



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
جامعة عمار ثليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

## MÉMOIRE DE MASTER

**Domaine** : Mathématiques et Informatique.  
**Filière** : Mathématique.  
**Option** : Analyse Mathématique.

**PAR :**

Djekidel Hanaa

**THEME**

---

## OPÉRATEURS DE LIPSCHITZ MAJORANTS.

---

Devant le jury composé de :

BELACEL Amar	Professeur	Université de Laghouat	Président
BOUGOUTAIA Amar	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur
ABDESSELAM Nawel	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examineur

Année Universitaire : 2022-2023

## *Dédicace*

*J*e dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

*A*mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements.

*J*e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

*Et je le dédie :*

*A*tous les membres de ma famille, mes frères "Abdel mouhaimen", "Abed Alrahman", "Khalil",  
et mes soeurs "Fatima", "Mereim", "Zinab", "Nour Elhouda"  
et mes neveux "Ibrahem", "Ismail", "Hala", "Fatima Zahra"

*A*tous mes amis qui m'ont toujours encouragé,  
et à qui je souhaite plus de succès.

**Djekidel Hanaa.**

## *Remerciements*

*Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

*Je tiens à remercier mon encadreur **Dr.BOUGOUTAIA Amar** pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui m'ont guidé durant la réalisation de ce mémoire.*

*Je remercie vivement monsieur **Dr.BELACEL Amar** , accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.*

*Je tiens également à remercier **Dr. ABDESSELAM Nawel** pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

**Djekidel Hanaa**

# Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>1 Propriétés de base des opérateurs de Lipschitz.</b>	<b>2</b>
1.1 Préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés . . . . .	3
1.1.1 Opérateurs compacts . . . . .	4
1.1.2 Opérateurs linéaires $p$ -sommants . . . . .	5
1.2 Les opérateurs de Lipschitz . . . . .	6
1.2.1 Espace Arens-Elles . . . . .	8
1.2.2 Opérateurs de Lipschitz compacts . . . . .	11
<b>2 Majorisation et factorisation des opérateurs linéaires bornés.</b>	<b>15</b>
2.1 Majorisation . . . . .	16
2.2 Factorisation . . . . .	20
<b>3 Majorisation et factorisation des opérateurs de Lipschitz.</b>	<b>22</b>
3.1 Majorisation . . . . .	23
3.2 Applications . . . . .	28
<b>Bibliographie.</b>	<b>30</b>

# Notations

- ▶  $(E, \|\cdot\|)$  : Espace vectoriel normé .
- ▶  $\mathcal{B}_E$  : La boule unité de  $E$ .
- ▶  $E^*$  : Le dual topologique de  $E$ .
- ▶  $\mathcal{B}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$  : Ensemble de toutes les opérateurs linéaires bornées de  $E$  à  $F$ .
- ▶  $T^*$  : Adjoint de l'opérateur linéaire.
- ▶  $\mathcal{K}(E, F)$  : Ensemble de tous les opérateurs linéaires compacts de  $E$  à  $F$ .
- ▶  $\mathcal{W}(E, F)$  : Ensemble de tous les opérateurs faiblement compacts de  $E$  à  $F$ .
- ▶  $(X, d)$  : Espace métrique .
- ▶  $(X, d, 0)$  : Espace métrique pointé.
- ▶  $\mathcal{M}_0(X)$  : Ensemble des espaces métriques complets pointés.
- ▶  $Lip_0(X, Y)$  : Espace de toutes les fonctions de Lipschitz entre  $X$  et  $Y$  tel que  $T(0) = 0$ .
- ▶  $Lip(\cdot)$  : Norme sur la  $Lip_0(X, Y)$  .
- ▶  $X^\# = Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X)$  : Dual de Lipschitz de l'espace métrique pointé  $X$  .
- ▶  $\mathcal{A}E$  : Espace Arens-Elles .
- ▶  $\mathcal{M}(X)$  : Espace vectoriel de toutes les molécules sur l'espace métrique  $X$ .
- ▶  $T^\#$  : Adjoint d'un opérateur de Lipschitz  $T$ .
- ▶  $Lip_{0k}(X, E)$  : Ensemble de tous les opérateurs de Lipschitz compacts de  $X$  à  $E$ .
- ▶  $Lip_{0w}(X, E)$  : Ensemble de tous les opérateurs de Lipschitz faiblement compacts de  $X$  à  $E$  .
- ▶  $C(K)$  : Espace des fonctions continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}$ .
- ▶  $L_p$  : Espace de Lebesgue ( $1 \leq p < \infty$ ).
- ▶  $\prod_p^L(X, E)$  : Espace de tous les opérateurs de Lipschitz  $p$ -sommants de  $X$  à  $E$  .
- ▶  $\pi_p^L(\cdot)$  : Norme sur  $\prod_p^L(X, E)$ .

