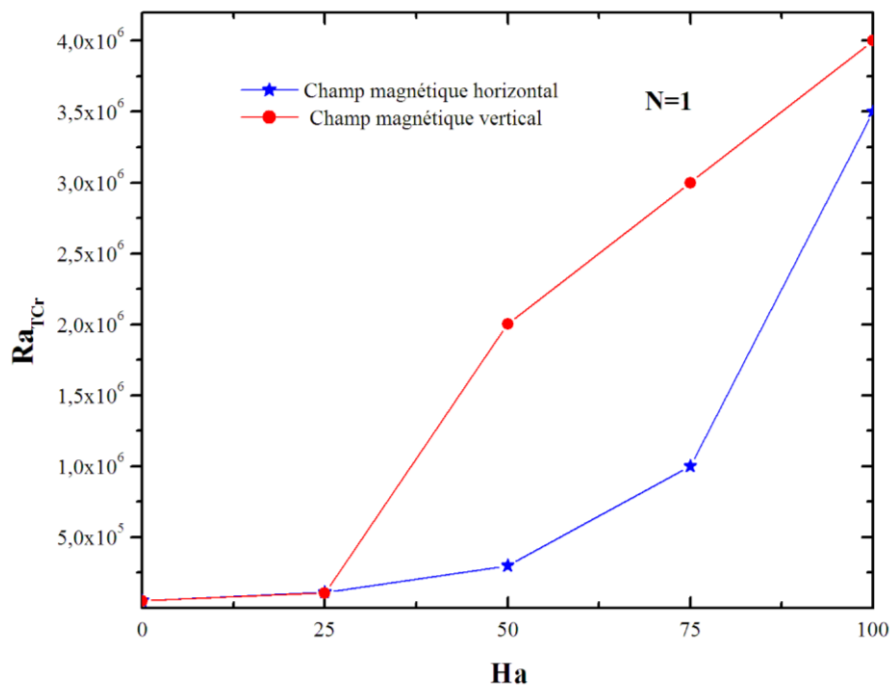


Figure V.32. Variation du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  en fonction du nombre de Hartmann  $Ha$ , pour  $N = 1$ . Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions horizontale ( $B_x$ ), et verticale ( $B_y$ ).

## 7. Conclusion du Chapitre V

Dans ce Chapitre, nous avons étudié la convection naturelle à double diffusion dans un mélange binaire conducteur d'électricité. Ce mélange, utilisé pour la production des monocristaux, possède les mêmes propriétés thermo-physiques que celles du travail de [Zhou et Zebib \(1994\)](#). L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle à double diffusion en régime stationnaire et régime oscillatoire a été analysé et discuté. Les résultats obtenus dans ce Chapitre sont récapitulés comme suit :

- Le seuil du régime oscillatoire est déterminé par un nombre de Rayleigh critique et une fréquence critique correspondants au chaque rapport des forces de flottabilité  $N$ .
- L'application du champ magnétique montre une forte dépendance du nombre de Rayleigh thermique critique avec le nombre de Hartmann  $Ha$ , pour une valeur de  $N$  donnée.
- Les nombres de Rayleigh thermiques critiques ( $Ra_{TCr}$ ) et les fréquences critiques ( $Fr_{Cr}$ ) correspondantes, pour le régime transitoire sans et avec champ magnétique appliqué dans les deux directions  $X$  et  $Y$ , séparément, et pour un nombre de Hartmann allant de 0 à 100, sont déterminés et discutés.
- Le champ magnétique vertical provoque la forte stabilisation magnétohydrodynamique et augmente le nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  vers des valeurs suffisamment élevées, ce qui ralentisse la transition vers l'instabilité de l'écoulement de double diffusion qui a des conséquences néfastes sur la production des semi-conducteurs.

