REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVESITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

FACULTE DES SCIENCES ST SCIENCE DE L'INGENIEURIE
DEOARTEMENT D'INFORMATIQUE

Mémoire en vus de l'obtention d'un diplôme de licence en

Mathématiques

Option : Mathématiques

Thème

Transformation de Fourier des distributions

Et Application

Proposé et Encadré par :
Prof. BEN ABDERRAHMANE BENYATTOU

Présenté par :
- KHADRA BOUMAYDOUNA
- TOABA NABILA

N° d'ordre :........./2011-PFE/DGI

Dédicaces

Ma cher mère que nous a ressuscités ensemble, après la mort du père ,qui a consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être .qu'Allah leur assure une longue vie pour que je puisse veiller à leur bonheur !

Mes grands frères , Mohamed , Zakaria

Mes petits frère , Ali , Jackobe , Abderrahmane

Ma tante Nacira et son mari Mohamed

Toute ma famille

Tout ce qui j'aime .

Mon encadreur le professeur Benabderrahmane Benyattou.

Je dèdie ce mémoire

TOABA _NABILA

Dédicaces

Mes chers parents ,qui ont consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être .qu'Allah leur assure une longue vie pour que je puisse veiller à leur bonheur !

Mes frères.

Mes sœurs.

Mon cher oncle Mohamed

Toute ma famille

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le professeur Benabderrahmane Benyattou.

Je dédié ce mémoire

KHADRA _BOUMAYDOUNA

Remerciements

Au abord de remercier le Dieu Tout Puissant nous fournir la force et la patience a fin d'arrivé au terme de nos formation .

Nos vifs remerciements à notre encadreur **Mr. Ben Abderrahmane Benyattou** , professeur en mathématiques à l'université de Laghouat pour les moyens qu'il nous procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Nous songeons plus particulièrement a **Mr. Mokhtari Abdelkader** ,professeur en mathématiques à l'université de Laghouat pour ces inestimables conseils , ainsi que **Mr. Belabbaci Yousef** et **Mr. Ouinten Yousef** maitre de conférences en mathématiques à l'universitè de Laghouat , **Mr. Cheteih** et **Mr. Smail** pour leurs aides.

Nos remerciements vont également à **Mr. Messelmi Mohamed** , chef de département d'informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres ; sans oublier tout le personnel et les étudient du département maths et informatique de l'universitè de Laghouat (AMAR TELIDJI) .

Un grand remerciement à toutes qui ont participé de près ou de loin pour atteindre notre objectif.

Introduction

L' analyse harmonique est , à l'origine ,la branche des mathématiques qui traite des signaux périodiques , ou quasi périodiques .introduite par Fourier pour l'étude de l'équation de la chaleur ,ou il remporta un grand succès ,elle est très vite devenue un outil essentiel non seulement du mathématicien (pour la résolution de certaines équations , comme les équations des ondes ou les équations de convolution .

L'idées de base de l'analyse harmonique sont très simples , et peuvent essentiellement se résumer dans cette profession de foi : tout ramener à des fonctions de base dont les propriétés sont bien connue (fonctions sinus et cosinus , ou exponentielle) , en exprimant les '' fonctions générales '' sous la forme de sommes ,ou ou plus généralement d'intégrales , de telles ''fonctions élémentaires'' .mais leur application pratique pose un certain nombre de difficultés tant sur le plan théorique (qu'est –ce que au juste qu'une ''fonction générale '' ?) que sur le plan pratique (comment réaliser une telle décomposition , ou au contraire comment recomposer la fonction à partir de son expression dans ces fonctions élémentaires ; quelles sont les propriétés de l'image décomposée d'une fonction , ect.).

Ces problèmes ont été énormément débattus par les mathématiciens depuis le siècle dernier , mais ce n'est qu'assez récemment qu'une solution pleinement satisfaisante a été trouvée , en fournissant un carde élémentaire et générale à la transformation de Fourier :en recommençant on chapitre 1 par la théorie de distributions ,conçue par L. Shwartz nous exposerons donc en premier les principaux éléments , .nous évoquerons au passage le concept important de convolution de deux fonctions ou de deux distributions , qui joue un rôle essentiel par exemple en électronique ou en optique.

Nous expliquerons ensuite , dans la troisième chapitre , la notion de transformée de Fourier des distribution ,ainsi que ses propriétés usuelles , le calcule pratique des transformées de Fourier est abordé dans l'application .il existe un certain nombre de méthodes algébriques permettant de passer d'une fonction à sa transformée.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre III: Transformation de Fourier des distributions

I. 1 Espaces de fonction de test :

Nous désignerons toujours une fonction de test par $\varphi(t)$ on plus simplement , la variable de dèfinition ètant (t) en nous bornont, sauf lors-que nous prèciserons le contraire ,ou cas de fonction dèfinies sur R .

I. 1-1 Espace Ɛ *:*

Définition 1 :

Est l'ensemble des fonctions complexes sur R qui sont indéfiniment dérivables (de class C^{∞}) , c'est un espace vectoriel complexe.

- Le produit de deux fonctions $\varphi_{1,}\varphi_2 \in$ Ɛ et sa dérivée d'ordre (n∈N) est donnée par la formule de Leibnitz :

$$(\varphi_{1,}\varphi_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; \varphi_1^{(k)}\varphi_2^{(n-k)}$$

Un sous espace implorant de Ɛ , on noté o_M , est constituè par les fonctions dites tempèrèe qui sont indèfiniment dèrivable et à croissance lente ainsi que toute leur dérivées.

Définition 2 :

Une fonction φ est à croissance lente si elle est majorée par un polynôme ,on ce qui est équivalent si

$\exists$ n$\in N$: $\varphi(t) = o\,(|t|^n), |t| \to +\infty$

$$\Leftrightarrow \exists\, A > 0 \qquad |\varphi(t)| \leq A\,|t|^n \text{ ,t} \to +\infty$$

L'espace Ɛ est muni d'une topologie définie par une famille de semi-normes .c'est la topologie de la convergence uniforme sur toute compact de la fonction et de chacune de ses dérivées .une suite (φ_n) converge vers 0 pour cette topologie si les suites $(\varphi_n^{(m)})$ convergent uniformément vers 0 dans toute compact K fixe et pour tout m

$$\forall \varepsilon > 0, \forall m \in N:, \forall K, \exists n \in N: n_1 \geq n \;\; => \; \sup \left|\varphi_n^{(m)}(t)\right| \leq \varepsilon \text{ , t} \in K.$$

I .1-2 Espace $\mathfrak{J}$:

Définition 3 :

Est le sous espace de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions complexes sur R qui sont indéfiniment dérivables et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dèrivèe.une fonction est dite à décroissance rapide si elle tend vers 0 à l'infini plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|t|}$:

$$\forall n \in N: \varphi(t) = o\,(\frac{1}{|t^n|})\;, |t| \to \infty <=> \lim_{t\to\infty} \varphi(t)|t|^n \to 0$$

* Il en résulte qu'une fonction $\varphi \in \mathfrak{J}$ est bornée sur *IR* ainsi que toutes ses dérivée et que :

$$\forall (N, n) \in \mathrm{lN}^2 : \lim_{|t|\to\infty} t^N \varphi(t)^{(n)} = 0$$

I .1-2-1 Convergence dans $\mathfrak{J}$:

Une suite (φ_n) converge vers 0 dans S si les suites (p(t) $\varphi_n^{(m)}(t)$) convergent uniformèment vers 0 dans lR pour tout m , p(t) étant un polynôme quelconque

$\forall \varepsilon > 0, \forall p(t), \forall m \in$ lN, $\exists$N $\in$ lN: n $> N =>$ sup $\left| p(t)\varphi_n^{(m)}(t) \right| < \varepsilon$,t∈lR

*On démontre que la topologie propre est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{E}$,cela implique que si une suite (φ_n) dans $\mathfrak{J}$, elle converge pour la topologie induite ce qui peut $\hat{e}$tre vèrifiè directement .

I .1-3 Espace D :

Définition 4 :

L'espace D (IR) est le sous-espace vectorielle de $\mathfrak{J}$ et de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions

indéfiniment dérivables à support compact .

D (IR) = $\{f{:}IR \;\to\; K\;(IR\;\vee C\;)$ / f ∈ C^∞ et supp $f \;=\;$ K compact $\}$

I .1-3-1 support d'une fonction :

Soit f une fonction de IR^n dans IK (IR ∨ C)

Le support de f notée supp f est l'adhérence de l'ensemble des x ∈ IR^n tels que f(x)≠0

Supp f = { x ∈ IR^n / f(x) ≠ 0 }

Remarques :

Le support de f est donc un ensemble ferme par définition alors on peut remplacer dans la suite support bornée par support compact .

Quelques propriétés de l'espace D :

1- D est espace vectorielle de dimension infini
2- Si $\varphi \in$ D alors $\dot{\varphi} \in D$
3- Si $\varphi \in D$ et $\alpha: IR \rightarrow C$ $indéfiniment$ $dérivable$ $alors$ $\alpha\varphi \in D$
4- $\forall\, g \in \mathcal{E}, \forall\, \emptyset \in D \;=>\; g\,.\,\varphi \in D$ de $plus$ $supp\,(\,g.\varphi) \subset supp\emptyset$
5- $\forall\, \emptyset_1, \emptyset_2 \in \mathrm{D}, supp\,(\,\emptyset_1.\emptyset_2\,) \subset supp\; \emptyset_1 \cap supp\; \emptyset_2$
6- $supp\;\dot{\varphi} \subset supp\varphi \quad \forall\, \varphi \in D$

Théorème :

Soit un ouvert Ω⊂IR et un compact quelconque K⊂Ω , il existe une fonction $\in D(\Omega)$ égale à 1 dans K .

Toute les données de la fonction sont nulles sur la frontière de son support et aussi sur celle de K .

I .1-3-2 La convergence dans D :

Une suite $(\emptyset_n)_{n>0}$ de fonction de D converge vers une fonction ∅ lorsque n $\rightarrow +\infty$ si :

1) $\exists\, K$ $compact$ de Ω $tels$ que $,\forall\, n \in IN$ $supp\; \emptyset_n \subset K$
2) $\forall k > 0 \qquad \varphi_n^{(k)} \xrightarrow{sur\Omega} \varphi^{(k)}$ uniformement

Résultats :

1)- Si $\varphi_n \overset{D}{\rightarrow} \varphi$ $quand$ $n \rightarrow +\infty$, Alors

- $\dot{\varphi}_{n\rightarrow}\dot{\varphi} \qquad quand\; n \rightarrow +\infty$
- $\alpha\varphi_{n\rightarrow}\alpha\varphi \quad quand\; n \rightarrow +\infty$,$\forall\, \alpha \in$ $C^{\infty}(\Omega)$

2) D⊂ $\mathfrak{J}$⊂ $\mathcal{E}$

3)$\forall\varphi \in \mathcal{E}$ Alors φ $dite$ $fonction$ $test$

I .2 Espace des distributions :

I .2-1 Espace $\grave{D}$:

Définition 5 :

On désigne $\grave{D}(\Omega)$ le dual topologique de $D(\Omega)$ ç'est à dire :

$$\grave{D}(\Omega): \{T: \mathrm{D}(\Omega) \rightarrow \mathrm{K} \text{ linèaire et continue}\}$$

-T$\in \grave{D}(\Omega) \Leftrightarrow T$ *est une distrubution*

***T est linéaire :**

1)$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{D}(\Omega): \mathrm{T}(\varphi_1+\varphi_2)= \mathrm{T}(\varphi_1) + \mathrm{T}(\varphi_2)$
2)$\forall \alpha \in K, \forall \varphi \in D(\Omega): T(\alpha\varphi) = \alpha T(\varphi)$

***T est continue** , $\forall (\varphi_n)$ *une suite de* $D(\Omega)$

Si $\varphi_n \rightarrow \varphi$ *dans* $D(\Omega)$, Alors $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ *dans* K