# Introduction.

Ces dernières années, Douglas a été le premier à décrire la notion de majorisation pour les opérateurs linéaires bornés dans son travail [5] pour tout  $T$  et  $S$  dans  $\mathcal{B}(H)$  tel que  $H$  est un espace de Hilbert. Embrey a généralisé le résultat de Douglas dans son travail [7] pour tous  $T$  et  $S$  dans  $\mathcal{B}(E)$  tel que  $E$  est un espace général de Banach. Harte, dans son livre [10], considère ces concepts dans le contexte général où  $S$  et  $T$  sont des opérateurs linéaires bornés avec des espaces de domaine et de champ éventuellement différents. Nous disons que  $T \in \mathcal{B}(E, F)$  majore  $S \in \mathcal{B}(E, G)$  s'il existe  $M > 0$  tel que

$$\|S(a)\| \leq M\|T(a)\|, \text{ pour tout } a \in E.$$

Dans ce travail, nous essayons de généraliser ce concept dans le cas linéaire à non linéaire, qui est le cas de Lipschitz. Ce mémoire a été organisé comme suit.

Le premier chapitre est un aperçu des notions et des concepts de base et des résultats nécessaires dans les chapitres suivants, ceux-ci incluent les opérateurs de Lipschitz, l'espace Arens-Elles de Banach et nous décrivons également les opérateurs de Lipschitz compacts et faiblement compacts.

Dans le deuxième chapitre, nous sommes intéressés à l'article de Barnes, nous présentons la définition de la majorisation pour les opérateurs linéaires bornés, quelques propriétés et leurs preuves. Nous verrons ensuite la notion de factorisation. De plus, nous étudions les relations entre les concepts ,majorisation, factorisation et inclusion de champ.

Dans le dernier chapitre, nous essayons de généraliser la notion de majorisation pour les opérateurs de Lipschitz entre les espaces métriques et les espaces de Banach. Nous prouvons qu'une application de Lipschitz  $S$  est majoré par une application de Lipschitz  $T$  si et seulement s'il existe  $V \in Lip_0(\overline{T(X)}, F)$  tel que  $S = V \circ T$ , où  $T \in Lip_0(X, E)$   $S$  et  $\in Lip_0(X, F)$ .

# Chapitre 1

## Propriétés de base des opérateurs de Lipschitz.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et concepts de base ceux utilisés dans le chapitre 2 et le chapitre 3. Nous commençons par quelques préliminaires sur les opérateurs bornés linéaires pour plus des détails, le lecteur peut consulter[6]. Nous avons également besoin des opérateurs de Lipschitz et de certaines propriétés basées sur le livre de Weaver [15], la définition des opérateurs de Lipschitz compacts (resp, faiblement compacts) qui est principalement basée dans [11], et l'espace libre de Banach dont nous avons utilisé l'article de Godefroy [9].

## 1.1 Préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach sur le même corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Rappelons qu'un espace de Banach est un espace normé complet (c-à-d toute suite de Cauchy sur  $E$  converge dans  $E$ ), on note par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés  $T$  de  $E$  à  $F$ , sous la norme

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|T(a)\|_F \leq C\|a\|_E; \forall a \in E\}.$$

Lorsque  $F = \mathbb{K}$ ,  $\mathcal{L}(E, F)$  est noté par  $E^*$  est le dual topologique de  $E$ , et nous avons noté par  $E^{**}$  le bidual de  $E$ . L'espace normé  $E$  intégré isométriquement dans  $E^{**}$  de façon naturelle.

$$\begin{aligned} i : E &\longrightarrow E^{**} \\ a &\longmapsto i(a) \end{aligned}$$

Par la formule

$$i(a)(a^*) = a^*(a) = \langle a^*, a \rangle \text{ pour chaque } a^* \in E^*.$$

Lorsque l'isométrie linéaire  $a \rightarrow i(a)$  d'un Banach  $E$  dans  $E^{**}$  est surjective, l'espace de Banach  $E$  est dit réflexif.

Pour  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , nous considérerons l'adjoint (dual) de  $T$ , l'opérateur linéaire borné  $T^*$  de  $F^*$  à  $E^*$  donné par

$$T^*(b^*)(a) = \langle T^*(b^*), a \rangle = \langle b^*, T(a) \rangle.$$

Le théorème de Hahn-Banach est l'un des résultats les plus importants et les plus fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

**Théorème 1.1.1.** (*Forme analytique de Hahn Banach*). Soient  $E$  une espace de Banach et  $E_0$  un sous-espace de  $E$ . Soit  $f_0 : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  un opérateur linéaire borné. Alors  $f_0$  peut être étendu à un opérateur linéaire borné  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\|f_0\| = \|f\|$ .

$$\begin{array}{ccc} E_0 & & \\ \downarrow i & \searrow f_0 & \\ E & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

( $i$  est l'injection canonique de  $E$  à  $E_0$  et  $f_0 = f \circ i$ )

**Corollaire 1.1.1.** *Pour chaque  $a$  dans  $E$ , nous avons*

$$\|a\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}=1} |\langle f, a \rangle|.$$

### 1.1.1 Opérateurs compacts

Avant de donner la notion d'opérateurs compacts, nous rappelons la définition de la topologie faible et faible\*.