## Conclusion Générale

Dans cette Thèse de Doctorat, nous avons présenté une étude numérique de la convection naturelle à double diffusion avec et sans champ magnétique. Une cavité carrée remplie d'un mélange binaire et exposée à un champ magnétique externe, appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ) séparément, est considérée. L'étude est présentée pour deux mélanges : un mélange binaire en régime laminaire et oscillatoire, et un mélange binaire conducteur d'électricité et utilisé pour la production des monocristaux, sous l'influence du magnétique externe. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour la discrétisation des équations de transport gouvernantes du problème considéré. Compte-tenu de la difficulté du problème et du nombre important des paramètres mis en jeu dans de tels phénomènes physiques, nous avons considéré une certaine plage de paramètres. L'effet du nombre de Rayleigh thermique, qui caractérise l'intensité de la convection naturelle à double diffusion, est mis en évidence. Les résultats obtenus sont donnés comme suit :

- L'écoulement de la convection naturelle à double diffusion est fortement influencé par le rapport des forces de flottabilité  $N$ , en régime stationnaire et en régime oscillatoire.
- Le seuil de la convection à double diffusion se manifeste par des oscillations périodiques régulières dans le temps, où le phénomène se répète à chaque période de temps.
- Le nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  et la fréquence correspondante pour le seuil de la convection oscillatoire double-diffusive ont été déterminés pour chaque rapport de flottabilité  $N$ . En plus, les résultats montrent une forte dépendance entre le rapport de la flottabilité et l'apparition de l'écoulement oscillatoire.
- Les nombres de Rayleigh thermique critique ( $Ra_{TCr}$ ) et les fréquences critiques ( $Fr_{Cr}$ ) correspondantes, pour le régime transitoire sans et avec champ magnétique appliqué dans les deux directions X et Y, séparément et pour un nombre de Hartmann allant de 0 à 100 sont déterminés et discutés.

- Le nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  diminue lorsque les forces thermiques sont dominantes ( $N < 1$ ). Par ailleurs, il augmente lorsque les forces solutales sont dominantes ( $N > 1$ ) et la faible valeur du nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  est obtenue pour le cas d'équilibre entre les forces thermiques et les forces solutales en sens opposées ( $N = 1$ ).
- La dominance des forces de thermiques ( $N < 1,25$ ) induit une augmentation de l'intensité du flux (fonction de courant) mieux que celles des forces solutales ( $N > 1,25$ ).
- L'application du champ magnétique montre une forte dépendance du nombre de Rayleigh thermique critique et le nombre de Hartmann  $Ha$ , pour une valeur de  $N$  donnée.
- Le champ magnétique vertical provoque la forte stabilisation magnétohydrodynamique et augmente le nombre de Rayleigh thermique critique  $Ra_{TCr}$  vers des valeurs suffisamment élevées, ce qui ralentisse la transition vers l'instabilité de l'écoulement de double diffusion qui a des conséquences néfastes sur la production des semi conducteurs.

D'autre part, les résultats obtenus permettent de guider les expérimentateurs à savoir le seuil de la transition du régime d'écoulement de convection double diffusive en présence ou non du champ magnétique afin d'améliorer les conditions de croissance.

Les résultats présentés dans cette Thèse de Doctorat sont valorisés par une publication internationale dans le Journal : *Numerical Heat transfert, Part A : Applications* (Gheraout et al., 2014) et par plusieurs communications nationales et internationales.

Bien que notre étude est bidimensionnelle, on s'attend à ce que les résultats d'une simulation numérique tridimensionnelle pour différents rapports de forme de la cavité, que nos recommandons, confirment les résultats qualitatifs obtenus dans ce travail.

## Références Bibliographiques

- ANWAR H. M., HAFIZ, M. Z. & REES, D. A. S. (2005).**  
 “Buoyancy and Thermocapillary Driven Convection Flow of an Electrically Conducting Fluid in an Enclosure with Heat Generation”. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 44, pp. 676–684.
- ARMOUR, N. & DOST, S. (2009).**  
 “Numerical and Experimental Study of Forced Mixing With Static Magnetic Field on SiGe System”. *FDMP: Fluid Dynamics and Materials Processing*, vol. 5(4), pp. 331-344.
- BEN BEYA B. & LILI T., (2007).**  
 “Oscillatory double-diffusive mixed convection in a two-dimensional ventilated enclosure” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol.50, pp. 4540–4553.
- BELAZIZIA, A., BENISSAD S. & ABOUDI S., (2012).**  
 “ Double diffusion natural convection of binary fluid in a square enclosure with top active vertical wall”, *Adv. Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 5 (3), pp. 119–131,
- BEGHEIN. C., HAGHIGHAT. F. & ALLARD. F., (1992).**  
 “Numerical study of double diffusive natural convection in a square cavity”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 35 (4), pp.833-846.
- BERGEMAN T. L. & HYUN, M.T., (1996).**  
 “Simulation of two-dimensional thermosolutal convection in liquid metals induced by horizontal temperature and species gradients”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol.39 (14), pp. 2883-2894.
- BESSAIH, R., KADJA, M. & MARTY, PH. (1999).**  
 ”Effect of Wall Electrical Conductivity and Magnetic Field Orientation on Liquid Metal Flow in Geometry Similar to the Horizontal Bridgman Configuration for Crystal Growth”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 4345-4365.
- BESSAIH, R. & BOUABDALLAH, S. (2008).**  
 “Numerical Study of Oscillatory Natural Convection during Solidification of a Liquid Metal in a Rectangular Enclosure with and without Magnetic Field”. *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 54, pp. 331-348.
- BENISSAAD, S. et AFRID, M. (2002).**  
 “ Influence of Grashof number on the natural convection double diffusion in rectangular enclosure with a weak aspect ratio” *Entropie* 242, pp. 44-55.
- BENNACER. R, MOHAMED. A. A. AKROUR. D., (2001).**  
 “Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients”. *Int. J. Thermal Science*. 40, pp. 899–910.

