



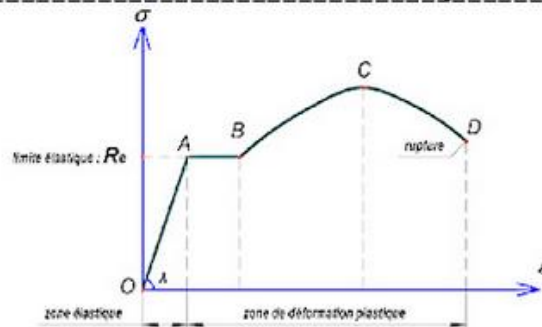
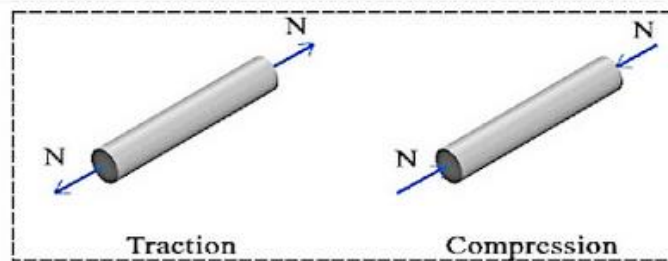
Polycopié

Résistance des matériaux

Cours et applications

Niveau : 2^{ème} Licence

Filière : Hydraulique



Dr. BOUKHELKHAL Aboubakeur

Préambule

Le présent polycopié intitulé « Résistance des matériaux : cours et applications » s'adresse principalement aux étudiants de Licence (L2/S4) en Hydraulique système « LMD ». Son contenu fait partie de l'unité fondamentale 3 de la formation Licence en Hydraulique (L2). Il peut être même adressé aux étudiants de Licence de Génie Civil. Il est rédigé sous forme de cours détaillés avec des exercices résolus pour permettre aux étudiants une compréhension approfondie. Le cours traite différents aspects liée aux sections, sollicitations, dimensionnement et vérifications. Il est élaboré conformément au programme officiel fixé par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Ce polycopié est divisé en six chapitres. Le premier chapitre présente des définitions, des généralités, ainsi que les hypothèses utilisées. Le deuxième chapitre décrit les caractéristiques géométriques des sections droites. Les chapitres 3, 4, 5 et 6 sont consacrés à la présentation de différents types de sollicitations simples et composées (traction, compression, cisaillement, torsion et flexion simple). Des exercices avec leurs solutions sont regroupés à la fin de ce document.

Table de matières

<i>Préambule</i>	II
<i>Notation et symboles</i>	III
<i>Introduction</i>	1
Chapitre 1. Introduction à la résistance des matériaux	
1.1. Définition de la résistance des matériaux	2
1.2. Champs d'application	2
1.3. Hypothèses de la résistance des matériaux	3
1.4. Repère, conventions, unités	3
1.4.1. <i>Repère</i>	3
1.4.2. <i>Conventions</i>	4
1.4.3. <i>Unités</i>	4
1.5. Classification des solides	5
1.5.1. <i>Barre</i>	5
1.5.2. <i>Poutre</i>	5
1.5.3. <i>Plaque</i>	6
1.5.4. <i>Coque</i>	6
1.5.5. <i>Corps tridimensionnel (massif)</i>	6
1.6. Principes de la statique	6
1.6.1. <i>Principe actions et réactions</i>	7
1.7. Différentes natures d'appuis	7
1.7.1. <i>Appui simple (appui glissant ou mobile)</i>	7
1.7.2. <i>Appui double (appui fixe – articulation ou rotule)</i>	7
1.7.3. <i>Appui triple (encastrement)</i>	8
1.8. Différents types d'actions (forces extérieures)	9
1.8.1. <i>Notions de force</i>	9
1.8.2. <i>Notion du moment (couple)</i>	12
1.9. Principe général d'équilibre – Équations d'équilibres	13
1.10. Principes de la coupe – Éléments de réduction (forces intérieures)	14
1.11. Différents systèmes mécaniques	15
1.11.1. <i>Système astatique (hypostatique) ($h < 0$)</i>	16

1.11.2. Système isostatique ($h=0$)	16
1.11.3. Système hyperstatique ($h>0$)	16

Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections droites

2.1. Introduction	18
2.2. Détermination des caractéristiques géométriques d'une section	18
2.2.1. Surface	18
2.2.2. Coordonnées de centre de gravité	18
2.2.3. Moment statique	19
2.2.4. Moment d'inertie	19
2.2.5. Module d'inertie ou Module de résistance	22
2.2.6. Rayon de giration	22

Chapitre 3. Traction et compression

3.1. Introduction	23
3.2. Traction	23
3.2.1. Essai de traction	27
3.2.2. Déformation due à la traction	27
3.2.3. Condition de résistance en traction.....	28
3.2.4. Condition de rigidité	28
3.3. Compression	28
3.3.1. Contrainte de compression	29
3.3.2. Déformation due à la compression	30
3.3.3. Condition de résistance en compression	30
3.3.4. Dimensionnement de la section droite	31

Chapitre 4. Cisaillement

4.1. Définitions	32
4.2. Contrainte de cisaillement	32
4.3. Déformation élastique en cisaillement	33
4.4. Condition de résistance au cisaillement.....	34

Chapitre 5. Torsion pure

5.1. Définitions	35
5.2. Moment de torsion	35
5.2.1. <i>Convention de signe</i>	35
5.2.2. <i>Diagramme du moment de torsion</i>	36
5.3. Essai de torsion	36
5.4. Angle et contrainte de torsion	37
5.5. Relation entre contrainte et moment de torsion	39
5.6. Condition de résistance au cisaillement	40
5.7. Condition de rigidité	40

Chapitre 6. Flexion simple

6.1. Définitions	41
6.2. Hypothèses de calcul	41
6.3. Notion de fibre tendue et fibre comprimée	42
6.4. Moment fléchissant	43
6.5. Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant	43
6.6. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant	48
6.7. Calcul des contraintes	48
6.7.1. <i>Section dangereuse</i>	50
6.7.2. <i>Condition de résistance</i>	51
6.8. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple	52
6.8.1. <i>Déformée</i>	52
6.8.2. <i>Flèche</i>	52
6.8.3. <i>Rotation</i>	52
6.9. Critères de dimensionnement	54
6.9.1. <i>Dimensionnement à la condition de rigidité</i>	54
Exercices avec leurs solutions	55
Références bibliographiques	88
Annexe A	89

Symbole	Grandeur
x, y	Coordonnées d'un point quelconque dans un repère cartésien
r, θ	Coordonnées d'un point quelconque dans un repère cylindrique
G	Centre de gravité
S	Aire de la section droite
b	Largeur de la section droite
h	Hauteur de la section droite
L, l	Longueur d'une poutre
R, r	Rayon
D, d	Diamètre
X_G, Y_G	Coordonnées du centre de gravité
S_x, S_y	Les moments statiques d'une section
I_x, I_y	Moments d'inertie axiaux
I_{xy}	Moment d'inertie centrifuge
I_ρ	Moment d'inertie polaire
i_x, i_y	Rayons de giration
F, P	Force concentrée
F_x, F_y et F_z	Composante d'une force suivant les axes x, y et z
q	Charge linéaire
R	Résultant de deux ou plusieurs forces
R_A, R_B	Réactions verticales aux appuis A et B
H_A, H_B	Réactions horizontales aux appuis A et B
N_x	Effort normal dans une section
T_y, T_z	Efforts tranchants dans une section
M_y, M_z	Moments de flexion dans une section
M_x ou M_t	Moment de torsion
μ_x, μ_z	Déplacements selon les axes x et z
θ_y	Rotation par rapport à l'axe y
E	Module d'élasticité longitudinal ou Module de Young
G	Module d'élasticité transversal
l_f	Longueur de flambement

n	Coefficient de sécurité
k	Coefficient de forme d'une section
σ	Contrainte normale
τ	Contrainte tangentielle
σ_e	Contrainte limite d'élasticité
σ_r	Contrainte limite de rupture
τ_e	Contrainte de cisaillement élastique
$\bar{\sigma}$ ou σ_{ad}	Contrainte normale admissible
$\bar{\tau}$ ou τ_{ad}	Contrainte tangentielle admissible
σ_{max}	Contrainte normale maximale
τ_{max}	Contrainte de cisaillement maximale
f	Flèche d'une poutre
γ	Angle de glissement
λ	L'élancement d'une barre
θ	Angle unitaire de torsion
α, β et γ	Angles entre un vecteur et le système d'axe x, y et z.
ΔL	Allongement ou raccourcissement
ε_l	Déformation longitudinale
ε_t	Déformation transversale
ν	Coefficient de poisson

Introduction générale

La résistance des matériaux (RDM) est défini comme étant une science qui étudie le comportement d'un solide sous l'effet de différentes sollicitations et déformations qui lui s'agissent. C'est une discipline universelle, elle est utilisée en mécanique, génie civil.....etc.

La RDM s'intéresse principalement à l'étude de la stabilité et de la résistance des constructions. Elle constitue l'outil indispensable à l'ingénieur-constructeur pour concevoir et réaliser des ouvrages économiques qui ne risquent ni de se rompre ni de se déformer excessivement sous les actions qui leur sont appliquées (charges ou déformations imposées).

Ce polycopié de cours expose les méthodes générales de calcul des sollicitations et des déplacements des structures isostatiques et de vérification des résistances. Il consacre également une large place aux problèmes isostatiques jugés nécessaires à la bonne clarté de l'exposé. Les méthodes particulières classiques sont également présentées afin de donner à l'étudiant des moyens de calcul pratiques mais aussi rigoureux que possible.

A travers ce cours l'étudiant sera capable de déterminer la forme, les dimensions et matières des pièces dans une construction de telle façon que ces pièces résistent aux efforts qui leur sont appliqués. Cette notion de résistance implique non seulement que les pièces étudiées ne se rompent pas, mais aussi qu'elles n'atteignent pas des déformations prohibitives (importantes).

Chapitre 1

Introduction à la résistance des matériaux

Chapitre 1 : introduction à la résistance des matériaux

1.1. Définition de la résistance des matériaux :

La résistance des matériaux connaît sous l'abréviation RDM, appelé également mécanique des structures, est une discipline mécanique qui s'intéresse à l'étude du comportement (résistance, rigidité et stabilité) des éléments de construction et des pièces sous l'effet des charges extérieures.

1.2. Champs d'application :

La RDM est couramment utilisée dans de différents domaines d'applications tels que :

- Génie mécanique (piston, essieu ,jante , tambour).
- Génie maritime (piston, bielle).
- Génie civil (bâtiments, turbine, structures métalliques).
- Aéronautique (aile).
- La physique du solide (acier, cuivre).
- Génie électrique (câbles, pylônes, centrales).

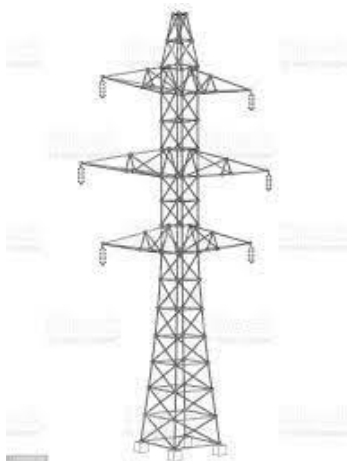




Figure 1.1. Diverses applications issues de l'utilisation des notions de la résistance des matériaux.

1.3. Hypothèses de la résistance des matériaux

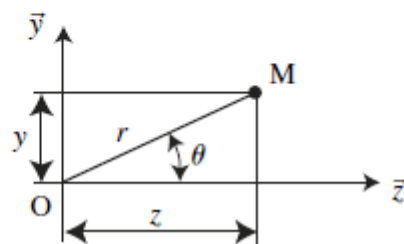
- Le matériau est continu, c'est-à-dire ne comportant ni fissures ni cavités (continuité)
- En tout point, le matériau possède les mêmes propriétés chimiques (homogénéité)
- Les propriétés physiques sont les mêmes en tout point et dans toutes les directions (isotropes)
- Tous les corps sont parfaitement élastiques
- Une section plane reste plane après déformation (hypothèse de Jacques Bernoulli)
- L'effet total causé par l'action de plusieurs forces est égal à la somme des effets dus à l'action de chaque force séparément.

1.4. Repère, conventions, unités

1.4.1. Repère :

Les différents calculs en résistance des matériaux se font dans un repère cartésien ou dans un repère cylindrique.

	Coordonnées du point	Surface infinitésimale ds
Repère cartésien	(y, z)	$dy dz$
Repère cylindrique	(r, θ)	$r dr d\theta$



$$z = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r^2 = y^2 + z^2$$

1.4.2. Conventions :

Considérons une poutre chargée comme représentée sur la figure ci-après. Selon le principe de l'action et de la réaction, le corps est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des réactions aux appuis. Cependant chaque partie de ce corps se trouve également en équilibre.

Faisons une coupe selon le plan ZY. La partie gauche est en équilibre sous l'effet des sollicitations (forces), des réactions au point A et des efforts exercés (internes) par la partie droite.

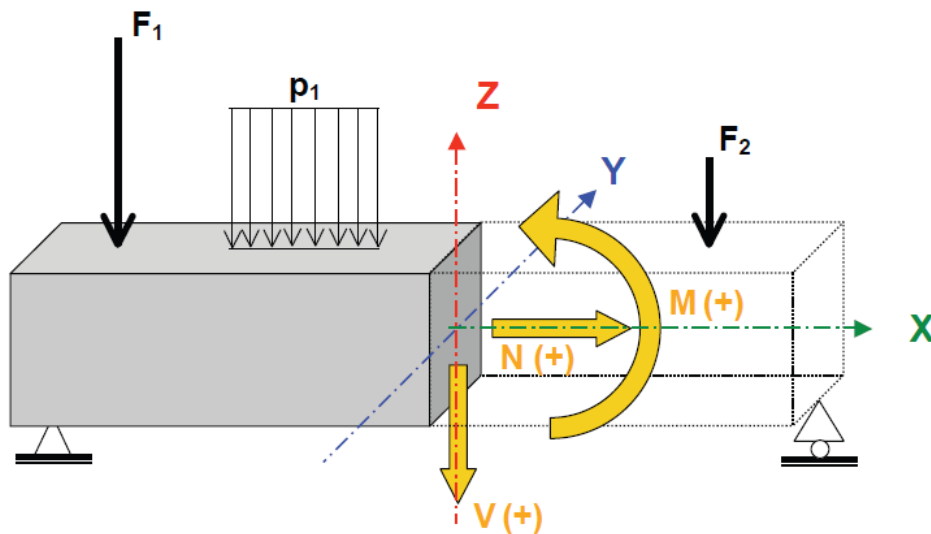


Figure 1.2. Conventions des signes.

1.4.3. Unités :

On recommande toujours d'utiliser les unités du système international, soit :

- pour les longueurs le mètre (m) ou mm, cm
- pour les forces le Newton (N) ou décanewton (daN) voir le kilonewton (kN)
- pour la masse, le kilogramme (kg)
- pour les contraintes ou les pressions le Pascal ($\text{Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) ou le MégaPascal (MPa) voir parfois le GigaPascal (GPa)
- pour les déformations, le mètre par mètre
- pour un couple, le newton mètre (N.m).

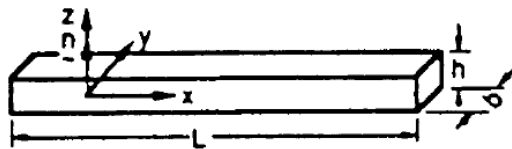
Tableau 1.1. Facteur de multiplication

Facteur de multiplication	Prefix	Symbole
1000000000000 = 10^{12}	tera	T
1000000000 = 10^9	giga	G
1000000 = 10^6	mega	M
1000 = 10^3	kilo	k
100 = 10^2	hecto	H
10 = 10^1	deka	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	milli	m
0,000001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000000001 = 10^{-9}	nano	n
0,000000000000001 = 10^{-12}	pico	p
0,000000000000000001 = 10^{-15}	femto	f
0,00000000000000000001 = 10^{-18}	atto	a

1.5. Classification des solides :

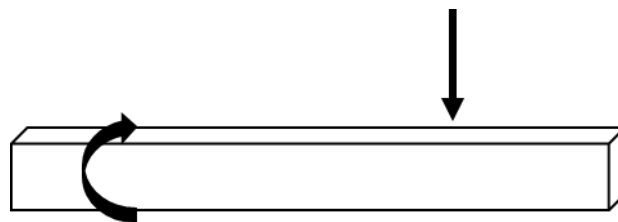
1.5.1. Barre :

Un corps dont l'une des dimensions (la longueur) est bien plus grand que les autres. Les barres supportent uniquement des forces axiales.

**Figure 1.3.** Élément barre

1.5.2. Poutre :

C'est une barre travaillant à la flexion.

**Figure 1.4.** Élément poutre

1.5.3. Plaque :

C'est un corps plan dont l'une des dimensions (l'épaisseur) est bien plus petite que les autres.

1.5.4. Coque :

C'est une plaque de surface courbée.

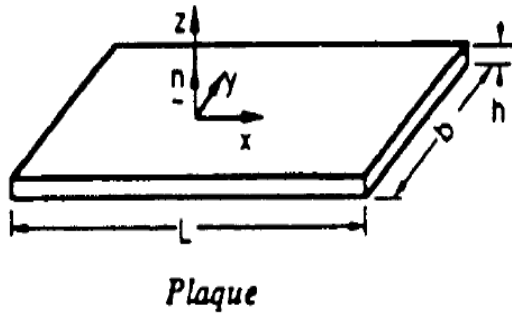


Figure 1.5. Elément plaque

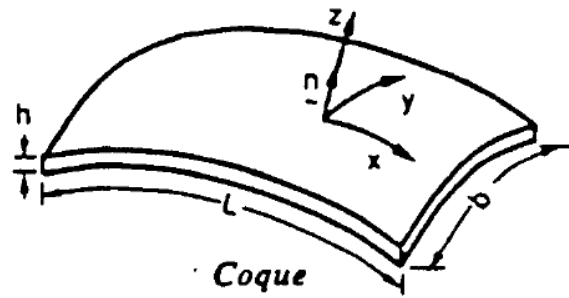
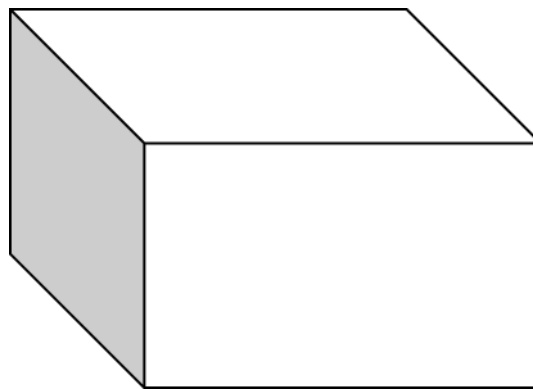


Figure 1.6. Elément coque

1.5.5. Corps tridimensionnel (massif)

C'est un élément caractérisé par des dimensions de mêmes ordres.



$$L \approx b \approx h$$

Figure 1.7. Elément massif

1.6. Principes de la statique

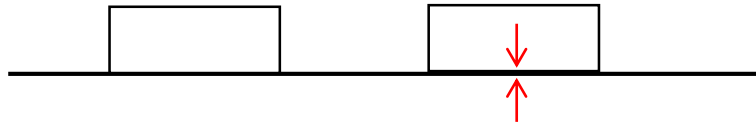
On ne s'intéressera qu'aux structures supposées immobiles et en équilibre sous l'effet des différentes actions qui leur sont appliquées. En particulier, la dynamique des structures ne sera pas abordée. Nous verrons même plus loin que les actions doivent être appliquées aux structures de manière lente, progressive (application quasi-statique des charges). La résistance des matériaux fait donc en premier lieu appel à la statique.

1.6.1. Principe actions et réactions

Considérons une masse ponctuelle quelconque ; celle-ci est en équilibre :

Soit si elle n'est soumise à aucune action (ou force) ;

Soit si la somme des actions (ou forces) qui lui sont appliquées est nulle.



1.7. Différentes natures d'appuis :

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème. Dans le cas des problèmes plans (systèmes de forces coplanaires), la schématisation des liaisons et des efforts exercés se ramène à trois cas types : appui simple (ponctuel ou plan sans frottement), articulation (pivot) et encastrement.

1.7.1. Appui simple (appui glissant ou mobile) :

Dans ce système la translation selon z est empêchée.

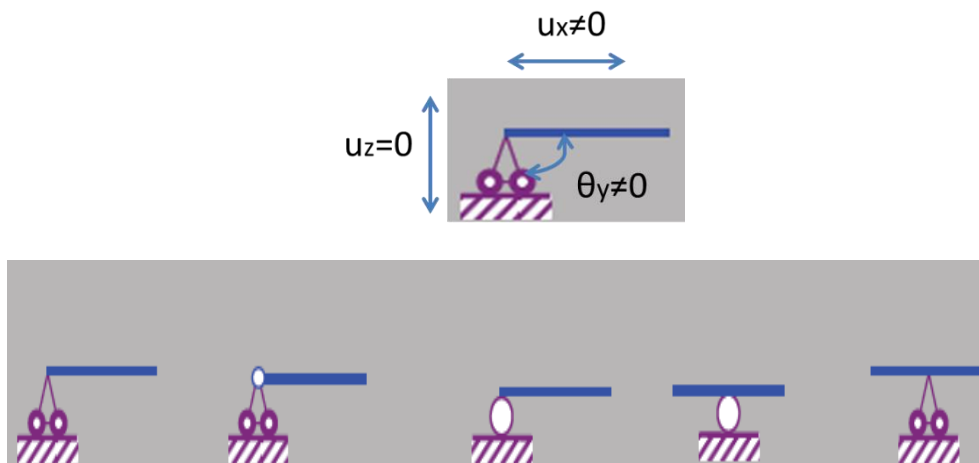


Figure 1.8. Appuis simples.

1.7.2. Appui double (appui fixe – articulation ou rotule) :

Dans ce système 2 degrés de libertés sont empêchés (en z et en x).

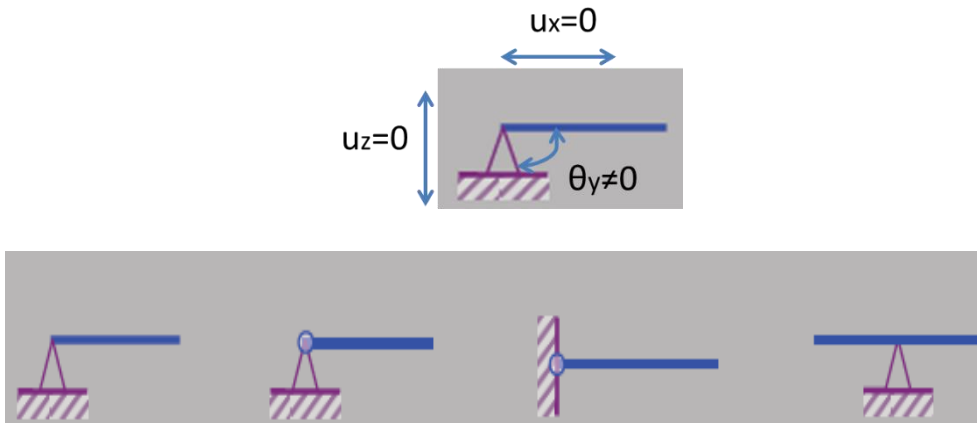


Figure 1.9. Appuis doubles.

1.7.3. Appui triple (encastrement) :

Dans ce système 3 degrés de libertés sont empêchés (translations en x et en z ; rotation en z).

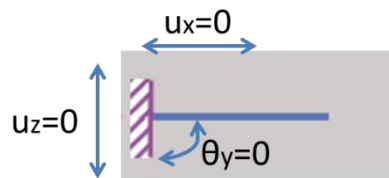


Figure 1.10. Appui triple.

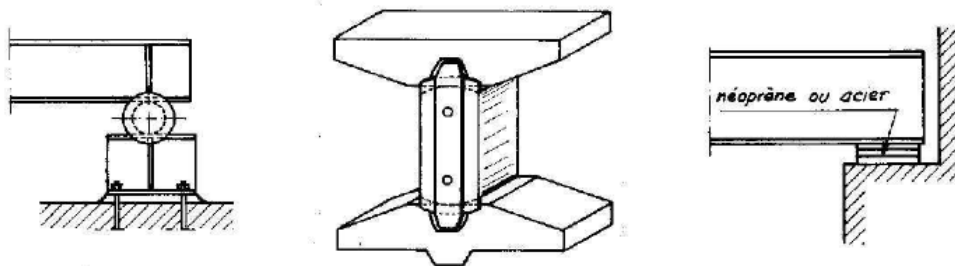


Figure 1.11. Exemples d'appuis simple et double.

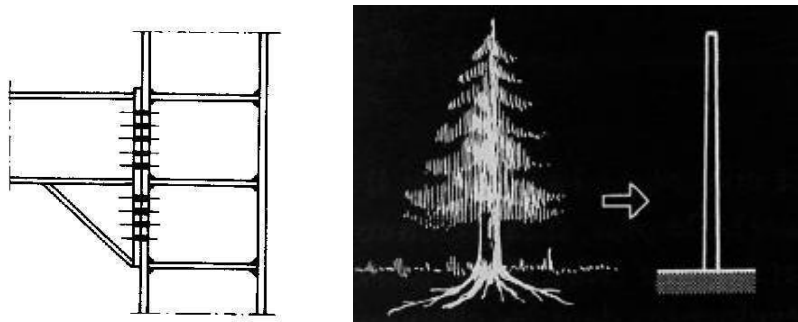
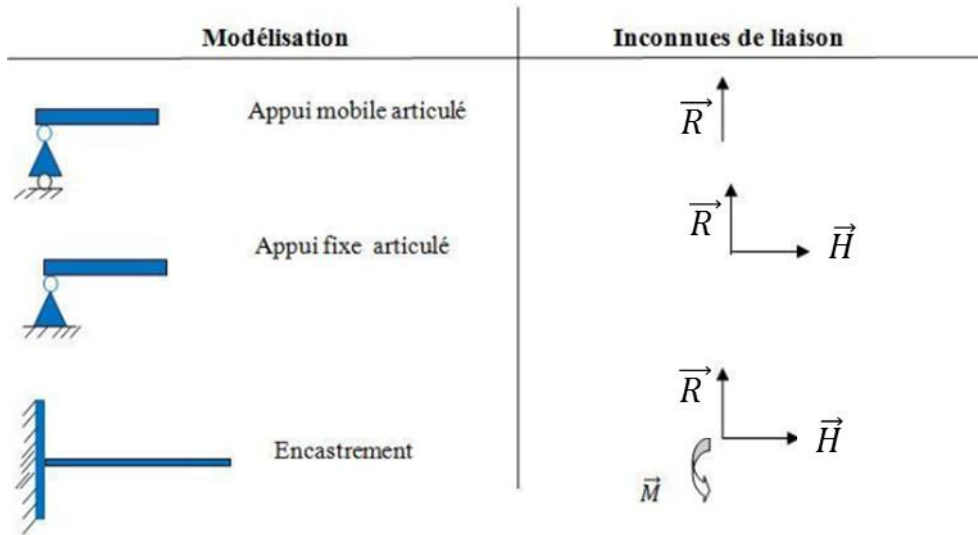


Figure 1.12. Exemples d'appui triple ou encastrement

Les appuis d'un ouvrage sont destinés à bloquer les mouvements que peuvent lui causer les charges qui agissent sur lui. Pour bloquer le mouvement dans une direction il convient d'appliquer une force ou un couple selon s'il s'agit d'un déplacement ou d'une rotation. Ces forces ou couples sont appelés réaction d'appui ou inconnues de liaison.