Soit  $E$  un espace de Banach et  $E^*$  son dual topologique.

1. La topologie faible  $\sigma(E, E^*)$  sur  $E$ , est la topologie la plus faible telle que chaque application  $a^* \in E^*$  est continue.
2. La topologie faible\*  $\sigma(E^*, E)$  sur  $E^*$ , est la topologie la plus faible telle que chaque opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} J(a) : E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto J(a)(f) = f(a), \end{aligned}$$

est continue.

**Théorème 1.1.2.** (*Théorème de Banach-Bourbaki-Alaoglu*). *La boule d'unité fermée  $\mathcal{B}_{E^*}$  est compact par la topologie faible\*  $\sigma(E^*, E)$ .*

**Définition 1.1.1.** *Un opérateur  $T : E \rightarrow F$  est dit compact (faiblement compact) si  $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$  est compact (resp. faiblement compact) en  $F$ . On note par  $\mathcal{K}(E, F)$  (resp.  $\mathcal{W}(E, F)$ ) l'ensemble de tous les opérateurs compacts (resp. faiblement compacts).*

**Théorème 1.1.3.** (*Théorème de Schauder*). *Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. L'opérateur  $T$  dans  $\mathcal{K}(E, F)$ .
2. L'opérateur  $T^*$  dans  $\mathcal{K}(F^*, E^*)$ .

**Preuve.** On trouve la preuve dans [6] page 485. ■

**Théorème 1.1.4.** (*Théorème de Gantmacher*)[6]. *Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. L'opérateur  $T$  dans  $\mathcal{W}(E, F)$ .
2. L'opérateur  $T^*$  dans  $\mathcal{W}(F^*, E^*)$ .

**Corollaire 1.1.2.** *Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur linéaire borné. Si  $E$  ou  $F$  est réflexif,  $T$  est faiblement compact (c-à-d  $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$  est compact par la topologie faiblement\*  $\sigma(E^*, E)$ ).*

## 1.1.2 Opérateurs linéaires $p$ -sommants

Un opérateur linéaire  $T : E \rightarrow F$  est dit  $p$ -sommant ( $1 \leq p < \infty$ ), s'il existe une constante  $C \geq 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$

$$\sum_{i=1}^n \|T(a_i)\| \leq C^p \sup_{f \in \mathcal{B}_{E^*}} \sum_{i=1}^n |f(a_i)|^p. \quad (1.1)$$

On note  $\prod_p(E, F)$  l'espace de tous les opérateurs linéaires  $p$ -sommants  $T : E \rightarrow F$  et par  $\pi_p(T)$  le plus petit  $C$  vérifie (1.1)

**Remarque 1.1.1.**  $(\prod_p(E, F), \pi_p(\cdot))$  est un espace de Banach.

**Remarque 1.1.2.** Chaque espace de Banach  $E$  est isométrique à un sous-espace de  $C(K)$  tel que  $K$  est un ensemble compact.  $K = (\mathcal{B}_{E^*}, \sigma(E^*, E))$ . En effet, on défini :

$$\begin{aligned} i : E &\longrightarrow C(K) \\ a &\longmapsto i(a) = \tilde{a} = \langle a, \cdot \rangle, \end{aligned}$$

tel que,  $\tilde{a}(f) = \langle a, f \rangle$ , pour tout  $f \in K$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|i(a)\|_{C(K)} &= \|\tilde{a}\|_{C(K)} \\ &= \sup_{f \in K} |\tilde{a}(f)| \\ &= \sup_{f \in K} |f(a)| \\ & \quad (\text{d'après Hahn Banach}) = \|a\|_E, \end{aligned}$$

on pose

$$J_p : C(K) \longrightarrow L_p(K, \mu)$$

( $J_p$  est l'injection canonique de  $C(K)$  à  $L_p(K, \mu)$ ).

**Théorème 1.1.5.** Soit ( $1 \leq p < \infty$ ), les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $T \in \prod_p(E, F)$ .
2. Il existe une constante positive  $C$  et une probabilité de radon  $\mu$  sur  $K$  tel que

$$\|T(a)\| \leq C \left( \int_K |\langle a, f \rangle|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.2)$$

pour tout  $a \in E$ .

3. Le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{T} & F \\
 \downarrow i & & \uparrow \tilde{T} \\
 S_\infty & \xrightarrow{J_p} & S_p \\
 \cap & & \cap \\
 C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(K, \mu)
 \end{array}$$

## 1.2 Les opérateurs de Lipschitz

On commence par quelques définitions puis des propriétés élémentaires et supplémentaires concernant les opérateurs de Lipschitz. Nous renvoyons au livre Weaver [15] pour plus de détail d'informations sur les opérateurs de Lipschitz et à A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre, M. Villegas-Vallecillos [11] pour les opérateurs de Lipschitz compacts.