- BHUVANESWARI M., SIVASANKARAN. S. & KIM. Y.J., (2011).**  
 “Numerical Study on Double Diffusive Mixed Convection with a Soret Effect in a Two-Sided Lid-Driven Cavity”, *Numerical Heat Transfer A*, vol. 59 (7), pp.543-560.
- BOUABDALLAH, S. & BESSAIH, R. (2010).**  
 “Stability Magneto-hydrodynamics of Natural Convection in Molten Gallium during Phase Change in Three-Dimensional Enclosure”. *FDMP: Fluids Dynamics and Materials Processing*, vol. 6 (3).pp. 251-275.
- BOUABDALLAH, S. & BESSAIH, R. (2012).**  
 “Effect of magnetic field on 3D flow and heat transfer during solidification from a melt” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Volume 37, pp. 154-166.
- CHAMKHA, A. J. & AL-NASER. H. (2002).**  
 "Hydromagnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with opposing temperature and concentration gradients", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45, pp. 2465–2483.
- CHEN, S. TOLKE J. , KRAFCZYK, M. (2010).**  
 “Numerical investigation of double-diffusive (natural) convection in vertical annuluses with opposing temperature and concentration gradients”, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 31, pp 217–226.
- CHEN, Z.W. LI Y.S. & ZHAN, J.M. (2012).**  
 “ Onset of oscillatory double-diffusive buoyancy instability in an inclined rectangular cavity”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 55, pp. 3633–3640.
- CHEN, Z.W., ZHAN, J.M., LI Y.S, LUO, Y. Y., CAI, S. (2013).**  
 “Double-diffusive buoyancy convection in a square cuboid with horizontal temperature and concentration gradients” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol 60, pp. 422–431.
- DENG, Q.H., ZHOU. J., MEI, C. & SHEN, Y.M., (2004).**  
 “Fluid, heat and contaminant transport structures of laminar double-diffusive mixed convection in a two-dimensional ventilated enclosure”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.47, pp. 5257–5269.
- DULIKRAVICH, G. S., (1999).**  
 “ Electro-Magneto-Hydrodynamics and Solidification. Chapter no. 9 in *Advances in Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids*”, Part B (editors: D. A. Siginer, D. De Kee and R. P. Chhabra), *Rheology Series* 8, pp. 677-716.
- DOST, S., LIU, Y.C & LENT, B. (2002).**  
 “A Numerical Simulation Study for the Effect of Applied Magnetic Field in Liquid Phase Electroepitaxy”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 240, pp.39-51.
- DOST, S., LIU, Y. C., LENT, B. & REDDEN, R. F. (2003).**  
 “A Numerical Simulation Study for the Effect of Applied Magnetic Field in Growth of CdTe Crystals by the Travelling Heater Method”. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 17(4), pp. 271-288.