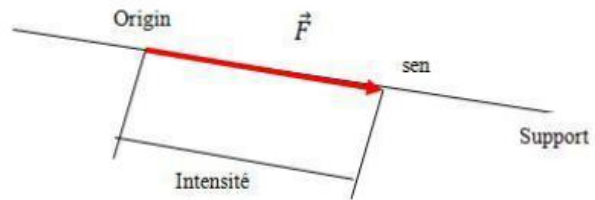


1.8. Différents types d'actions (forces extérieures)

1.8.1. Notions de force :

La force est une grandeur dirigée, elle est représentée par un vecteur défini par :

- ◆ Le point d'application.
- ◆ Le support.
- ◆ Le sens.
- ◆ L'intensité.

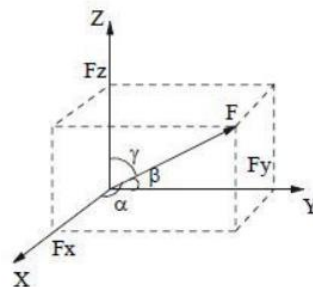


Dans un repère cartésien la force (F) forme respectivement avec les axes X, Y, Z les angles α , β et γ . Les trois projections de cette force selon les axes X, Y, Z sont :

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \cos \beta$$

$$F_z = F \cdot \cos \gamma$$



1.8.1.1.Types de forces

a. Force concentrée

Une charge concentrée est une charge qui s'étend sur une distance relativement très courte de la poutre, de sorte que l'on puisse considérer que cette charge agit en un point, sans erreur appréciable. Une colonne de béton supportée par une poutre reposant sur deux poteaux d'acier, est un exemple d'une charge concentrée.

Unité : N (Newton), Multiples : daN , kN , MN .

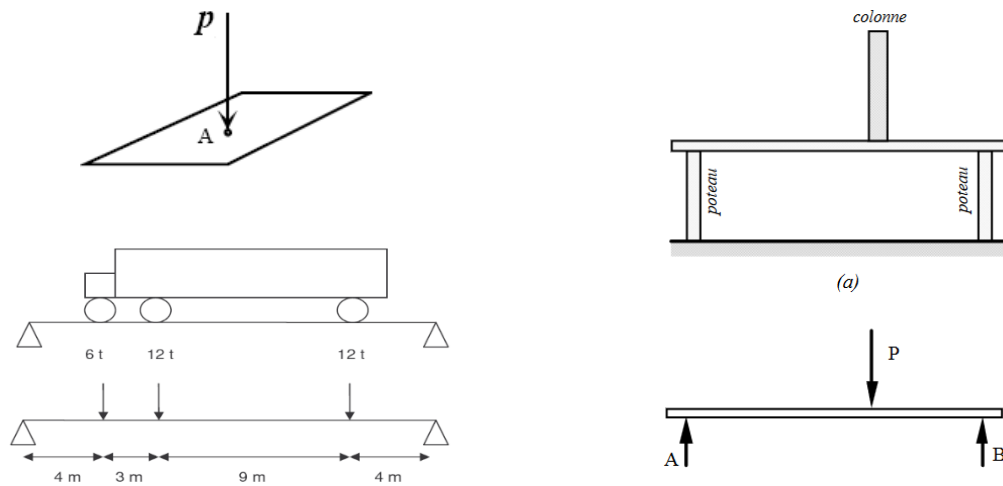


Figure 1.13. Forces concentrées.

b. Force linéique

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge qui agit sur une distance considérable de la poutre, et ce de façon uniforme ou variable, c'est-à-dire la charge sollicitant par unité de longueur " w ou q " [N/m].

Unité : N/m , Multiples : daN/m , kN/m .

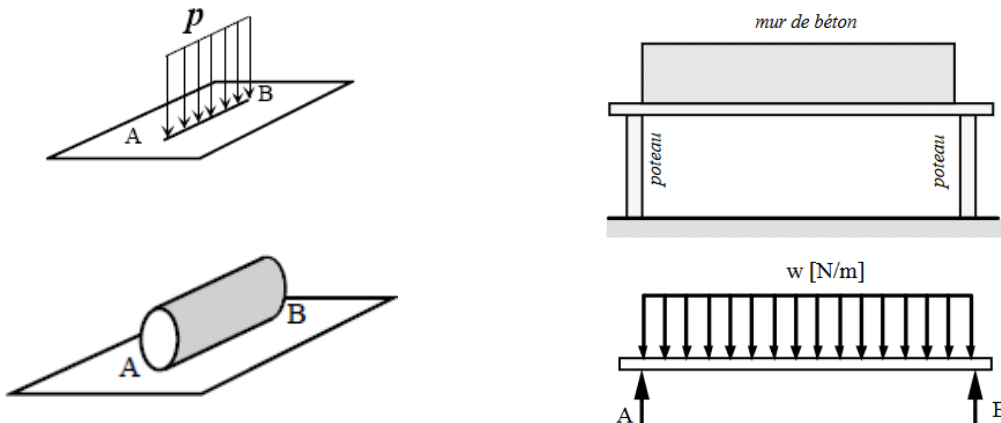


Figure 1.14. Forces linéiques

c. Force surfacique

C'est une charge dont sa répartition est surfacique (N/m² ou kN/m²).

Exemples : neige, revêtement d'un plancher.

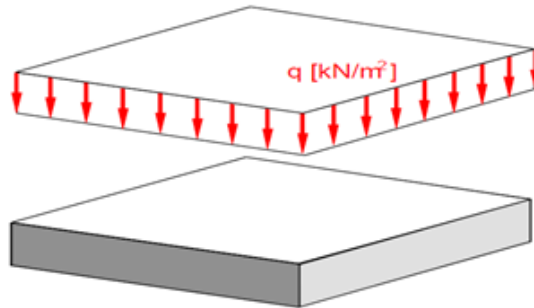


Figure 1.15. Force surfacique

1.8.1.2. Résultante des forces :

a. Forces parallèles :

- Non opposées

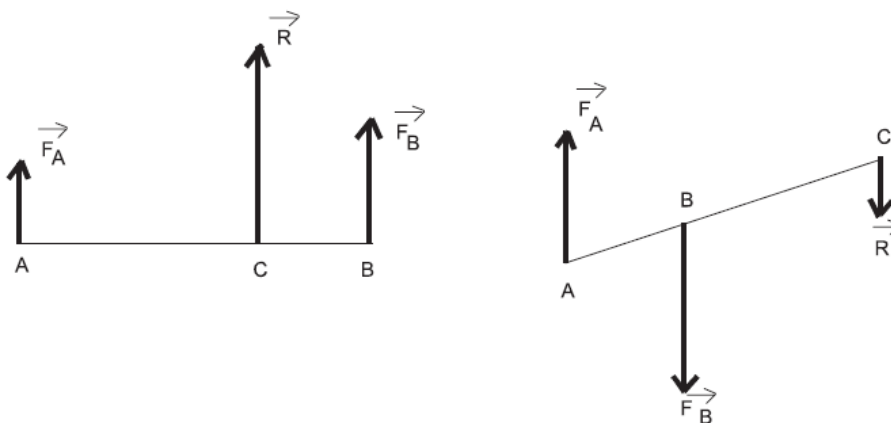
La résultante de deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B parallèles et de même sens est une force parallèle à ces deux forces, de même sens qu'elles, et d'intensité égale à la somme de leurs intensités

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

- Opposées

Deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B parallèles et de sens contraires (figure 1.3) admettent une résultante R parallèle à ces forces, du sens de la plus grande, et d'intensité égale à la différence de leurs intensités :

$$\vec{R} = \vec{F}_B + \vec{F}_A$$



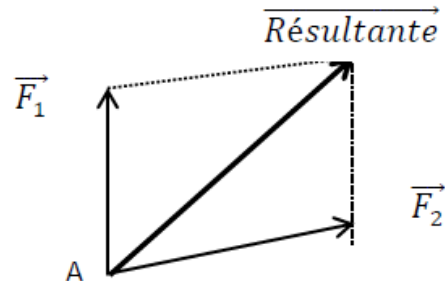
b. Forces non parallèles :

Considérant le point « A » soumis à l'action des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , ces forces peuvent être remplacées par \vec{F} ou \vec{R} , dont s'appelle la résultante et \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont les composant.

$$F_x = R_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = R_y = F_{1y} + F_{2y}$$

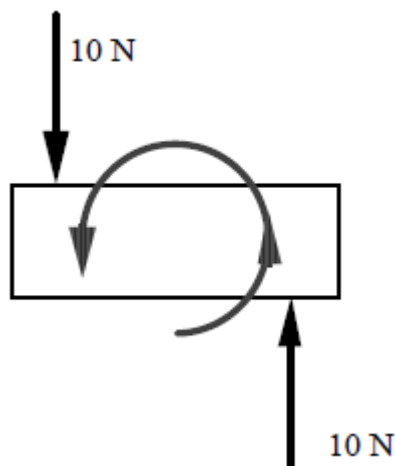
$$F = R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



1.8.2. Notion du moment (couple) :

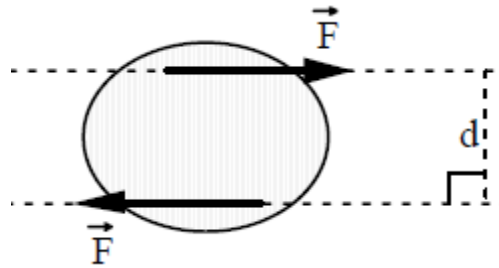
Un corps n'est pas seulement en équilibre que lorsque la sommation des forces est nulle. Par exemple, dans la figure ci-contre, la force résultante est nulle. Par contre, ce corps n'est pas en équilibre car il peut tourner. Ceci nous amène à définir un autre concept que la force pour étudier l'équilibre statique des corps. Ce concept fait appel à la notion de moment de force.

En effet, dans l'étude de l'équilibre des corps les notions de grandeur, direction et sens des forces sont importantes mais une quatrième l'est tout aussi ; celle du point d'application des forces.



Dans la pratique, on retrouve plusieurs exemples de couples ; lorsqu'on ouvre un robinet ou lorsqu'on visse un écrou, on exerce un couple.

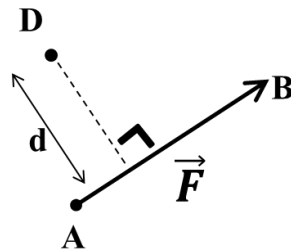
On définit le couple comme étant : Un système de deux forces parallèles, d'égales grandeurs, de sens opposés et de lignes d'action différentes.



♣ **Moment d'une force par rapport à un point :**

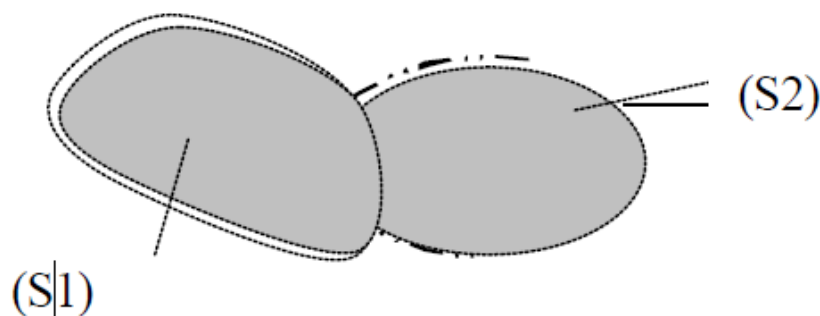
Considérant une force représentée par le vecteur \vec{F} et un point D quelconque. On appelle moment de la force par rapport au point D le produit $F \times d$ où d s'appelle **bras de levier**.

Lorsque la force « F » tourne dans le sens d'Eguelles de montre le moment est affecté d'un signe (+), dans le cas contraire le moment est affecté d'un signe (-).



1.9. Principe général d'équilibre – Équations d'équilibres

L'action des corps voisins sur un corps considéré est remplacée par des forces extérieures ou sollicitations qui sont des forces actives et des forces réactives (réactions d'appuis). L'action totale de toutes les forces (actives et réactives) doit assurer l'équilibre du corps.



Théorème :

Pour qu'un solide matériel indéformable sollicité par plusieurs forces, soit en équilibre :

- ♣ La résultante générale de ces forces soit nulle
- ♣ Le moment résultant de ces forces par rapport à un point quelconque soit nul

L'équilibre d'un corps solide indéformable en trois (03) dimension se traduit par l'écriture de six équations d'équilibres.

Note :

En 3D, il existe six efforts internes : N: effort normal, T_y et T_z : efforts tranchants, M_{fy} et M_{fz} : moments de flexion, M_{tx} : moment de torsion. Dans ce cours on se limite à l'étude des problèmes en 2D.

3D	$\sum F_{/x} = 0$ $\sum F_{/y} = 0$ $\sum F_{/z} = 0$	$\sum M_{/x} = 0$ $\sum M_{/y} = 0$ $\sum M_{/z} = 0$
2D	$\sum F_{/x} = 0$ $\sum F_{/z} = 0$ $\sum M_{/y} = 0$	

1.10. Principes de la coupe – Éléments de réduction (forces intérieures)

En RDM, on considère les corps qui sont dans un état d'équilibre. Si nous coupons par l'imagination le corps donné, on peut étudier l'équilibre d'un tronçon ou d'un autre. Cette méthode s'appelle **méthode des sections ou des coupes**. Cette méthode consiste à pratiquer des coupures virtuelles et calculer les efforts internes au niveau des sections de ces coupures. Elle est basée sur le fait qu'étant donné que la poutre est en équilibre, donc chaque point ou chaque partie isolée vérifient les conditions d'équilibre.

Le principe de la méthode des sections est le suivant : Un corps en équilibre est coupé suivant la section 1-1 (Fig.1.15). L'une des parties est ensuite rejetée, d'habitude celle où les forces appliquées sont les plus nombreuses. Il apparait alors, les efforts intérieurs qui équilibrent les forces extérieures appliquées à la partie découpée (Fig 1.16). Dans le cas où les forces extérieures reposent dans un plan, on applique en général à la section trois efforts intérieurs : l'effort N dirigée suivant l'axe de la barre qui s'appelle effort normal ; l'effort T qui agit dans le plan de la section droite et perpendiculairement à l'axe de la barre ; appelé effort tranchant

et le moment M dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section. Ce moment est produit par la flexion de la barre et s'appelle moment fléchissant.

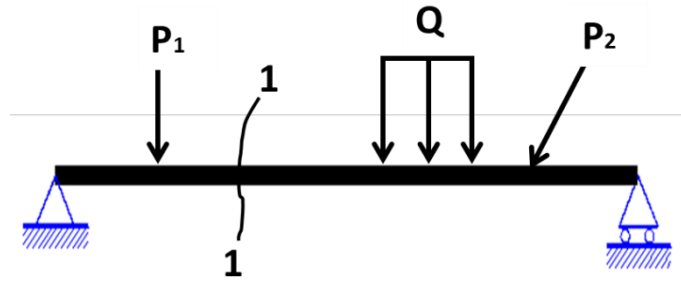


Figure 1.16. Poutre sollicitée en flexion simple

Etudions l'équilibre du tronçon 1-1 :

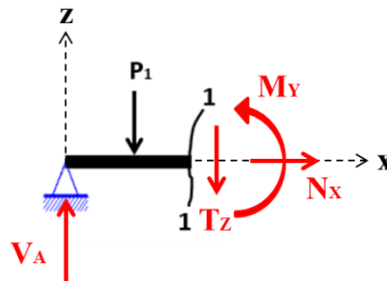


Figure 1.17. Schématisation du tronçon 1-1

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_{/z} = 0 \Rightarrow T_z - V_A + P_1 = 0 \Rightarrow T_z = V_A - P_1$$

$$\sum M_{/y} = 0 \Rightarrow M_{fy} - V_A \cdot x + P_1 \cdot x = 0 \Rightarrow M_{fy} = (P_1 - V_A) \cdot x$$

1.11. Différents systèmes mécaniques :

En résistance des matériaux, on distingue trois types de systèmes mécaniques. Ils sont différenciés selon le **degré d'hyperstatisme (d'hyperstaticité)**. Le degré d'hyperstatisme d'un système en équilibre est égal à la différence entre le nombre des inconnues de liaison (q) et le nombre des équations (p).

$$h = q - p$$

Le degré d'hyperstatisme d'un système est le nombre de liaisons à supprimer pour obtenir une structure isostatique

1.11.1. Système astatique (hypostatique) ($h < 0$) :

Un système *hypostatique* est un système qui possède des mobilités, donc le système est horizontalement instable. Dans tel système le nombre des inconnus est inférieur (2) au nombre d'équations d'équilibre (3).

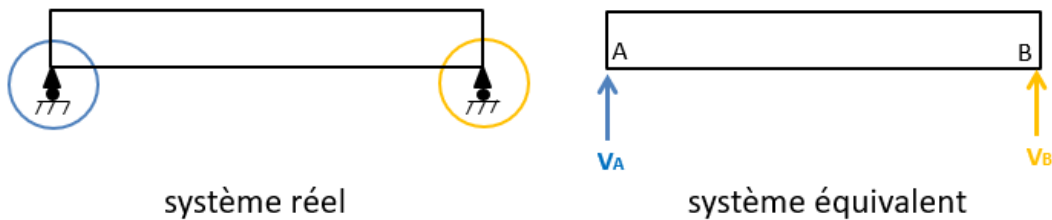


Figure 1.18. Schématisation du système astatique

1.11.2. Système isostatique ($h = 0$) :

C'est un système stable qui devient instable après le relâchement d'un seul degré de liberté. Dans tel système le nombre des inconnus (3) est égal au nombre d'équations d'équilibre (3).

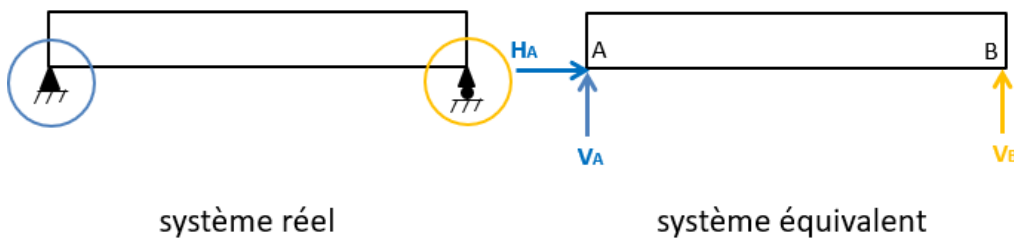


Figure 1.19. Schématisation du système isostatique

1.11.3. Système hyperstatique ($h > 0$) :

Un système isostatique dont on bloque un ou plusieurs degrés de liberté devient hyperstatique. Ce dernier est caractérisé par sa stabilité élevée. Dans tel système le nombre des inconnus (4) est supérieur au nombre d'équations d'équilibre (3).

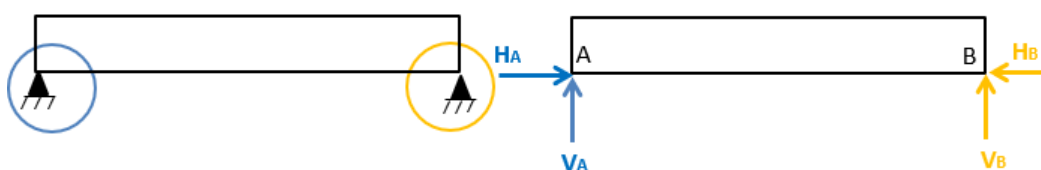


Figure 1.20. Schématisation du système hyperstatique

Exemples :

Déterminer le degré d'hyperstatisme des systèmes présentés ci-dessous.



a



b



c



d



e



f

Réponse :

a → $h=0$

b → $h=0$

c → $h=2$

d → $h=3$

e → $h=-2$

f → $h=-1$

Chapitre 2

Caractéristiques géométriques des sections droites

Chapitre 2 : caractéristiques géométriques des sections droites

2.1. Introduction

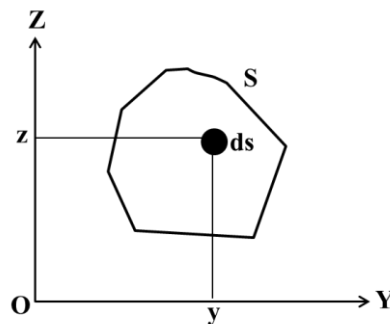
Pour résoudre un problème qui se pose en résistance des matériaux, on est souvent appelé à déterminer la forme ainsi que les caractéristiques géométriques des sections (surface, Coordonnées de centre de gravité, moment d'inertie, module d'inertie, moments statiques, rayon de giration).

2.2. Détermination des caractéristiques géométriques d'une section :

2.2.1. Surface :

La surface d'une section quelconque est donnée par l'expression suivante :

$$S = \iint_S ds \quad [m^2]$$



Pour une section composée, on utilise la formule suivante :

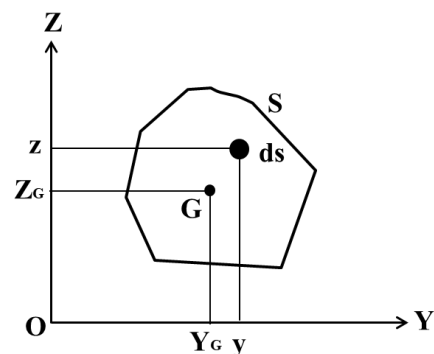
$$S = \sum S_i$$

2.2.2. Coordonnées de centre de gravité :

Le centre d'inertie d'une surface S est défini par les équations :

$$y_G = \frac{1}{S} \iint_S y ds \quad [m]$$

$$z_G = \frac{1}{S} \iint_S z ds \quad [m]$$



Pour les sections qui peuvent être décomposées en des formes simples (rectangle, triangle, cercle), on transforme les intégrales en sommes :

$$Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \times S_i}{\sum S_i}, \quad Z_G = \frac{\sum Z_{Gi} \times S_i}{\sum S_i}$$

2.2.3. *Moment statique*

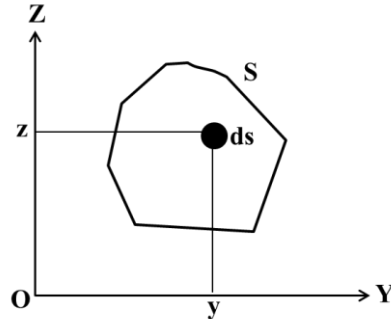
On appelle moment statique S_y ou S_z d'une section par rapport à un axe y ou z quelconque, la caractéristique géométrique définie par l'intégrale suivante :

$$S_y = \iint_S z ds \quad [m^3]$$

$$S_z = \iint_S y ds \quad [m^3]$$

Pour une section rectangulaire $a*b$

$$S_y = \frac{bh^2}{2}, \quad S_z = \frac{b^2h}{2}$$



Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

$$S_y = S \cdot Z_G$$

$$S_z = S \cdot Y_G$$

Pour les surfaces complexes discrétisés en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes OY et OZ seront respectivement égaux à :

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_i \cdot Z_i$$

$$S_z = \sum_{i=1}^n S_i \cdot Y_i$$

Note 1 :

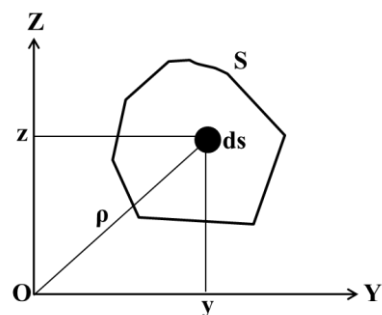
Le moment statique par rapport un axe qui passe par le centre de gravité $S_{ZG} = S_{YG} = 0$.

2.2.4. *Moment d'inertie*

On appelle moment d'inertie axial, la caractéristique géométrique définie par l'intégrale par rapport l'axe des y et l'axe des z .

$$I_y = \iint_S z^2 ds \quad [m^4]$$

$$I_z = \iint_S y^2 ds \quad [m^4]$$



$$I_{YZ} = \iint_S yz \, ds \quad (\text{moment centrifuge ou produit d'inertie})$$

On appelle moment d'inertie polaire I_ρ , la caractéristique géométrique définie par l'intégrale ci-dessous.

$$I_\rho = \iint_S \rho^2 \, ds \quad \text{ou } \rho = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$I_\rho = I_Y + I_Z$$

Note 2 :

Les moments quadratiques I_y et I_z sont toujours positifs, tandis que le moment produit I_{xy} peut être positif, négatif ou nul.

Note 3 :

Le moment d'inertie (le produit d'inertie) d'une surface composée est la somme des moments d'inertie (produits d'inertie) des surfaces composant l'ensemble.

♦ **Translation parallèle des axes :**

Soit une section S , ses moments d'inertie dans le système yoZ : I_y , I_z , I_{yz} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section S dans le système $y'o'z'$ en procédant aux translations des axes ox et oy conformément à la figure.

$$y' = y + a \quad \text{et} \quad z' = z + b$$

$$\begin{aligned} I_{Y'} &= \iint_S z'^2 \, ds \\ &= \iint_S (z + b)^2 \, ds \\ &= \iint_S z^2 \, ds + 2b \iint_S z \, ds + b^2 \iint_S ds = I_Y + 2bS_y + b^2S \end{aligned}$$

On suit le même raisonnement pour $I_{Z'}$ et $I_{Y'Z'}$

$$I_{Z'} = I_Z + 2aS_z + b^2S$$

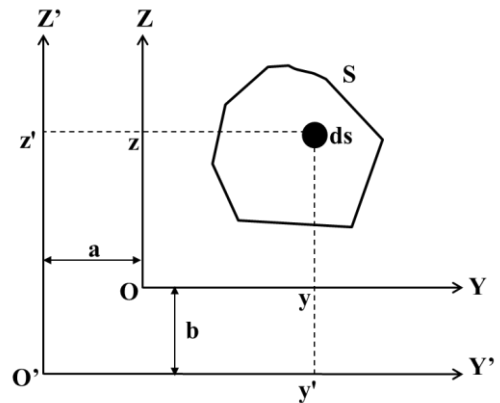
$$I_{Y'Z'} = I_{YZ} + a.S_y + b.S_z + a.b.S$$

Si le point O coïncide avec le centre de gravité G, les moments statiques S_y et S_z deviennent nuls et on a :

$$I_{Y'} = I_Y + b^2S$$

$$I_{Z'} = I_Z + a^2S$$

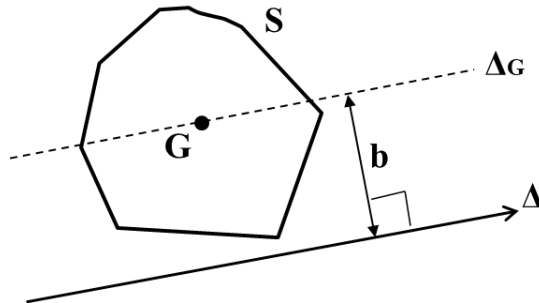
$$I_{Y'Z'} = I_{YZ} + a.b.S$$



Théorème de Huigenz :

Le moment d'inertie (I_Δ) d'une section par rapport à un axe quelconque Δ est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à Δ augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

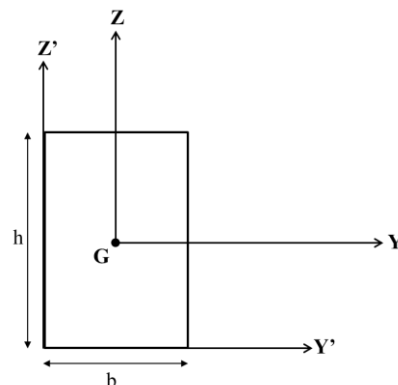
$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + (b)^2S$$



Exemple : pour la figure ci-contre, calculer $I_{Y'}$ et $I_{Z'}$

$$I_{Y'} = I_Y + \left(\frac{h}{2}\right)^2S = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{Z'} = I_Z + \left(\frac{b}{2}\right)^2S = \frac{b^3h}{12} + \frac{b^2}{4}bh = \frac{b^3h}{3}$$

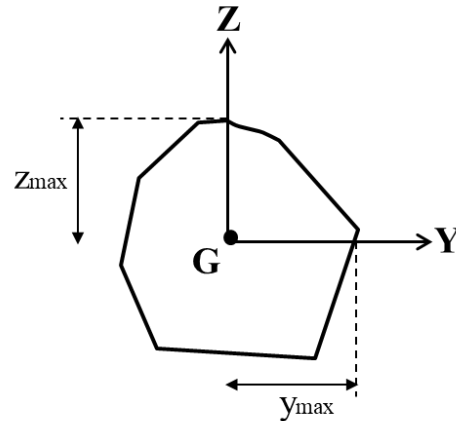


2.2.5. *Module d'inertie ou module de résistance :*

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée.

$$W_y = \frac{I_Y}{z_{max}}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$



2.2.6. *Rayon de giration*

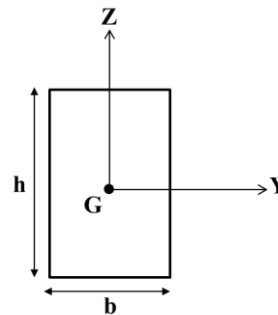
On appelle rayon de giration d'une section par rapport à un axe quelconque, la quantité donnée par l'équation suivante :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_Y}{S}} \quad \text{et} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}}$$

Exemple :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_Y}{S}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}} = \sqrt{\frac{\frac{b^3h}{12}}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$



Chapitre 3

Traction et compression

Chapitre 3 : traction et compression

3.1. Introduction :

Chaque pièce soumise à des forces extérieures développe dans son intérieur des sollicitations (efforts internes). Le type des sollicitations dépend de l'orientation de ces forces par rapport à la fibre moyenne de la pièce. On distingue les sollicitations simples et composées.