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques

**Définition 1.2.1.** Soit  $X$  un ensemble non vide. On dit que  $d$  est une distance sur  $X$  si et seulement si  $d$  est une application de  $X^2$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que pour tous  $x, y, z$  dans  $X^3$ , on a

1.  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$  (séparation).
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie).
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire).

**Définition 1.2.2.** Un espace métrique pointé  $(X, d, 0)$ , est un espace métrique  $(X, d)$  avec un élément distingué  $0 \in X$ .

On note par

$$\mathcal{M}_0(X) = \{\text{les espaces métriques pointés complets}\}.$$

**Définition 1.2.3.** (Application de Lipschitz) Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite de Lipschitz, s'il existe une constante positive  $C$  tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y). \quad (1.3)$$

**Définition 1.2.4.** Pour une fonction de Lipschitz  $f$ , on définit la constante de Lipschitz par

$$\begin{aligned} \|f\|_{Lip} = Lip(f) &= \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \right\} \\ &= \inf \{ C : C \text{ vérifie l'égalité (1.3)} \}. \end{aligned}$$

$Lip_0(X, Y) = \{ \text{fonctions de Lipschitz bornées } f : X \rightarrow Y \}$

Si  $Y = \mathbb{R}$  alors  $Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X)$ .

On note par  $X^\#$  le dual de Lipschitz, l'espace de Banach des formes de Lipschitz sur  $X$  dans  $Y$

$$Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0(X) = X^\#$$

**Définition 1.2.5.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est un isomorphisme lipschitzien si  $f$  est bijective et  $f$  et  $f^{-1}$  lipschitziennes.

Elle est un isomorphisme isométrique si

$$\forall x, y \in X, d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

**Proposition 1.2.1.** Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces métriques. Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications de Lipschitz alors  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est Lipschitzienne et

$$Lip(g \circ f) \leq Lip(g) Lip(f).$$

**Preuve.** Pour  $x, y \in X$ , nous avons

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x), g \circ f(y)) &= d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \\ &\leq Lip(g) d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq Lip(g) Lip(f) d_X(x, y). \end{aligned}$$

■

Le théorème suivant peut être visualisé dans [15].

**Théorème 1.2.1.** (*Théorème de Hahn-Banach non linéaire*). Soient  $X_0$  une partie d'un espace métrique  $(X, d)$  et  $f_0 : X_0 \rightarrow l_\infty(I)$  un opérateur de Lipschitz. Alors  $f_0$  se prolonge à un opérateur de Lipschitz  $f : X \rightarrow l_\infty(I)$  tel que  $Lip(f_0) = Lip(f)$  (nous disons que  $l_\infty(I)$  est une 1-injective).

$$\begin{array}{ccc} X_0 & & \\ \downarrow i & \searrow f_0 & \\ X & \xrightarrow{f} & l_\infty(I) \end{array}$$

( $i$  est l'injection canonique de  $X_0$  à  $X$  et  $f_0 = f \circ i$ ).

**Preuve.** On en trouve la preuve dans [15]. ■

### 1.2.1 Espace Arens-Elles

Il a été montré par Arens et Eells que  $Lip_0(X)$  est un espace de Banach dual, on remarque que l'espace est introduit par Godefroy et Kalton en 2003 (voir [9]), bien que cet espace a été présenté a la première fois par Arens-Eells en 1956 (ils ont utilisé les molécules), nous commençons par rappeler la définition et les propriétés de l'espace d'Arens-Eells.

**Définition 1.2.6.** Soit  $(X, d, 0)$  un espace métrique pointé, une molécule sur  $X$  est une fonction  $m : X \rightarrow \mathbb{R}$  a support fini satisfaisant

$$\sum_{x \in \text{supp}(m)} m(x) = 0.$$

On note par  $\mathcal{M}(X)$  l'espace vectoriel des molécules sur  $X$ .

On peut écrire

$$\begin{aligned} m &= \left\{ \sum_{j=1}^l \alpha_j (\mathbf{1}_{\{x_j\}} - \mathbf{1}_{\{y_j\}}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^l \alpha_j m_{x_j y_j}. \end{aligned}$$

La condition  $\sum_{i=1}^n m(x_i) = 0$ , mais assure que cette représentation existe.

On pose

$$\|m\|_{\mathcal{M}(X)} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^l |\alpha_j| d(x_j, y_j), \text{ sur toute les représentation} \right\}.$$

Il s'ensuit que  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)}$  est une norme sur l'espace  $\mathcal{M}(X)$ , On note par  $\mathcal{A}(X, d_X)$  le complété de l'espace normé  $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)})$ .

**Proposition 1.2.2.** L'application.

$$\begin{aligned} \delta_X : X &\longrightarrow \mathcal{A}(X) \\ x &\longmapsto \delta_X(x) = \mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}. \\ &= m_0, \end{aligned}$$

est isométrie.