Notation : $\forall \varphi \in D(\Omega) \quad T: D(\Omega) \rightarrow K$

$$\varphi \rightarrow T(\varphi) = < T, \varphi >$$

Remarques :

- Les Distributions sur Ω constituent un espace vectoriel
  $\forall T_1, T_2 \in \grave{D}(\Omega), \forall \varphi \in D(\Omega) : < T_1 + \grave{T}_2, \varphi > = < T_1, \varphi > + < T_2, \varphi >$
  $\forall T \in \grave{D}(\Omega), \forall \varphi \in D(\Omega), \forall \lambda \in C \quad < \lambda T, \varphi > = \lambda < T, \varphi >$
- L'espace $\grave{D}$ est le dual topologique de D

I .2-1-1 La convergence dans $\grave{D}$:

Une suite de distribution (T_n) converge dans $\grave{D}(\Omega)$ vers la distribution T lorsque la suite $(< T_n, \varphi >)$
Converge dans K vers $< T, \varphi >$ pour tout fonction $\varphi \in D(\Omega)$

$$\lim_n T_n \rightarrow T \quad \Leftrightarrow \lim_n < T_n, \varphi > = < T, \varphi > \quad \forall \varphi \in D$$

I .2-1-2 Support d'une distribution :

Définition 6 :

Une distribution T est dite nul sur un ouvert A⊂IR^n , si et seulement si :

$\forall\varphi \in A :< T,\varphi >= 0$

Le complémentaire de A est un ensemble fermé , appelé le support de T

Proposition 1 :

si T est un distribution , φ une fonction de test et

suppT ∩ suppφ =∅ Alors $< T,\varphi >$ =0

Résultats :

$\forall T_1, T_2 \in \acute{D}(\Omega)$

- Supp $(T_1 + T_2) \subset suppT_1 \cup suppT_2$
- Supp$(\lambda T) = suppT$ $,\forall T \in \grave{D}(\Omega), \forall\lambda \in (R\ OU\ C)$

Thèorème :

Si T est une distribution , φ une fonction de test , et que leurs supports ne se coupent pas $(supp\ T \cap supp\varphi = \emptyset)$ alors $< T,\varphi >= 0$

I .2-1-3 Distribution définie par une fonction de $f \in L^1_{loc}$:

Soit une fonction f localement intégrable (c'est à dire intégrable sur tout compact),elle définit une distribution dite régulière sur une fonction $\varphi \in D$:

$$< T_f,\varphi > =< f,\varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

En effet :

- $< f,\varphi > est\ lin\grave{e}aire$
- $montrons\ que\ < f,\varphi > est\ continue$

Soit (φ_n) une suite de $D(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $D(\Omega)$

Alors

$$\left| < T_f,\varphi_n > - < T_f,\varphi > \right| = \left|\int_\Omega f(t)[\varphi_n(t) - \varphi(t)]dt\right| \leq \int_K |f(t)|\,|\varphi_n(t) - \varphi(t)|dt$$

$$\leq sup_{t\in K}|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \int_K |f(t)|dt$$

Comme f est localement intégrable ,alors :

$$\left| < T_f, \varphi_n > - < T_f, \varphi > \right| \leq c.\ sup_{t\in K}|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \to 0$$

Donc $< T_f, \varphi_n > \to < T_f, \varphi >$ dans K. **d'où** T_f est une distribution.

Remarque :

L'intégrabilité dont il question ici doit être comprise au sens de Lebesgue et non de Riemann

- Il y a des distribution qui ne sont pas définie à partir d'une fonction localement intégrable, dite distribution singulière.

Exemple :

Distribution de Dirac :

$\forall \emptyset \in \boldsymbol{D}\ < \delta_{\boldsymbol{a}}, \emptyset >= \emptyset(\text{a})$.

I .2-1-4 Distribution de type « peigne » :

Puisque l'ensemble des distribution est un espace vectorielle on peut , par exemple définir la distribution $\forall\varphi \in D, < \gamma\delta_1 + \mu\delta_2 + \vartheta\delta_3, \varphi > = \gamma\varphi(1) + \mu\varphi(2) + \vartheta\varphi(3)$

On peut aussi définir $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n = \sum_{n=0}^{N} \delta_n = \sum_{n=0}^{N} \varphi(n)$

Car $\varphi(n) = 0 \quad pour \quad n > N$ Le peigne **Ш** de Dirac est défini par :

$$\text{Ш} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k$$

Théorème :

Soit une suite de fonction $f_n \in L^1_{loc}\ telles\ que$:

La suite (f_n) converge simplement presque partout vers f

Les fonctions f_n sont majorèes en module presque partout par une même fonction g$\in L^1$

Alors, la suite des distribution définie par les fonctions f_n converge dans $\grave{D}$ vers la distribution définie par f.

I .2-2 Espace $\grave{\varepsilon}$:

Il est possible d'étendre la notion de distribution au cas $\acute{o}u$ la fonction $\emptyset \in \mathcal{E}$ Et n'a pas un support compact .

Définition 7 :

$\grave{\varepsilon}$ est le dual topologique de ε , c.a.d :

$\grave{\varepsilon}$ =$\{T\colon \varepsilon \to K(R\c{C})lin\grave{e}aire\ et\ continue\ \}$

Pour que T défini bien une distribution il suffit que suppT ∩ suppφ = K compact.

$$\forall\varphi\epsilon\varepsilon \qquad < T,\varphi > = < T,\alpha\varphi > \quad tq\ \alpha\epsilon D \quad \alpha = 1\ sur\ un\ voisinage\ de\ K$$

$\alpha\ est\ toujours\ existe\ d^{'}apr\grave{e}s\ \ th\grave{e}or\grave{e}me\ 1$(1-3)

I .2-3 espace $\grave{\mathfrak{I}}$ (Distribution Tempérées) :

Définition 8 :

Une distribution sur lR est tempérée ou à croissance lente si elle continue pour la topologie induite par $\mathfrak{I}$. L'ensemble des distributions tempérées noté $\acute{\mathfrak{I}}$ dèfini par :

$$\grave{\mathfrak{I}} = \{T\colon \mathfrak{I} \to K\ \ lin\grave{e}aire\ et\ continue\}$$

Théorème :

Pour qu'une distribution soit tempérée il faut et il suffit qu'elle soit une dérivée (dans $\grave{D}$) d'ui fonction continue à croissance lente.

Résultats :

1-$\grave{\mathfrak{I}}$ est le dual topologique de $\mathfrak{I}$

2- Ɛ⊂ $\grave{\mathfrak{I}} \subset \grave{D}$

3- une fonction $f \in L^1_{loc}$ définit une distribution tempérée lorsque $(f.\varphi)$ est intégrable ,$\forall\varphi \in S$.

4- si $T \in \grave{\mathfrak{I}} => \ \grave{T} \in \grave{\mathfrak{I}}$

I .2-3-1 Caractérisation des distributions Tempérées :

- Les distributions ayant un support compact sont des distributions tempérées
- Les polynômes sont des distributions tempérées
- Le produit d'une fonction bornée par un polynôme est une fonction appartenant à $\grave{\mathfrak{I}}$
- Toute distribution tempérées est une dérivée d'un fonction tempérées .

I .3 Opération sur les distributions :

Soit V un opérateur linéaire continue dans D

$$V : D \to D$$
$$\varphi \to V(\varphi)$$

On dèfinit par transposition dans l'espace $\grave{D}$ un opérateur linéaire continue V^t :

$$V^t : \grave{D} \to \grave{D}$$
$$T \to V^t(T)$$

$$tels\ que\ \forall\varphi \in D, \forall T \in \grave{D} : < V^t(T), \varphi > = < T, V(\varphi) >$$

I. 3-1 Image d'une distribution par un opérateur affine dans *IR* :

Soit V un opérateur continue dans D :

$$\varphi(t) \overset{V}{\to} \varphi(at+b), (a,b) \in \mathrm{IR} \times \mathrm{IR}$$

$s$oit V^t l'opérateur transpose dans $\grave{D}$ tq : $< V^t(T), \varphi > = < T_t , \varphi(at+b) >$

Exemple :

Lorsque T est définie par une fonction $f \in L^1_{loc}$

$$< f(t), \varphi(at+b) > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(at+b)dt$$

$$posons\ Z = at + b \Rightarrow t = \frac{Z-b}{a}$$

$$dZ = \frac{1}{|a|}\,\mathrm{dt}$$

$$< f(t), \varphi(at+b) > = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{Z-b}{a})\, \varphi(Z) dZ$$

$$= \frac{1}{|a|} < f(\frac{Z-b}{a}), \varphi(Z) >$$

$$< f(t), \varphi(at+b) > = \frac{1}{|a|} < f(\frac{t-b}{a}), \varphi(t) >$$

Par analogie ,pour une distribution T

$$V^t(T)_t = \frac{1}{|a|} T_{(\frac{t-b}{a})}, \quad < T_{\left(\frac{t-b}{a}\right)}, \varphi(t) > = |a| < T_t , \varphi(at+b) >$$

I .3-2 Dérivation d'une distribution :

Soit l'opérateur continue V dans D

$$\varphi \to (-1)^n \varphi^n \qquad n \in N^*$$

L' $opèrateurcontinu$ v^t $transposè$ $dans$ $\acute{D}$ définit la dérivée d'ordre n d'une distribution T.

$$V^t(T) = T^{(n)}$$

$d'ou \quad < T^{(n)}, \varphi > = (-1)^n < T, \varphi^{(n)} >$

Résultats :

1-une distribution est toujours indéfiniment dérivable car $\varphi \in D$ $\left(\varphi \in C^{\infty}_{(\Omega)}\right)$

2-la limite d'une dérivée dans $\grave{D}$ est la dérivée de la limite car l'opérateur de dérivation est continue

3- une série convergente dans $\grave{D}$ peut être dérivée terme à terme

4-L'opérateur de dérivation dans $\grave{S}$ et ὲ est continue

5-$supp\ T^{(n)} \subset supp\ T$

Proposition 2 :

Soient T_1 une distribution et T_2 une distribution à support compact alors :

$\grave{T}_1$ est aussi une distribution tempérée et $\grave{T}_2$ aussi une distribution à support compact.

Thèorème:

Si une suite de distribution (T_n) converge dans $\grave{D}$ vers une distribution T, alors la suite des distributions dérivées$(\grave{T}_n)$ converge dans $\grave{D}$ vers la dèrivèe $\grave{T}$ de la distribution T.