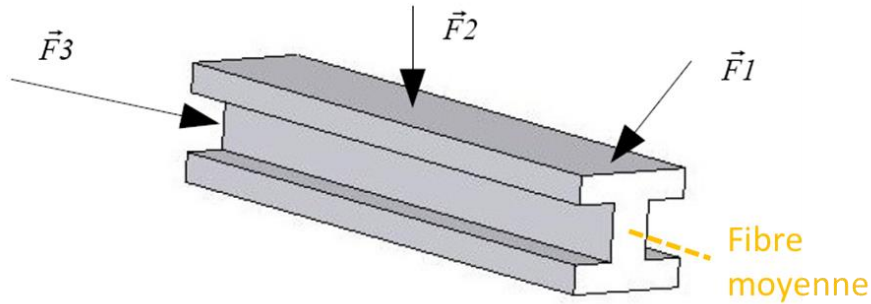


Figure 3.1. Représentation d'une pièce.

On dit qu'une pièce est soumise à un **effort de traction/compression**, lorsque, au droit d'une section droite S de la pièce, l'ensemble des forces extérieures appliquées à gauche de la section, se réduit au seul effort normal.

3.2. Traction :

- Élément barre soumis à deux forces axiales opposées ;
- Effort normal $N > 0$;
- Elle entraîne un allongement $\Delta L = L_f - L_i > 0$;

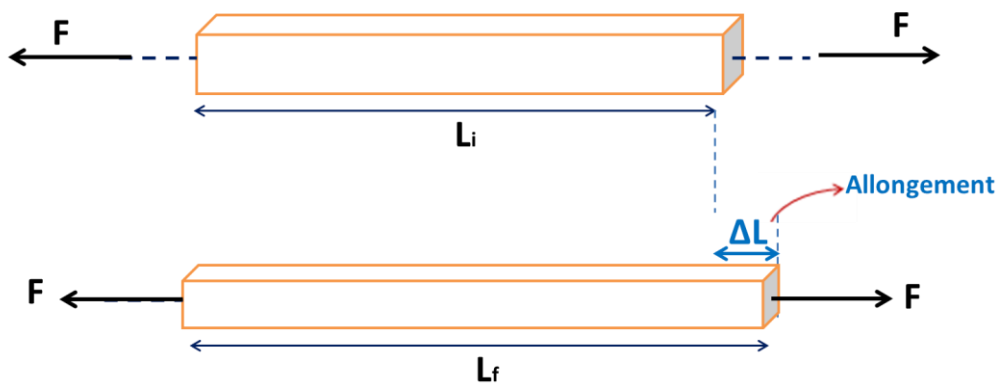


Figure 3.2. Etude d'une pièce sollicitée en traction.

Une section droite S d'une poutre est sollicitée en traction par rapport au centre de gravité G de la section, dus aux forces externes, se réduit à un effort normal N .

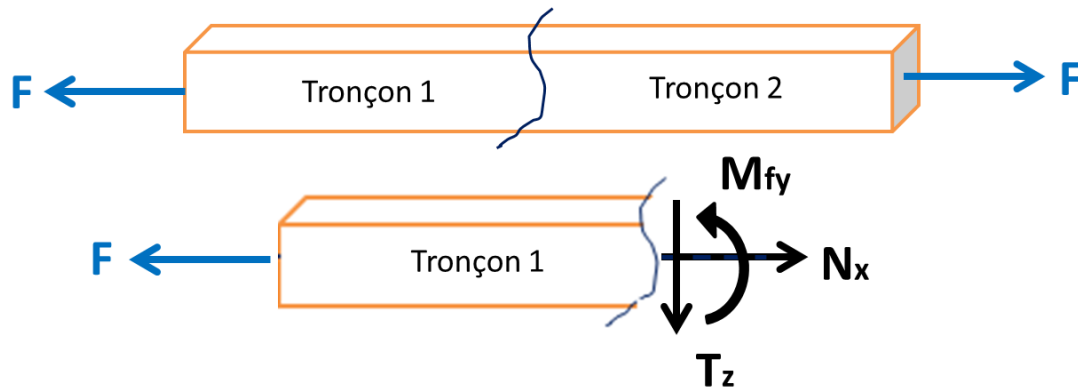


Figure 3.3. Schématisation d'une coupe.

Écrivant les équations d'équilibre :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow N_x - F = 0 \Rightarrow N_x = F$$

$$\sum F_{/z} = 0 \Rightarrow T_z = 0$$

$$\sum M_{/y} = 0 \Rightarrow M_{fy} = 0$$

3.2.1. Essai de traction :

L'essai de traction est l'essai mécanique le plus classique. Il consiste à exercer sur une éprouvette normalisée deux efforts directement opposés croissants qui vont la déformer progressivement puis la rompre en vue de déterminer quelques caractéristiques du matériau de l'éprouvette.

Pour effectuer un essai de traction simple sur un métal, on utilise une éprouvette cylindrique caractérisée par :

- des extrémités surdimensionnées
- des congés de raccordement (pour éviter les concentrations de contrainte)
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette.

L'essai de traction consiste à enregistrer l'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale L_0 en fonction de la force de traction F , ou du rapport F/S_0 , où S_0 représente l'aire initiale de la section de l'éprouvette.

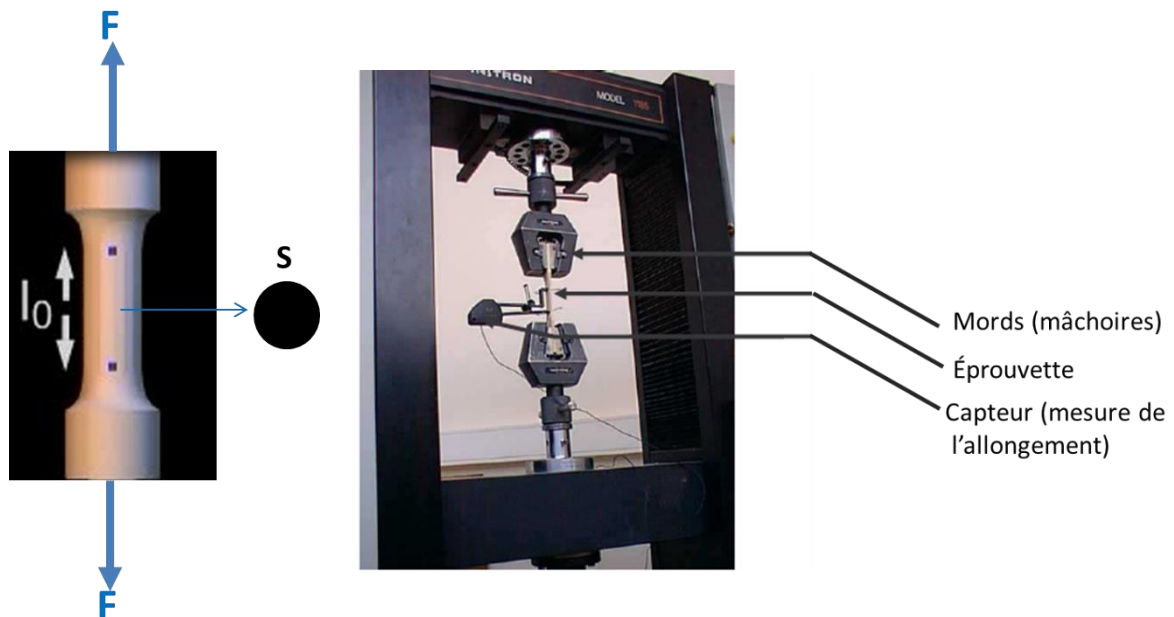


Figure 3.4. Essai de traction.

3.2.1.1. Diagramme contrainte-déformation :

La figure ci-dessous représente un tel enregistrement pour un acier inoxydable. L'analyse de cette courbe permet de constater que la déformation se passe en deux phases.

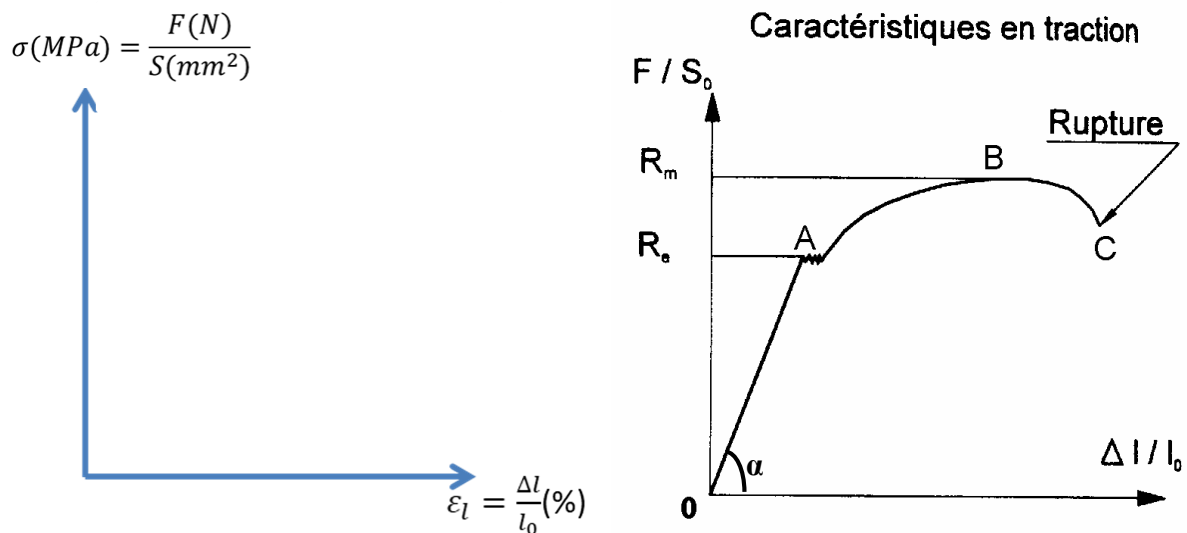


Figure 3.5. Courbe contrainte – déformation d'une pièce en acier inoxydable.

- ◆ Phase OA : phase élastique où la déformation est réversible et l’allongement est proportionnel à la charge. On dit que l’éprouvette est dans le domaine élastique.

Dans cette zone, il y a proportionnalité entre la charge et la déformation. La **loi de Hooke** traduit cette linéarité :

$$\sigma = E \varepsilon$$

σ : contrainte normale en N/mm^2

E est le module d’élasticité longitudinale ou module d’Young exprimé en [MPa].

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow F = \frac{ES}{L_0} \Delta L = K \Delta L$$

K : définit la rigidité en traction de la poutre exprimée en [N/mm].

ES : rigidité axiale de la barre.

- ◆ Phase AB : phase plastique ou la déformation est permanente. L’allongement n’est plus proportionnel à la charge. On dit que l’éprouvette est dans le domaine plastique.
- ◆ Phase BC : zone où se produit la striction.

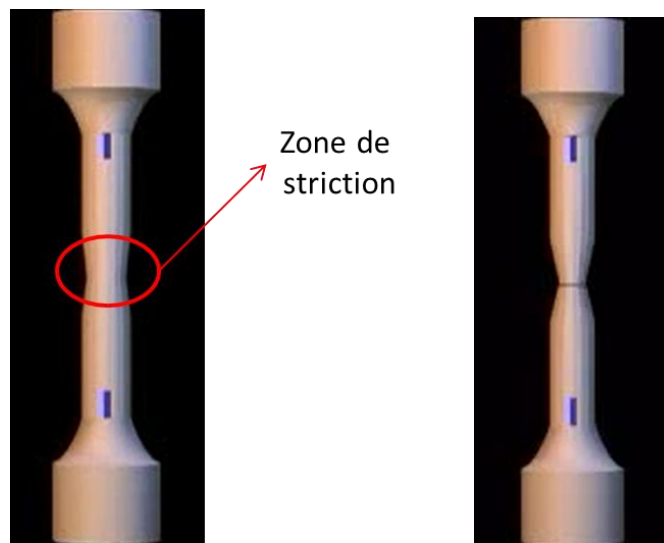


Figure 3.6. Zone de striction.

3.2.1.2. Caractéristiques mécaniques d’un matériau :

σ_e : contrainte à la limite élastique ou limite élastique

$$\sigma_e = F_e / S_0$$

σ_r : contrainte à la rupture ou résistance à la rupture

$$\sigma_r = F_r / S_0$$

Module d’Young E

$$\sigma = E \varepsilon \text{ avec } E = \tan \alpha$$

Allongement à la rupture (point D)

$$\varepsilon_r$$

Le tableau suivant donne les valeurs du Module d'Young pour certains matériaux largement utilisés.

Tableau 3.1. Module d'Young pour certains matériaux

Matériau	Module d'élasticité (GPa)
Béton	20 à 50
Acier	210
Aluminium	62
Cuivre	128
Diamant	1200
Caoutchouc	2,2 à 2,7

3.2.2. Déformation due à la traction :

La déformation de l'élément se traduit par un allongement relatif ε (sans unité), où :

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L_0}$$

ΔL : Allongement (**déformation longitudinale**) = $L_f - L_0$

L_0 : Longueur initiale (mm, cm ou m)

La déformation longitudinale s'accompagne d'une **déformation de contraction transversale**

ε_t tel que :

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta h}{h_0}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

ν : *coefficient de Poisson*

Pour l'acier : $\nu = 0,27 \div 0,30$

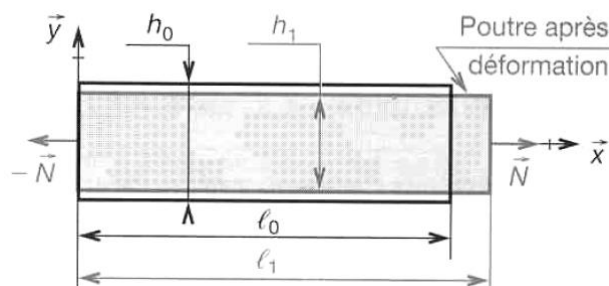


Figure 3.7. Déformation d'une barre soumise à un effort de compression.

- La traction développe à l'intérieur de l'élément des contraintes normales de traction σ (MPa), qui se calcule par l'expression suivante :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$



3.2.3. Condition de résistance en traction

Pour vérifier si la pièce étudiée qui soumise à des forces de traction ou de compression est compatible avec le matériau prévu (qui résiste dans le domaine élastique), il faut comparer deux valeurs :

$$\sigma \leq \sigma_e$$

Pour des raisons de sécurité la contrainte σ doit rester inférieure à une valeur limite appelé contrainte pratique à l'extension, en adoptant un coefficient n appelé coefficient de sécurité tel que :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{n} \text{ avec } 1,5 \leq n \leq 2,5$$

On vérifie finalement que

$$\sigma \leq \bar{\sigma}$$

3.2.4. Condition de rigidité :

Pour des raisons fonctionnelles, il est parfois important de limiter l'allongement. Il doit rester inférieur à une valeur ΔL_{lim} .

D'où la condition de rigidité d'une pièce en traction :

$$\frac{FL_0}{ES} \leq \Delta L_{lim}$$

3.3. Compression :

- Elément barre soumis à deux forces axiales opposées ;
- Effort interne $N < 0$;
- Elle entraîne un **raccourcissement** $\Delta L = L_f - L_i < 0$

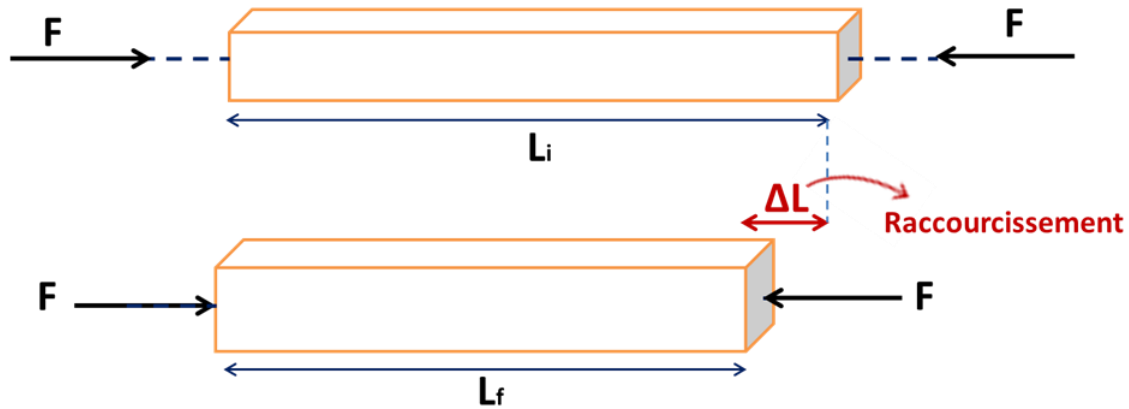


Figure 3.8. Etude d'une pièce sollicitée en compression.

Une section droite S d'une poutre est sollicitée en compression par rapport au centre de gravité G de la section, dus aux forces externes, se réduisent à un effort normal N .

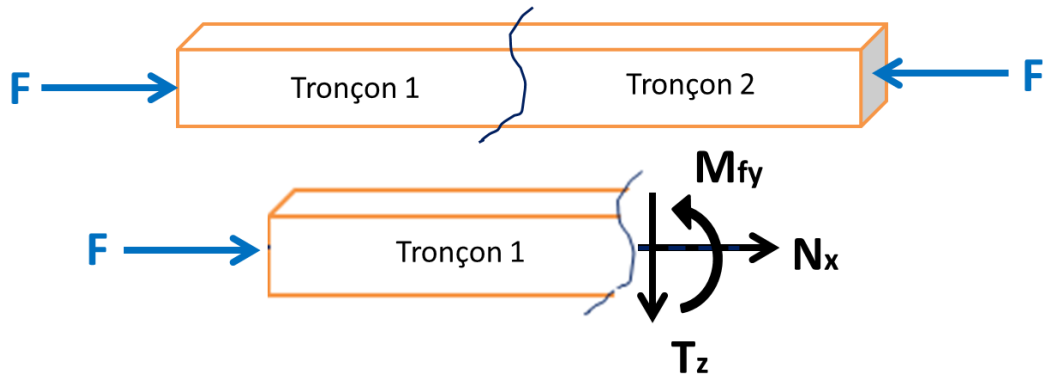


Figure 3.9. Schématisation d'une coupe.

Écrivant des équations d'équilibre :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow N_x + F = 0 \Rightarrow N_x = -F$$

$$\sum F_{/z} = 0 \Rightarrow T_z = 0$$

$$\sum M_{/y} = 0 \Rightarrow M_{fy} = 0$$

3.3.1. *Contrainte de compression :*

La compression développe à l'intérieur de l'élément des contraintes normales de compression σ (MPa) :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Où

S : Surface sollicitée (mm²)

N : Effort normal (N)



3.3.2. Déformation due à la compression :

La déformation de l'élément se traduit par un raccourcissement relatif ε (sans unité), où :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

ε : raccourcissement (mm, cm ou m)

L_0 : longueur initiale (mm, cm ou m)

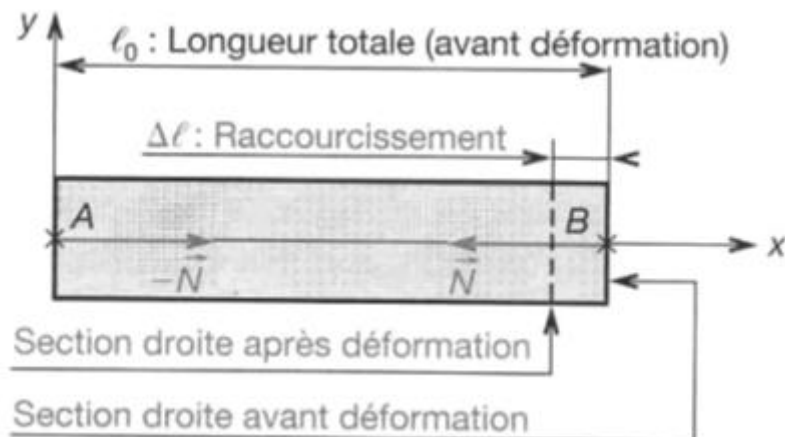


Figure 3.10. Déformation d'une barre soumise à un effort de compression.

Il en résulte :

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{N}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \frac{NL_0}{ES}$$

3.3.3. Condition de résistance en compression

Même principe comme la traction.

$$\sigma \leq \sigma_e$$

Pour des raisons de sécurité la contrainte s doit rester inférieure à une valeur limite appelé contrainte pratique à l'extension, en adoptant un coefficient n appelé coefficient de sécurité tel que :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{n} \text{ avec } 1,5 \leq n \leq 2,5$$

On vérifie finalement que

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \bar{\sigma}$$

La condition précédente nous permet de déterminer l'effort normal admissible N_{ad} :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow N_{ad} \leq S \cdot \bar{\sigma}$$

3.3.4. Dimensionnement de la section droite :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow S \geq \frac{N}{\bar{\sigma}}$$

Chapitre 4

Cisaillement simple

Chapitre 4 : cisaillement

4.1. Définitions

Un corps est sollicité au cisaillement lorsqu'il est soumis à deux forces opposées qui tendent à le séparer en deux tronçons glissant l'un par rapport à l'autre suivant le plan d'une section.

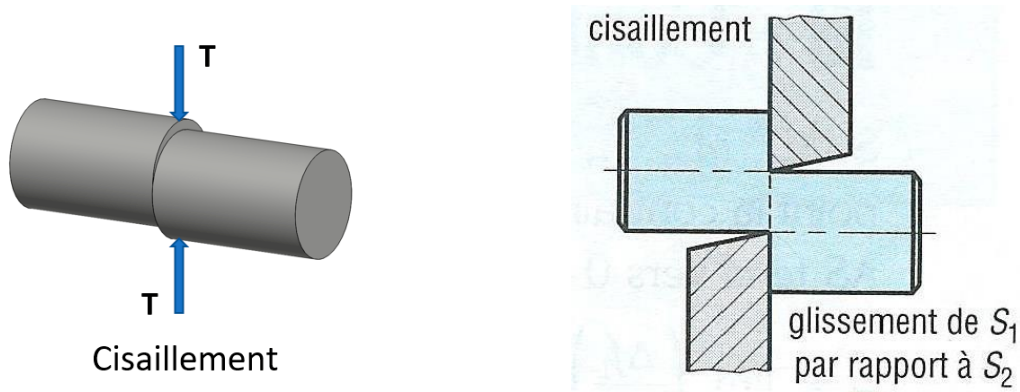


Figure 4.1. Pièces sollicitées en cisaillement

On dit qu'une pièce est soumise à un effort de cisaillement, lorsqu'au droit d'une section droite S de la pièce, l'ensemble des forces extérieures appliquées à gauche de la section, se réduit au **seul effort tranchant T** ($N_x = 0$, $T_z \neq 0$, $M_{fy} = 0$), dans ce cas on dit que la pièce est sollicitée en **cisaillement simple ou cisaillement pur**.

4.2. Contrainte de cisaillement

Considérons une tôle en équilibre sur le tranchant de la lame fixe d'une cisaille (figure 4.2). Le cisaillement développe à l'intérieur de l'élément des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ (MPa). Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement ΔT contenu dans le plan (S).

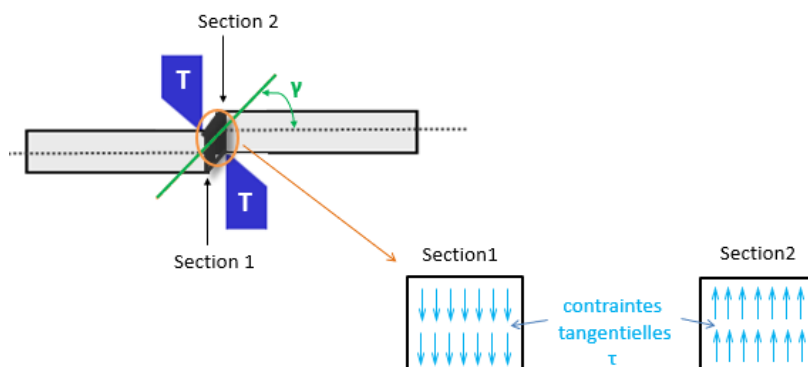


Figure 4.2. Déformation d'une pièce sollicitée en cisaillement simple

La force de cisaillement divisée par la surface sur laquelle elle agit est appelée contrainte tangentielle de cisaillement.

$$\tau = \frac{T}{S}$$

τ : contrainte tangentielle en MPa ou N/mm²

T : effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisailée en mm²

4.3. Déformation élastique en cisaillement

Le diagramme de l'essai de cisaillement présente presque la même allure que celui de l'essai de traction à l'exception que ce dernier présente en plus un palier de ductilité. Pour l'essai de cisaillement, l'abscisse représente l'angle de glissement γ (en radians) de la section S1 par rapport à la section S2 et l'ordonnée traduit les valeurs de la contrainte de cisaillement.

Comme pour l'essai de traction, l'expérience montre que, dans le domaine élastique, il y a une proportionnalité entre la contrainte et la déformation. La loi de Hooke en cisaillement s'écrira :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

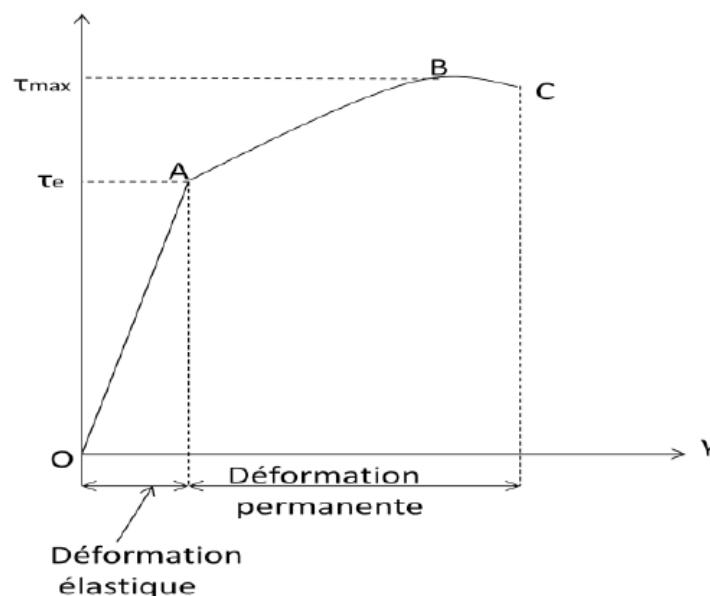


Figure 4.3. Courbe de comportement : cas du cisaillement simple

G représente le module d'élasticité transversale (ou module de cisaillement ou de Coulomb), exprimé en MPa.