**Théorème 1.2.2.** Soit  $X$  un espace métrique pointé, alors  $Lip_0(X) \cong_{\text{isométriquement}} \mathcal{A}(X)^*$

**Preuve.** On définit

$$S : \mathcal{A}(X)^* \longrightarrow Lip_0(X).$$

par

$$\begin{aligned} S(\varphi)(x) &= \varphi(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}) \\ &= \varphi(m_0) \end{aligned}$$

tel que  $\varphi \in \mathcal{A}(X)^*$ .

On a pour tous  $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |S(\varphi)(x) - S(\varphi)(y)| &= |\varphi(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{0\}}) - \varphi(\mathbf{1}_{\{y\}} - \mathbf{1}_{\{0\}})| \\ &= |\varphi(\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}})| \leq \|\varphi\| \|\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}\| \\ &\leq \|\varphi\| d(x, y). \end{aligned}$$

Alors on obtient que  $S$  est un opérateur linéaire contractant et  $Lip(S\varphi) \leq \|\varphi\|$  tel que  $\varphi \in \mathcal{A}(X)^*$ .

Maintenant, on définit

$$\begin{aligned} R : Lip_0 &\longrightarrow \mathcal{A}(X)^* \\ f &\longmapsto R(f) \end{aligned}$$

avec

$$R(f)(m) = \sum m(x)f(x).$$

Soit  $m = \sum_{j=1}^l \alpha_j (\mathbf{1}_{\{x_j\}} - \mathbf{1}_{\{y_j\}})$  Alors

$$\begin{aligned} |R(f)(m)| &= \left| \sum_{j=1}^l m(x_j)f(x_j) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^l \alpha_j f(x_j) - f(y_j) \right| \leq \sum_{j=1}^l |\alpha_j| |f(x_j) - f(y_j)| \\ &\leq Lip(f) \sum_{j=1}^l |\alpha_j| d(x_j, y_j) \\ &\leq Lip(f) \|m\|_{\mathcal{A}(X)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que cette inégalité reste valable dans  $\mathcal{A}(X)$ , car  $\mathcal{M}(X)$  est dense dans  $\mathcal{A}(X)$ . Par conséquent  $\|R(f)\| \leq Lip(f)$ .

Les deux opérateurs  $R$  et  $S$  sont l'inverse l'un de l'autre, donc l'espace  $Lip_0(X)$  est isométriquement isomorphe au  $\mathcal{A}(X)^*$ .

$$\mathcal{A}(X)^* \equiv Lip_0(X). \blacksquare$$

**Proposition 1.2.3.** *Soit  $X \in \mathcal{M}_0$*

1. *Pour toute molécule  $m$ , on a  $\|m\|_{\mathcal{A}(X)} = \sup_{f \in \mathcal{B}_{X^\#}} |\langle m, f \rangle|$ .*

2.  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(X)}$  *est la plus grande semi norme sur  $\mathcal{M}(X)$  qui satisfait*

$$\|\mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}\|_{\mathcal{A}(X)} = d(x, y), \forall x, y \in X.$$

**Théorème 1.2.3.** *Soit  $X$  est un espace de Banach alors, il existe une projection de  $Lip_0(X)$  dans  $X^*$*

**Théorème 1.2.4. (Linéarisation).** *Soient  $X$  un espace métrique pointé,  $E$  un espace de Banach et  $T : X \rightarrow E$  un opérateur de Lipschitz tel que  $T(0) = 0$ . Alors il existe un unique opérateur linéaire borné  $T_L : \mathcal{A}(X) \rightarrow E$ , tel que  $T = T_L \circ \delta_X$  et  $\|T_L\| = Lip(T)$ .*

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \delta_X \downarrow & \searrow T & \\ \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{T_L} & E \end{array}$$

**Définition 1.2.7.** *Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $Y$  un espace de Banach. Sawashima dans [13] et [3] a défini l'adjoint de Lipschitz  $T^\# : Lip_0(Y) \rightarrow Lip_0(X)$  d'une application de Lipschitz  $T \in Lip_0(X, Y)$  par la formule*

$$\begin{aligned} T^\# : Lip_0(Y) &\longrightarrow Lip_0(X) \\ f &\longmapsto T^\#(f) = f \circ T. \end{aligned}$$

*L'opérateur  $T^\#$  est linéaire continue et  $\|T^\#\| = Lip(T)$ . La restriction de  $T^\#$  sur  $E^*$  définit un opérateur linéaire continue appelé l'opérateur transposer de Lipschitz de  $T$ , notée par  $T^t$ .*

Pour démontrer la proposition suivante, nous avons besoin des définitions suivantes. Soit  $E$  un espace de Banach.

**Définition 1.2.8. (*partie convexe*)** Un ensemble non vide  $C$  de  $E$  est convexe si, pour tous  $x, y \in C$  et  $\theta \in [0, 1]$ , on a  $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ , il est clair que tout sous-espace de  $E$  est convexe et toute intersection non vide des parties convexes de  $E$  est convexe.