- GANAPATHYSUBRAMANIAN, B. & ZABARAS, N. (2004).** “Using Magnetic Field Gradients to Control the Directional Solidification of Alloys and the Growth of Single Crystals”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 270, pp. 255-272.
- GALINDO, V., GRANTS, I., LANTZSCH, R. PATZOLD, O. & GERBETH, G. (2007).** “Numerical and Experimental Modelling of the Melt Flow in a Travelling Magnetic Field for Vertical Gradient Freeze Crystal Growth”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 303, pp. 258–261.
- GELFGAT, A.YU. & BAR-YOSEPH, P.Z. (2001).** “The Effect of an External Magnetic Field on Oscillatory Instability of Convective Flows in a Rectangular Cavity”. *Physics of Fluids*, vol. 13, No.8, pp. 2269-2279.
- GHERNAOUT, B., BOUABDALLAH, S., BENCHATTI, A. & BESSAIH, R. (2014).** “Effect of the Buoyancy Ratio on Oscillatory Double-Diffusive Convection in Binary Mixture”. *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 66 (8), pp.928-946.
- GHORAYEB, K., KHALLOUF H. & MOJTABI, A., (1999).** “Onset of oscillatory flows in double-diffusive convection”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 629-643.
- GRAE WORSTER. M., (1985).** “Laminar free convection in confined regions”, *J. Fluid Mech.* vol. 156, pp. 301-319.
- IBRAHIM, A. & LEMONNIER. D. (2009).** “Numerical study of coupled double-diffusive natural convection and radiation in a square cavity filled with A N<sub>2</sub>-CO<sub>2</sub> mixture”, *International Communications in Heat and Mass Transfer* ,36 pp. 197–202.
- KAMOTANI. Y., WANG J.S., OSTRACH S., JIANG H.D., (1985).** “Experimental study of natural convection in shallow enclosures with temperature and concentration gradients”. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 28(1), pp. 165-173.
- KANEDA, M., TAGAWA, T. & OZOE, H. (2006).** “Natural Convection of Liquid Metal under a Uniform Magnetic with an Electric Current Supplied from Outside”. *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 30, pp.243-252.
- KEFENG S., & WENQIANG, L., (2006).** “The stratification phenomena in the thermal and solutal fields of double-diffusive convection in a circular cylinder”, *Chinese Science Bulletin*, vol. 51 (6), pp.747-754.
- KUMAR, V., DOST, S. & DURST, F. (2007).** “Numerical Modelling of Crystal Growth under Strong Magnetic Fields: An Application to the Travelling Heater Method”. *Applied Mathematic Modelling*, vol. 31, pp. 589-605.
- HAN, H., KUEHN, H. T. (1991).** “Double diffusive natural convection in a vertical rectangular enclosure- I experimental study”. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 34(2), pp. 449-459.

- HAN, H., KUEHN, H. T. (1991).  
 “Double diffusive natural convection in a vertical rectangular enclosure – II Numerical study”. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 34(2), pp. 461-471.
- HOF, B., JUEL, A. & MULLIN, T. (2003).  
 “Magnetohydrodynamic Damping of Convection Flows in Molten Gallium”. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 482, pp.163-179.
- HUNT, J.C.R. & MOREAU, R. (1976)  
 “Liquid-metal magnetohydrodynamics with strong magnetic fields: A report on Euromech 70”, *J. Fluid Mech.*, **78** part 2, pp. 261-288.
- HURLE, D. T. J. (1966).  
 “Temperature Oscillations in Molten and their Relationship to Growth Striate in Melt-growth Crystal”. *Philos. Mag.*13, pp. 305-310.
- HURLE, D. T. J., JAKEMAN, E. & JOHNSON, C. P. (1974).  
 “Convective Temperature Oscillation in Molten Gallium”. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 64, pp.564-565.
- JANA, S., DOST, S., KUMAR, V. & DURST, F. (2006).  
 “A Numerical Simulation Study for the Czochralski Growth Process of Si under Magnetic Field”. *International Journal of Engineering Science*, vol. 44, pp. 554–573.
- MAHAPATRA, T.R. PAL. D. & MONDAL. S., (2013).  
 “Effects of buoyancy ratio on double-diffusive natural convection in a lid-driven cavity”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 57, pp. 771–785.
- MECHIGHEL, F., EL GANAOU, M., KADJA, M., PATEYRON, B. & DOST, S. (2009).  
 “Numerical Simulation of Three-dimensional Low Prandtl Liquid Flow in a Parallelepiped Cavity under an External Magnetic Field”. *FDMP: Fluid Dynamics and Materials Processing*, vol. 5(4), pp. 313-330.
- MULLER, G.; & OSTROGORSKY, A. (1994).  
 “Convection in melt growth”, In *Handbook of Crystal Growth* (ed. D. T. J. Hurle), North-Holland, Amsterdam, 2, pp.711-781.
- NIKBAKHTI, R. & RAHIMI, A.B., (2012).  
 “Double-diffusive natural convection in a rectangular cavity with partially thermally active side walls”, *J. Taiwan Institute of Chemical Engineers*, vol. 43, pp. 535–541.
- NISHIMURA, T. WAKAMATSU M., & MOREGA, A.M., (1998).  
 “Oscillatory double-diffusive convection in a rectangular enclosure with combined horizontal temperature and concentration gradients”, *Int. J. Heat Mass Transfer* 41 (11), pp. 1601-1611.
- NITHYADEVI. N. and YANG. R.J., (2009).  
 “Double diffusive natural convection in a partially heated enclosure with Soret and Dufour effects”, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 30, pp. 902-910.