Démonstration :

$\forall\varphi \in D, \lim_{n\to+\infty} < T_n , \varphi > =< T, \varphi > \cdots (1)$

D'autre par $< \grave{T}_n, \varphi > = - < T_n , \grave{\varphi} >$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} < \grave{T}_n, \varphi > = \lim\limits_{n\to+\infty} - < T_n , \grave{\varphi} > = -< T, \grave{\varphi} >$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} < \grave{T}_n, \varphi > = - < T, \grave{\varphi} > = -(-< \grave{T}, \varphi >)$

Alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} < \grave{T}_n, \varphi > = < \grave{T} , \varphi >}$

Remarque importante :

Le théorème ci-dessus n'est pas valable au sens de la dérivation des fonctions Par exemple :

Soit la suite (f_n) définie par $f_n = \frac{\sin nx}{n} \forall n \in R$, $\forall x \in R^*$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0 \; car \; |\sin nx| \leq 1$$

D'autre par les fonctions f_n sont dérivables partout et $\grave{f}_n$(x) $= \cos nx$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \grave{f}_n$(x)= $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos nx$ n'existe pas

I.3-3 produit d'une distribution par une fonction C^∞ :

Définition 9 :

Soit T une distribution quelconque est (h) une fonction indéfiniment dérivable sur R ,le produit de T par h est définie par :

$\forall\varphi \in D \; < hT, \varphi > = < T, h\varphi >$

Propriétés :

$\forall T \in \grave{D}, \forall h \in C^{\infty}, \forall \varphi \in D$

$1 - supp\ hT \subset supp\ h \cap supp\ T$

$2 - soit\ \Omega\ un\ ouvert\ tels\ que\ < T, \varphi >= 0\ ou\ h(t) = 0\ alors\ < hT, \varphi > = 0$

I .4-Distribution périodique :

Définition 10 :

Une fonction f est dite périodique de période a si

$\forall\ t \in R: f(t) = f(t - a) ou\ la\ note\ f\ = f_a$ Par analogie, nous donnerons la définition suivante :

Dèfinition 11 :

On dit qu'une distribution T est périodique , de période a ,si

$$T = T_a \quad < T, \varphi > = < T_a, \varphi >$$

soit T $\in \grave{D}\ et\ \varphi \in D$:

- $< T, \varphi > = < T_a, \varphi > = < T, \varphi_{-a} >$
- $< T, \varphi - \varphi_a > = 0$

Exemple :

Soit un peigne de Dirac, $Ш_a = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{na}$ ou a$\in R^+$,

Considérons la translatée d'indice a de ce peigne notée $(Ш_a)_a$

- $< (Ш_a)_a, \varphi > = < (Ш_a), \varphi_{-a} >$
- $< (Ш_a)_a, \varphi > = \sum_{-\infty}^{+\infty} < \delta_{na}, \varphi_{-a} >$
- $< (Ш_a)_a, \varphi > = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{-a}(na) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(na + a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a(n + 1))$
- Lorsque n par court z, on trouve
  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a(n + 1)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$
  $< (Ш_a)_a, \varphi > = < (Ш_a), \varphi > d' ou\ Ш_a$ est périodique de période a.

I .5-Distribution complexe conjugu$\grave{e}$e:

D$\grave{e}$finitions 12:

1−une distribution T est réelle si $< T, \varphi > \in R$, $\forall \varphi \in R$

2 − une distribution quelconque T peut toujours se mettre sous la forme $T = T_1 + iT_2$ tq T_1, T_2deux distributions réelles

$\forall \varphi \in R \ < T, \varphi > = < T_1, \varphi > +i < T_2, \varphi >$

3 − La distribution T^* conjuguée d'une distribution T est définie par la relation :

$< T^*, \varphi > = [< T, \varphi >]^*$ φ est une fonction de test

I .6 Translation ,symétrie ,rotation, homothétie :

Soit φ une fonction test et $a \in R^n$

Notation :

- La fonction Translatée de φ $par\ a\ not\grave{e}e$, $\tau_a(\varphi)$, $\tau_a[\varphi](x) = \varphi(x - a)$
- Le symétrique de φ est la fonction de test notée $\sigma(\varphi)$Définie par :$\sigma[\varphi](x) = \varphi(-x)$
- L'image par rotation R de $\varphi, not\grave{e}e\ p_R[\varphi]$
  $p_R[\varphi](x) = \varphi(R(x))$
- $si\ Kest\ scalaire\ , l^{'}homoth\grave{e}tie\ de\ \varphi\ de\ rapport\ K\ not\grave{e}e\ H_K[\varphi]$
  Tels que : $H_K[\varphi](x) = \varphi(Kx)$

I .6-1-la translation :

$\forall f \in C^\infty < \tau_a(f), \varphi > = \int_{R^n} f(x - a)\varphi(x)dx = \int_{R^n} f(y)\varphi(y + a)dy$

$$=< f, \tau_{-a}[\varphi] >$$

I .6-2-la symétrique :

$\forall \varphi \in D$: $< \delta[T], \varphi > = < T, \delta[\varphi] >$

I .6-3-la Rotation :

$< p_R[T], \varphi > = < T\ , p_{\bar{R}}[\varphi] >$, $\bar{R}$ la rotation inverse de R

I .6-4 -L'homothétie :

$< H_k[T]\ , \varphi > = \ |k|^{-N}\ < T\ , H_{\frac{1}{K}}[\varphi]\ >$

I .7-Produit tensoriel :

Définition 13 :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur R^m et R^n on appelle tensoriel

de f par g,et l'on note $f \otimes g$ la $fonction$ $definie$ sur R^{m+n} par :

$$\forall\, x \in R^m \; et \; \forall\, y \in R^n ,\; (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

Propriétés :

1)-si f et g sont des fonction localement intégrables respectivement sur R^m et R^n alors $f \otimes g$ est localement intégrable sur R^{m+n}

2)- soient $\varphi \in D(R^n) et$. $\Psi \in D(R^n), alors$ $\varphi \otimes \Psi \in$ D(R^{m+n}) on peut donc calculer :

$$< f \otimes g , \varphi \otimes \Psi > = \int_{R^m} \int_{R^n} f(x)\, g(y)\, \varphi(x)\, \Psi(y) dx\, dy$$
$$= \int_{R^m} f(x)\varphi(x) dx \int_{R^n} g(y)\, \Psi(y) dy = < f, \varphi > < g, \Psi >$$

3- cas générale :

Soient $T_1 \in D'(R^m)$, $T_2 \in D'(R^n)$,$\exists!\, T \in D'(R^{m+n})$ appelée le produit tensoriel de T_1 par T_2 , et notée par :

$T_1 \otimes T_2$ qui vérifier : $\forall\, \varphi \in D(R^n)$, $\forall\, \Psi \in D(R^n)$ on a :

$$< T_1 \otimes T_2 \;, \varphi \otimes \Psi > = \; < T_1 , \varphi > < T_2 \;, \Psi >$$

I .8-Convolution :

I .8-1 :Convolution des fonctions :

Soient f, g deux fonctions de carré intégrable (i.e : , $g \in L^2$) on appelle produit de convolution de f et g $notèe$ $f * g$ la $fonction$ $dèfinie$ par :

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(y) g(x - y) dy$$

Remarques :

1- $(f * g) \in L^1$
2- $\int_{R^n}(f * g)\,(x) \leq \|f\|_{L^2}\,\|g\|_{L^2}$
3- La convolution est bilinéaire
4- $f * g = g * f$

I .8-2-Convolution des distributions :

Définition 14 :

Soient $T_1 \in \acute{D}(R^N)$, $T_2 \in \acute{D}(R^N)$, le produit de convolution de deux distribution T_1 , T_2 est définie par :

$$\forall \varphi \in D \quad < T_1 * T_2 , \varphi > \; = \; < T_1 \otimes T_2 , \varphi^{\Delta} >$$

Ou $\quad \varphi^{\Delta} : R^N \times R^N \rightarrow R^N$

$$(x \;,\; y\;) \rightarrow \varphi^{\Delta}(x, y) = \varphi(x + y)$$

Lemme :

$\forall\, T \in \acute{D}(R^N)$, $\forall\, \varphi \in C^{\infty}(R^N)$

Si $supp\ T \cap supp\ \varphi$ est bornnè, alors $< T , \varphi >$ est bien définie

La définition 1 pose toute fois un problème , car φ^{Δ} est C^{∞} mais à support non compact , nous admettons cependant que si T_1 ou T_2 a un support compact , alors $supp\ T_1 \otimes T_2 \cap supp\ \varphi^{\Delta}$ est compact et dans ce cas on peut définir la valeur $< T_1 \otimes T_2 , \varphi^{\Delta} >$

Propriétés :

1- $\forall\, T_1 , T_2 , T_3 \in \acute{D}(R^N)$

- Le produit de convolution est commutatif : $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$
- Le produit de convolution est associative : $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$
- L'élément neutre de la produit de convolution est delta de Dirac δ

2- La dérivée de $T_1 * T_2$ est la convolution de T_1 par la dérivée de T_2 ou l'inverse :

$D^{\alpha}(T_1 * T_2) = T_1 * (D^{\alpha} T_2) = (D^{\alpha} T_1) * T_2$

II. 1 Espaces fonctionnels L^1 et L^2 :

Rappel :

Soit R la relation d'équivalence définie par :

$$f\,R\,g \iff f = g \quad \text{presque par tout sur A}$$

Alors $L^1(A) = L^1(A)/R$

Ou $L^1(A)$ est l'ensemble des fonctions définie sur A et à valeur dans $\mathbb{C}$ sommables

On appelle donc $L^1(\mathrm{IR})$,l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ sommables, i.e :

$$\int |f(x)|\,dx < \infty$$

Deux fonctions égales presque partout sur IR étant considère comme identiques .

Définition 1 :

On appelle $L^2(\mathrm{IR})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$,dont le carré du module est sommable .

On définit alors $L^2(\mathrm{IR})/R$ (deux fonctions ègales presque partout sur IR sont considérées comme identiques.

Proposition 1 :

Les espaces fonctionnels $L^1(\mathrm{IR})$ et $L^2(\mathrm{IR})$ sont des espaces vectoriels (sur le corps des complexes) de dimension infinie on peut munir $L^1(\mathrm{IR})$ de la norme suivante :

$$f \in L^1(\mathrm{IR}) \rightarrow \|f\|_{L^1(\mathrm{IR})} = \int |f(x)|\,dx$$

De même ,on peut munir $L^2(\mathrm{IR})$ de la norme suivante :

$$f \in L^2(\mathrm{IR}) \rightarrow \|f\|_{L^2(\mathrm{IR})} = \sqrt{\int |f(x)|^2\,dx}$$

Théorème de Fisher- Reisz :

Les espaces $L^1(\mathrm{IR})$ et $L^2(\mathrm{IR})$ munis de leurs normes sont des espaces de Banach (i.e des espaces vectoriels normés complets).

Remarque :

La norme définie sur $L^2(\mathbb{R})$ dérive d'un produit scalaire :

$$< f, g > = \int \bar{f}\, g\, d\mu$$,(L'espace $L^2(\mathbb{R})$ forme ainsi un espace de Hilbert)

II .2 Intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$:

Soit A et B deux sous –ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ soit $f(x, y)$ une fonction mesurables définie sur le produit Cartésien $A \times B$ si elle existe . L'intégrale de Lebesgue de de f sur $A \times B$ sera notée :

$$\int_{A\times B} f(x, y)\, dx\, dy$$

La fonction f est dite sommable sur $A \times B$ si :

$$\left|\int_{A\times B} f(x, y)\, dx\, dy\right| < \infty$$

On montre que f est sommable si et seulement si son module $|f|$ est sommable et on a alors :

$$\left|\int_{A\times B} f(x, y)\, dx\, dy\right| = \int_{A\times B} |f(x, y)|\, dx\, dy$$

Théorème de Fubini :

Si f(x,y) est sommables sur $A\times B$, alors :

$$\int_{A\times B} f(x, y)\, dx\, dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy\right) dx$$

$$= \int_B \left(\int_A f(x, y)\, dx\right) dy$$

Propriétés :

1- L'énoncé de théorème de Fubini renferme l'affirmation que la fonction
$x \rightarrow \int_B f(x, y) dy$ (resp. $y \rightarrow \int_A f(x, y)\, dx$)
Est définie pour presque tout $x \in A$ (resp , $y \in B$)

2- Si $f(x, y)$ n'est pas sommable , il peut arriver que l'une des deux expressions :

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) dy\right) dx \quad , \quad \int_B \left(\int_A f(x, y)\, dx\right) dy$$

Ait un sens sans que l'autre en ait un . Il peut même arriver que chacune ait un sens mais que les valeurs .