**Définition 1.2.9. (*Enveloppe convexe*)** L'enveloppe convexe d'un ensemble non vide  $C$  de  $E$  est l'intersection de toutes les parties convexes de  $E$  contenant  $C$ , c'est la plus petite partie convexe de  $E$  contenant  $C$ , il est noté par  $\text{co}(C)$  et nous avons

$$\text{co}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in C, \theta_i > 0, \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\}.$$

**Définition 1.2.10. (*Absolument convexe*)** Un ensemble non vide  $C$  de  $E$  est absolument convexe, si pour tout  $x, y \in C$  et  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{K}$  tel que  $|\theta_1| + |\theta_2| < 1$ , on a  $\theta_1 x + \theta_2 y \in C$ . Ces pièces contiennent toujours l'élément 0.

**Définition 1.2.11. (*Enveloppe absolument convexe*)** L'enveloppe absolument convexe d'un ensemble non vide  $C$  de  $E$  est l'intersection de toutes les parties absolument convexes de  $E$  contenant  $C$ , il est noté par  $\Gamma(C)$  et nous avons

$$\Gamma(C) = \left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in C, \theta_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^n \theta_i \leq 1 \right\}.$$

Nous pouvons consulter la preuve de la proposition suivante dans [11].

En appliquant le théorème de bipolaire, nous donnons une description précise de  $B_{\mathcal{B}(X)}$  par fonctionnelle d'évaluation de Lipschitz  $\delta_{(x,y)} = \frac{\delta_x - \delta_y}{d(x,y)}$  défini sur  $X^\#$ , où  $(x, y)$  traverse  $\tilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$ .

**Proposition 1.2.4.** La boule unité fermée  $\mathcal{B}(X)$  est l'enveloppe absolument convexe fermée dans  $\left\{ \delta_{(x,y)} : (x, y) \in \tilde{X} \right\}$  dans  $(X^\#)^*$  (c-à-d,  $\mathcal{B}_{\mathcal{B}(X)} = \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right)$ ).

## 1.2.2 Opérateurs de Lipschitz compacts

Si  $X$  est un espace métrique et  $E$  est un espace de Banach, par l'image de Lipschitz d'une application  $T : X \rightarrow E$  nous voulons dire l'ensemble

$$\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

Il est immédiat que  $T : X \rightarrow E$  est une application de Lipschitz si son image Lipschitz est un sous-ensemble borné de  $E$ . Cela donne la définition suivante.

**Définition 1.2.12.** [11] Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  un espace de Banach. On dit qu'une application préservant les points de base  $T : X \rightarrow E$  est Lipschitz compact (resp, Lipschitz faiblement compact) si son image Lipschitz est relativement compact (resp, relativement faiblement compacte) dans  $E$ .

On note  $Lip_{0k}(X, E)$  et  $lip_{0w}(X, E)$  les ensembles d'opérateurs de Lipschitz compacts et faiblement compacts de  $X$  dans  $E$ , respectivement.

$$Lip_{0k}(X, E) \subset Lip_{0w}(X, E) \subset Lip_0(X, E).$$

Observez que  $Lip_{0k}(X, E)$  et  $Lip_{0w}(X, E)$  sont des sous-espaces linéaires de  $Lip_0(X, E)$ .

Ensuite nous étudions la relation entre la compacité d'un opérateur de Lipschitz  $f \in Lip_0(X, E)$  et la compacité de sa linéarisation  $T_L \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(X), E)$ .

**Lemme 1.2.1.** [11] Soit  $T \in Lip_0(X, E)$  on définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{X}} : \tilde{X} &\longrightarrow (X^\#)^* \\ (x, y) &\longmapsto \delta_{\tilde{X}}(x, y) = \delta(x, y) \end{aligned}$$

Alors

$$T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \subset T_L \left( \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right) \subset \bar{\Gamma} \left( T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right).$$

**Preuve.** Nous montrons que  $T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \subset T_L \left( \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right)$  implique

$$\delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \subset \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \text{ (avec définition)}$$

Alors

$$T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \subset T_L \left( \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right).$$

Pour la deuxième inclusion, nous prenons  $z_1 \in T_L \left( \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right)$  implique  $\exists z_2 \in \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right)$ , tel que  $z_1 = T_L(z_2)$ .

Cela implique qu'il ya  $b_n \in \Gamma \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right)$ , tel que  $z_2 = \lim_n b_n$  et  $b_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} z_1 &= T_L(z_2) \\ &= T_L \left( \lim_n b_n \right) \\ &= T_L \left( \lim_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})} \right) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^n T_L \left( \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})} \right). \end{aligned}$$

Où  $z_1 \in \bar{\Gamma} \left( T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right)$ .