- LANTZSCH, R., GALINDO, V., GRANTS, I., ZHANG, C., PATZOLD, O., GERBETH, G. & STELTER, M. (2007).  
 “Experimental and Numerical Results on the Fluid Flow Driven by a Travelling Magnetic Field”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 305, pp. 249–256.
- LANTZSCH, R., GRANTS, I., PATZOLD, O., STELTER, M. & GERBETH, G. (2008).  
 “Vertical Gradient Freeze Growth with External Magnetic Fields”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 310, pp.1518–1522.
- LEE, J. HYEN M.T. & KIM, K.W. (1988).  
 “Natural convection in confined fluids with combined horizontal temperature and concentration gradients”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 31(10), pp. 1969–1977.
- LEE, J.W. & HYUM, J.M., (1990).  
 “Double diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 33(8), pp.1619-1632.
- LIN T.F., HUANG, C.C. & CHANG, T.S, (1990).  
 “Transient binary mixture natural convection in square enclosures”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 33 (2), pp. 281-299.
- LIU, Y. C., OKANO, Y. & DOST, S. (2002).  
 “The effect of Applied Magnetic Field on Flow Structure in Liquid Phase Electroepitaxy- a Three-Dimensional Simulation Model”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 244, pp.12-26.
- PATANKAR, S. V. (1980).  
 “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”. McGraw-Hill, New York.
- PARVIN S., NASRIN R., ALIM M.A. & N.F. Hossain, (2013).  
 “Double diffusive natural convective flow characteristics in a cavity”, *Procedia Engineering*, vol. 56, pp. 480 – 488.
- RANGANATHAN P. & VISCNTA. R., (1988).  
 “Natural convection in a square cavity due to combined driving forces”, *Numerical Heat Transfer B*, vol. 14 (1), pp. 35-59.
- SARAVANAN, S. & KANDASWAMY, P. (2000).  
 “Natural Convection in Low-Prandtl Number Fluids with a Vertical Magnetic Field”. *ASME, Journal of Heat Transfer*, vol. 122, pp.602-606.
- SEZAI, I. & MOHAMAD, A.A., (2000).  
 “Double diffusive convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients”, *Physics of Fluids*, vol. 12 (9), pp. 2210-2223.
- SCHWESIG. P., HAINKE, M., FRIEDRICH, J. & MUELLER, G. (2004).  
 “Comparative Numerical Study of the Effects of Rotating and Travelling Magnetic Fields on the Interface Shape and Thermal Stress in the VGF Growth of InP Crystals”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 266, pp. 224–228.

SHI K. & LU. W.Q, (2006).

“Time evolution of double-diffusive convection in a vertical cylinder with radial temperature and axial solutal gradients”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 49, pp. 995–1003.

SUN H. & LAURIAT, G., (2010).

“A numerical study based on a weakly compressible formulation for thermosolutal convection in vertical cavities”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol.46, pp. 495–508.

TEAMAH A. M, ELSAFTY A. F, ELFEKY F. M, EL-GAZZAR E. Z, (2011).

“Numerical simulation of double-diffusive natural convective flow in an inclined rectangular enclosure in the presence of magnetic field and heat source, part A: Effect of Rayleigh number and inclination angle”, *Alexandria Engineering Journal*, 50, pp. 269–282.

THESS, A., VOTYAKOV, E., KNAEPEN, B. & ZIKANOV, O. (2007)

“Theory of the Lorentz force flowmeter”, *New Journal of Physics* 9, 299, pp. 1-27

THOMPSON. M.E. & SZEKELY. J, (1988)

“Mathematical and physical modelling of double-diffusive convection of aqueous solutions crystallizing at a vertical wall”, *J. Fluid Mech.* 187, pp. 409-433.

VAHL DAVIS. D, (1983).

"Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution". *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 3, pp. 249-264.