Comme E, G est une caractéristique de matériau, déterminée expérimentalement. Il existe une relation entre G, E et ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

On donne quelques valeurs de G pour certains matériaux (tableau 4.1).

Tableau 4.1. Valeurs du module d'élasticité transversale

Matériau	Acier	Cuivre	Aluminium	Béton	Caoutchouc
G [MPa]	800	480	280	96,5	5,8

4.4. Condition de résistance au cisaillement

Pour qu'une pièce sollicitée au cisaillement résiste en toute sécurité, il faut que :

$$\tau \leq \tau_e$$

Pour des raisons de sécurité la contrainte τ doit rester inférieure à une valeur limite appelé contrainte pratique de cisaillement τ_{adm} , en adoptant un coefficient n appelé coefficient de sécurité tel que :

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_e}{n}$$

On vérifie finalement que

$$\tau \leq \tau_{adm}$$

Chapitre 5

Torsion pure

Chapitre 5 : Torsion pure

5.1. Définitions

Une poutre est sollicitée en torsion pure ou simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne. Une barre soumise principalement à la torsion porte le nom d'*arbre* (Fig. 5.1).

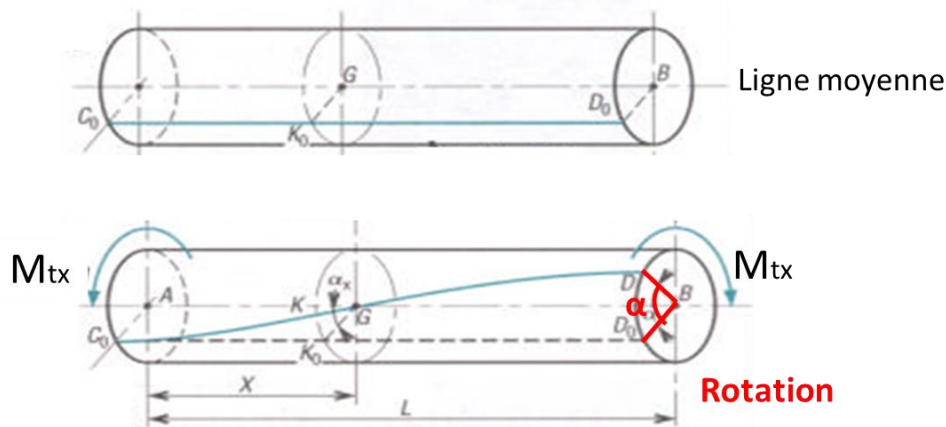


Figure 5.1. Barre (arbre) sollicitée en torsion

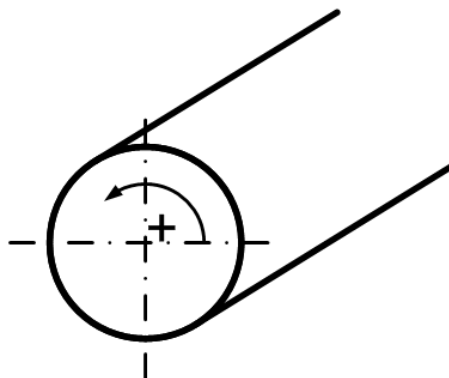
On dit qu'une pièce est soumise à une torsion, lorsqu'au droit d'une section droite S de la pièce, l'ensemble des forces extérieures appliquées à gauche de la section, se réduit au **seul moment M_{tx}** ($T_y = 0$; $N_x = 0$; $M_{tz} = 0$), dans ce cas on dit que la pièce est sollicitée en torsion pure.

5.2. Moment de torsion

5.2.1. Convention de signe

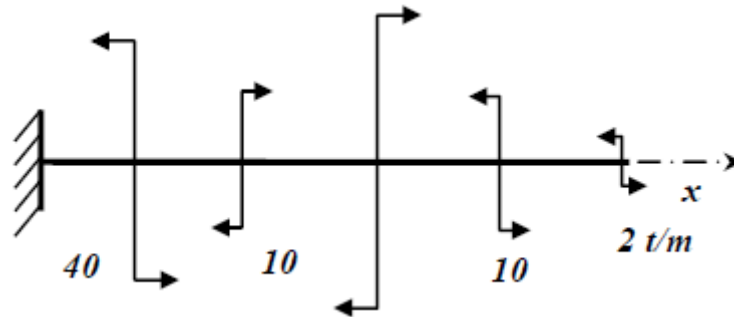
Par convention, le moment de torsion (effort interne) est :

- ✓ positif ($M_t > 0$) s'il agit dans le sens antihoraire pour un observateur qui regarde la section.
- ✓ négatif ($M_t < 0$) s'il agit dans le sens horaire pour un observateur qui regarde la section.



5.2.2. Diagramme du moment de torsion

Le moment de torsion agissant en un point d'une barre est égal à la somme algébrique des moments des couples extérieurs appliqués d'un côté ou de l'autre de la partie considérée (la partie considérée est laissée au choix).



5.3. Essai de torsion

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastree à son extrémité (S1) de centre de gravité G. On applique à l'extrémité droite sur la section (S2) de centre de gravité G2 une action mécanique modélisée en G2 par un couple M.

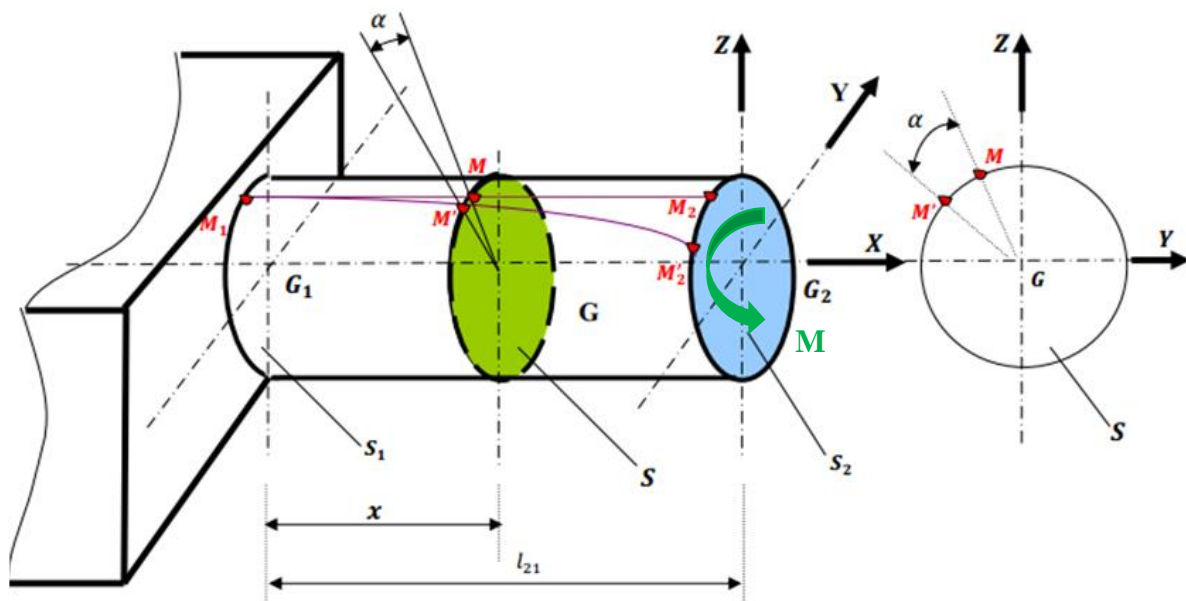


Figure 5.2. Schématisation d'une barre sollicitée en torsion

En appliquant les hypothèses suivantes :

- Les sections droites restent droites et normales à la ligne moyenne
- Les sections droites tournent autour de l'axe de la poutre par un angle θ
- Les fibres d'une section droite (C0D) subissent à un glissement qui est caractérisé par l'angle γ

Il résulte que le déplacement de la section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S1). Le suivi des mesures de M_t et α permet d'obtenir une courbe illustrée à la Figure 5.3 semblable à celle de l'essai de traction.

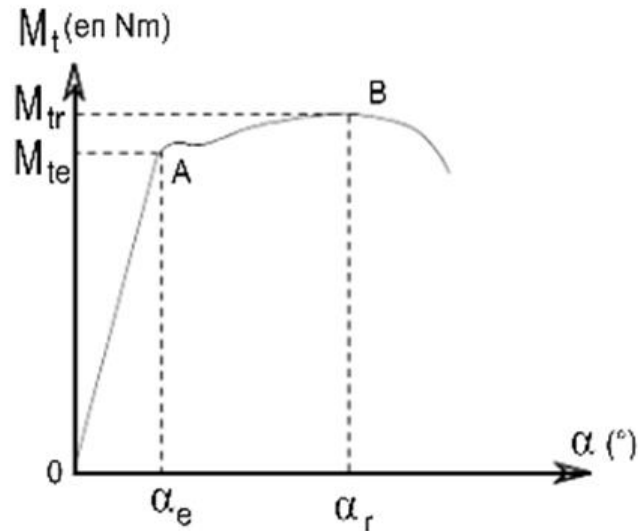
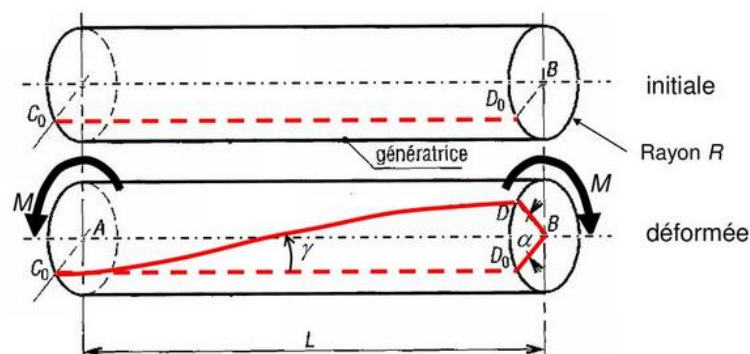


Figure 5.3. Évolution du moment de torsion en fonction de l'angle de rotation α

Cette courbe comprend une zone de déformations élastiques où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

5.4. Angle et contrainte de torsion

En torsion, et dans le cas des petites déformations, les contraintes normales σ sont négligeables. Les contraintes dans la coupure (S) se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ . A partir de la relation « $\tau = G \cdot \gamma$ » obtenue au chapitre « Cisaillement », on montre que la contrainte τ_m , en un point M quelconque de la coupure (S) est proportionnelle à la distance $\rho = GM$, entre le point et la ligne moyenne.



De l'autre côté, comme l'angle γ est petit, on peut écrire :

$$\gamma = \tan \gamma = \frac{DD_0}{C_0 D_0}, DD_0 = \alpha \cdot \rho, C_0 D_0 = L$$

Il en résulte que

$$\gamma = \frac{\alpha \cdot \rho}{L} \text{ avec } \theta = \frac{\alpha}{L} \Rightarrow \gamma = \theta \cdot \rho$$

Si on suppose que les sections droites tournent toutes entre elles de la même façon, alors l'angle de torsion entre deux sections droites quelconques est proportionnel à la distance entre celles-ci. Autrement dit :

$$\theta = \frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_x}{x}$$

La contrainte tangentielle s'écrit :

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Avec

τ : contrainte tangentielle en MPa

θ : angle unitaire de torsion en rad.m^{-1}

ρ : rayon GM en mm

G : module d'élasticité transversal en MPa

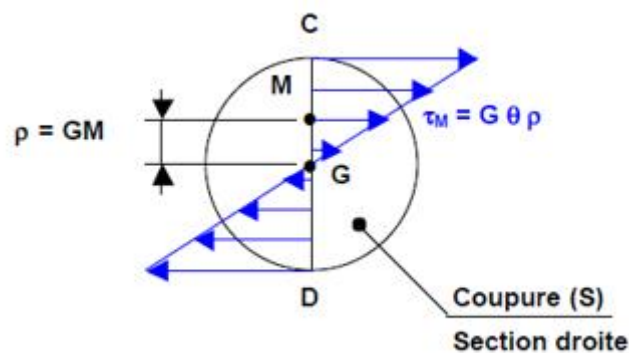


Figure 5.4. Distribution des contraintes de cisaillement dans une section soumise à la torsion

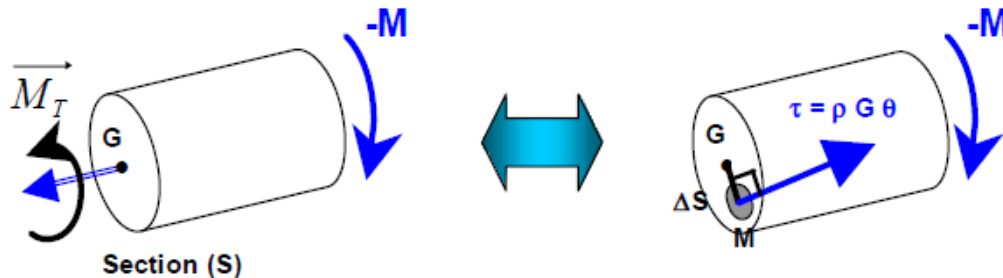
Remarque :

La contrainte de cisaillement maximale τ_{\max} est atteinte pour les points M périphériques de la surface du solide tels que $\rho = R$ (Rayon).

$$\tau_{\max} = G \cdot \theta \cdot R$$

5.5.Relation entre contrainte et moment de torsion :

En chaque point M de la coupure s'exerce, pour l'élément de surface ΔS autour de M, une force élémentaire $\vec{\Delta f} = \vec{\tau} \cdot \Delta S$ dont la direction est perpendiculaire à GM.



Le moment en G de cette force est $M_G(\vec{\Delta f}) = \Delta f \cdot GM = \Delta f \cdot \rho$

Le moment de torsion M_t est égal au moment résultant en G de toutes les forces élémentaires $\vec{\Delta f}$ de la section (S).

$$\begin{aligned} M_t &= \sum M_G(\vec{\Delta f}) = \sum \Delta f \cdot \rho = \sum \tau \cdot \Delta S \cdot \rho = \sum G \cdot \theta \cdot \Delta S \cdot \rho^2 \\ &= G \cdot \theta \sum \Delta S \cdot \rho^2 = G \cdot \theta \int \rho^2 \cdot dS \end{aligned}$$

La quantité $I_\rho = I_0 = \int \rho^2 \cdot dS$ représente le moment polaire de la section (S) par rapport au point G.

La relation entre le moment et la déformation s'écrit alors :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_\rho$$

Il en découle que :

$$\tau = \frac{M_t}{I_\rho} \rho$$

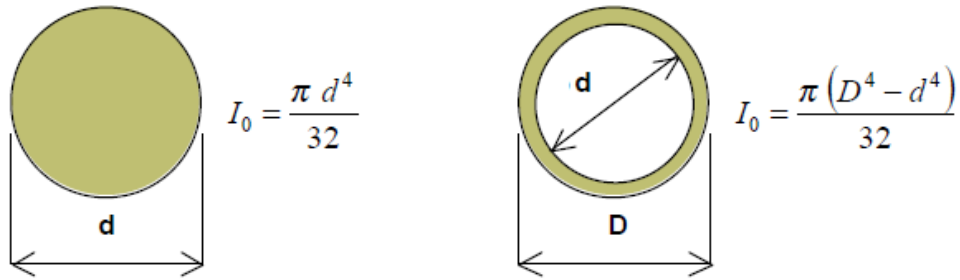
La contrainte maximale de torsion est obtenue pour $\rho=R$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R$$

I_0 ou I_ρ le moment polaire par rapport au point G (mm^4)

Le produit $G \cdot I_\rho$ est appelé la **rigidité à la torsion**.

I_ρ/ρ est appelé **module de résistance à la torsion** ou **module de résistance polaire**



5.6. Condition de résistance au cisaillement

Pour qu'une pièce sollicitée au cisaillement résiste en toute sécurité, il faut que :

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

Pour des raisons de sécurité la contrainte τ doit rester inférieure à une valeur limite appelé contrainte pratique de cisaillement τ_{adm} , en adoptant un coefficient n appelé coefficient de sécurité tel que :

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_e}{n} \quad (n = 2, \text{ Pour les métaux})$$

On vérifie finalement que

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

5.7. Condition de rigidité :

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite θ_{lim} . D'où la condition de rigidité d'une pièce en torsion :

$$\frac{M_t}{GI} \leq \theta_{lim}$$

Chapitre 6

Flexion simple

Chapitre 6 : Flexion simple

6.1. Définitions :

Une poutre est sollicitée à la flexion simple si elle est soumise à une charge perpendiculaire à son axe neutre (ligne moyenne).

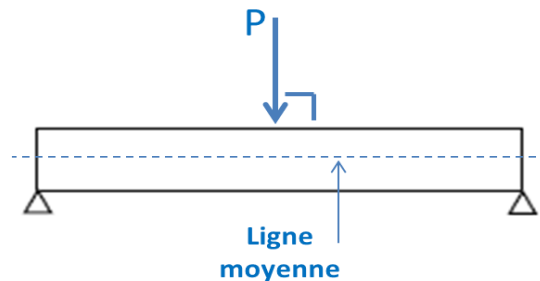


Figure 6.1. Schématisation d'une poutre.

Une poutre est sollicitée à la flexion simple si les éléments de réduction « efforts internes » au centre de gravité de chaque section des forces de cohésion sont un effort tranchant et un moment de flexion ($N_x=0$, $T_z \neq 0$, $M_{fy} \neq 0$).

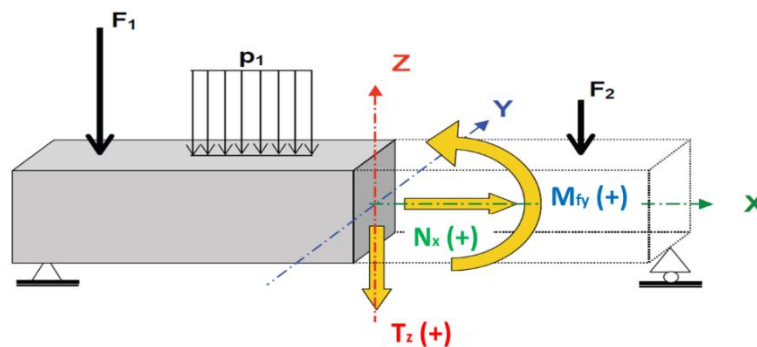
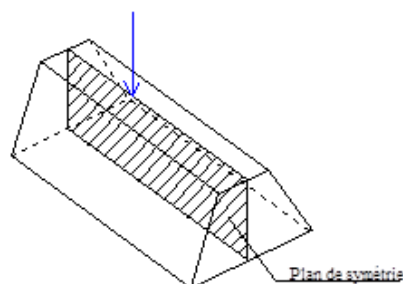


Figure 6.2. Convention des signes.

Si $T_z=0$ et $M_{fz} \neq 0$, on parle de la flexion pure.

6.2. Hypothèses de calcul

- Poutre comportant un plan de symétrie vertical.
- Lignes d'action des forces dans ce plan de symétrie



- Hypothèse de Bernoulli : toute section droite avant déformation reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne déformée après déformation.
- Les matériaux sont supposés homogènes.
- La fibre neutre se coïncide avec la fibre moyenne, c-à-d la fibre neutre passe par le centre de gravité de toutes les sections droites.

6.3. Notion de fibre tendue et fibre comprimée

Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale (figure 6.3). Après déformation, cette poutre fléchit : on constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction. Entre ces deux régions il existe une fibre qui reste ni tendue ni comprimée : c'est la fibre neutre.

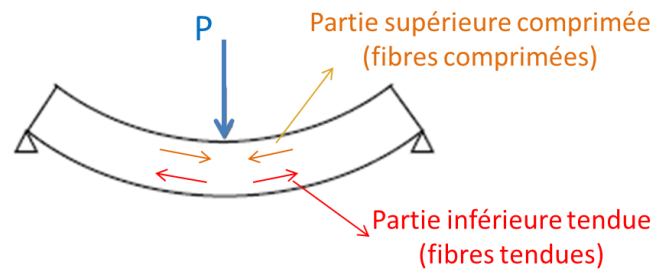


Figure 6.3. Poutre sollicitée en flexion simple.

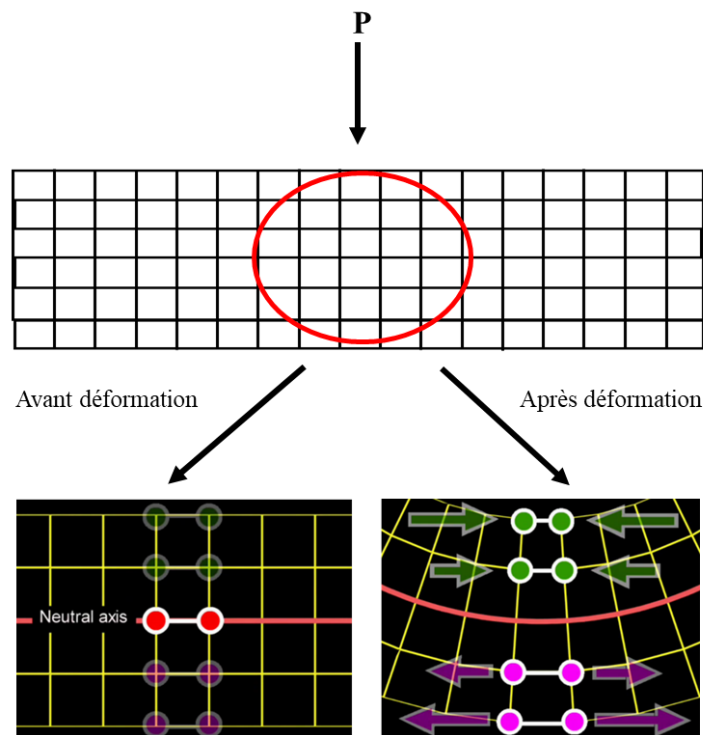


Figure 6.4. Notion de fibres tendues et comprimées.

6.4. Moment fléchissant

Le moment fléchissant est positif : s'il tend à mettre en traction les fibres inférieures longitudinales de la poutre.

Le moment fléchissant est négatif : s'il tend à mettre en traction les fibres supérieures longitudinales de la poutre.

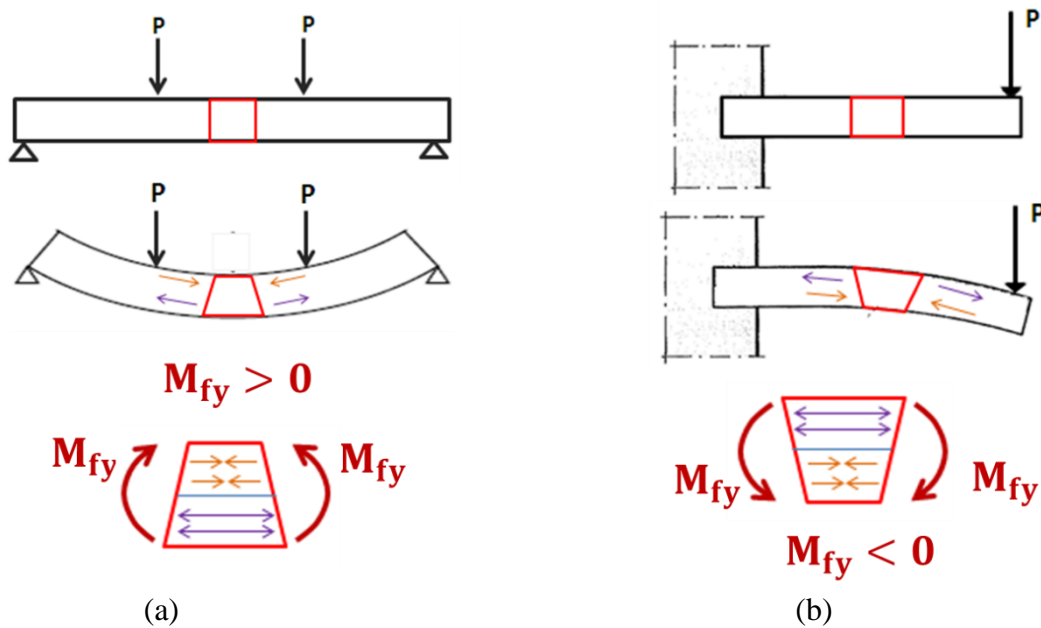


Figure 6.5. Poutre sollicitée en flexion simple (a) cas du moment positif, (b) cas du moment négatif.

6.5. Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant

Les valeurs de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M_f varient avec la position x de la coupure fictive. Les diagrammes de T et M_f (graphes mathématiques de type (x, y)) permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums à prendre en compte lors des calculs des contraintes.

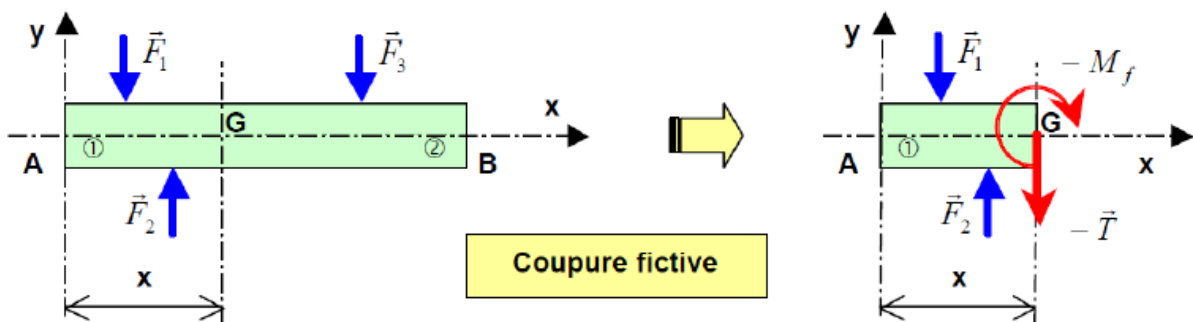


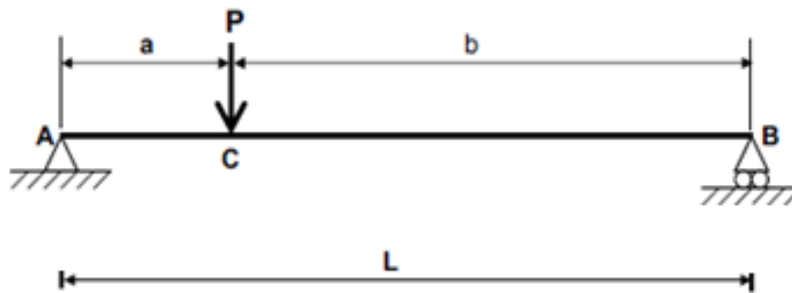
Figure 6.6. Coupure fictive pour calculs des efforts internes.

Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue **une coupure fictive** à la distance x de l'origine A. En isolant le tronçon **1**, on obtient l'effort tranchant **T** et le moment fléchissant **M_f** (on obtient en fait respectivement $-T$ et $-M_f$).