On obtient finalement que

$$T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \subset T_L \left( \bar{\Gamma} \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right) \subset \bar{\Gamma} \left( T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right).$$

**Proposition 1.2.5.** *Soient  $X$  un espace métrique pointé,  $E$  un espace de Banach et  $T \in Lip_0(X, E)$ . Alors  $T$  est Lipschitz compact, si et seulement si  $T_L$  est compact.*

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned} T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) &= \left\{ T_L \left( \delta_{\tilde{X}} (x, y) \right) : x, y \in X, x \neq y \right\} \\ &= \left\{ T_L \left( \frac{\delta_x - \delta_y}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{T_L \circ \delta_x - T_L \circ \delta_y}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} \\ &= \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.2.1 précédent et la Proposition 1.2.4, on a

$$T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \subset T_L \left( \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)} \right) \subset \bar{\Gamma} \left( T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right).$$

Donc  $\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}} \subset \overline{T_L \left( \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)} \right)} \subset \bar{\Gamma} \left( \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} \right)$ .

On suppose que  $T_L$  est compact, donc  $\overline{T_L \left( \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)} \right)}$  est compact, alors

$$\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}},$$

est compact (fermé sur un compact est compact), ce qui implique que  $T$  est Lipschitz compact.

Maintenant, nous supposons que  $T$  est Lipschitz compact, donc

$$\overline{\left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}},$$

est compact par conséquent

$$\bar{\Gamma} \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\},$$

est compact (si  $A$  est relativement compact  $\implies \bar{\Gamma}(A)$  est compact). Nous avons aussi

$$\overline{T_L \left( \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)} \right)} \subset \bar{\Gamma} \left( T_L \left( \delta_{\tilde{X}} \left( \tilde{X} \right) \right) \right).$$

Donc  $\overline{T_L \left( \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)} \right)}$  est compact impliqué que  $T_L$  est compact. ■

**Proposition 1.2.6.** [11] Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  est un espace de Banach. Les affirmations sont équivalents :

1. L'opérateur de Lipschitz  $T$  est faiblement compact.
2. La linéarisation  $T_L$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{A}(X), E)$  est faiblement compact.
3. Il existe un espace Banach réflexif  $F$ , un opérateur linéaire borné  $f \in \mathcal{B}(F, E)$  et opérateur de Lipschitz  $g \in Lip_0(X, F)$  tel que  $T = f \circ g$ .

**Preuve.** La preuve de la proposition précédente est valable pour montrer l'équivalence entre 1 et 2.

Si (2) donné en appliquant le théorème de Davis, Figiel, Johnson et Pelczyński, il existe un espace Banach réflexif  $F$  et deux opérateurs  $f \in \mathcal{B}(F, E)$  et  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{A}(X), F)$  tel que  $T_L = f \circ S$ , soit  $g = S \circ \delta_X$ . Il clair que,  $g \in Lip_0(X, F)$  et  $T = T_L \circ \delta_X = f \circ S \circ \delta_X = f \circ g$ , et cela prouve (3). Finalement, (3) implique (2) est trivial.

**Théorème 1.2.5.** Soient  $X$  un espace métrique pointé et  $E$  est un espace de Banach. Soit  $T \in Lip_0(X, E)$ . Les affirmations sont équivalents :

1.  $T$  est un opérateur de Lipschitz compact (faiblement compact).
2.  $T^t$  est compact (resp, faiblement compact) de  $E^*$  dans  $X^\#$ .

**Preuve.** Nous pouvons trouver la preuve dans [11]. ■

## Chapitre 2

# Majorisation et factorisation des opérateurs linéaires bornés.

Dans ce chapitre, nous allons on va définir la notion de majorisation, factorisation, quelques propriétés et leurs preuves. Nous nous intéressons à l'article de Barnes [2].

## 2.1 Majorisation

Soient  $E, F, G$  et  $Q$  des espaces de Banach. Pour  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ , soit  $R(T) = \{T(a) : a \in E\}$  et  $N(T) = \{a \in E : T(a) = 0\}$ .

**Définition 2.1.1.** *Suppose que  $T \in \mathcal{B}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{B}(E, G)$ . On dit  $T$  majore  $S$  s'il existe  $M > 0$  tel que*

$$\|S(a)\| \leq M\|T(a)\|$$

pour tout  $a \in E$

**Remarque 2.1.1.** *Suppose que  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ , il est facile de prouver les propriétés suivantes :*

1. *Si  $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(E, G)$  et  $T$  majore  $S_1$  et  $S_2$ , alors  $T$  majore  $S_1 + S_2$ .*
2. *Si  $S \in \mathcal{B}(E, G)$ ,  $R \in \mathcal{B}(G, Q)$  et  $T$  majore  $S$ , alors  $T$  majore  $RS$ .*

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $T \in \mathcal{B}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{B}(E, G)$  Les éléments suivants sont équivalents :*

1.  *$T$  majore  $S$ .*
2. *Il existe  $V \in \mathcal{B}(\overline{R(T)}, G)$  tel que  $S = V \circ T$ .*
3. *Pour tout  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  avec  $\|T(a_n)\| \rightarrow 0$  alors  $\|S(a_n)\| \rightarrow 0$ .*

**Preuve.** supposons que  $T$  majore  $S$  et nous montrons que (2) est vérifié.

On définit

$$\begin{aligned} V : R(T) &\longrightarrow Z \\ T(a) &\longmapsto V(T(a)) = S(a). \end{aligned}$$

La fonction  $V$  est bien défini puisque  $N(T) \subseteq N(S)$ , il est clair que  $V$  est linéaire. Maintenant

$$\begin{aligned} \|V(T(a))\| &= \|S(a)\| \\ &\leq M\|T(a)\|. \end{aligned}$$

Ainsi,  $V$  une extension bornée, que nous avons aussi noté  $V$ , sur  $\overline{R(T)}$ . De la définition de  $V$  on a,  $S = V \circ T$ .