VENKATACHALAPPA. M. , YOUNGHAE D, SANKAR M.,(2011).

“Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus”, *Int. J. Engineering Science* ,49, pp. 262–278.

YAN W.M., (1996).

“Combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion on laminar forced convection in horizontal rectangular ducts”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 39 (7), pp. 1479-1488.

YILDIZ, E., DOST, S. & YILDIZ, M. (2006).

“A Numerical Simulation Study for the Effect of Magnetic Fields in Liquid Phase Diffusion Growth of SiGe Single Crystals”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 291, pp. 497-511.

ZHOU, H. & ZEBIB, A. (1994).

“ Oscillatory double-diffusive convection in crystal growth”, *Journal of Crystal Growth*, vol. 135, pp. 587-593.

## Résumé de la Thèse

### Convection naturelle à double diffusion avec/sans champ magnétique

Dans cette thèse, une étude numérique de la convection naturelle à double diffusion d'un mélange binaire contenu dans une cavité carrée a été réalisée. Un champ magnétique externe est appliqué suivant les deux directions : horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ), séparément. L'approche numérique de résolution des équations de conservation est basée sur la méthode des volumes finis, l'Algorithme SIMPLER, pour décrocher le couplage vitesse-pression et l'Algorithme TDMA, pour la résolution des systèmes d'équations résultant de la discrétisation. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux des travaux numériques et expérimentaux. L'étude a été présentée pour deux mélanges. Dans la première partie, nous avons étudié la convection à double diffusion pour un mélange binaire. L'effet du rapport des forces de flottabilité ( $N$ ) sur la convection naturelle oscillatoire à double diffusion pour le cas des gradients opposants est présenté par la détermination du nombre de Rayleigh thermique critique et la fréquence d'oscillations de l'écoulement oscillatoire en fonction de  $N$ , pour l'intervalle ( $0 \leq N \leq 2$ ) valeurs inférieures et valeurs supérieures à l'équilibre de la flottabilité thermique-solutale valeur ( $N = 1$ ). Dans la deuxième partie, nous avons étudié un mélange binaire conducteur d'électricité utilisé pour la production des monocristaux. L'effet du champ magnétique sur la convection naturelle à double diffusion en régime stationnaire et en régime oscillatoire a été présenté et discuté. Le seuil du régime oscillatoire est déterminé par le nombre de Rayleigh thermique critique correspond à chaque rapport des forces de flottabilité, ainsi que la fréquence des oscillatoires correspondantes. Les diagrammes de stabilité magnétique ( $Ra_{TC}$ -Ha), (Nu-Ha), (Sh-Ha) et ( $\psi_{max}$ -Ha) sont déterminés, pour les deux orientations du champ magnétique : directions horizontale ( $B_x$ ) et verticale ( $B_y$ ) séparément, et pour un nombre de Hartmann allant de 0 à 100. Ces diagrammes montrent bien l'effet stabilisant du champ magnétique et que le champ magnétique vertical provoque la forte stabilisation magnétohydrodynamique, et que les valeurs de ( $Ra_{TC}$ ) augmente vers des valeurs suffisamment élevées, ce qui ralentisse la transition de l'écoulement de double diffusion vers l'instabilité et leurs conséquences néfastes sur la production des monocristaux.

**Mots clés :** Convection à double diffusion, Magnétohydrodynamique (MHD) - Stabilité - Méthode des Volumes Finis- - Convection Naturelle – mélange binaire.