3- Il suffit que l'une des deux expressions :

$$\int_A \left(\int_B |f(x, y)| dy\right) dx \quad , \quad \int_B \left(\int_A |f(x, y)|\, dx\right) dy$$

Soit finie pour la fonction $f(x,y)$ soit sommable sur $A \times B$

4- Soit $f(x,y)$ une fonction de la forme

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

Pour que f soit sommable il faut et il suffit que chacune des fonctions f_i $(i = 1,2,\dots)$

Soit sommable , on a alors : $\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_A f_1(x)\,dx\right)\left(\int_B f_2(y)\,dy\right)$

Exemple :

A = B = $[0,1]$, $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

Pour $f(0,0)$ on peut prendre n'importe quelle valeur car c'est un point de mesure nulle n'intervient pas dans l'intégrale :

$\int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right) dx = \frac{\pi}{4}$

$\int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx\right) dy = \frac{-\pi}{4}$

La fonction de f n'est donc pas sommable sur $[0,1] \times [0,1]$

II .3 Théorèmes fondamentaux :

Théorème de Lebesgue :

$(X, \mathfrak{J}, \mu)$ est un espace mesure, soit f_n une suite de fonction mesurables définies sur X et

convergente presque partout vers f , on suppose qu'il existe g intégrable telle que pour tout

$n \in$ IN $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p Sur X ,alors :

f est intégrable

$\forall\, E \in \mathfrak{J}$ on a $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

Théorème de dérivation :

Soit V un voisinage de t dans (a,b) tels que :

Pour presque tout $x, t \to f(t,x)$ est continument derivable sur V
Il existe g intégrable telle que pour tout $t \in V$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x) \text{ p.p}$$

Alors I est derivable en t et $\quad I(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$

II .4 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathrm{IR})$:

Définition 2 :

Soit f une fonction de $L^1(\mathrm{IR})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction de

la variable $\xi \in \mathrm{IR}$, notée $\hat{f}\,\hat{f}$ ou $\mathcal{F}[f]$, telle que : $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathrm{IR}} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx$

Remarques :

- Pour que cette expression ait un sens il faut que $f(x)\, e^{-i\xi x}$ soit sommable ce qui est assurè par le fait que $f \in L^1(\mathrm{IR})$.
- Si f et g sont deux fonctions de $L^1(\mathrm{IR})$, telles que $f = g$ presque partout sur IR alors $\hat{f} = \hat{g}$

II .4-1 transformation de Fourier inverse :

si f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathrm{IR})$ on a :

$$\bar{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t) \qquad \text{en tout point t ,ou f est continue}$$

Proposition 2 :

Si f appartient a $C^2(\mathrm{IR})$ et si $f, \grave{f}, \acute{\acute{f}}$ sont dans $L^1(\mathrm{IR})$ alors $\hat{f}$ est intégrable

Démonstration :

On a $\hat{\hat{\hat{f}}}(\xi) = -(\xi)^2\hat{f}(\xi)$, d'autre part $\lim_{|\xi|\to+\infty}\left|\hat{\hat{\hat{f}}}(\xi)\right| = 0$ (D'après le théorème de Riemann – Lebesgue) ,Il existe donc $M > 0$ tel que pout tout $|\xi| \geq M$, $|\xi^2|\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq 1$, $\left|\hat{f}\right|$ étant continue sur IR et majorée par $\frac{1}{|\xi^2|}$ A l'infini on a donc $\hat{f}$ dans $L^1(\text{IR})$

Remarque :

La définition de la transformation de Fourier n'est pas fixée dans les textes scientifiques , certains auteurs préfèrent des définitions légèrement différentes , on trouvera par exemple les écritures suivantes :

$$\mathcal{F}[f] = \int_{\text{IR}^n} f(x)e^{-i\,2\pi\xi x}\,dx$$

$$\bar{\mathcal{F}}\,[f] = \int_{\text{IR}^n} f(\xi)e^{i\,2\pi\xi x}\,d\xi$$

$$\mathcal{F}[f] = (2\pi)^{\frac{-n}{2}}\int_{\text{IR}^n} f(x)\,e^{-i\xi x}\,dx$$

$$\bar{\mathcal{F}}\,[f] = (2\pi)^{\frac{-n}{2}}\int_{\text{IR}^n} f(x\xi)\,e^{i\xi x}\,d\xi$$

Théorème de (Riemann - Lebesgue) :

Soit $f \in L^1(\text{IR})$ on a :

$\mathcal{F}[f]$ est un fonction continue et bornées sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{F}[f]$ est un operateur linéaire et continue de $L^1(\text{IR})$ dans $L^\infty(\text{IR})$ et :

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_1$$

$\lim_{|\varepsilon|\to+\infty}\left|\hat{f}\,(\xi)\right| = 0$

Remarques :

- La transformée de Fourier n'appartient pas à $L^1(\text{IR})$
- Pour calculer la transformée de Fourier de f , on utilise souvent le théorème de résidus suivante

Théorème de résidus:

Soient U un sous-ensemble ouvert et simplement connexe du plan complexe , $z_1,...,z_n$ un ensemble de points distincts et isolés de U et f une fonction définie et holomorphe sur $U \setminus \{z_1,...,z_n\}$.Si γ est une courbe rectifiable dans U qui ne rencontre aucun des points singuliers z_k et dont le point de départ correspond au point d'arrivée (c'est-à-dire un lacet rectifiable), alors :

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_k).$$

Ici, $\mathrm{Res}(f,z_k)$ désigne le résidu de f en z_k, et $\mathrm{Ind}_\gamma(z_k)$ l'indice de l'acet γ par rapport à z_k. L'indice de sommation Σ porte sur tous les points singuliers z_k, y compris le point à l'infini. Intuitivement, l'indice du lacet est le nombre de tours autour de z_k effectués par un point parcourant tout le lacet. Ce nombre de tours est un entier ; il est positif si γ est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens direct) autour de z_k, nul si γ ne se déplace pas du tout autour de z_k, et négatif si γ est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre autour de z_k.
L'indice est défini par

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_k}.$$

On définit alors le **résidu de f en a** par :

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{a}} f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U} f$$

II .4-2 Propriétés de la transformation Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$:

1) La linéarité :

La transformée de Fourier est une application linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions :

$\forall f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}[b_1 f_1 + b_2 f_2] = b_1\mathcal{F}[f_1] + b_2\,\mathcal{F}[f_2]$$

2) Parité et réalité :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}[f]$ sa transformèe de Fourier , alors on a les résultats suivants :

- Si f pair alors $\mathcal{F}[f]$ est paire
- Si f impaire alors $\mathcal{F}[f]$ est impaire
- Si f réelle alors à symétrie hermétique $\mathcal{F}(-\xi) = -\overline{\mathcal{F}(\xi)}$
- Si f est imaginaire pure alors à symétrie anti_ hermétique : $\mathcal{F}(-\xi) = -\overline{\mathcal{F}(\xi)}$

3) Changement d'échelle est translation :

Théorème de Changement d'échelle :

Soit f sommable , et a $\in$ IR*, alors on a : $\mathcal{F}[f\,(ax)]\;(\xi) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f]\;(\frac{\xi}{a})$

4)

Théorème de translation :

Soit f une fonction sommable , et b $\in$ IR ,alors on a :

$\mathcal{F}[f\,(x+b)]\;(\xi) = e^{ib}\;\mathcal{F}[f]\;(\xi)$

Proposition 3:

Si f est une fonction continue, intégrable ,telle que $\hat{f}$ soit dans L^1(IR), on a pour tout x $\in$ IR

$\mathcal{F}\hat{f}(x)=f_{\delta}(x)=f(-x)$

II .4-3-Transformée de Fourier de la dérivée :

Théorème :

Soit f une fonction sommable et partout continue , dérivable presque partout et telle que $\acute{f}$ soit sommable ,alors on a : $\mathcal{F}[\acute{f}]\;(\xi) = i\,\xi\,\mathcal{F}[f]\;(\xi)$

Théorème : génération

Soit f telle que ses (m-1) dérivées existent et soient sommables , partout continues et telle que la dérivée d'ordre m de f existe presque partout et soit sommable ,alors :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}]\;(\xi) = (i\xi)^m\;\mathcal{F}[f]\;(\xi)$$

Résultats :

- La vitesse de décroissance vers 0 de la transformée de Fourier de f en fonction de l'ordre maximal de dérivation de f ,

  En effet si f est telle que $f^{(m)}$ soit sommable et définie presque partout , alors sa transformée de Fourier est bornée :

$$\exists\, M > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, |(i\xi)^m \mathcal{F}[f](\xi)| \leq M$$

Donc ,si $\xi \neq 0$, on a

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|^m}$$

- Si f indéfiniment dérivable , et que toutes ses dérivées sont sommables , la transformée de Fourier de f décroît à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{|\xi|}$

II .4-4 Transformation de Fourier de $x \to x\, f(x)$:

Théorème :

Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction définie par :

$x \to x^m f(x)$, où $x \in \mathbb{R}$, soit sommable sur $\mathbb{R}$,alors :

$\mathcal{F}[f(x)](\xi)$ est m fois derivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\mathcal{F}[x^m f(x)](\xi) = i^m \frac{d^m}{d\xi^m} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Proposition 4 :

Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, $f.\mathcal{F}[g]$ et $\mathcal{F}[f].g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a :

$$\int f(t)\mathcal{F}[g](t)dt = \int \mathcal{F}[f](x)\, g(x)dx$$

Démonstration :

1- D'après le théorème de Riemann-Lebesgue , $\hat{g}$ est bornée , $f\hat{g}$ est donc dans $L^1(\mathbb{R})$, de même $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$
2- D'après le théorème de Fubini , on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(x)dx\right] dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(t)dt\right]dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\hat{f}(x)$$

II .5 La transformation de Fourier dans L^2 :

II. 5-1 Fonction sommable ,de carrée sommable :

Théorème de Plancherel :

Soit f une fonction sommable et de carrée sommable sur $\mathbb{R}$, alors sa transformée

de Fourier F est de carrée sommable et on a la relation :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |F(\xi)|^2 d\xi$$

II 5-2 Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables :

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^n$,$\vec{x}=(x_1, \dots ,x_n)$ et $\vec{\xi}=(\xi_1, \dots ,\xi_n)$ on définit un produit scalaire et une norme :

$$\vec{\mathbf{x}}.\vec{\boldsymbol{\xi}}=\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \quad ,\|\vec{\mathbf{x}}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

Définition 3 :

Avec ces notations, on considère f une fonction sommable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$,on définit la transformée de Fourier de f par :

$$\mathcal{F}(\vec{\xi})=\int_{\mathbb{R}} f(\vec{x}) e^{-i\vec{\xi}\vec{x}} d\vec{x}$$

Définition 4 :

Avec ces notations, on considère f une fonction sommable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$,on définit la transformée de Fourier de f par :

$$\mathcal{F}(\vec{\xi})=\int_{\mathbb{R}} f(\vec{x}) e^{-i\vec{\xi}\vec{x}} d\vec{x}$$

Remarque :

Soit f $(x_1,x_2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, si x_1 f $(x_1,x_2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathcal{F}[f(x_1, x_2)](\xi_1,\xi_2) = -i\mathcal{F}[x_1 f(x_1, x_2)](\xi_1,\xi_2)$$

Proposition 5 :

Si f est radiale , c'est à dire ne dépend que la norme du vecteur $\vec{x}$, alors la transformée est radiale

Théorème :

la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ (respectivement la transformation inverse $\bar{\mathcal{F}}$) se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$,désignons toujours par $\mathcal{F}$ (respectivement $\bar{\mathcal{F}}$) ce prolongement on a :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}[f] = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f$ p,p
$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\,\bar{\mathcal{F}}g(\xi)d\xi$
$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$

Proposition 6 :

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}\mathcal{F}f = f_\delta$, p.p
Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ on a $\mathcal{F}\mathcal{F}f = f_\delta$ p.p

II .6 convolution et transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$:

Proposition 7 :

Etant données f et g dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi).\hat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$
Si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors : $\widehat{f.g}(\xi) = (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

Démonstration :

1) $\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt\right] dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(t)\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-ix\xi}dx\right] dt$$

On pose : $y = x-t \Rightarrow dy = dx$

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{IR} g(t)\left[\int_{IR} f(y)e^{-i(y+t)\xi}dy\right] dt$$

$$= \int_{IR} g(t)\, e^{-ix\xi}\, dt \int_{IR} f(y)e^{-iy\xi}\, dy$$

$$= \hat{g}\,(\xi)\,.\,\hat{f}(\xi)$$

2) Remarquons que le résultat précèdent (1) s'applique à $\bar{\mathcal{F}}$ $\hat{f}, \hat{g}$ étant dans $L^1(\,IR)$ on a

$$\bar{\mathcal{F}}(\hat{f} * \hat{g})\ (x) = \bar{\mathcal{F}}\hat{f}(x).\bar{\mathcal{F}}\hat{g}(x) \ = f(x)\,.\,g(x) \quad p.\,p$$

Car on a : si f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\,IR)$ on a $\bar{\mathcal{F}}\hat{f} = f$ d'après le théorème d'inversion .