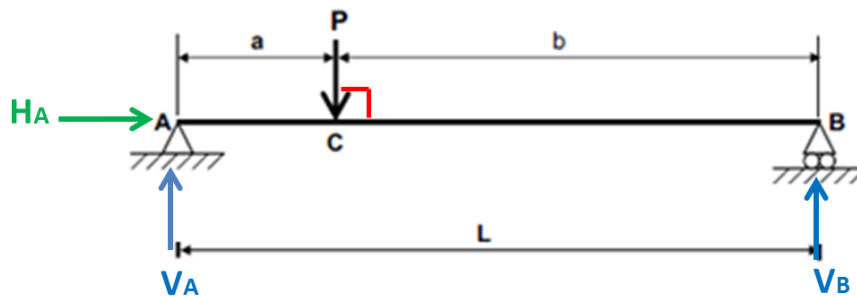
- **T** : somme vectorielle de toutes les forces extérieures transversales situées à gauche de la section fictive.

- **M_f** : moment résultant en G de toutes les actions extérieures situées à gauche de la section fictive.

Exemple 1 :



Solution :

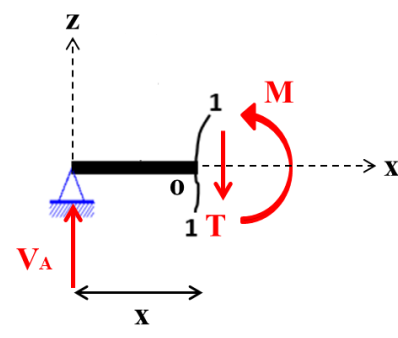
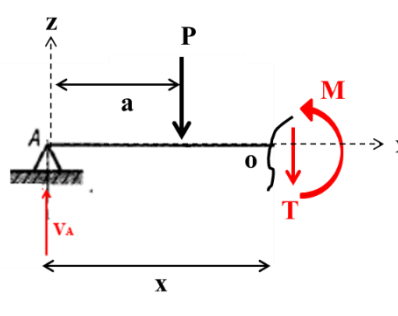


1. Calcul des réactions : $\sum F_{/x} = 0$, $\sum F_{/z} = 0$, $\sum M_{/A} = 0$ et $\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow$

$$H_A = 0, \quad V_A = \frac{Pb}{L}, \quad V_B = \frac{Pa}{L}$$

2. Calcul des efforts internes (T_z et M_{fy}) :

Le calcul des efforts internes est basé sur la méthode des coupes. Pour notre cas deux coupes sont suffisantes puisqu'on a trois forces : deux réactions et une force extérieure.

<p>Pour $0 \leq x \leq a$</p> $\sum F_{/z} = 0 \Rightarrow -V_A + T = 0 \Rightarrow$ $T = V_A = \frac{Pb}{L}$ $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M - V_A x = 0 \Rightarrow$ $M(x) = V_A x = \frac{Pb}{L} x$ $M(0) = 0 \text{ et } M(a) = \frac{Pba}{L}$	
<p>Pour $a \leq x \leq l$</p> $\sum F_{/z} = 0 \Rightarrow -V_A + T + P = 0 \Rightarrow$ $T = V_A - P = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} = -V_B$ $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M - V_A x + P(x - a) = 0 \Rightarrow$ $M(x) = (V_A - P)x + Pa = -\frac{Pa}{L} x + Pa$ $M(a) = \frac{Pba}{L} \text{ et } M(l) = 0$	

4. Dessin des diagrammes efforts internes (T_z et M_{fy})

Diagramme de T_z

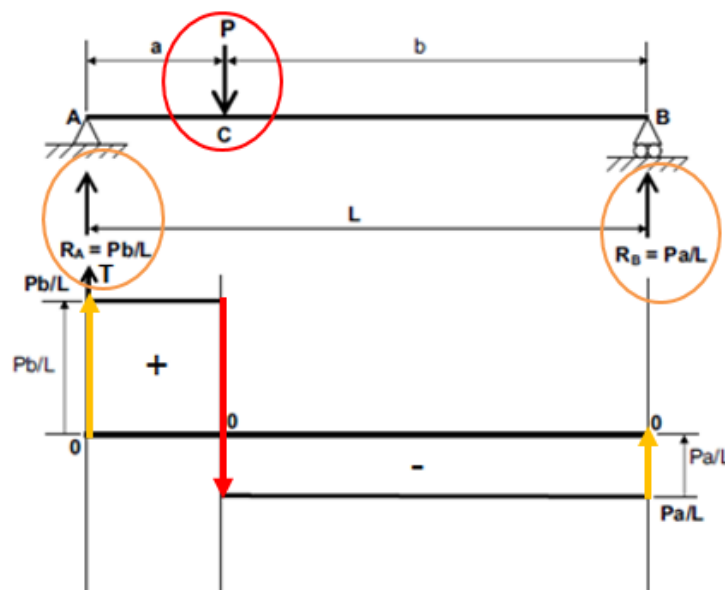
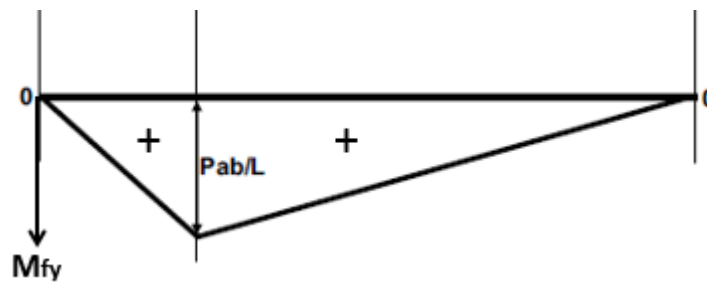
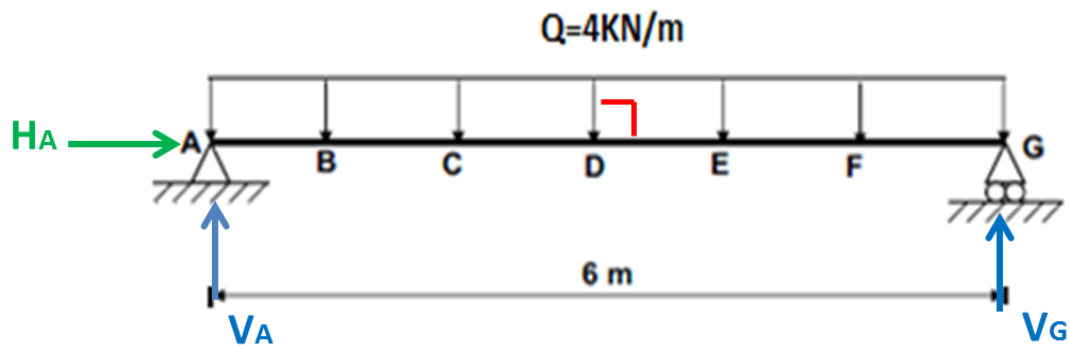


Diagramme de M_{fy} 

Exemple 2 :



1. Calcul des réactions : $\sum F_x = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M_y = 0 \Rightarrow$

$$H_A = 0, V_A = V_G = \frac{QL}{2}$$

2. Calcul des efforts internes (T_z et M_{fy})

Pour $0 \leq x \leq L$

$$T = V_A - Q \cdot x = \frac{Q}{2}(L - 2x) = 4(3 - x)$$

$$T(0) = 12 \text{ kN} \text{ et } T(L) = -12 \text{ kN}$$

$$M(x) = -\frac{Q}{2}x^2 + \frac{QL}{2}x$$

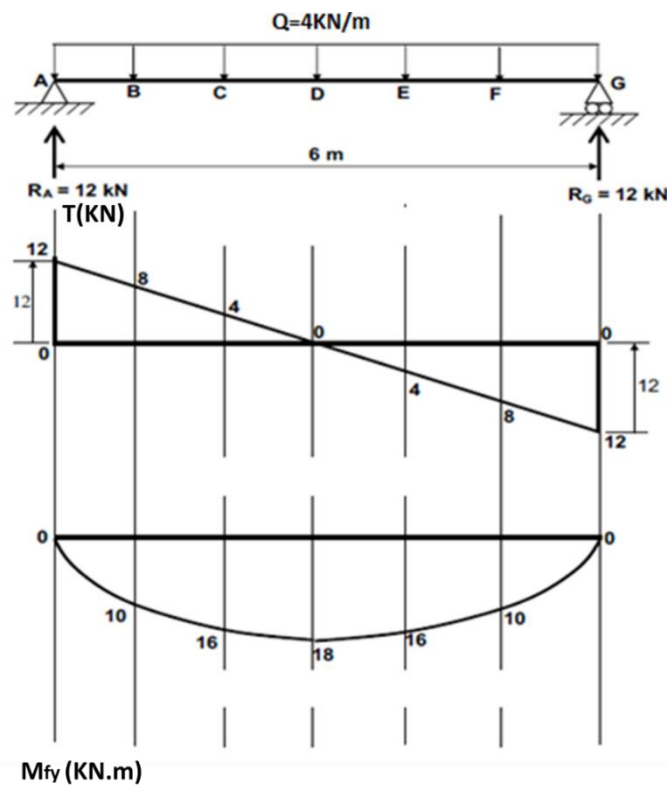
$$M(0) = 0 \text{ et } M(L) = 0$$

On peut noter que $T = 0$ pour $x = 3$

Dans ce point le moment est maximum

$$M(L/2) = \frac{QL^2}{8} = 18 \text{ kN.m}$$

3. Dessin des diagrammes efforts internes (Tz et Mfy)



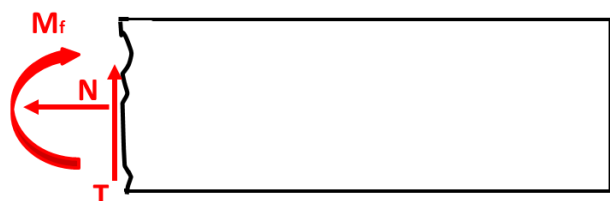
Notes :

- Nombre des coupes dépend du nombre des forces extérieures (réactions et charges) et couples, en principe une coupe doit être exercée entre chaque deux forces et/ou couples.
- Selon le tronçon étudié, il est nécessaire de respecter la schématisation des forces internes telle que illustrée sur la figure ci-après.

Cas du tronçon gauche :

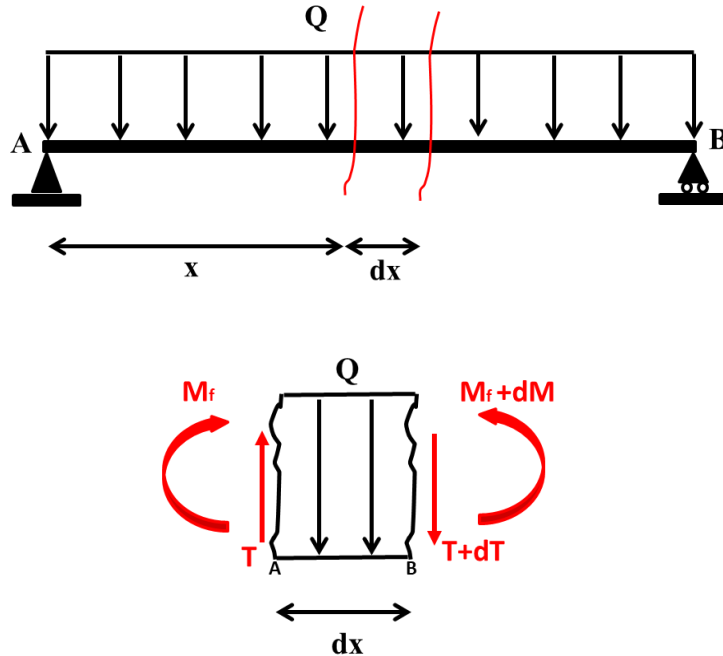


Cas du tronçon droit :



6.6. Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Écrivons les relations d'équilibre statique de l'élément isolé dx .



$$\sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T - Qdx - T - dT = 0 \Rightarrow Q = -\frac{dT}{dx}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow -M - Tdx + Qdx \cdot \frac{dx}{2} + M + dM = 0 \Rightarrow T = \frac{dM}{dx}$$

$$Qdx \cdot \frac{dx}{2} = Q \cdot \frac{dx^2}{2} : \text{quantité à négliger (valeur infiniment petite)}$$

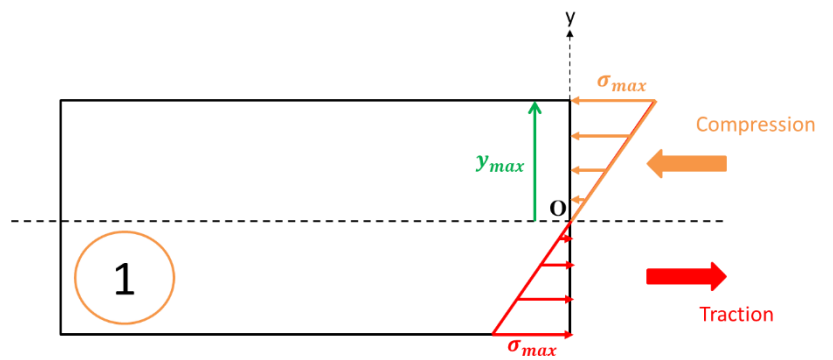
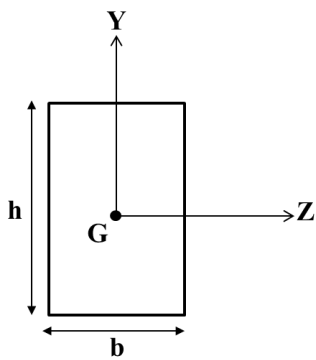
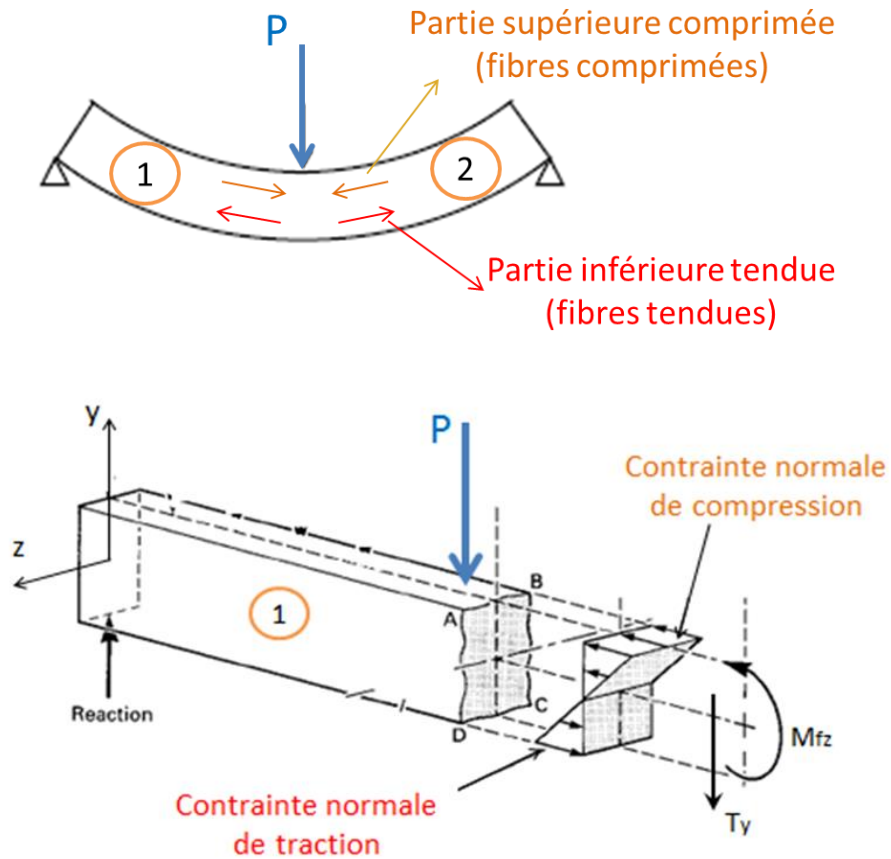
En négligeant les infiniment petits de deuxième ordre, la charge répartie $Q(x)$ est égale à la dérivée de par rapport à l'abscisse x , avec un signe opposé. L'effort tranchant T est égal à la dérivée du moment fléchissant M_f par rapport à l'abscisse x .

6.7. Calcul des contraintes :

Pour la flexion simple, ils existent deux types d'efforts et donc deux types de contraintes.

1-Moment fléchissant M_f → contrainte normale σ (traction + compression) :

En flexion simple les fibres au-dessus de la fibre moyenne sont comprimées, alors que les fibres en dessous sont tendues.



$$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$$

M_{fz} : Moment de flexion (N.mm)

I_{Gz} : Moment d'inertie (mm⁴)

y : Distance entre l'axe neutre et la fibre concernée (mm)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y_{max}$$

2- Effort tranchant T → contrainte tangentielle de cisaillement τ

$$\tau = \frac{T}{b \cdot I_{Gz}} \cdot S_x$$

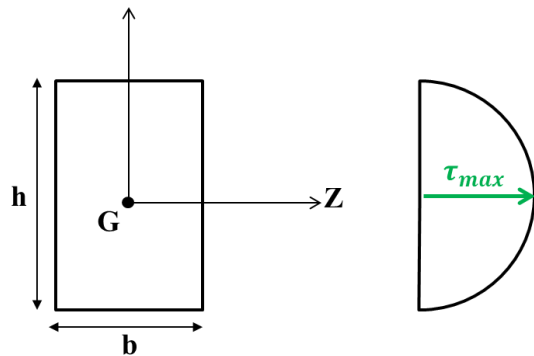
- Pour une poutre à section rectangulaire :

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}, \quad S_x = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Pour $y = 0 \Rightarrow \tau = \tau_{max} = \frac{2}{3} \frac{T}{b \cdot h}$

Pour $y = \frac{h}{2} \Rightarrow \tau = 0$

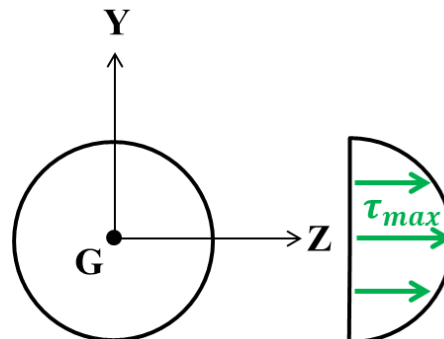


- Pour une poutre à section circulaire :

$$\tau = \frac{4T}{3\pi R^4} (R^2 - y^2)$$

Pour $y = 0 \Rightarrow \tau = \tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2}$

Pour $y = R \Rightarrow \tau = 0$



6.7.1. Section dangereuse :

Une section est dite dangereuse si :

$$M = M_{max}$$

$$T = T_{max}$$

$$M \neq 0 \text{ et } T \neq 0$$

6.7.2. Condition de résistance ($M=M_{max}$)

Le calcul à la résistance se fait comme dans le cas de la flexion simple (détermination des sections dangereuses et des points dangereux, satisfaction des conditions de résistances). Pour la sélection des sections dangereuses, on distingue, généralement, trois cas :

- Si M et T ont des valeurs maximales dans la même section le long de la poutre, cette section est considérée dangereuse et on y effectue le calcul à la résistance.
- Si M et T ont des valeurs maximales dans des sections différentes le long de la poutre, on y effectue le calcul à la résistance dans chacune de celles-ci.
- Parfois, les sections sont dangereuses sans que les efforts T aient des valeurs maximales. Donc, on doit y effectuer un calcul à la résistance.

Pour la satisfaction des conditions de résistances, on doit considérer les cas suivants :

- 1- Composer une condition de résistance pour le point où σ est maximale, dans une section où M est maximal. En ce point τ est généralement nul. La condition de résistance pour ce point s'écrit :

$$\sigma_{max} \leq \bar{\sigma}$$

- 2- Composer une condition de résistance pour le point où τ est maximale. Si la section est symétrique par rapport à l'axe z, τ max correspond habituellement à l'axe neutre où $\sigma = 0$ (Fig. 6.12). La condition de résistance pour ce point (dans une section où T est maximale) s'écrit :

$$\tau_{max} \leq \bar{\tau}$$

- 3- Si τ est maximale dans le point qui ne correspond pas à l'axe neutre et où $\sigma \neq 0$ (Fig. 2.17), une satisfaction de la condition de résistance pour ce point doit se faire dans le cadre des théories de résistance (ç-à-d selon un critère de résistance). On utilise habituellement, en flexion plane, le critère de la contrainte tangentielle maximal (critère de Coulomb) ou le critère de l'énergie potentielle de déformation qui ont, respectivement, les deux expressions suivantes :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

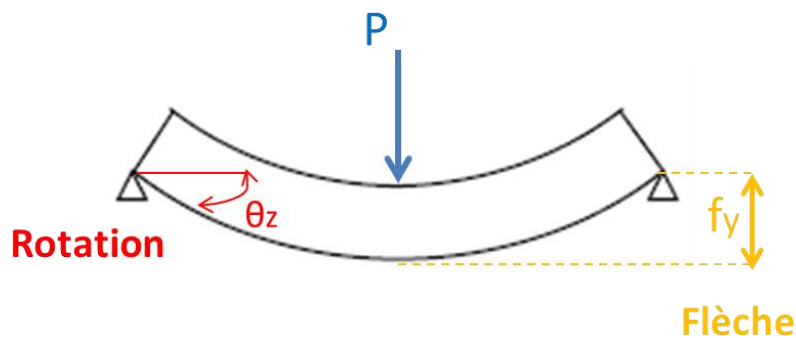
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Et la condition de résistance est :

$$\sigma_{eq} \leq \bar{\sigma}$$

6.8. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple :

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. On désigne par flèche à l'abscisse x , le déplacement du centre de gravité de la section correspondant à cette abscisse. Elle est comptée positivement si le déplacement s'effectue vers le bas. Le nouveau lieu des centres de gravité de toutes les sections de la poutre prend le nom de déformée. Elle entraîne une flèche f_y (déplacement vertical par rapport Y), et une rotation θ_z (déplacement angulaire θ par rapport Z).



6.8.1. Déformée :

La déformée d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (l'intensité, le type de chargement).

Remarque :

Il est très important de ne pas confondre « déformée » et « déformations ». En effet, la déformation est un allongement par unité de longueur, alors qu'une déformée est la combinaison entre une translation [m] et une rotation [rad].

6.8.2. Flèche :

Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle « flèche »

6.8.3. Rotation :

Certaines sections subissent une rotation. Cette rotation est naturellement la même que celle de la ligne moyenne.

On admet la relation suivante qui permet le calcul de la déformée :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_z(x): \text{équation universelle de la ligne déformée}$$

$y''(x)$: est la dérivée seconde de la flèche par rapport à x

$y'(x)$: est la rotation de la section par rapport à sa position initiale s'appelle angle de rotation de la section

$M(x)$: le moment fléchissant à la section d'abscisse x .

E : le module d'élasticité longitudinale (module d'Young).

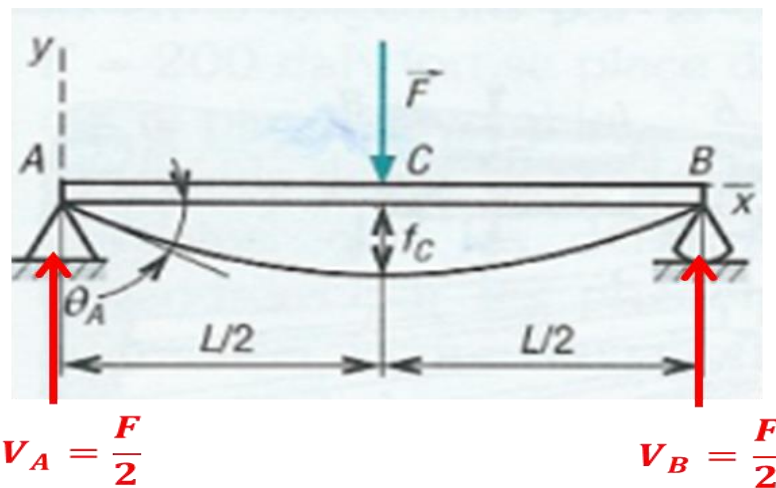
I : le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe (Δ) passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre.

Pour avoir la flèche y , il faut donc intégrer cette équation deux fois, d'où l'obtention d'une équation en fonction de deux constantes que l'on obtient par les conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent, généralement :

- Pour un appui : $y = 0$

- Pour un encastrement : $y = 0$ et $y' = 0$

Exemple :



$$\text{pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \Rightarrow M_z(x) = \frac{F}{2}x$$

$$\text{pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L \Rightarrow M_z(x) = \frac{F}{2}(L-x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{2EI}$$

En intégrant deux fois (sans oublier les constantes d'intégration), il vient :

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{F}{4EI}x^2 + c_0 \\ y(x) = \frac{F}{12EI}x^3 + c_0x + c_1 \end{cases}$$

Les constantes C et C sont déterminées par les conditions aux limites :

Pour $x=0$ on a $y=0$

Pour $x=L/2$ on a $y'=0$

$$y(0) = \frac{F}{12EI}0^3 + c_00 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y'\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F}{4EI}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = -\frac{FL^2}{16EI}$$

Il en résulte :

$$y(x) = \frac{F}{12EI}x^3 - \frac{FL^2}{16EI}x = -\frac{Fx}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$$

$$\begin{cases} y_{max} = f_c = y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{FL^3}{48EI} \\ \theta_{max} = \theta_A = y'(0) = -\frac{FL^2}{16EI} \end{cases}$$

6.9. Critères de dimensionnement :

Pour dimensionner la poutre on peut utiliser deux types de critères :

- un critère en contrainte normale (condition de résistance, voir paragraphe 5.4.2)
- un critère sur la flèche maximale (condition de rigidité)

6.9.1. Dimensionnement à la condition de rigidité

Le critère sur la flèche maximale, traduit le fait que la flèche maximale f_{max} en un point doit rester inférieure à une valeur donnée dépendante des conditions d'utilisation.

$$f_{max} \leq f_{adm}$$

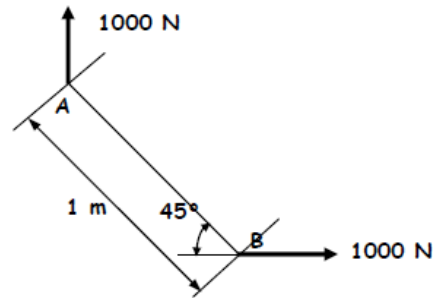
Applications

Exercices

Chapitre 1 : introduction à la résistance des matériaux

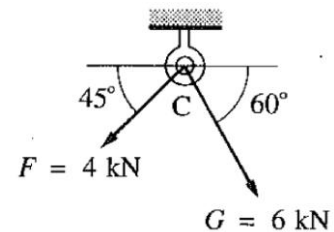
Exercice 1 :

Déterminer la valeur et la position de la résultante des deux forces concourantes.



Exercice 2 :

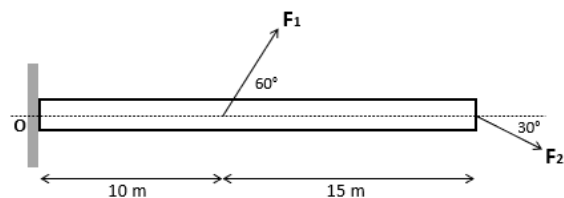
Sur le crochet C s'exercent deux forces F et G. Trouver, graphiquement puis analytiquement, l'orientation et l'intensité de leur résultante.