### Abstract of the Thesis

#### Double diffusive natural convection with/without magnetic field

In this thesis, a numerical study of double diffusive natural convection in binary mixture contained in a square cavity was performed. An external magnetic field is applied in both directions: horizontal ( $B_x$ ) and vertical ( $B_y$ ), separately. The numerical approach to solving the conservation equations was based on the finite volume method, the SIMPLER Algorithm, to decouple the velocity-pressure coupling and TDMA Algorithm for solving the resulting systems of equations of discretisation. The obtained results are in good agreement with those of numerical and experimental studies. The study is performed for two mixtures. In the first part, we have studied the double diffusive natural convection for a binary mixture. The effect of the buoyancy ratio forces ( $N$ ) on the oscillatory natural double diffusion convection in the case of opposing gradients is presented by determining of critical thermal Rayleigh number and the frequency of the oscillatory flow according the buoyancy ratio  $N$ , for studied interval ( $0 \leq N \leq 2$ ) values less than and values higher than the equal of the thermal and solutal buoyancy force ( $N = 1$ ). In the second part, we have studied a conducting electrically binary mixture used to produce the single crystals. The effect of magnetic field on double diffusive natural convection in steady and oscillatory state was presented and discussed. The onset of the oscillatory flow is determined by the critical thermal Rayleigh number for each buoyancy ration, also the corresponding oscillatory frequency. Magnetic stability diagram ( $Ra_{TC}$ -Ha), (Nu-Ha), (Sh-Ha) and ( $\psi_{max}$ -Ha) are determined, for both horizontal ( $B_x$ ) and vertical ( $B_y$ ) magnetic field, separately and for Hartmann number ranging from 0 to 100. This diagram, show the stability effect of magnetic field and that the vertical magnetic field provide a strong magnetohydrodynamic stability, and the increasing the value  $Ra_{TC}$  to high sufficiently values, which slows the transition of double diffusive natural convection to instability and their adverse effects in single crystals production.

**Keywords:** Convection double diffusion, Magnetohydrodynamics (MHD) - Stability – Finite volume method - Natural Convection- Binary mixture.

### ملخص الأطروحة

#### الحمل الطبيعي ثنائي الانتشار مع /دون حقل مغناطيسي

في هذه الأطروحة، دراسة عددية للحمل الحراري الطبيعي مزدوج الانتشار لخليط مزدوج محتوى داخل تجويف مربع قد قدمت. الحقل المغناطيسي الخارجي المطبق موجّه في كلا الاتجاهين: الأفقي ( $B_x$ ) والعمودي ( $B_y$ ) بشكل منفصل. التقريب العددي لحل معادلات الانحفاظ يعتمد على طريقة الحجم المنتهية، خوارزمية سيمبلر (SIMPLER) لفك الأزواج ضغط-سرعة وخوارزمية التدياما (TDMA) لحل جمل المعادلات الناتجة عن التجزئة. النتائج المحصل عليها في اتفاق جيد مع نتائج التقريبات العددية والنتائج التجريبية. الدراسة قدمت من أجل خليطين. في الجزء الأول، درسنا الحمل الحراري ثنائي الانتشار لخليط مزدوج مفعول نسبة قوى الطفو على الحمل الطبيعي الاهتزازي ثنائي الانتشار للتدرج المتعاكس قد قدم عن طريق استخراج عدد رايلي الحراري الحرج و تردد الاهتزازات للتنفق الاهتزازي بدلالة النسبة  $N$ ، وهذا في المجال ( $0 \leq N \leq 2$ ) : قيم أقل من التكافؤ للطفو الحراري-الانحلافي، قيمة التكافؤ لقوى الطفو ( $N = 1$ )، قيم أكبر من تكافؤ الطفو حراري/انحلافي. في الجزء الثاني، درسنا خليط مزدوج ناقل للكهرباء مستعمل لإنتاج أحادي البلورات. تأثير الحقل المغناطيسي على الحمل الطبيعي ثنائي الانتشار في النظام المستقر والنظام الاهتزازي قد قدم ونوقش. بداية النظام الاهتزازي استخراج عن طريق عدد رايلي الحراري الحرج الموافق لكل نسبة من قوى الطفو، أيضا التردد الموافق للاهتزازات. منحنيات الإخماد المغناطيسي ( $Ra_{TC}$ -Ha)، (Nu-Ha)، (Sh-Ha) و ( $\psi_{max}$ -Ha) قد استخراجت لكلا توجيهات الحقل المغناطيسي: توجيه أفقي ( $B_x$ ) وتوجيه عمودي ( $B_y$ ) كل على حدا وذلك من أجل عدد هارتمان يتراوح بين 0 و 100. هذه المنحنيات تبرهن جيد المعول الإخمادي للحقل المغناطيسي، وأن الحقل المغناطيسي العمودي يحرض على الإخماد المغناطيسي القوي وأن قيمة  $Ra_{TC}$  ترتفع نحو قيم نوعا ما عظمى وهذا يثبط المرور إلى سيلان ثنائي الانتشار نحو ألالاستقرار ونتاجه الوخيمة على إنتاج أحادي البلورات.

**الكلمات المفتاحية :** الحمل ثنائي الانتشار، المغناطيسية (MHD) - الإخماد - طريقة الحجم المنتهية - الحمل الطبيعي - خليط مزدوج.