Et par la transformer de Fourier on obtient : $\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f.g}(\xi)\ \forall\xi \in IR$

II .7 Convolution et transformation de Fourier dans $L^2(\,IR)$:

La convolution est opérateur continue de $L^2(\,IR) \times L^2(\,IR)$ dans $L^\infty \cap C^0$

1) **Convolution dans $L^p(\,IR)$:**

Si p et q sont deux réels positifs (éventuellement $+\infty$) tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on dit que p et q sont conjugués harmoniques.

Théorème :

Soient $f \in L^p(\,IR)$ et $g \in L^q(\,IR)$ (p et q conjuguès)

1) $f * g$ est partout définie , continue et bornée sur $\mathbb{R}$
2) $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$

Proposition 8 :

Soient f et g dans $L^2(\,IR)$, on a :

1) $(f * g)(t) = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g})$ pour tout t dans $\mathbb{R}$
2) $\widehat{f.g}(t) = \hat{f} * \hat{g}$ pour tout t dans $\mathbb{R}$

Remarque :

Dans la proposition précédente la formule $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$ n'a pas de sens a priori car $f * g$ est seulement dans $L^{\infty}(\mathbb{R})$, cette formule serait vrais si l'on avait $f * g$ dans $L^{1}(\mathbb{R})$, lorsque $f \in L^{2}(\mathbb{R})$ et $g \in L^{1}(\mathbb{R})$ la convolution et la transformée de Fourier sont bien définies.

Proposition 9 :

Soit f dans $L^{2}(\mathbb{R})$ et g dans $L^{1}(\mathbb{R})$, on a $\hat{f}.\hat{g}$ dans $L^{2}(\mathbb{R})$ de plus :

$$(f * g) = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f}.\hat{g}) \qquad (\text{égalité dans } L^{2}(\mathbb{R}))$$

III.1-Transformation de Fourier dans $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$:

Définition 1 :

Pour $f \in \mathfrak{J}$, la transformèe de fourier de f , que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$ *est la fonction sur* $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad ,\xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{où} \quad x.\xi = x_1.\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots x_n\xi_n$$

Cette définition a bien un sens ,car $f(x)e^{-ix\xi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Théorème :

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$est une application linéaire bijective bi continue de $\mathfrak{J}$ sur , si on pose pour $f \in \mathfrak{J}$

$$\bar{\mathcal{F}}f(x) = (2\pi)^{-n} \int f(\xi)\; e^{ix\xi}\,d\xi$$

Alors $\bar{\mathcal{F}}$ *envois* $\mathfrak{J}$ *dans* $\mathfrak{J}$ *et on a* $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}$

Démonstration :

Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ envoient $\mathfrak{J}$ *dans* $\mathfrak{J}$.

Comme $\bar{\mathcal{F}}f(x) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}f(-x)$, il suffit de le faire pour $\mathcal{F}$, tout d'abord on a $\mathcal{F}f \in C^\infty$,

Si $f \in \mathfrak{J}$, en effet pour x fixè la fonction $\xi \rightarrow f(x)e^{-ix\xi}$ est C^∞

Et $\left|\partial_\xi^\beta(f(x)e^{-ix\xi})\right| = \left|(-ix)^\beta f(x)e^{-ix\xi}\right| = \left|x^\beta f(x)\right| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Donc $\mathcal{F}f \in C^\infty$ *et*,

$$\partial_\xi^\beta \mathcal{F}f(\xi) = \int (-ix)^\beta f(x)e^{-ix\xi}\;dx \qquad (1)$$

On montre ensuite, par intégration par partie successives , que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$:

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}f(\xi) = \int \left[(-D_x)^\alpha e^{-ix\xi}\right](-ix)^\beta f(x)\;dx$$

$$= \int e^{-ix\xi} D_x^\alpha \left((-ix)^\beta\; f(x)\right)dx \qquad (2)$$

En déduire de (2)

$$\left|\xi^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}\mathcal{F}f(\xi)\right| \leq \int\left|D_x^{\alpha}(x^{\beta}\, f(x))\right|\, dx \, < \infty, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Ce qui prouve que $\mathcal{F}$f $\in \mathfrak{J}(R^n)$ et que l'application f→ $\mathcal{F}$f est continue de $\mathfrak{J}$ dans $\mathfrak{J}$

D'après la formule de Leibnitz .

Prouvons que $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ pour $f \in \mathfrak{J}$. il nous faut considérer l'intégrale

$$\int e^{ix\xi}\left(\int e^{-iy\xi} f(y)dy\right) d\xi \quad mais$$

La fonction (y,)→ $e^{ix\xi}\, e^{-iy\xi} f(y)$ n'appartenant pas à $L^1\left(R_y^n \times R_\xi^n\right)$ on ne peut pas intervertir les integrales , on remarque alors que d'après le théorème de Lebesgue

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int \; e^{ix\xi}\; e^{-\varepsilon(\xi)^2}\, \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int \; e^{ix\xi}\; \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

Comme la fonction (y,)→ $e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon|\xi|^2} e^{-iy\xi} f(y)$ appartient à $L^1\left(R_\xi^n \times R_y^n\right)$ pour $\varepsilon > 0$,on peut utiliser le théorème de Fubini

$$I_\varepsilon = \int \left(\int \; e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, \mathrm{d}\xi\right)\; f(y)dy$$

On a : $\hat{f}(\xi) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n\; e^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}$ $\qquad \forall z \in \mathbb{C}, Rez > 0 \;\; et \; f(x) = \; e^{-z\,|x|^2}$

$$I_\varepsilon \; = \; (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n \int e^{\frac{-|x-y|^2}{4\varepsilon}}\; f(y)dy \; = \pi^{\frac{n}{2}}\, 2^n \int e^{-|z|^2}\; f\left(x - 2\sqrt{\varepsilon}\; z\right)dz$$

D'après le le théorème de Lebesgue :

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon\to 0}\, I_\varepsilon\, \pi^{\frac{n}{2}}\;\; 2^n\, f(x)\int e^{-|z|^2}\; dz = \; (2\pi)^n\, f(x),$$

D'où

$$\int e^{ix\xi}\;\hat{f}\;(\xi)\;\mathrm{d}\xi = (2\pi)^n\; f(x)$$

Montrons que $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}$f $= \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}$ f = f

$$\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})\;(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\; e^{ix\xi}\; d\xi$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi$$

$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-A}^{A} \left[\int f\ (y) e^{-iy\xi}\ dy\right] e^{ix\xi}\ \ d\xi$

$= \lim_{A\to\infty} \int f(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{i(x-y)\xi}\ d\xi\right]\ dy$

$= \lim_{A\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \text{f(y)} \frac{\sin(x-y)A}{\pi(x-y)}\, \text{dy}$

On prend (x-y)A = z

$\lim_{A\to\infty} \int\ f(x - \frac{z}{A})\ \frac{\sin z}{z}\ \text{dz}$

$= f(x) \int \frac{\sin Z}{Z}\, \text{dz}\ \ = \text{f(x)}$

Car la dernière intégrale est exactement égale à 1.

Remarque :

Il résulte de l'inégalité $\bar{\mathcal{F}} f(x) = (2\pi)^{-n}\ \mathcal{F} f(-x)$ que l'on a :

$\mathcal{F}\mathcal{F} f = (2\pi)^n\ \check{f}$, ou $\check{f}$ (x) $= f(-x)$

III .1-1Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathfrak{I}$ ($\mathbb{R}^n$) :

Théorème :

Pour $f, g\ \in \mathfrak{I}$

i) $\int \hat{f}\ (\xi)\ \text{g}(\xi)\ \text{d}\xi = \int f(x)\hat{g}(\text{x})\ \text{dx}$

ii) $\int f(x)\bar{g}(\text{x})\ \text{dx} = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}\ (\xi)\bar{\hat{g}}(\xi) d\xi$

En particulier $\int |f(x)|^2 = (2\pi)^{-n} \int \left|\hat{f}(x)\right|^2 \text{d}\xi$

iii) $f * g\ \in \mathfrak{I}\ et\ \mathcal{F}(f * g) = \hat{f}.\hat{g}$

iv) $\widehat{f.g} = (2\pi)^{-n}\ \hat{f} * \hat{g}$

v) $\widehat{D_j f} = \xi_j \hat{f}$ ou $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$

vi) $\widehat{x_j f} = -D_j \hat{f}$, ou $D_j\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$

Démonstration :

iii) $f * g$ est bien dèfinie par $\int f(y)\ g(x-y)dy$ car $g \in L^{\infty}$, $f \in L^1$ et donc l'intégrale converge absolument , ensuite à y fixé la fonction $x \to f(y)g(x-y)\ \ est\ C^{\infty}$

et $\left|\partial_x^{\beta}\ (f(y)g(x-y))\right| = \ \left|f(y)\partial^{\beta} g(x-y)\right| \leq M_{\beta}|f(y)|\ \in L^1$

$donc\ f * g\ \in C^{\infty}\ et\ \partial^{\beta}(f * g) = f * \partial^{\beta} g$

Enfin , comme $x^{\alpha} = \ (x-y+y)^{\alpha} = \sum_{y \leq \alpha} \binom{\alpha}{y}\ (x-y)^{y}\ y^{\alpha-y}$

On peut écrire :

$$x^{\alpha}\partial^{\beta}(f * g)(x) = \ x^{\alpha}\ \ \partial^{\beta}(f * g)(x) = \ \sum_{y \leq \alpha} \binom{\alpha}{y} \binom{\alpha - y}{xf} * (x^{y}\ \ \ \partial^{\beta} g) \quad \in\ L^{\infty}(\ \mathbb{R}^n)$$

Donc $f * g\ \in \mathfrak{J}$, $ensuite$,d'après le théorème de Fubini la fonction

(x,y) $\to f(y)g(x-y)$ est dans $L^1(\ \mathbb{R}^n)$, on a

$$\widehat{f * g}\ (\xi)\ = \iint e^{-ix\xi} f(y)g(x-y)\ \ dy\ dx$$

$$= \ \int e^{-iy\xi} f(y) \left(\int\ e^{-i(x-y)\xi}\ g(x-y)dx\ \right)dy\ \ = \ \hat{f}(\xi)\ \hat{g}\ (\xi)$$

v) par intégration par partie on peut écrire :

$$\int\ e^{-ix\xi}\ \ \frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ f(x)\ dx = \ \frac{-1}{i} \int\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ \left(e^{-ix\xi}\right) f(x)dx\ \ = \ \xi_j\ \hat{f}(\xi)$$

Et $\widehat{x_j f}\ (\xi) = \int e^{-ix\xi}\ \ x_j\ f(x)\ dx = \ \int\ \frac{-1}{i}\ \frac{\partial}{\partial \xi_j}\ \left(e^{-ix\xi}\right) f(x)dx$

$$= \ \frac{-1}{i}\ \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int\ \left(e^{-ix\xi}\right) f(x) = -D_J \hat{f}(\xi)$$

Par le théorème de dérivation de Lebesgue .