Exercice 3 :

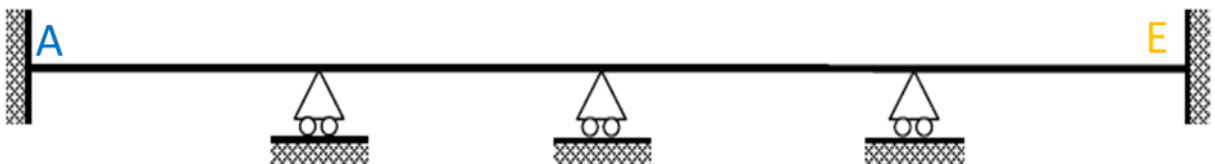
Déterminer le moment par rapport au point O des forces F_1 et F_2 .

On donne $F_1=200$ N et $F_2=100$ N.

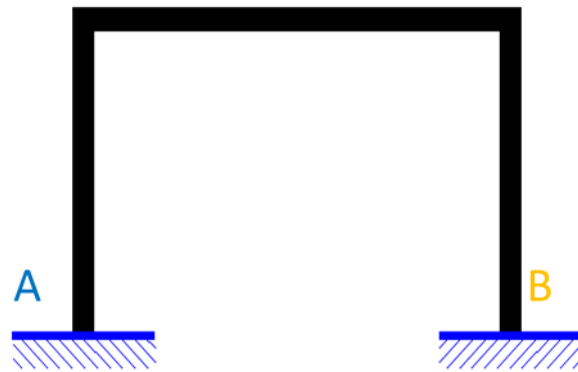


Exercice 4 :

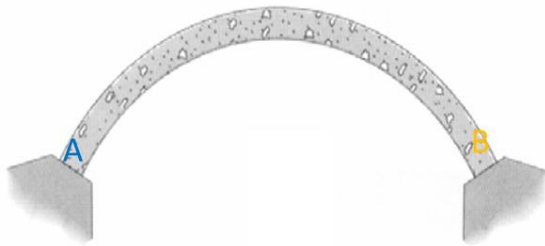
Déterminer le degré d'hyperstaticité des systèmes ci-dessous tout en précisant leurs types.



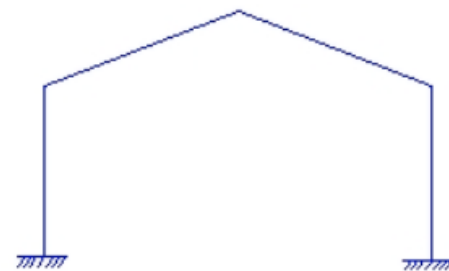
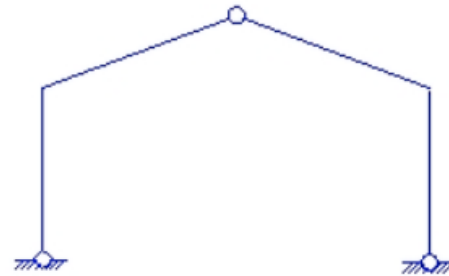
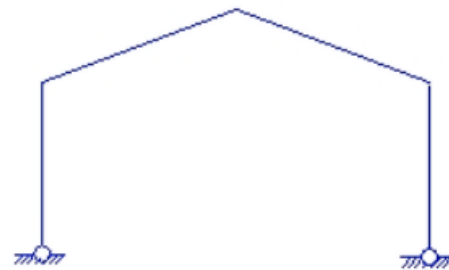
(a)



(b)



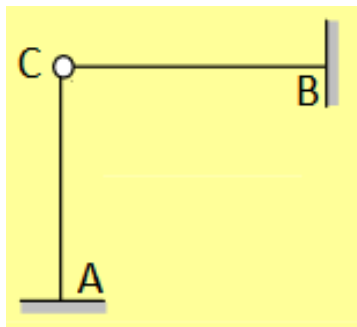
(c)



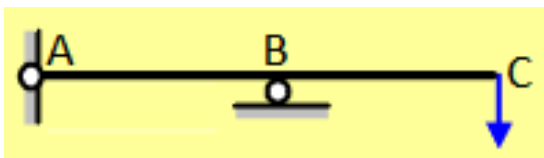
(f)

(g)

(h)



(d)

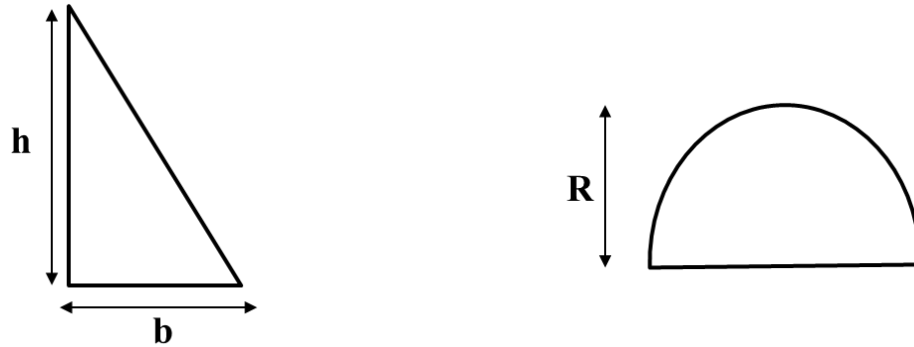


(e)

Chapitre 2 : caractéristiques géométriques des sections planes

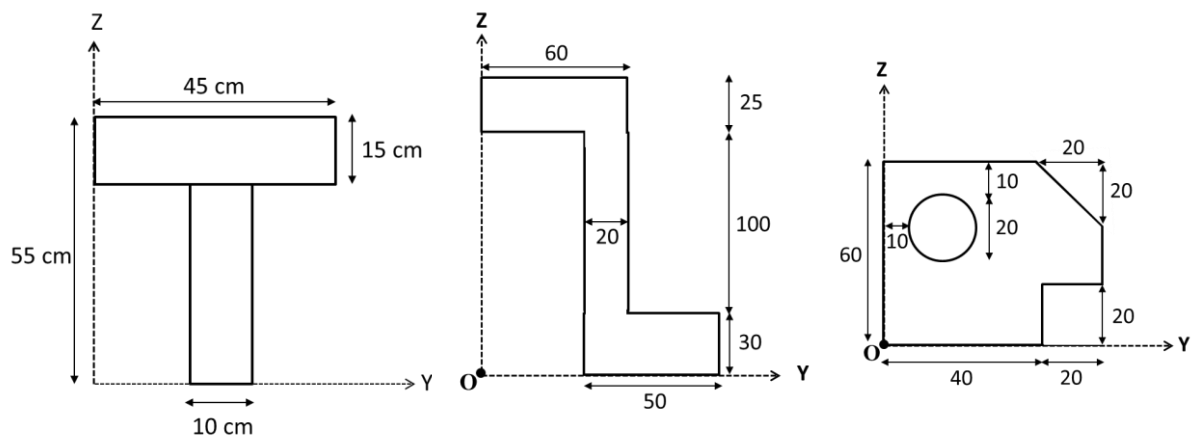
Exercice 1 :

En utilisant la méthode d'intégrale, déterminer les coordonnées de centre de gravité des surfaces ci-dessous.



Exercice 2 :

Déterminer la position du centre de gravité des surfaces ci-contre (dimensions en cm).

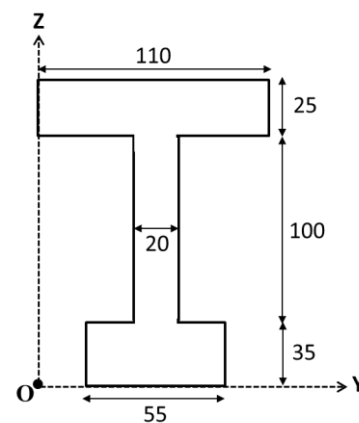


Exercice 3 :

Soit la section suivante dont les dimensions sont en cm :

On demande :

1. Calculer les moments statiques (S_y et S_z) dans le repère YOZ.
2. Déterminer les coordonnées de centre de gravité.
3. Calculer les moments d'inertie I_y , I_z et I_{yz} par rapport à un système d'axe parallèle à YOZ et passant par le centre de gravité.

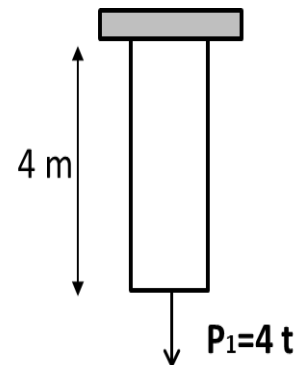


Chapitre 3 : traction et compression

Exercice 1 :

Soit la figure ci-après :

1. Calculer l'effort normal.
2. Vérifier la condition de résistance de la barre.
3. Calculer la déformation de la barre tout en précisant son type.



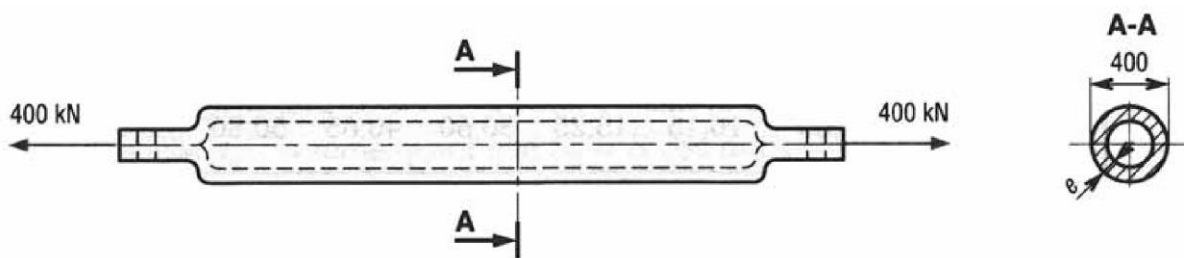
Données :

$$S = 15 \text{ cm}^2, E = 10^6 \text{ kg/cm}^2; \underline{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

Exercice 2 :

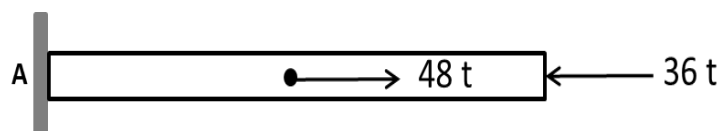
Une poutre tubulaire (diamètre extérieur 400 mm, épaisseur e) en acier (limite à la rupture $\sigma_r = 380 \text{ MPa}$; limite élastique $\sigma_e = 240 \text{ MPa}$), appartenant à la charpente métallique du centre G. Pompidou à Paris, supporte un effort de traction de 400 kN. Le coefficient de sécurité est égal à 6.

1. Déterminer l'épaisseur e minimale admissible pour la construction.
2. La longueur de la partie tubulaire est de 3,5 m ; déterminer son allongement si $E = 200 \text{ GPa}$.



Exercice 3 :

En satisfaisant la condition de résistance, calculer la section de la barre.



On donne : $\underline{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2$

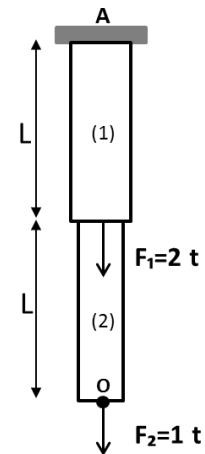
Exercice 4 :

1. Calculer la réaction au point A.
2. Calculer l'effort normal au niveau de chaque pièce.
3. Déterminer la contrainte normale ainsi que l'allongement ΔL au point O.

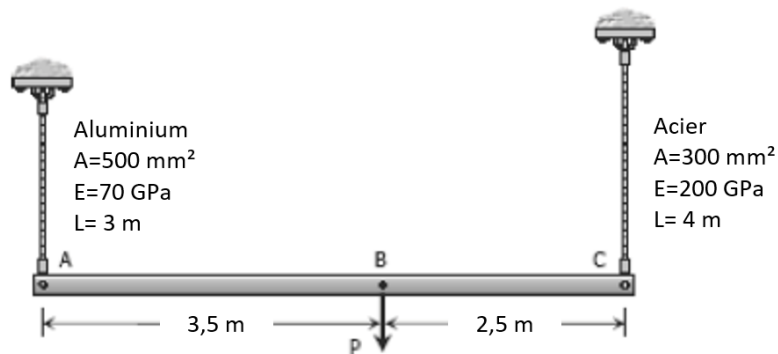
On donne

$$S_1 = 2S_2 = 4 \text{ cm}^2, L = 150 \text{ cm}$$

$$\bar{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

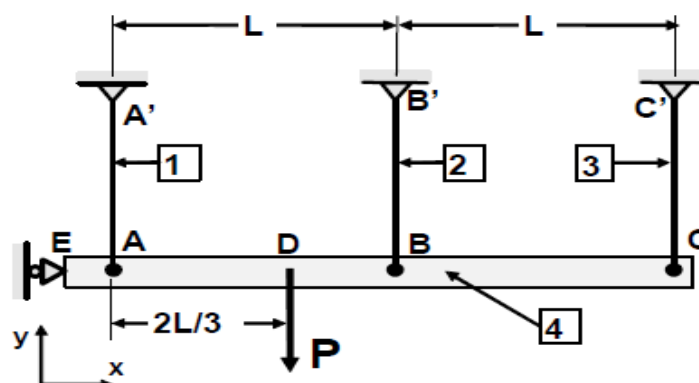
Exercice 5 :

Une barre rigide AC est attachée à deux tiges verticales comme montré sur la figure ci-contre. Déterminer le déplacement horizontal de la barre au point B ($P=50 \text{ kN}$).

Exercice 6

Une barre indéformable EADBC (4) est suspendue par 3 fils identiques (même section et même matériau). Les six liaisons en A, B, C, A', B' et C' sont des articulations planes, la liaison en E une liaison ponctuelle.

1. Montrer que le système est hyperstatique.
2. Les fils sont tendus. Déterminer la tension dans chaque fil en fonction de P.



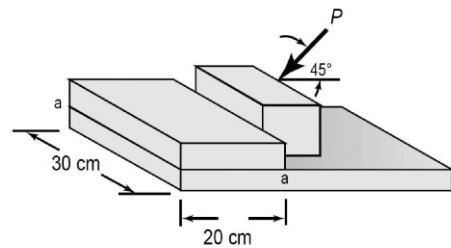
Chapitre 4 : Cisaillement

Exercice 1 :

Une poutre de section rectangulaire ($b=15\text{cm}$ et $h=30\text{ cm}$) est soumise à un effort tranchant $V=233\text{ kN}$. Représenter le diagramme de contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant, et calculer la valeur de la contrainte maximale.

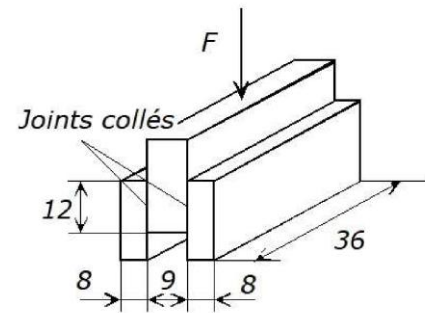
Exercice 2 :

Considérons la figure représentée ci-contre. La force P tend à cisailer la butée le long du plan a-a. Si $P=40\text{ kN}$, calculer la contrainte moyenne de cisaillement sur le plan a-a.



Exercice 3 :

L'assemblage représenté ci-contre est souvent utilisé pour déterminer la résistance au cisaillement d'un joint collé. Pour une force F à la rupture de 12 kN , quelle est la contrainte moyenne dans le joint à cet instant ?



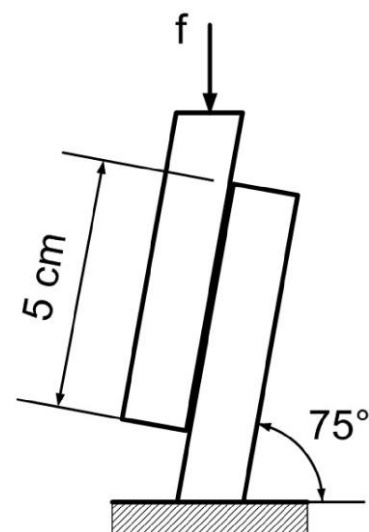
Exercice 4 :

Dans l'industrie du bois, on utilise des blocs inclinés pour déterminer la résistance compression-cisaillement des joints collés. Soit les deux blocs A et B collés ayant 4 cm de profondeur perpendiculairement au plan de la figure.

a) Calculer la résistance maximale au cisaillement de la colle pour une force verticale f de 40 kN nécessaire pour provoquer la rupture du joint.

b) A ce moment, quelle est la contrainte de compression ?

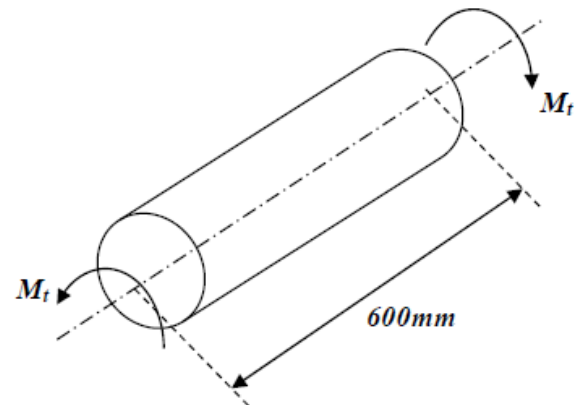
c) Si la résistance de la colle au cisaillement était de 10 N/mm^2 , calculer alors l'intensité maximale de la force f applicable.



Chapitre 5 : Torsion

Exercice 1 :

Un cylindre ($D=60$ mm) est soumis à un couple de torsion de 3 KN.m. Sachant que le module de Coulomb vaut 80GPa. Calculer la contrainte tangentielle maximale et la distorsion.



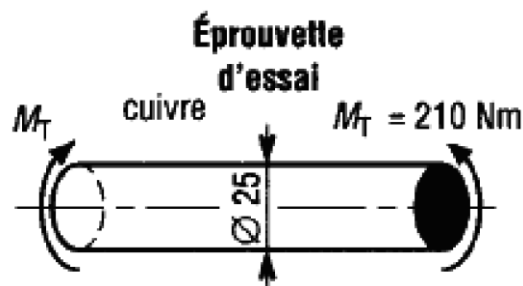
Exercice 2 :

Soit une tige de tournevis ($G=80$ GPa, $\theta=73^\circ \cdot \text{m}^{-1}$, $D=7$ mm, $M_t=24$ N.m). Déterminer la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.

Exercice 3 :

Soit une éprouvette cylindrique en cuivre de 25 mm de diamètre soumise à un couple de 210 N.m. L'angle de torsion mesuré est de $4,9^\circ$ pour une longueur de 1 m.

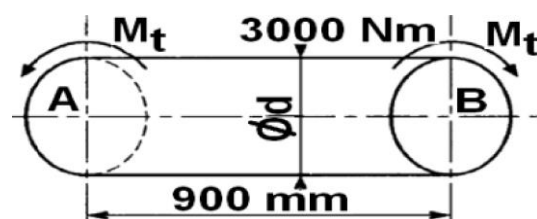
1. Calculer le module d'élasticité transversal G du cuivre testé.
2. Déterminer l'angle de torsion d'une poutre du même matériau, de même diamètre et de longueur 1,8 m, si elle supporte une contrainte de cisaillement maximale de 140 N/mm².



Exercice 4 :

L'arbre proposé transmet un couple de 3000 Nm. Si on impose un angle de torsion $1,8^\circ$ entre les deux extrémités, A et B distantes de 0,9 m et $G = 75$ GPa.

- Déterminer le diamètre d .

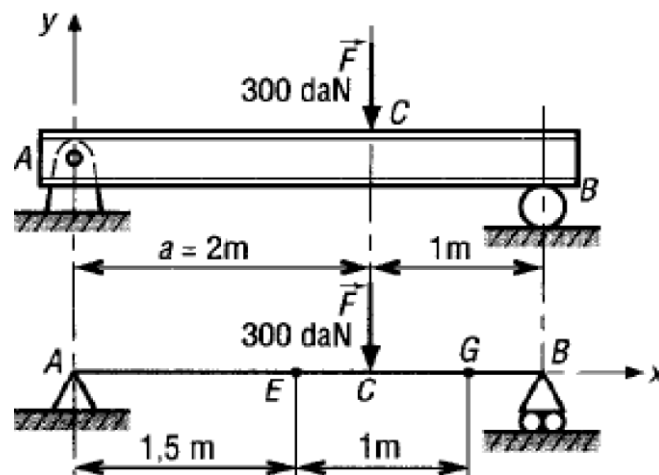


Chapitre 6 : Flexion simple

Exercice 1 :

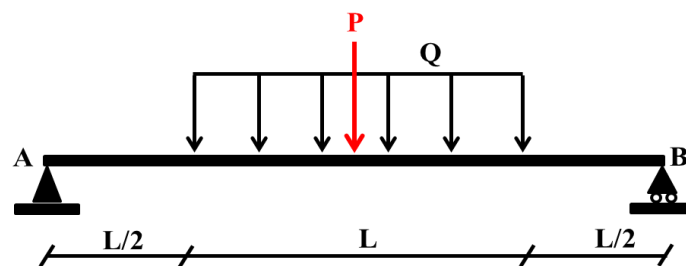
Une poutre sur deux appuis A et B supporte une charge concentrée en C de 300 daN.

1. Déterminer les actions exercées par les appuis.
2. Déterminer les efforts intérieurs dans la poutre en E et G.



Exercice 2 :

Soit une poutre de section rectangulaire ($b \cdot h$), de longueur $2L$, soumise à deux charges (figure ci-dessous).



On demande :

1. Calculer les réactions d'appuis.
2. Déterminer les efforts internes et tracer leurs diagrammes.
3. Vérifier la condition de résistance de cette poutre.

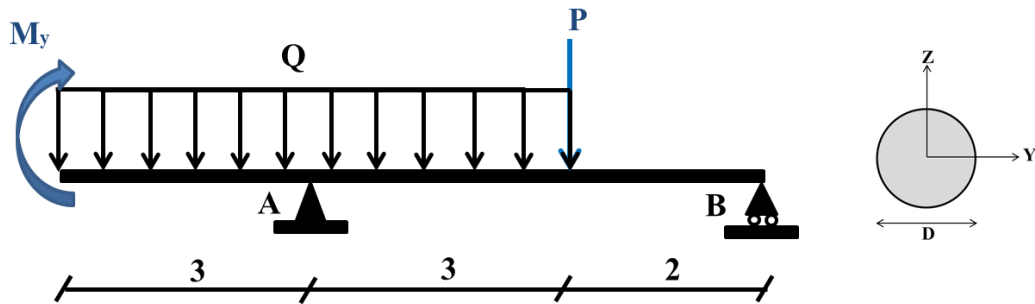
Données :

$Q=5 \text{ t/m}$, $L=4 \text{ m}$, $P=10 \text{ t}$; $b=30 \text{ cm}$ et $h=45 \text{ cm}$.

$\bar{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2$; $\bar{\tau} = 1100 \text{ kg/cm}^2$

Exercice 3 :

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.



On demande :

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre D de la section.

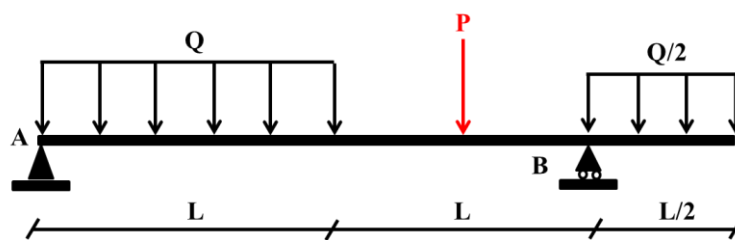
Données :

$$Q=4 \text{ kN/m}, L=4 \text{ m}, P=20 \text{ kN.}$$

$$\bar{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2; \bar{\tau} = 1100 \text{ kg/cm}^2$$

Exercice 4 :

Soit une poutre de section rectangulaire ($b \cdot h$), de longueur $2L$, soumise à deux charges (figure ci-dessous).



On demande :

1. Calculer les réactions d'appuis.
2. Déterminer les efforts internes et tracer leurs diagrammes.
3. Déterminer la (les) section (s) dangereuse (s).
4. Vérifier les conditions de résistance de cette poutre.

Données :

$$Q=5 \text{ t/m}, L=4 \text{ m}, P=10 \text{ t}, b=35 \text{ cm et } h=50 \text{ cm}$$

$$\bar{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2; \bar{\tau} = 1100 \text{ kg/cm}^2$$

Solutions

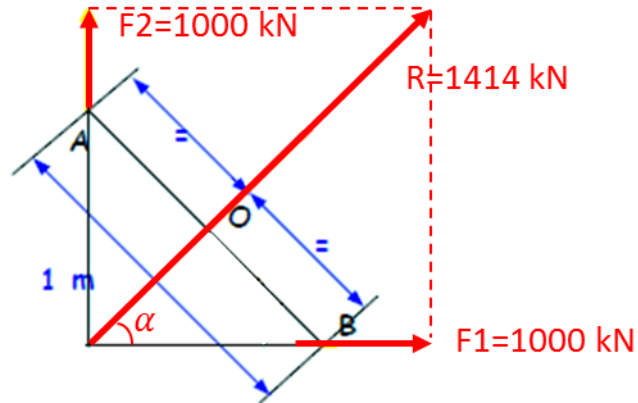
Chapitre 1 : introduction à la résistance des matériaux

Exercice 1 :

$$\vec{R} = F_1 \cdot \vec{i} + F_2 \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 1414 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_1}{|\vec{R}|} = 0,707 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$



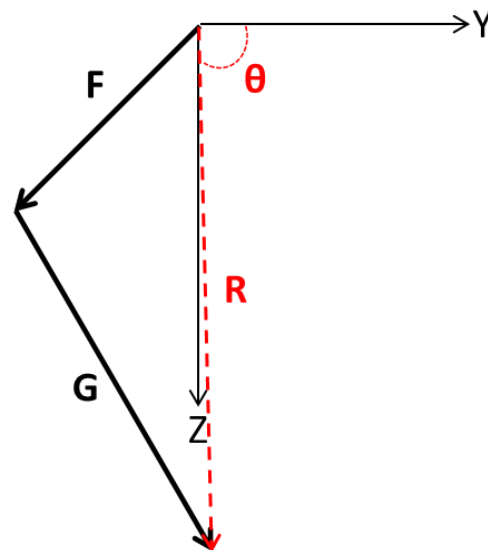
Exercice 2 :

a) Méthode graphique :

Il suffit d'utiliser un papier millimétrique, et de dessiner les forces G et F en utilisant une échelle par exemple 2 kN → 1 cm, ensuite on dessine le vecteur R qui relie le point de départ de la force initiale (G) et le point de fin de la dernière force (F), le vecteur R représente dans ce cas la résultante R.

La longueur de la résultante vaut 4 cm ce qui correspond à une intensité de 8,02 kN.