III .2 Transformation de Fourier dans $\acute{\mathfrak{I}}(\mathbb{R}^n)$:

III. 2-1 Propriétés sur l'espace $\acute{\mathfrak{I}}(\mathbb{R}^n)$:

i) $\acute{\mathfrak{I}}$ s'injecte dans $\acute{D}(\mathbb{R}^n)$ par l'application $T \to T\ (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$

En effet :

Si K est un compacte de $\mathbb{R}^n$ on a $sup_{x\in R^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\right| \le C_{k,\alpha} sup_K \left|\partial^\beta \varphi\right|$, pour $\varphi \in C_0^\infty(K)$, de sorte que , $|< T,\varphi >| \le C(\sum_{|\alpha|\le k} C_{k,\alpha}) \sum_{|\beta|\le l} \sup\left|\partial^\beta \varphi\right|$, donc $T|C_0^\infty$,

Ensuite si $T|C_0^\infty=0$, alors T=0 sur $\mathfrak{I}$, car C_0^∞ est dense dans $\mathfrak{I}$, l'application est donc injective.

ii) On a $\mathfrak{E}\subset \acute{\mathfrak{I}}$, car si $T \in \acute{\mathfrak{E}}$ elle définie sur C^∞ donc sur $\mathfrak{I}$ et il existe $K \subset \mathbb{R}^n$, $l \in N\ et\ c > 0\ tels\ que\ |< T,\varphi >| \le c \sum_{|\beta|\le l} \sup_K\left|\partial^\beta \varphi\right|$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{I}$

iii) Si $T \in \acute{\mathfrak{I}}$ alors $x_i T$ sont dans $\acute{\mathfrak{I}}$, i = 1,…n,
Cela résulte immédiatement , donc si p est un polynôme sur R^n et $\alpha \in N^n$
$p\partial^\alpha T \in \acute{\mathfrak{I}}$

iv) Soit $f \in C^\infty(R^n)$, vérifiant la condition suivante :
$\exists\, k \in N, \forall\alpha \in N , \exists C_\infty > 0 : \left|\partial_\xi^\beta f(\xi)\right| \le c\,(1+|\xi|)^k, \forall\xi \in R^n$
$Alors$, pour $T \in \acute{\mathfrak{I}}$, $fT \in \acute{\mathfrak{I}}$, ou $< fT,\varphi > = < T, f\varphi >, \forall\varphi \in \mathfrak{I}$

En effet : pour $\varphi \in \mathfrak{I}$ on $f\varphi \in \mathfrak{I}$ et l'application $\varphi \to f\varphi$ est continue de $\mathfrak{I}$ dans $\mathfrak{I}$

v) Pour $1 \le$ p $\le +\infty$, $L^P(R^n) \subset \acute{\mathfrak{I}}(R^n)$

En effet :

Tout élément $f \in L^p$ définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{I}$ par $\to \int f(x)\varphi(x)dx$,

On écrit pour cela : $\left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| \le \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^q}$, ou $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, si q = +∞ et si q< +∞ on ecrit ,pour un entier $N > n$:

$$\int|\varphi(x)|^q\, dx = \int(1+|x|)^{-N}(1+|x|)^N\, |\varphi(x)|^q\, dx$$

$$\le \left(\int \frac{dx}{(1+|x|)^N}\right) sup_{R^n}(1+|x|)^N\, |\varphi(x)|^q \le c \left[sup_{R^n}(1+|x|)^{\frac{N}{q}}\, |\varphi(x)|\right]^q$$

Définition 2 :

Si T ∈ $\acute{\mathfrak{J}}$, la transformée de Fourier de T notée $\mathcal{F}$T , ou $\hat{T}$,est sur $\mathfrak{J}$ définie par :

$< FT, \varphi > = < T , \mathcal{F}\varphi >$ $\qquad$ $, \forall \varphi \in \mathfrak{J} , et\ \mathcal{F}T \in \acute{\mathfrak{J}}$

En effet $\mathcal{F}T \in \acute{\mathfrak{J}}$ car $|< T , \mathcal{F}\varphi >| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq l}} (\mathcal{F}\varphi)$ ou les $p_{\alpha\beta}$ sont des

semi-normes de $\mathfrak{J}$ puisque $\mathcal{F}T \in \acute{\mathfrak{J}}$ mais comme $\mathcal{F}$ est continue de $\mathfrak{J}$ dans , $p_{\alpha\beta}$ $(\mathcal{F}T)$est

majoré par des semi-normes de φ dans $\mathfrak{J}$.

On définit $< \bar{\mathcal{F}}T , \varphi > = < T , \bar{\mathcal{F}}\varphi >$

Théorème :

La transformation de Fourier est une application linéaire bijective et bi continue

sur les suites de $\acute{\mathfrak{J}}$ et $\quad \mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$

Démonstration :

En effet ,on a $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}$T=$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\, T$=T pour tout ∈ $\grave{\mathfrak{J}}$,car

$< \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}$T , φ>=<$\mathcal{F}$T , $\bar{\mathcal{F}}\varphi$ >=<T, $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi$>=<T , φ >

$\forall\varphi\epsilon\mathfrak{J}$ *, pour* $\mathcal{F}$ *est bijective et* $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$

En suit ,si $T_j \to T$ dans $\grave{\mathfrak{J}}$

,on a <$\mathcal{F}T_j$, φ > = < T_j , $\mathcal{F}\varphi$ >→< T , $\mathcal{F}\varphi$ > = < FT , φ >

Donc $\mathcal{F}T_j \to \mathcal{F}T$,de même que $\bar{\mathcal{F}}$

III.2-2 Propriétés de la transformation de Fourier dans $\grave{\mathfrak{J}}(\mathbb{R}^n)$

Théorème :

i)la transformation de Fourier de $\grave{\mathfrak{J}}$ coïncide avec la transformation de Fourier dans $\mathfrak{J}$

ii)$\forall T \in \grave{\mathfrak{J}}$,on a :

1) $\mathcal{F}\mathcal{F}$T=$(2\pi)^n\check{T}$,*óu* <$\check{T}$,φ >=<T ,$\check{\varphi}$ > et $\check{\varphi}$(x)=$\varphi(-x)$
2) $\mathcal{F}(D_j$ T) =$\xi_j\mathcal{F}$T ,$D_j = \frac{1}{i}\partial_j$
3) $\mathcal{F}(x_j$ T) =-$\partial_j\mathcal{F}T$

Remarques :

1) $\mathcal{F}\delta_0$=1 ,en effet $< \mathcal{F}\delta_0 ,\varphi > = < \delta_0 ,\mathcal{F}\varphi >$ =$(\mathcal{F}\varphi)(0) =\int_{\,|R^n} \varphi(x)dx$ = <1 ,φ>
2) $\mathcal{F}(1)$=$(2\pi)^n \delta_0$, car $\mathcal{F}1 =\mathcal{F}\mathcal{F}\delta_0 =(2\pi)^n \widetilde{\delta_0} =(2\pi)^n \delta_0$
3) Soit $\gamma \epsilon\ |R^*$ et T =$e^{i\gamma|x|^2} \in \mathfrak{J}(\ |R^n)$, nous allons montrer que

$\mathcal{F}$T= $(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\gamma|}} e^{i\ sgn\ \gamma . \frac{\pi}{4}})^n \quad e^{-i\frac{|\xi|^2}{4\gamma}}$,*oú* sgn γ *désigne le signe* de γ

En effet pour $\varepsilon > 0$, posons T_ε=$e^{-\varepsilon|x|^2} e^{i\gamma|x|^2} \in \mathfrak{J}(\ |R^n)$

On a $T_\varepsilon \to T$ *dans* $\mathfrak{J}$, car <T_ε ,φ >=$\int_{R^n} e^{-\varepsilon|x|^2} e^{i\gamma|x|^2} \varphi(x)dx$, converge ,d'après le théorème de Lebesgue ,vers $\int_{R^n} e^{i\gamma|x|^2} \varphi(x)dx$ = <T ,φ >

On en déduit que $\mathcal{F}T_\varepsilon \to \mathcal{F}T$ dans $\mathfrak{J}$, en suite $\mathcal{F}T_\varepsilon = \mathcal{F}e^{-z_\varepsilon|x|^2}$

oú $z_\varepsilon = \varepsilon - i\gamma$ *et comme* $\hat{u}(\xi)$= $(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}})^n e^{\frac{-|\varepsilon|^2}{4z}}$ *oú* u=$e^{-z|x|^2}$

On a $\mathcal{F}T_\xi$=$(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z_\varepsilon}})^n\ e^{\frac{-|\xi|^2}{4z_\varepsilon}}$, si $y > 0$, z_ε tend vers $y\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $\sqrt{z_\varepsilon} \to \sqrt{y\ e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

En résumé $\sqrt{z_\varepsilon} \to \sqrt{|y|}\ e^{-i\ sgn\ y\ \frac{\pi}{4}}$, d'autre part $e^{\frac{-|\xi|^2}{4z_\varepsilon}}$ converge vers $e^{\frac{-\,i\,|\xi|^2}{4y}}$ dans $\mathfrak{J}$ ($|R^n$)

En effet $\int e^{\frac{-|\xi|^2}{4(\varepsilon - iy)}} \varphi(\xi)d\xi = \int \exp(\frac{-|\xi|^2(\varepsilon+iy)}{4(\varepsilon^2+y^2)})\ (\xi)d\xi$, et

$\left|\exp(\frac{-|\xi|^2(\varepsilon+iy)}{4(\varepsilon^2+y^2)})\right|\ |\varphi(\xi)| = \exp(-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{4(\varepsilon^2+y^2)})\ \ |\varphi(\xi)| \ \le\ \varphi(\xi)\ \in\ L^1$ ($|R^n$)

Donc le théorème de Lebesgue fournit la conclusion ,on déduit que

$$\mathcal{F}T= (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\gamma|}} e^{i\ sgn\ \gamma . \frac{\pi}{4}})^n \quad e^{-i\frac{|\xi|^2}{4\gamma}}$$

4) Soit pour , j= 1 , 2, ...k , $T_j \in \mathfrak{J}$ ($|R^{n_j}$) , et T = $T_1 \otimes \ldots \otimes T_k$ Alors $\mathcal{F}T = \mathcal{F}T_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}T_k$

il suffit de le prouver pour = 2 , on a $< F(T_1 \otimes T_2), \varphi > \ = \ < T_1 \otimes T_2, \mathcal{F}\varphi >$

$= < T_1, < T_2, \mathcal{F}\varphi(y_1 + .) >>,\ \mathcal{F}\varphi\ (y_1 + y_2)$

$= \int\int e^{-i\,(\xi_1 . y_1 + \xi_2 . y_2)}\ \varphi\ (\ \xi_1 + \xi_2)\ d\xi_1\ d\xi_2 = \mathcal{F}_{\xi_2}(\int\ e^{-iy_1\xi_1}\ \varphi(y_1 + .)\ d\xi_1)$

D'où $< T_2, \mathcal{F}\varphi(y_1+.)> \; = < \mathcal{F}_{\xi_2} T_2, \; \int \; e^{-iy_1\xi_1} \; \varphi(\xi_1+.) \; d\xi_1 >$

$= \int \; e^{-iy_1\xi_1} \; < \mathcal{F}_{\xi_2} T_2, \; \varphi(\xi_1+.)> d\xi_1 = \mathcal{F}_{\xi_1} < \mathcal{F}_{\xi_2} T_2, \; \varphi(\xi_1+.)>$

Donc $< \; F(T_1 \otimes T_2), \varphi > \; = < \mathcal{F}_{\xi_1} T_1, < \mathcal{F}_{\xi_2} T_2, \; \varphi(\xi_1+.)> >$

5) Soit D une matrice réelle , diagonale , inversible , D= diag (y_j) , alors :
$\mathcal{F} e^{i(Dx,x)} \; = \; (\frac{\pi}{|\det D|})^{\frac{\pi}{2}} \; e^{in\frac{\pi}{4} sgn \, D} \; e^{-\frac{i}{4}(D^{-1}\xi \, , \xi)}$
Ou sgn D est la signature de D qui est égale à $(n_+ - n_-)$, ou n_+(resp , n_-) est le nombre de $y_j > 0$ resp $(y_j < 0)$

En effet $e^{i(Dx,x)} = T_1 \otimes \ldots \otimes T_n$ ou $T_j \; = \; e^{i \, y_j \, x^2{}_j}$ ou j= 1…n

il suffit alors d'appliquer 4) et 3) ci-dessus.

6) Soit T = vp $\frac{1}{x}$, alors $T \in \acute{\mathfrak{J}}(\; |R)$ et $\hat{T}$ = -$2\pi \; i \; H + i\pi$ ou H est la fonction de Heaviside , en effet , pour $\varphi \; \in \; \mathfrak{J}$:

$< \text{vp}\frac{1}{x} \; , \varphi > = \; \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \; dx = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon$

$I_\varepsilon \; = \; \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} \text{dx} + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \; dx = J_\varepsilon$+K ,on écrit $\varphi(x) \; = \; \varphi(0) + x\Psi(x)$ ou $|\Psi(x)| \leq sup\left|\varphi(\grave{x})\right|$ sur R

Comme $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{\varphi(0)}{x}$dx=0 on a $I_\varepsilon \; = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \Psi(x)$dx+$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \; dx$, d'après le théorème de Ce qui est un sens puisque $T_x \otimes \varphi_\xi \; \in \grave{\mathcal{E}} \; (R^n_m \; \times \; R^n_\xi)$ et (x , ξ)$\longmapsto e^{-ix\xi}$ est C^∞

Par conséquent on a également $<\hat{T} \; , > \; = < \varphi_\xi \;\; , < T_x \; , e^{-ix\xi} > >$

$= \int_{R^n} \varphi$(ξ) v(ξ) dξ = < v,φ>

On en déduit que $\hat{T}$=v sur $C^\infty_\circ(R^n)$, qui est dense dans S

(R^n) ,donc $\hat{T}$ = v sur S

<u>III .3 Transformation de Fourier dans $L^1(\; |R^n)$ et $L^2(\; |R^n)$:</u>

on sait que $L^1(R^n)$ et $L^2(R^n)$ sont contenus dans $\acute{s}\;(R^n)$, nous allons étudier la restriction à ces espaces de la transformation de Fourier.

Théorème :

1) Si T$\in$ $\boldsymbol{L^1}$, $\hat{T}$ est donnée par la fonction continue $\hat{T}$ (ξ) = $\int_{R^n} e^{-ix.\xi}$ T(x) dx ; de plus $\hat{T}$ tend vers 0 à l'infini
2) si T$\in$ L^1 et $\hat{T} \in L^1$, on a F$\hat{T}$ =$(2\pi)^n\check{T}$ presque partout
3) l'application T $\longmapsto (2\pi)^{\frac{-n}{2}}\,\hat{T}$ est une isométrie bijective de $\boldsymbol{L^2}$ sur lui-même

Démonstration :

1) *pour* $\varphi \in S$, *on a* :

$$< \hat{T} , \varphi > = < T, \hat{\varphi} > = \int_{R^n} T(x)\left(\int_{R^n} e^{-ix.\xi}\varphi(\xi)\, d\xi\right) dx ;$$
$$= \int_{R^n} \varphi(\xi)\left(\int_{R^n} e^{-ix.\xi}T(x)\, dx\right) d\xi)$$

La dernière égalité étant justifiée par le théorème de Fubini applicable ici puisque T(x) $\varphi(\xi) \in L^1(R^{2n})$, on a donc

$< \hat{T} , \varphi >$ = <v, φ > ,*où* v(ξ) = $\int_{R^n} e^{-ix.\xi}T(x)\, dx \in L^\infty(R^n)$

Il résulte facilement du théorème de Lebesgue que v est continue surR^n et du théorème de Riemann-Lebesgue que v tend vers 0 à l'infini.

2) On a, dans $\grave{S}$, F $\hat{T}$=$(2\pi)^n\check{T}$, comme $\hat{T} \in L^1$, les deux membres sont des fonctions de L^1_{loc} , l'égalité a donc aussi lieu presque partout.

3) On a, vu que pour $\varphi \in S$ *on a* , $\|\varphi\|_{L^2}$ = $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{\varphi}\|_{L^2}$, d'autre part S est dense dans L^2 (en fait $C^\infty_\circ$ est dense dans L^2) , soit alors T$\in$ L^2 et (T_j)⊂S telle que

T_j →T dans L^2 , comme (T_j) est de Cauchy dans L^2 , il résulte de l'égalité précédente , que($\hat{T_j}$) est de Cauchy dans L^2 , on en déduit que $\hat{T_j} \longrightarrow \hat{T}$ dans $\grave{S}$,

d'*où* $\hat{T}$=g dans $\grave{S}$, donc $\hat{T} \in L^2$,en suite, en passant à la limite dans l'égalité

$$\|T_j\|_{L^2}= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{T_j}\|_{L^2} \text{ , on obtient } \|T\|_{L^2}= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{T_j}\|_{L^2}$$

On en déduit que T$\longrightarrow$ $\hat{T}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ est une isométrie, elle est bijective car elle est inversible (utilisé $\bar{F}$)

III .3-1 Formule du retard, rotation, symétrie, homothétie :

Si φ *est* une fonction de S, alors $\tau_a[\varphi]$aussi et l'on a :

$$F[\tau_a[\varphi]] = \int_{R^n}\varphi(x-a)e^{-ix.\xi}dx$$
$$=\int_{R^n}\varphi(y)e^{-i(a+y).\xi}dy$$
$$=e^{-ia.\xi}\hat{\varphi}(\xi)$$

De même ou en utilisant, F^{-1}on a F($e^{-ia.\xi}\varphi(x)$)= $\hat{\varphi}$(ξ+a) =$\tau_{-a}\hat{\varphi}$

La transformation de Fourier change donc une translation en une multiplication par la fonction exponentielle ω_a définie par ω_a(x) = $e^{-ia.x}$ et réciproquement , ces formules se généralisent à l'identique dans $\grave{S}$ et l'on a donc les formules dites de retard :

$\forall\, T \in \acute{\mathfrak{J}} \quad on\ a :$

1) $\widehat{\tau_a[T]} = w_a\hat{T}$
2) $\widehat{w_a T} = \tau_{-a}\big[\hat{T}\big]$
3) $\widehat{\delta[T]} = \delta\big[\hat{T}\big]$
4) $\widehat{P_R[T]} = P_R\big[\hat{T}\big]$
5) $h_k[T] = |k|^{-n} h_{\frac{1}{k}}\big[\hat{T}\big]$

Démonstration :

$$\widehat{w_a\varphi(\xi)} = \hat{\varphi}(\xi + a) = \tau_{-a}(\hat{\varphi})$$

$$g(x) = e^{-iax}\,\varphi(x)$$

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathrm{I}R^n} e^{-iax}\,\varphi(x)\,e^{ix\xi}\,dx = \int_{\mathrm{I}R^n}\varphi(x)\;e^{-ix(a+\xi)}dx$$

On pose que $\xi_1 = a + \xi$

$$= \int_{\mathrm{I}R^n}\varphi(x)\,e^{ix\xi_1}\,dx = \hat{\varphi}(\xi_1) = \hat{\varphi}(\xi + a) = \tau_{-a}(\hat{\varphi})(\xi)$$

1) $< \widehat{\tau_a T}\,,\varphi > = < \tau_a T\,,\hat{\varphi} > = < T,\tau_{-a}\hat{\varphi} > = < T,\widehat{w_a\varphi} > = < \hat{T},w_a\varphi > = < w_a\hat{T},\varphi >$

Donc $\widehat{w_a T} = \tau_{-a}\big[\hat{T}\big]$

(3) Montrons d'abord que $\widehat{\delta\varphi} = \delta\hat{\varphi}$ $\quad\forall\varphi \in \mathfrak{J}\;\; \widehat{\delta\varphi} = \int_{\mathrm{I}R^n}\delta\varphi(x)\,e^{ix\xi}\,dx = \int_{\mathrm{I}R^n}\varphi(-x)\,e^{-ix\xi}\,dx$

On pose $\mathrm{y} = -\mathrm{x}$

$dy = dx \;\; , |J| = 1$ nous trouvons :

$$\widehat{\delta\varphi} = \int_{\mathrm{I}R^n}\varphi(y)\,e^{-iy(-\xi)}\,dy = \hat{\varphi}(-\xi) = \delta\hat{\varphi}$$

$\forall\varphi \in \mathfrak{J}(\,\mathrm{I}R^n)$:

$$< \widehat{\delta T}\,,\varphi > = < \delta T,\hat{\varphi} > = < T,\delta\hat{\varphi} > = < T,\widehat{\delta\varphi} > = < \hat{T},\delta\varphi > = < \delta\hat{T}\,,\varphi >$$

Donc : $\widehat{\delta[T]} = \delta\big[\hat{T}\big]$

III .3-2 Formules de Perseval et Plancherel :

Soit φ et Ψ deux fonctions de $\mathfrak{I}$ peut calculer :

$$< \varphi, \Psi >_{L^2} = \int_{IR^n} \bar{\varphi}(x)\Psi(x)\, dx = \int_{IR^n} \bar{\varphi}(x)\ F^{-1}\hat{\Psi}(x)\, dx$$

$$= \int_{IR^n} \bar{\varphi}(x)\ \left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{IR^n} \hat{\Psi}(\xi)\, e^{ix\xi}\ d\xi\right)dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\ \int_{IR^n} \hat{\Psi}(\xi)\left(\ \int_{IR^n} \bar{\varphi}(x)e^{ix\xi}\ dx\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{IR^n} \hat{\Psi}(\xi)\ \bar{\hat{\varphi}}(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\ < \hat{\varphi}\ , \hat{\Psi} >_{L^2}$$

Cette formule reste vraie pour deux fonctions de L^2, elle est connue sous le nom de formule de Plancherel : $< f, g >_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n}\ < \hat{f}, \hat{g} >$

Lorsque g = f , on obtient la formule de perseval en prenant la racine carré :

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\ \|f\|_{L^2}$$

Remarque :

La formule de Plancherel est vraie pour le crochet de dualité de $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$:

$$\forall\, T \in \mathfrak{I}'\ , \forall \varphi \in \mathfrak{I}\, , < \mathrm{T}, \varphi > = \frac{1}{(2\pi)^n}\ < \hat{T}, \hat{\varphi} >$$

III .4 Transformation de Fourier et convolution :

Théorème :

Si $T\ \in \mathfrak{I}'\ et\ S \in \mathcal{E}'\ on\ a\ T * S\ \in S'\ et\ F(T * S\ ) = \hat{T}\hat{S}$

Démonstration :

Remarques tout d'abord que l'expression $\hat{T}\hat{S}$ est bien définie car $\hat{S}$ est une fonction C^∞ sur IR^n telle que $\left|\partial_\xi^\alpha \hat{S}(\xi)\right| < C_\alpha(1 + |\xi|)^k$ et $\hat{T} \in \mathfrak{I}'$, supposons tout d'abord , T,S$\in \mathcal{E}'$ on sait alors que $T * S\ \in \mathcal{E}'$ et $\hat{T}, \hat{S}$ sont C^∞ , d'autre part , en désignant par (.,.) le produit scalaire de IR^n, on a :

$F(T * S\,) = <\ T * S\,, e^{-i(.,\xi)} > = < T_y \otimes S_z\,, e^{-i(y+z,\xi)} >$

$$= < T_y, < S_z\,, e^{-i(y,\xi)} e^{-i(z,\xi)} >>$$

$$= < T_y, e^{-i(y,\xi)} > < S_z, e^{-i(z,\xi)} >$$

$$= \hat{T}(\xi)\hat{S}(\xi)$$

III .5 Transformation de Fourier partielle :

Dans $IR^p \times\ IR^n$, nous noterons $(t, x), ou\ t \in\ IR^p\ et\ x \in\ IR^n$,

la variable pour $\varphi \in \mathfrak{I}(\ IR^p \times R^n)$, on définit la transformation de Fourier partielle en x par la formule :

$$\tilde{\mathcal{F}}\varphi(t\,,\xi) = \tilde{\varphi}(t\,,\xi) = \int_{IR^n} e^{-ix\xi}\varphi(t,\xi)dx$$

Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est bijective de $\mathfrak{I}(\ IR^p \times\ IR^n)$ dans lui-même , d'inverse

$\widetilde{\mathcal{F}^{-1}}\Psi(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{IR^n} e^{ix\xi}\Psi(t,\xi)d\xi\ ,\Psi \in \mathfrak{I}(\ IR^p \times\ IR^n)$

Cela permet de définir $\tilde{\mathcal{F}}\ sur\ \acute{\mathfrak{I}}(\ IR^p \times\ IR^n)$, par :

$< \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi > = < T, \tilde{\mathcal{F}}\varphi >\ ,\quad \varphi \in \mathfrak{I}(\ IR^p \times R^n)$

Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme bicontinue (sur les suites) de $\acute{\mathfrak{I}}(\ IR^p \times\ IR^n)$ dans lui-même ,il est ensuite facile de vérifier que l'on a les formules :

- $\tilde{\mathcal{F}}(D_x^\alpha\ T) = \xi^\alpha \tilde{\mathcal{F}}T\ ou\ D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$
- $\tilde{\mathcal{F}}(x^\alpha T) = (-D_\xi)^{\alpha}\,\tilde{\mathcal{F}}T$
- $\tilde{\mathcal{F}}(D_t^\beta\ U) = D_t^\beta \tilde{\mathcal{F}}U$

III. 6 Application

On montre dans ce qui suit $Q =]0, +\infty[\times IR^3$ et (t, x) les élément de Q ave $t \in]0, +\infty[$ $et\ x \in IR^3$, on note aussi $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour j=1,2, ou 3 on considère la distribution sur Q définie par la fonction :
$u(t,x) = \frac{1}{t}\, 1_{\{|x|<t\}}(t,x)$ $(1\ est\ la\ fonction\ caracteristique\ de\ \{|x| < t\}$

I.1) montrer que pour tout φ dans $C_0^\infty(Q)$on a :

$$< \partial_t u\,, \varphi > = \int_{IR^3} \frac{1}{|x|}\,\varphi(|x|\,,x)dx - \int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^2}\,\varphi(t,x)dx\,dt \qquad < \partial_t u\,, \varphi$$

$$> = \int_{IR^3} \frac{-x_j}{|x|^2}\,\varphi(|x|\,,x)dx$$

2) calculer , pour x$\neq 0$, $\sum_{j=1}^{3} \partial_j \left(\frac{x_j}{|x|^2} \quad \varphi(|x|\,,x)\right)$, en déduire que pour tout dans $C_0^\infty(Q)$:

$$< \partial_t^2 \mathrm{u}\,, \varphi > = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{x_j}{|x|^2}\ (\partial_j \varphi)(|x|\,,x)\right)\ \mathrm{dx} + 2\int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^3}\,\varphi(t,x)dx\,dt$$

3) soit $\square = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{x_j}{|x|^2}\ \partial_j{}^2\right)$, l'operateur des ondes , montrer que l'on a ,$\square\ u = 2u^3$dans $\acute{D}(\Omega)$.

II) pour $t > 0$ on considère la distribution $v_t$sur IR^3 définie par $v_t = u(t,\ .)$

1) Montrer que $(v_t \in C^\infty([0,+\infty[\,, \acute{\mathcal{E}}\ IR^3)\ )$.

Indication :

Pour$\in C^\infty(IR^3)$, on considère une fonction , $t \to G(t)$, dans $C^\infty(IR)$ telle que $G(t) = < v_t, \varphi >$, pour $t > 0$, calculer $v_0\ et\ v_0^{(1)}$

2) Montrer que $\widehat{v_t}$est bien définie et que $\widehat{v_t}(\xi) = \widehat{v_t}(0,0,|\xi|)$
3) Montrer que $\widehat{v_t}(\xi) = \frac{4\pi}{|\xi|^2}\left(\frac{\sin(t\,|\xi|)}{t\,|\xi|} - \cos(t\,|\xi|)\right)$
4) Montrer que , pour tout S= $\left[0\,, \frac{1}{2}\right[$, la fonction $\xi \to |\xi|^s |\widehat{v_t}(\xi)|$, appartient à $L^2(IR^3)$

Solution :

1) Soit $\in C_0^\infty(Q)$, on a :

$$< \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi > = - < u, \frac{\partial \varphi}{\partial t} > = - \int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) dx\, dt$$

$$= - \int_{IR^3} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\, dx\, dt$$

$$= \int_{IR^3} \frac{1}{|x|} \varphi(|x|,\mathrm{x})\, dx - \int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^2} \varphi(t,x) dx\, dt$$

$$< \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi > = - < u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} > = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \int_{|x|<t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx\, dt$$

$$= = - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \int_{|x|=t} \frac{x_j}{|x|} \varphi(t,x)\, dx\, dt$$

D'après la de Green , on a donc :

$$< \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi > = - \int_0^{+\infty} \int_{|x|=t} \frac{x_j}{|x|^2} \varphi(t,x) d\delta_t\, dt = \int_{IR^3} \frac{x_j}{\partial x_j} (|x|,\mathrm{x})\, dx$$

D'où : $\sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(|x|, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(|x|, \mathrm{x}) + \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(|x|, x) \ldots *$

En suite : $I = < \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}, \varphi > = - < \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} >$ d'après la question 1 on a :

$$I = \int_{IR^3} \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(|x|,\mathrm{x})\, dx + \int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) dx\, dt = (1) + (2)$$

$$(2) = \int_{IR^3} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) dt\, dx = \int_{IR^3} \left[\frac{1}{t^2} \varphi(t,x)\right]_{|x|}^{+\infty} dx + \int_{IR^3} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{2}{t^3} \varphi(t,x) dt\, dx$$

$$= \int_{IR^3} \frac{1}{|x|^2} \varphi(|x|, \mathrm{x}) + 2\int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^3} \varphi(t,x) dx\, dt$$

D'après l'égalité (*) on a :

$$(1) = - \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|} \frac{\partial}{\partial x_j} [\varphi(|x|, x)]\ dx + \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(|x|, x)\, dx$$

D'autre part : $\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{x_j}{|x|^2}\ \varphi(|x|\ ,\ \mathrm{x}) = \frac{1}{|x|^2} \varphi(|x|, x) + \sum_j \frac{x_j}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial x_j} [\varphi(|x|, x)]$

Et ,comme $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, il vient

$$(1) = \int_{IR^3} \frac{1}{|x|^2} \varphi(|x|, x)\, dx + \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{|x|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(|x|, x)\ dx$$

On en déduit que ,

$$I = (1) + (2) =: \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{|x|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (|x| , x) + 2 \int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^3} \varphi(t, x) dx \, dt$$

Ce qui est la formule énoncée

3) D'après la question 1) on a :

$$< \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_j} , \varphi > = < \frac{\partial u}{\partial x_j} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} > = \int_{IR^3} \frac{x_j}{|x|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} (|x| , x) \, dx$$

Et d'après la question 2) on a ,

$$< \square u , \varphi > = 2 \int_0^{+\infty} \int_{|x|<t} \frac{1}{t^3} \varphi(t, x) dx \, dt = 2 < u^3, \varphi >$$

$II) - 1)$ tout d'abord , pour $t > 0$,le support de v_t est contenu dans $\{x \in IR^n , |x| < t \}$, donc $v_t \in \mathfrak{E}(IR^3)$,en suite ,soit t> 0pour $\varphi \in C_0^\infty(IR^3)$ on a , $< v_t, \varphi > = \frac{1}{t} \int_{|x|<t} \varphi(x) dx$,posons $x = ty \; alors \; dx = t^3 dy , d'ou$

$$< v_t, \varphi > = t^2 \int_{|y|<t} \varphi(ty) dy.$$

Considérons la fonction : $IR \to C$, $G(t) = t^2 \int_{|y|<t} \varphi(ty) dy$, c'est une fonction C^∞ sur IR d'après le théorème de dérivation de Lebesgue on voit facilement que
$v_0 = v_0^1 = 0$

2) Comme $\acute{U}_t \in \mathfrak{E}(IR^3) \subset \acute{\mathfrak{J}}$, on a $\hat{v}_t \in C^\infty$, de plus v_t est invariante par rotation , car $v_t(x) = \frac{1}{t} H(1 - |x|)$,donc $\hat{v}_t$ est aussi invariante par rotation
d'où : $\hat{v}_t(\xi) = v_t(0,0, |\xi|) = \frac{1}{t} \int_{|x|<t} e^{-ix|\xi|} dx$

En posant en coordonnées polaires dans l'intégrale ,il vient :

$$\widehat{U}_t(\xi) = \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ir \, cos\theta \, |\xi|} \, r^2 sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \frac{2\pi}{t} \int_0^t r^2 \left(\int_0^{\pi} e^{-ir \, cos\theta \, |\xi|} sin\theta \, d\theta \right) dr$$

$$= \frac{2\pi}{t} \int_0^t r^2 \left(\left(\int_{-1}^{1} e^{-ir \, x \, |\xi|} dx \right) dr = \frac{4\pi}{t|\xi|^2} \int_0^t \sin(r|\xi|) \right) dr$$

$$= \frac{-4\pi}{t|\xi|^2} \int_0^t \text{r} \cos(r|\xi|) \, dr = \frac{-4\pi}{t|\xi|^2} [r \cos(r|\xi|)]_0^t + \frac{4\pi}{t|\xi|^3} \sin(r|\xi|)$$

$= \frac{4\pi}{|\xi|^2} \left(\frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|} - \cos(t\,|\xi|) \right)$

3)

Pour $t|\xi| \leq \varepsilon$, $on\ a, \hat{v}_t(\xi) \approx Ct^2$ et pour $t|\xi| \geq \varepsilon\ on\ a$, $|\hat{v}_t(\xi)| \leq \frac{8\pi}{|\xi|^2}$, d'où $|\xi|^s|\hat{v}_t(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^{2-s}}$. Alors $|\xi|^s|\hat{v}_t(\xi)| \in L^2\ si\ 4 - 2s > 3$, $ie\ 0 \leq S < \frac{1}{2}$

Donc $\hat{v}_t \in L^2 \quad et \quad |\xi|^s\, \hat{v}_t \in L^2$.

Conclusion

La transformée de Fourier est l'un des outils , si non l'outils fondamental du traiteur de signaux .elle permet d'associer à la '' forme d'onde'' habituelle ,la représentation d'un signal en fonction de sa variable d'évolution ,une autre représentation complémentaire ,dans le domaine fréquentiel.

L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires ,et faciliter leur étude .après avoir fourni quelques rappels sur la transformèe de Fourier et ses principales propriétés nous nous intéresserons au les notion de convolution et de fonction de transfert , qui permettent la caractérisation des filtres .

Les principaux éléments seront alors en place pour aborder le problème de l'échantillonnage.

Cette operateur joue un rôle très importants dans différents domaines, en mathématique nous nous utiliserons pour résoudre les équations différentielles par exemple l'équation de la chaleur.

Bibliographies

[1] A. Walter, Mathématiques pour la Physique et les Physiciens, !H§K, Paris, 2002.

[2] J. Bass, Cours de Mathématiques T_3, Masson, Paris 1971

[3] EL HAL LAAMRI, Mesure et intégration, Convolution et Transformation de fourier des fonction,

[4] J. Quinet, Cours élémentaire de mathématiques supérieures T_3, Dunod, Paris, 1976.

[**5**] Robert Tassinari, Pratique de l'Analyse fonctionnelle,

[**6**] **Jean – Michel Bony** Cours d'analyse. theorie des distributions et analyse de Fourier,

Webographies

http://fr.wikipedia.org/wiki/Transform%C3%A9e_de_Fourier

http://www.especi.fr

http://www.script.unive unive-paris-diierot.fr