L'angle θ de la résultante par rapport à l'horizontale vaut $88,77^\circ$



b) Méthode analytique :

✓ Décomposition des forces F et G:

$$F_x = 4 \cos(45^\circ) = 2.83 \text{ kN}; F_y = 4 \sin(45^\circ) = 2.83 \text{ kN}$$

$$G_x = 6 \cos(60^\circ) = 3 \text{ kN}; G_y = 6 \sin(60^\circ) = 5.20 \text{ kN}$$

✓ Calcul des composantes horizontales et verticales de R :

$$R_x = F_x + G_x = -2.83 + 3 = 0,17 \text{ kN}; R_y = F_y + G_y = 2.83 + 5.20 = 8.03 \text{ kN}$$

✓ Calcul de l'intensité de la résultante R :

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} = \sqrt{(0,17^2 + 8,03^2)} = 8,03 \text{ kN}$$

✓ Calculer l'angle θ de la résultante par rapport à l'horizontale :

$$\theta = \tan^{-1}(R_y/R_x) = \tan^{-1}(8.03/0,17) = 88,77^\circ$$

Exercice 3 :

$$M_{/O} = M_{F_2} - M_{F_1} = F_2 \sin 30 \times 25 - F_1 \sin 60 \times 10 = -472 \text{ N.m}$$

Exercice 4 :

Systèmes	Degré d'hyperstaticité h	Type de système
(a)	6	Hyperstatique
(b)	3	Hyperstatique
(c)	3	Hyperstatique
(d)	2	Hyperstatique
(e)	0	Isostatique
(f)	1	Hyperstatique
(g)	0	Isostatique
(h)	3	Hyperstatique

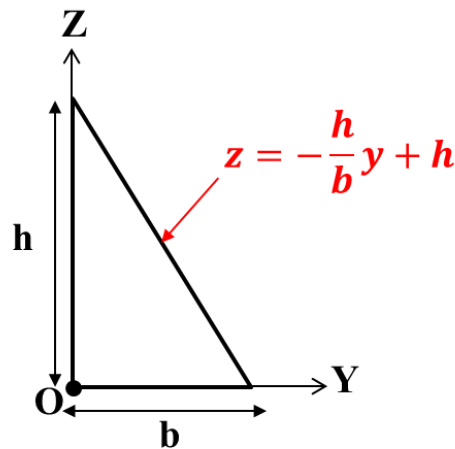
Chapitre 2 : caractéristiques géométriques des sections planes

Exercice 1 :

Cas du triangle :

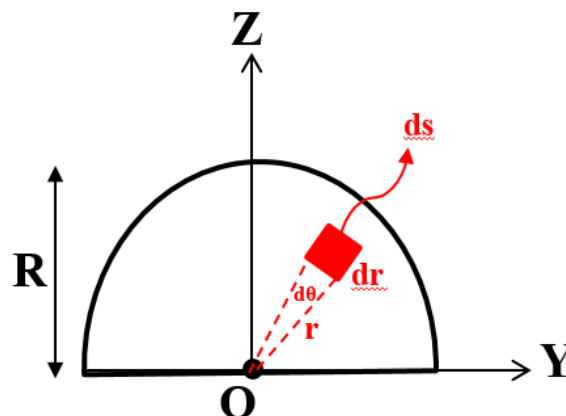
$$y_G = \frac{1}{S} \iint_s y ds = \frac{1}{S} \int_0^b \left(\int_0^{-\frac{h}{b}y+h} dz \right) y dy = \frac{1}{S} \int_0^b \left(-\frac{h}{b}y + h \right) y dy = \frac{1}{(bh/2)} \left[\frac{hb^2}{6} \right] = b/3$$

$$z_G = \frac{1}{S} \iint_s z ds = \frac{1}{S} \int_0^b \left(\int_0^{-\frac{h}{b}y+h} z dz \right) dy = \frac{1}{2S} \int_0^b \left(\frac{h^2}{b^2} y^2 - 2\frac{h}{b}y + h^2 \right) dy = \frac{1}{(bh)} \left[\frac{hbh^2}{6} \right] = h/3$$



Cas du demi-cercle :

$$z_G = \frac{1}{S} \iint_s r \sin\theta r dr d\theta = \frac{1}{S} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin\theta dr d\theta = \frac{1}{S} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{1}{\left(\frac{\pi R^2}{2}\right)} \left[\frac{2R^3}{3} \right] = \frac{4R}{3\pi}$$



Les coordonnées du centre de gravité du demi-cercle par rapport au système d'axe donnée dans cet exercice veulent :

$$y_G = R, \quad z_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Exercice 2 :

Position du centre de gravité :

$$Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \times S_i}{\sum S_i}; Z_G = \frac{\sum Z_{Gi} \times S_i}{\sum S_i}$$

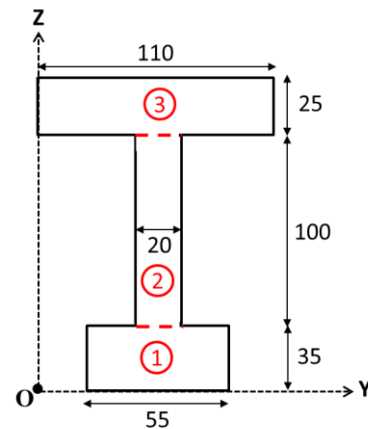
Figure	Y_G	Z_G
	$Y_{G1} = 22,50;$ $Y_{G2} = 22,50$ $S_1 = 400$ $S_2 = 675$ $Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 22,50 \text{ cm}$	$Z_{G1} = 20;$ $Z_{G2} = 47,5$ $Z_G = \frac{\sum Z_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 37,26 \text{ cm}$
	$Y_{G1} = 65$ $Y_{G2} = 50$ $Y_{G3} = 30$ $S_1 = 1500$ $S_2 = 2000$ $S_3 = 1500$ $Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 48,5 \text{ cm}$	$Z_{G1} = 15$ $Z_{G2} = 80$ $Z_{G3} = 142,5$ $Z_G = \frac{\sum Z_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 79,25 \text{ cm}$
	$Y_{G1} = 30$ $Y_{G2} = 20$ $Y_{G3} = 50$ $Y_{G4} = 53,34$ $S_1 = 3600$ $S_2 = 314$ $S_3 = 400$ $S_4 = 200$ $Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 26,45 \text{ cm}$	$Z_{G1} = 30$ $Z_{G2} = 40$ $Z_{G3} = 10$ $Z_{G4} = 53,34$ $Z_G = \frac{\sum Z_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 30,06 \text{ cm}$

Exercice 3 :

1. Calcul des moments statique dans le repère YOZ :

$$S_y = \iint_s z ds = \sum_{i=1}^2 z_{Gi} S_i$$

$$S_z = \iint_s y ds = \sum_{i=1}^2 y_{Gi} S_i$$



Section	1	2	3	Σ
Surface S_i	1925	2000	2750	6675
Y_{Gi}	55	55	55	
Z_{Gi}	17,5	85	147,5	
$\sum Y_{Gi} \times S_i$	105875	110000	151250	
$\sum Z_{Gi} \times S_i$	33687,5	170000	405625	
$S_y (cm^3)$	$3,67 \times 10^5$			
$S_z (cm^3)$	$6,09 \times 10^5$			

2. Détermination des coordonnées de centre de gravité :

$$Y_G = \frac{\sum Y_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 55 \text{ cm} ; Z_G = \frac{\sum Z_{Gi} \times S_i}{\sum S_i} = 91,28 \text{ cm}$$

3. Calculer les moments d'inertie I_y et I_z par rapport à un système d'axe parallèle à YOZ et passant par le centre de gravité :

$$I_{YG} = \sum I_{YG_i} + \sum (Z_{G_i} - Z_G)^2 \cdot S_i$$

$$I_{ZG} = \sum I_{ZG_i} + \sum (Y_{G_i} - Y_G)^2 \cdot S_i$$

$$I_{YZG} = \sum I_{YZG_i} + \sum (Y_{G_i} - Y_G)(Z_{G_i} - Z_G) \cdot S_i$$

Section	1	2	3	Σ
Surface Si	1925	2000	2750	6675
I_{YG_i}	196510,42	1666666,67	143229,17	2006406,26
I_{ZG_i}	485260,42	66666,67	2772916,67	3324843,76
$(Y_{G_i} - Y_G)$	0			
$(Z_{G_i} - Z_G)$	73,78	6,28	56,42	
$(Z_{G_i} - Z_G)^2 \cdot S_i$	10478715,17	78876,8	8753845,1	19311437,07
I_{YG}	21317843,33			
I_{ZG}	3324843,76			
I_{YZG_i}	0	0	0	0
I_{YZG}	0			

Chapitre 3 : traction et compression

Exercice 1 :

1. Calcul de l'effort normal :

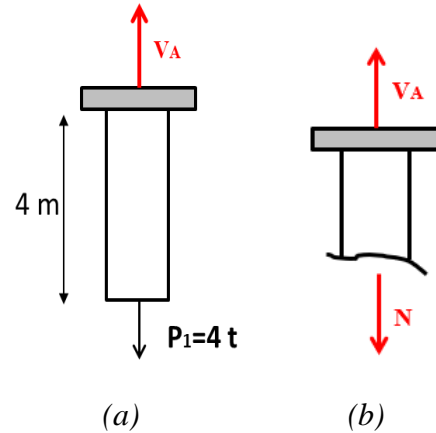
On calcule tout d'abord la réaction à l'appui A.

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow V_A - 4 = 0 \Rightarrow V_A = 4 \text{ t}$$

Faisons une coupe dans la barre et écrivons

l'équation d'équilibre (figure b) :

$$\begin{aligned} \sum F_{/X} = 0 &\Rightarrow V_A - N = 0 \Rightarrow N = V_A \\ &= 4 \text{ t} \end{aligned}$$



2. Vérification de la condition de résistance :

$$\sigma \leq \bar{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{4 \times 10^3}{15} = 266,66 \leq \bar{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{condition vérifiée}$$

3. Calcul de la déformation :

$$\Delta L = \frac{NL}{ES} = \frac{4 \times 10^3 \times 400}{10^6 \times 15} = 2,66 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

Il s'agit d'un allongement.

Exercice 2 :

1. Détermination de l'épaisseur e minimale admissible pour la construction (e=R₁-R₂):

$$\sigma \leq \bar{\sigma}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{n} = \frac{240}{6} = 40 \text{ MPa}$$

Avec

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \leq \bar{\sigma}$$

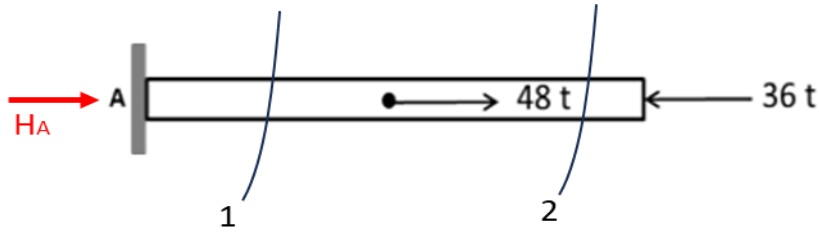
$$\Rightarrow R_1^2 - R_2^2 \geq \frac{\pi N}{\bar{\sigma}}$$

$$\Rightarrow R_2 \leq \sqrt{R_1^2 - \frac{\pi N}{\bar{\sigma}}} = \sqrt{200^2 - \frac{400 \times 10^3}{\pi \times 40}} = 190 \text{ mm}$$

Soit e=R₁-R₂=200-185=15 mm

2. Calcul de l'allongement :

$$\Delta L = \frac{NL}{ES} = \frac{400 \times 10^3 \times 3500}{200 \times 10^3 \times 18,13 \times 10^3} = 0,386 \text{ mm}$$

Exercice 3 :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A + 48 - 36 = 0 \Rightarrow V_A = -12 \text{ t}$$

Coupe 1 :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow H_A + N = 0 \Rightarrow N_1 = 12 \text{ t}$$

Coupe 2 :

$$\sum F_{/x} = 0 \Rightarrow 36 + N = 0 \Rightarrow N_2 = -36 \text{ t}$$

N = max (N₁ et N₂) = 36 t

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq \bar{\sigma} = 1200 \text{ kg/cm}^2$$

$$S \geq \frac{N}{\bar{\sigma}} = \frac{36 \times 10^3}{1600} = 22,5 \text{ cm}^2$$

Exercice 4 :

1. Calcul de l'effort normal dans chaque barre (méthode des coupes) :

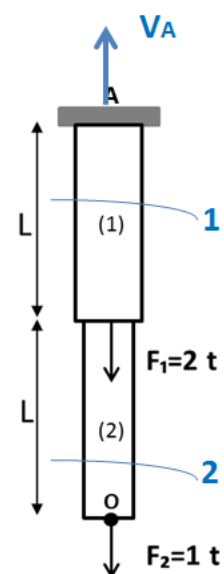
$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow V_A - 2 - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 3 \text{ t}$$

Barre 1

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow V_A - N = 0 \Rightarrow N = V_A = 3 \text{ t}$$

Barre 2

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow N - 1 = 0 \Rightarrow N = 1 \text{ t}$$



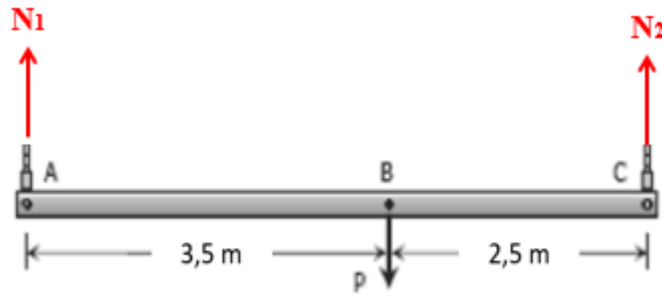
2. Détermination de la contrainte normale et l'allongement au point O :

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{1 \times 10^3}{2} = 500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

$$\Delta L = \frac{N_1 L_1}{ES_1} + \frac{N_2 L_2}{ES_2} = \frac{3 \times 10^3 \times 150}{1 \times 10^6 \times 4} + \frac{1 \times 10^3 \times 150}{1 \times 10^6 \times 2} = 0,19 \text{ cm}$$

Exercice 5 :



Étudions la stabilité du système

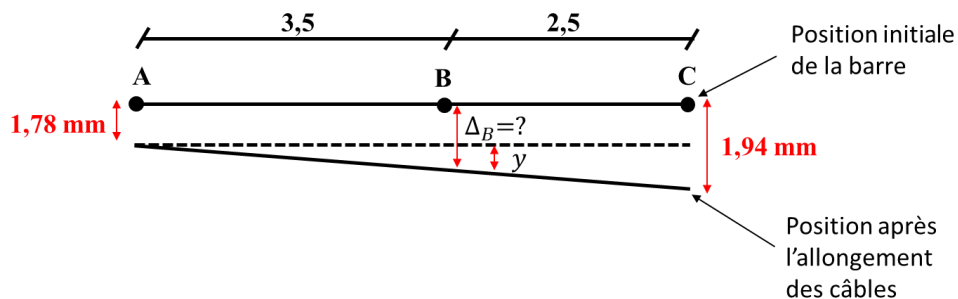
$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 3,5 \times P - 6N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{7}{12}P = 29,17 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow 2,5 \times P - 6N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{5}{12}P = 20,83 \text{ kN}$$

Calculons maintenant le déplacement de la barre aux points A et C :

$$\Delta L_A = \frac{N_1 L}{ES} = \frac{20,83 \times 10^3 \times 3000}{70 \times 10^3 \times 500} = 1,78 \text{ mm}$$

$$\Delta L_C = \frac{N_2 L}{ES} = \frac{29,17 \times 10^3 \times 4000}{200 \times 10^3 \times 300} = 1,94 \text{ mm}$$



Le déplacement vertical de la barre au point B est donné par l'expression suivante :

$$\Delta_B = 1,78 + y$$

$$\frac{y}{3,5} = \frac{1,94 - 1,78}{6} \Rightarrow y = 0,09 \text{ mm}$$

Il en résulte que

$$\Delta_B = 1,87 \text{ mm}$$

Exercice 6 :

1. Détermination de l'hyperstaticité du mécanisme :

- Le nombre des inconnus est 4 (3 efforts de traction dans les tiges et une réaction d'appui au point E)
- Équations d'équilibre de la barre 4 : 3 équations dans le plan

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow R_E = 0$$

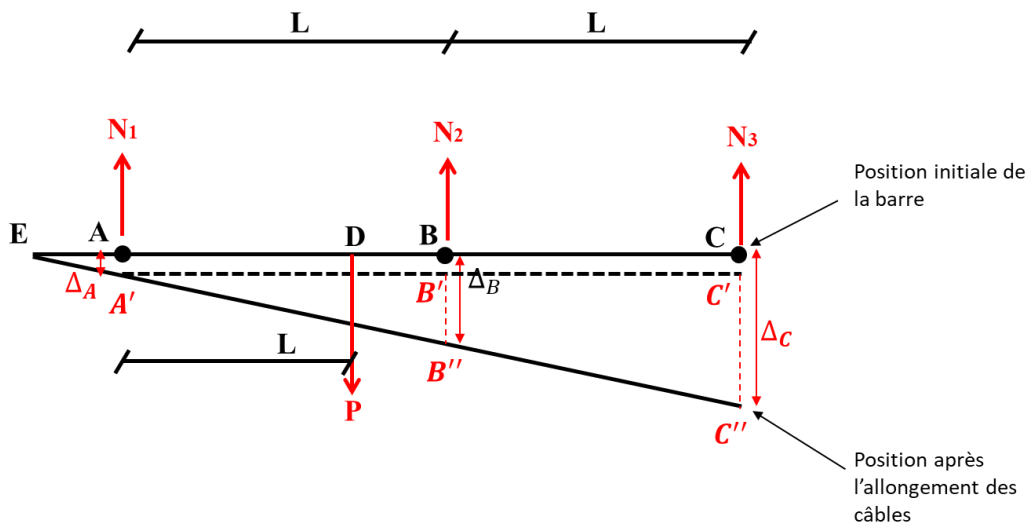
$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 = P$$

$$\sum M_{/E} = 0 \Rightarrow 2L \times N_3 - \left(\frac{2L}{3}\right)P + L \times N_2 = 0$$

$h=4-3 = 1 \rightarrow$ système hyperstatique de degré 1.

2. Efforts dans les fils

Le système est statiquement indéterminé, nous devons recourir aux déformations de la structure pour trouver une autre équation. Comme la barre est rigide le seul mouvement qu'elle peut effectuer est une rotation autour de la liaison E. la ligne discontinue représente la position finale après l'application de la force P.



Comme la barre est rigide, les triangles semblables A'C''C' et A'B''B' fournissent une relation simple entre les déformations des deux tiges, à savoir :

$$\frac{\Delta_C - \Delta_A}{2L} = \frac{\Delta_B - \Delta_A}{L} \Rightarrow 2\Delta_A - \Delta_B - \Delta_C = 0$$
$$2\frac{N_1L}{ES} - \frac{N_2L}{ES} - \frac{N_3L}{ES} = 0 \Rightarrow 2N_1 - N_2 - N_3 = 0$$

En remplaçant ce résultat dans les équations d'équilibre, on obtient :

$$N_1 = \frac{P}{2}$$

$$N_2 = \frac{P}{3}$$

$$N_3 = \frac{P}{6}$$

Chapitre 4 : Cisaillement

Exercice 1 :

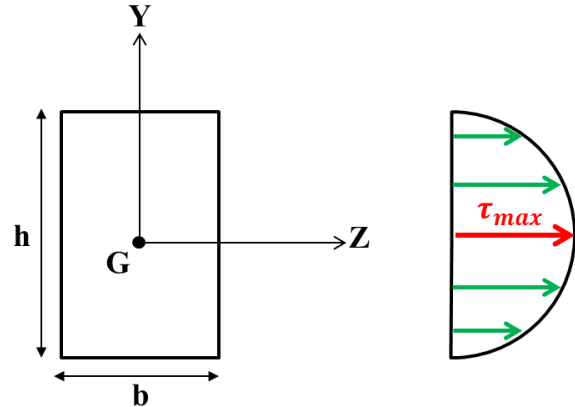
Représentation du diagramme de contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant, et calcul de la contrainte maximale :

$$\tau = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Pour $y = 0 \Rightarrow \tau = \tau_{max} = \frac{2V}{3b \cdot h}$

AN

$$\tau_{max} = \frac{2}{3} \times \frac{233 \times 10^3}{150 \times 300} = 3,45 \text{ MPa}$$



Exercice 2 :

Calcul de la contrainte moyenne de cisaillement sur le plan a-a:

$$\tau_{max} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{A} = \frac{40 \times 10^3 \times 0,707}{200 \times 300} = 0,47 \text{ MPa}$$

Exercice 3 :

- Calcul de la contrainte moyenne dans le joint :

$$\tau_{max} = \frac{F}{2A} = \frac{12 \times 10^3}{2 \times 120 \times 360} = 13,9 \text{ MPa}$$

Exercice 4 :

1. Calcul de la résistance maximale au cisaillement de la colle :

$$\tau_{max} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} = \frac{40 \times 10^3 \times 0,966}{50 \times 40} = 19,31 \text{ MPa}$$

2. Calcul de la contrainte de compression :

$$\sigma = \frac{F \cdot \sin \alpha}{A} = \frac{40 \times 10^3 \times 0,966}{50 \times 40} = 5,17 \text{ MPa}$$

3. Calcul de l'intensité maximale de la force applicable F :

$$\tau_{max} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} \Rightarrow F = \frac{A \cdot \tau_{max}}{\cos \alpha} = \frac{50 \times 40 \times 10}{0,966} = 20,7 \text{ kN}$$

Chapitre 5 : Torsion

Exercice 1 :

1. Calcul de la contrainte tangentielle maximale :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R$$

$$I_\rho = \frac{D^4}{32} = \frac{60^4}{32} = 4,05 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R = \frac{3 \times 10^6}{4,05 \times 10^5} \times 30 = 220 \text{ MPa}$$

2. Calcul de la distorsion :

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho \quad (\rho = R)$$

$$\tau_{max} = G \cdot \theta \cdot R \Rightarrow \theta = \frac{\tau_{max}}{G \cdot R}$$

L'angle de distorsion sur une longueur de 600 mm du cylindre est :

$$\theta = \frac{\tau_{max} \cdot L}{G \cdot R} = \frac{220 \times 600}{80 \times 10^3 \times 30} = 0,055 \text{ rad}$$

Exercice 2 :

$$\theta = 73^\circ \cdot m^{-1} = \frac{73\pi}{180} = 0,00127 \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$$

D'où la contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{max} = G \cdot \theta \cdot R = 80 \times 10^3 \times 0,00127 \times 3,5 = 356 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = 356 \text{ MPa}$$

Note :

La contrainte maximale peut être calculée par la méthode suivante :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R$$

$$I_\rho = 235,7 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{24 \times 10^3}{235,7} \times 3,5 = 356 \text{ MPa}$$

Exercice 3 :

1. Calcul du module d'élasticité transversal G du cuivre testé :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R$$

$$I_\rho = \frac{D^4}{32} = \frac{25^4}{32} = 1,22 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R = \frac{210 \times 10^3}{1,22 \times 10^4} \times 12,5 = 215,16 \text{ MPa}$$

De l'autre côté, on a :

$$\tau_{max} = G \cdot \theta \cdot R$$

D'où

$$G = \frac{\tau_{max}}{\theta \cdot R}$$

$$\theta = 4,9^\circ \cdot \text{m}^{-1} = \frac{4,9\pi}{180} = 8,55 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$$

On aura

$$G = \frac{\tau_{max}}{\theta \cdot R} = \frac{215,16}{8,55 \times 10^{-5} \times 12,5} = 106,85 \text{ GPa}$$

2. Détermination de l'angle de torsion

$$\tau_{max} = G \cdot \theta \cdot R$$

D'où

$$\theta = \frac{\tau_{max}}{G \cdot R} = \frac{140}{106,85 \times 10^3 \times 12,5} = 0,000104 \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$$

Exercice 4 :

• Détermination du diamètre d :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_\rho} R = G \cdot \theta \cdot R$$

Avec

$$\theta = 1,8^\circ \cdot \text{m}^{-1} = \frac{1,8\pi}{180} = 3,14 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$$

Il en résulte

$$I_\rho = \frac{M_t}{G \cdot \theta} = \frac{D^4}{32} \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{G \cdot \theta}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 3000}{75 \times 10^3 \times 3,14 \times 10^{-5}}} = 10,676 \text{ mm}$$

Chapitre 6 : Flexion simple

Exercice 1 :

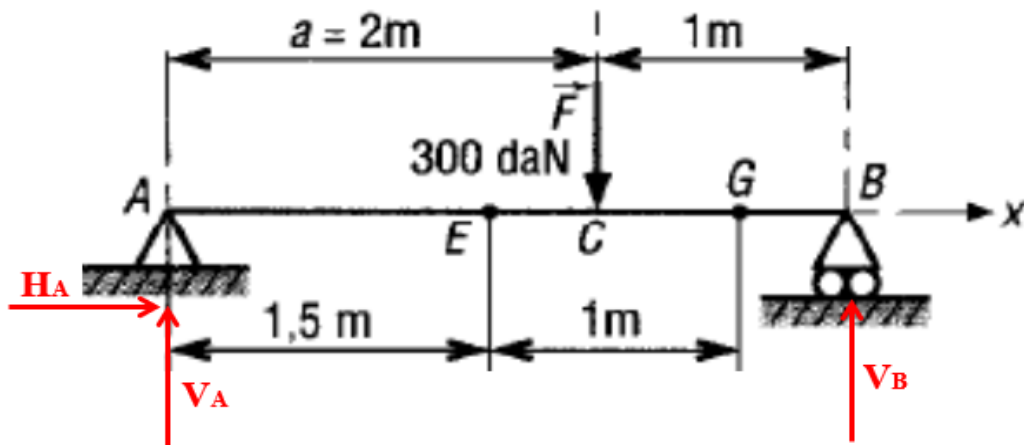
1. Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = F = 300 \text{ daN}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 3 \times V_B - 2F = 0 \Rightarrow V_B = \frac{2}{3}F = 200 \text{ daN}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 3 \times V_A - F = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{3}F = 100 \text{ daN}$$



2. Calcul des efforts internes en E et G :

Coupe 1 $0 \leq x \leq 2$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T - V_A = 0 \Rightarrow$$

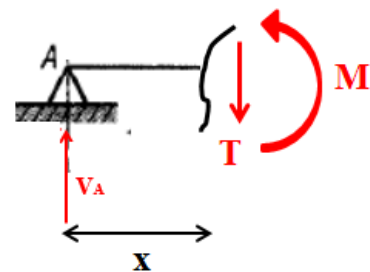
$$T(x) = V_A = 100 \text{ daN}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M - V_A x = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = V_A x = 100x$$

Point E ($x=1,5$ m) :

$$T(1,5) = 100 \text{ daN} \quad \text{et} \quad M(1,5) = 150 \text{ daN.m}$$



Coupe 2 $2 \leq x \leq 3$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T - V_A + F = 0 \Rightarrow$$

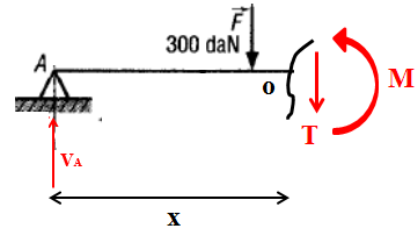
$$T(x) = V_A - F = -100 \text{ daN}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M - V_A x + F(x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = (V_A - F)x + 2F = -200x + 600$$

Point G ($x=2,5$ m) :

$$T(2,5) = -100 \text{ daN} \quad \text{et} \quad M(1,5) = 100 \text{ daN.m}$$



Exercice 2 :

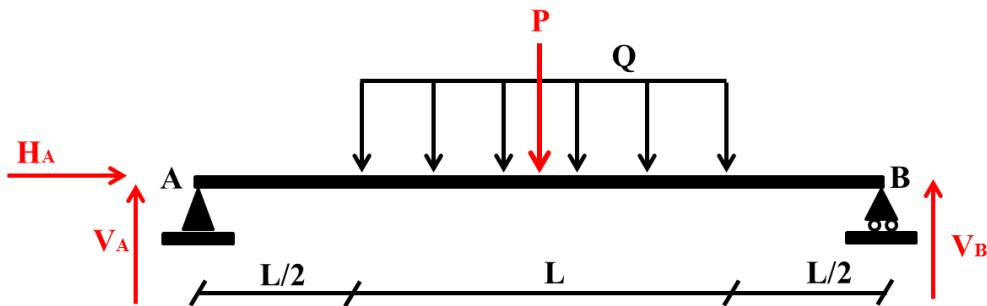
1. Calcul des réactions :

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

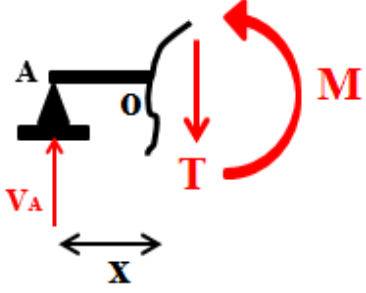
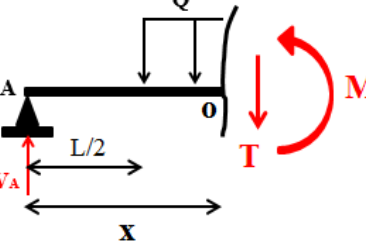
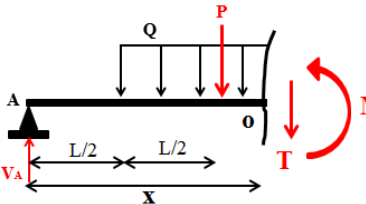
$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = QL + P = 30 \text{ t}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 2L \times V_B - QL^2 - PL = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{2}(P + QL) = 15 \text{ t}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 2L \times V_A - QL^2 - PL = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{2}(P + QL) = 15 \text{ t}$$



2. Calcul des efforts internes et dessin des diagrammes T et M :

<p>Coupe 1 $0 \leq x \leq 2$:</p> $\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T - V_A = 0 \Rightarrow$ $T(x) = V_A = 15 \text{ t}$ $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M - V_A x = 0 \Rightarrow$ $M(x) = V_A x = 15x$ $M(0) = 0 \text{ et } M(2) = 30 \text{ t.m}$	
<p>Coupe 2 $2 \leq x \leq 4$:</p> $\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + Q \left(x - \frac{L}{2} \right) - V_A = 0 \Rightarrow$ $T(x) = -Qx + V_A + Q \frac{L}{2} = -5x + 25$ $T(2) = 15 \text{ t et } T(4) = 5 \text{ t}$ $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M + \frac{1}{2} Q \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 - V_A x = 0 \Rightarrow$ $M(x) = -\frac{Q}{2} x^2 + \left(\frac{QL}{2} + V_A \right) x - \frac{QL^2}{8}$ $= -\frac{5}{2} x^2 + 25x - 10$ $M(2) = 30 \text{ t.m et } M(4) = 50 \text{ t.m}$	
<p>Coupe 2 $4 \leq x \leq 6$:</p> $\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + Q \left(x - \frac{L}{2} \right) + P - V_A = 0 \Rightarrow$ $T(x) = -Qx + V_A + Q \frac{L}{2} - P = -5x + 15$ $T(4) = -5 \text{ t et } T(6) = -15 \text{ t}$ $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow$ $M + \frac{1}{2} Q \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 - V_A x + P(x - L) = 0 \Rightarrow$ $M(x) = -\frac{Q}{2} x^2 + \left(\frac{QL}{2} + V_A - P \right) x - \frac{QL^2}{8} + PL$ $M(x) = -\frac{5}{2} x^2 + 15x + 30$ $M(4) = 50 \text{ t.m et } M(6) = 30 \text{ t.m}$	

Coupe 4 $0 \leq x \leq 2$:

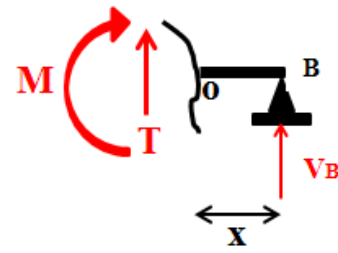
$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + V_B = 0 \Rightarrow$$

$$T = -V_B = -15 \text{ t}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M - V_B x = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = 15x$$

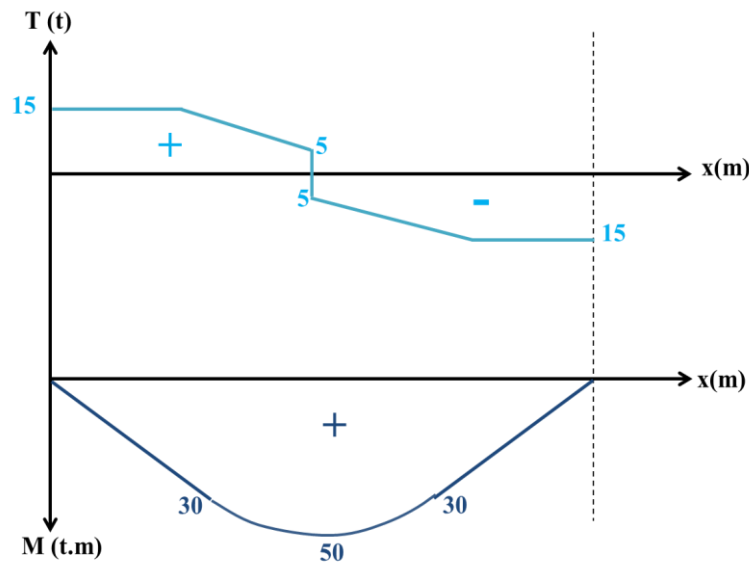
$$M(0) = 0 \text{ et } M(2) = 30 \text{ t.m}$$



Note :

Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Échelle des forces : 1 cm 1600 daN, des moments : 1cm 1600 daN.m



3. Vérification des conditions de résistance :

- Contrainte de flexion

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{I_{Gz}} \cdot y_{max}$$

$$M_f = M_{max} = 50 \text{ t.m} ; y_{max} = \frac{h}{2} = 22,5 \text{ cm} ; I_{Gz} = \frac{bh^3}{12} = 2,28 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{50 \times 10^5}{2,28 \times 10^5} \times 22,5 = 493,42 \leq \underline{\sigma} = 1600 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow \text{Condition vérifiée}$$

- Contrainte de cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{2}{3} \frac{T}{b \cdot h} \text{ avec } T = T_{max} = 15 \text{ t}$$

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 15 \times 10^3}{3 \cdot 30 \times 45} = 16,66 \leq \bar{\tau} = 1100 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow \text{Condition vérifiée}$$

Exercice 3 :

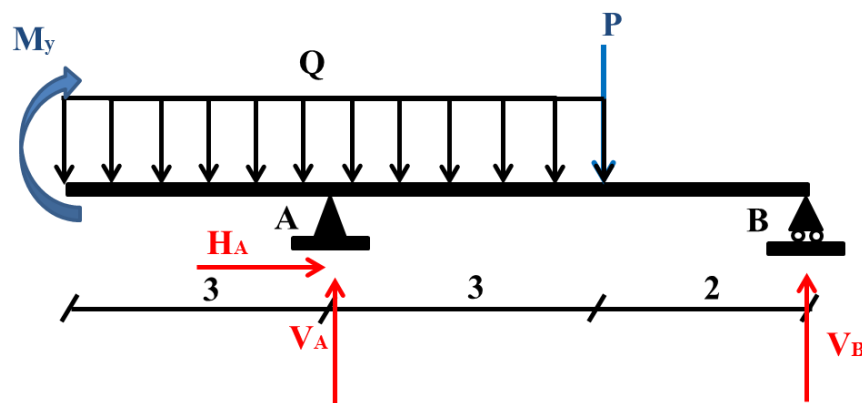
1. Calcul des réactions :

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 24 + 20 = 44 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 5 \times V_B - 60 - 20 \times 3 = 0 \Rightarrow V_B = 24 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/B} = 0 \Rightarrow 5 \times V_A - 120 - 40 + 60 = 0 \Rightarrow V_A = 20 \text{ kN}$$



2. Calcul des efforts internes et dessin des diagrammes T et M :

Coupe 1 : $0 \leq x \leq 3$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + Qx = 0 \Rightarrow$$

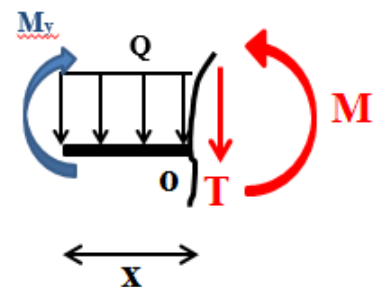
$$T(x) = -Qx = -4x$$

$$T(0) = 0 \text{ et } T(3) = -12 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M + \frac{1}{2} Qx^2 - 60 = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = -2x^2 + 60$$

$$M(0) = 60 \text{ kN.m et } M(3) = 42 \text{ kN.m}$$



Coupe 2 : $3 \leq x \leq 6$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + Qx - V_A = 0 \Rightarrow$$

$$T(x) = -Qx + V_A = -4x + 20$$

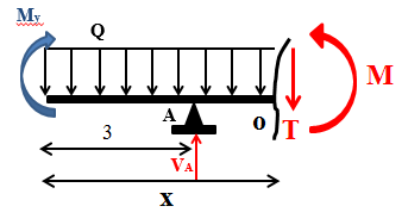
$$T(3) = 8 \text{ kN} \text{ et } T(6) = -4 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow$$

$$M + \frac{1}{2}Qx^2 - 60 - (x-3)V_A = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -2x^2 + 20x$$

$$M(3) = 42 \text{ kN.m} \text{ et } M(6) = 48 \text{ kN.m}$$

**Coupe 3 : $6 \leq x \leq 8$:**

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + 6Q - V_A + P = 0 \Rightarrow$$

$$T(x) = -24 \text{ kN}$$

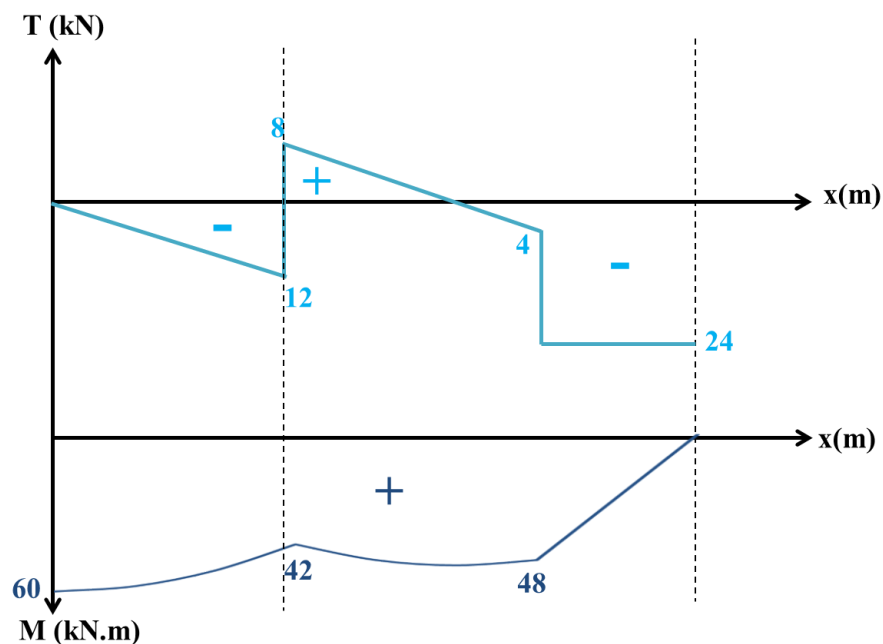
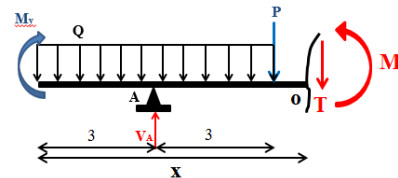
$$T(6) = T(8) = -24 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow$$

$$M + 6Q(x-3) - 60 + P(x-6) - V_A(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -24x + 192$$

$$M(6) = 48 \text{ kN.m} \text{ et } M(8) = 0$$

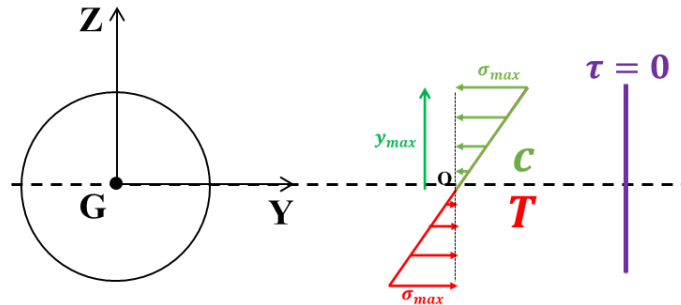


3. Distribution des contraintes normale et tangentielle :

$$M_{max} = 60 \text{ kN.m (} x = 0 \text{) et } T = 0$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_{Gz}} \cdot y_{max} \quad \text{avec } M_{fmax} = 60 \text{ kN.m ; } y_{max} = \frac{D}{2} ; I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_{Gz}} \cdot y_{max} = \frac{60 \times 10^4}{\frac{\pi D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{6114,64}{D^3}$$



4. Dimensions de la section

Le dimensionnement à la condition de résistance se fait selon la condition :

$$\sigma_{max} \leq \bar{\sigma}$$

$$\frac{6114,64}{D^3} \leq \bar{\sigma} = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow D \geq 18,3 \text{ cm}$$

Exercice 4 :

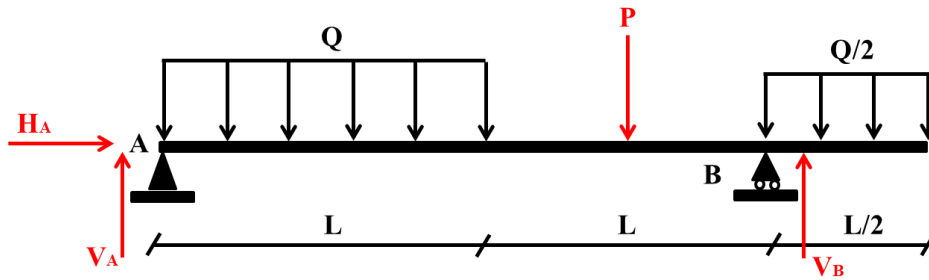
1. Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_{/X} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow V_A + V_B = \frac{5}{4}QL + P = 35 \text{ t}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{/A} = 0 &\Rightarrow 2L \times V_B - \frac{1}{2}QL^2 - \frac{3}{2}PL - \frac{9}{16}QL^2 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{4}(3P + \frac{17}{8}QL) \\ &= 18,13 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{/B} = 0 &\Rightarrow 2L \times V_A - \frac{3}{2}QL^2 - \frac{1}{2}PL + \frac{1}{16}QL^2 = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{4}(P + \frac{23}{8}QL) \\ &= 16,87 \text{ t} \end{aligned}$$



2. Calcul des efforts internes et dessin des diagrammes T et M :

Coupe 1 : $0 \leq x \leq 4$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T - Qx - V_A = 0 \Rightarrow$$

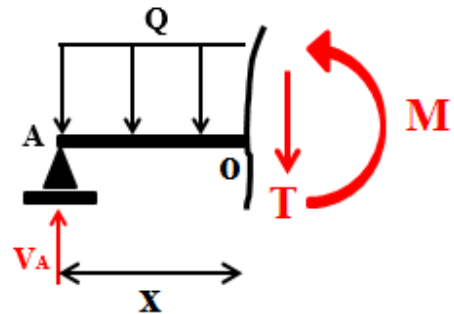
$$T(x) = -Qx + V_A = -5x + 16,87$$

$$T(0) = 16,87 \text{ t et } T(4) = -3,13 \text{ t}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M + \frac{1}{2}Qx^2 - V_Ax = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = -\frac{Q}{2}x^2 + V_Ax = -\frac{5}{2}x^2 + 16,87x$$

$$M(0) = 0 \text{ et } M(4) = 27,48 \text{ t.m}$$



Coupe 2 : $4 \leq x \leq 6$:

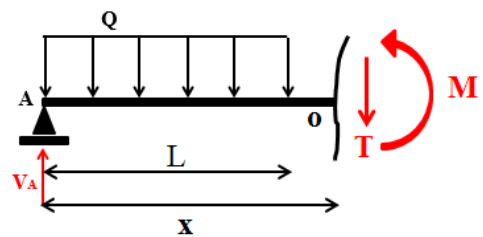
$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + QL - V_A = 0$$

$$\Rightarrow T = -QL + V_A = -3,13 \text{ t}$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M + QL\left(x - \frac{L}{2}\right) - V_Ax = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = (V_A - QL)x + \frac{Q}{2}L^2 = -3,13x + 40$$

$$M(4) = 27,48 \text{ t.m et } M(6) = 21,22 \text{ t.m}$$



Coupe 3 : $6 \leq x \leq 8$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T + QL + P - V_A = 0$$

$$\Rightarrow T = -QL + V_A - P = -13,13 t$$

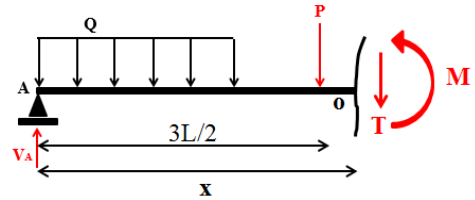
$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow$$

$$M + P \left(x - \frac{3L}{2} \right) + QL \left(x - \frac{L}{2} \right) - V_A x = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = (V_A - QL - P)x + \frac{1}{2}QL^2 + \frac{3}{2}PL$$

$$= -13,13x + 100$$

$$M(4,5) = 21,22 t.m \text{ et } M(6) = -5,04 t.m$$



Coupe 4 : $0 \leq x \leq 2$:

$$\sum F_{/Y} = 0 \Rightarrow T - Q \frac{x}{2} = 0$$

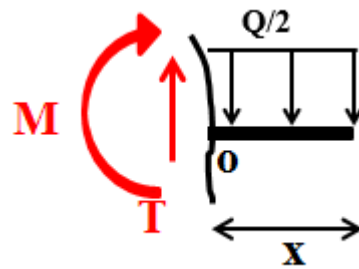
$$\Rightarrow T = Q \frac{x}{2} = \frac{5}{2}x$$

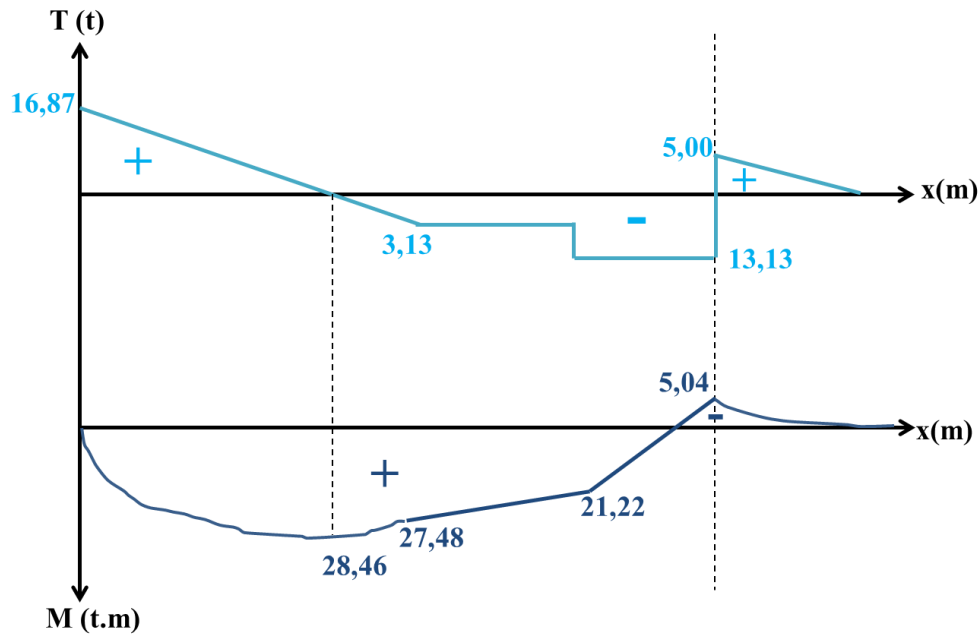
$$T(0) = 0 \text{ et } T(2) = 5 t$$

$$\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow M + \frac{1}{4}Qx^2 = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{1}{4}Qx^2 = -\frac{5}{4}x^2$$

$$M(0) = 0 \text{ et } M(2) = -5 t.m$$





3. Sections dangereuses

$$M = M_{fmax} = 28,46 \text{ t.m pour } x=3,37 \text{ m}$$

$$T = T_{max} = 16,87 \text{ t pour } x=0$$

$$M = 21,22 \text{ t.m et } T = 13,13 \text{ t pour } x=6 \text{ m}$$

4. Dimensions de la section

- Contrainte de flexion

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_{Gz}} \cdot y_{max} \quad \text{avec } M_{fmax} = 28,46 \text{ t.m} ; y_{max} = \frac{h}{2} ; I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{I_{Gz}} \cdot y_{max} = \frac{28,46 \times 10^5}{\frac{35 \times 50^3}{12}} \cdot \frac{50}{2} = 195,55 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \leq \bar{\sigma} = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

=> condition vérifiée

- Contrainte de cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{2}{3} \frac{T}{b \cdot h} \quad \text{avec } T = T_{max} = 16,87 \text{ t}$$

$$\tau_{max} = \frac{2}{3} \frac{T}{b \cdot h} = \frac{16,87 \times 10^3}{3 \times 35 \times 50} = 6,42 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \leq \bar{\tau} = 1100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

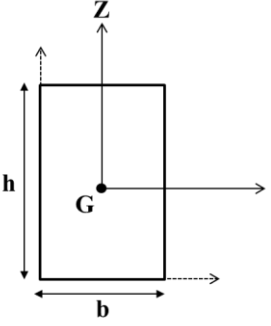
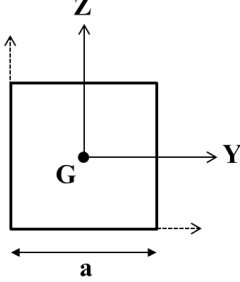
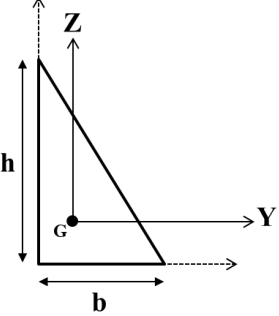
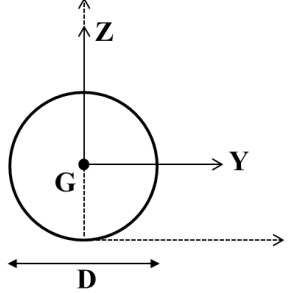
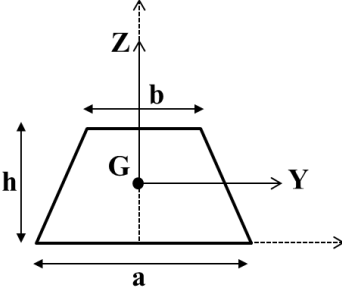
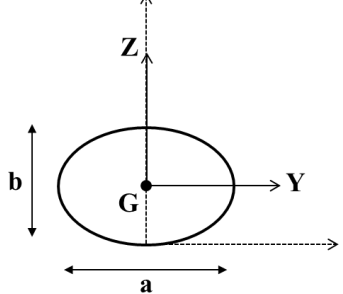
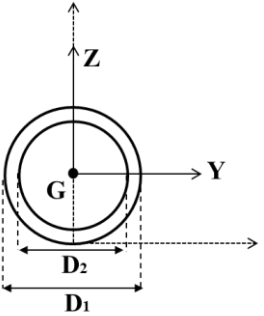
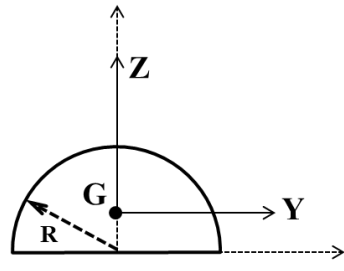
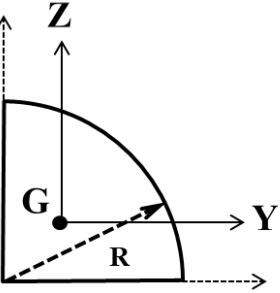
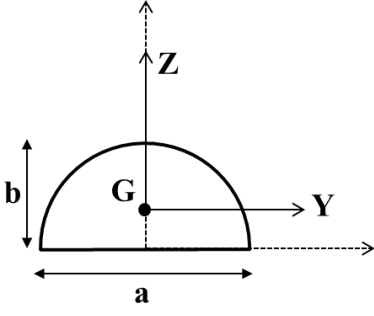
=> condition vérifiée

Références bibliographiques

1. Jean-Claude Doubrère, Résistance des matériaux : cours et exercices corrigés, 10 ed, Eyrolles, paris, 2001.
2. William A Nash, Résistance des matériaux T1 : Cours et problèmes, 2 ed, McGraw-Hill, USA, 1984.
3. Alexandru Dobrescu, Quelques chapitres de résistance des matériaux, Office des publications universitaires, 1991.
4. René Basquin; Georges Lemasson, Résistance des matériaux, Delagrave, Paris, 1964.
5. Anne-Françoise Decelle ; Dominique Legendre, Mécanique appliquée au génie civil : résistance des matériaux, initiation à l'élasticité, calcul des structures, Eyrolles, Paris, 1983.
6. Ferdinand Beer; E Russell Johnston; Jr John DeWolf; David Mazurek. Mechanics of materials. McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 6th edition, 2012.
7. Arnaud Delaplace ; Fabrice Gatuingt ; Frédéric Ragueneau, Mécanique des structures : Résistance des matériaux, Dunod, 2008.
8. Golay F, Résistance des matériaux – Polycopiés. ISITV, Toulon et Var, 2005, 87p.
9. Mourad Khelifa, Résistance des matériaux : Cours et exercices corrigés Casteilla, 2010.
10. Bourahla Nouredine, Résistance des matériaux de base, Groupement économique de contrôle technique de la construction, 2005.

Annexe

Annexe A : Formules géométriques

	$Y_G = \frac{b}{2}; Z_G = \frac{h}{2}$ $S = bh$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{b^3h}{12}$		$Y_G = \frac{a}{2}; Z_G = \frac{a}{2}$ $S = a^2$ $I_y = \frac{a^4}{12}$ $I_z = \frac{a^4}{12}$
	$Y_G = \frac{b}{3}; Z_G = \frac{h}{3}$ $S = \frac{bh}{2}$ $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{b^3h}{36}$		$Y_G = 0; Z_G = \frac{D}{2}$ $S = \frac{\pi D^2}{4}$ $I_y = \frac{\pi D^4}{64}$ $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$
	$Y_G = 0; Z_G = \frac{(2a + b)h}{3(a + b)}$ $S = \frac{h}{2}(a + b)$ $I_z = \frac{(a^2 + 4ab + b^2)h^3}{36(a + b)}$		$Y_G = 0; Z_G = \frac{b}{2}$ $S = \frac{\pi ab}{4}$ $I_y = \frac{\pi ab^3}{4}$ $I_z = \frac{\pi a^3b}{4}$
	$Y_G = 0; Z_G = \frac{D_1}{2}$ $S = \frac{\pi}{4}(D_1^2 - D_2^2)$ $I_y = \frac{\pi}{64}(D_1^2 - D_2^2)$ $I_z = \frac{\pi}{64}(D_1^2 - D_2^2)$		$Y_G = 0; Z_G = \frac{4R}{3\pi}$ $S = \frac{\pi R^2}{2}$ $I_y = 0,1098R^4$ $I_z = \frac{\pi R^4}{8}$
	$Y_G = \frac{4R}{3\pi}; Z_G = \frac{4R}{3\pi}$ $S = \frac{\pi R^2}{4}$ $I_y = \frac{\pi R^4}{16}$ $I_z = \frac{\pi R^4}{16}$		$Y_G = 0; Z_G = \frac{4b}{3\pi}$ $S = \frac{\pi ab}{4}$ $I_y = 0,1098ab^3$ $I_z = \frac{\pi a^3b}{8}$