On veut maintenant prouver (2)  $\Rightarrow$  (1). Supposons que (2) soit vérifiée, alors il existe  $V \in \mathcal{B}(\overline{R(T)}, G)$  tel que  $S = V \circ T$ , cela implique que pour tout  $a \in E$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|S(a)\| &= \|V \circ T(a)\| \\ &\leq \|V\|\|T(a)\|. \end{aligned}$$

Cela signifie que  $T$  majore  $S$ .

supposons que  $T$  majore  $S$ . Alors pour tout suite  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ , on a :

$$\|S(a_n)\| \leq M\|T(a_n)\|.$$

Si  $\|T(a_n)\| \rightarrow 0$  alors on a  $\|S(a_n)\| \rightarrow 0$ , cela donc (3) est vérifié.

Supposons maintenant que (2) soit vérifié. Alors pour tout suite  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$

$$\begin{aligned} \|S(a_n)\| &= \|V(T(a_n))\| \\ &\leq \|V\|\|T(a_n)\|. \end{aligned}$$

Si  $\|T(a_n)\| \rightarrow 0$  alors on a  $\|S(a_n)\| \rightarrow 0$ , cela donc (3) est vérifié.

Supposons que la propriété (3) est valide. On remarque cette propriété implique que  $N(T) \subseteq N(S)$ . Comme ci-dessus, on défini  $V$  par :

$$\begin{aligned} V : R(T) &\longrightarrow Z \\ T(a) &\longmapsto V(T(a)) = S(a). \end{aligned}$$

Il est clair que  $V$  est une opérateur linéaire. En conséquence de l'hypothèse (3),  $V$  est continue. Ceci implique que (2) est vérifié. ■

**Proposition 2.1.2.** *Soient  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{B}(E, G)$ , et  $T$  majore  $S$*

1. *Si  $T$  est compact, alors  $S$  est compact.*
2. *Si  $T$  est faiblement compact, alors  $S$  est faiblement compact.*

**Preuve.** Comme  $T$  majore  $S$ , on a dans la Proposition 2.1.1, il existe  $V \in \mathcal{B}(\overline{R(T)}, G)$  tel que  $S = V \circ T$ . Supposons que  $T$  est un opérateur compact, d'après la composition d'un l'opérateur borné avec opérateur compact est un opérateur compact ([6], Théorème 4, p.486). Cela implique que (1) est vérifié.

La preuve de (2), est le même en utilisant ([6], Théorème 5, p.484), lorsque  $T$  est un opérateur faiblement compact. ■

**Théorème 2.1.1.** 1. *Supposons que  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{B}(E, G)$ , et  $T$  majore  $S$ , alors  $R(S^*) \subseteq R(T^*)$ .*

2. *Soient  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{B}(E, G)$  et  $R(S^*) \subseteq R(T^*)$ , alors  $T$  majore  $S$ .*

3. *Soient  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{B}(G, F)$ , et  $R(S) \subseteq R(T)$ , alors  $T^*$  majore  $S^*$ .*

4. *Supposons que  $E$  est réflexif et  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{B}(G, F)$ , avec  $T^*$  majore  $S^*$ . Alors  $R(S) \subseteq R(T)$ .*

**Preuve.**

1. Supposons que  $T$  majore  $S$ . Donc d'après la Proposition 2.1.1, il existe  $V \in \mathcal{B}(\overline{R(T)}, G)$  tel que  $S = V \circ T$ . Soit  $c^* \in G^*$  pour tout  $a \in E$ ,

$$\begin{aligned} \langle a, S^*(c^*) \rangle &= \langle S(a), c^* \rangle \\ &= \langle V \circ T(a), c^* \rangle \\ &= \langle T(a), V^*(c^*) \rangle. \end{aligned}$$

Où  $V^*(c^*)$  est un fonctionnelle linéaire continue sur  $\overline{R(T)}$ . Soit  $\widetilde{V^*(c^*)}$  un prolongement de  $V^*(c^*) \in F^*$  (théorème de Hahn-Banach).

Alors pour tout  $a \in E$

$$\begin{aligned} \langle a, S^*(c^*) \rangle &= \langle T(a), \widetilde{V^*(c^*)} \rangle \\ &= \langle a, T^*(\widetilde{V^*(c^*)}) \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,  $S^*(c^*) = T^*(\widetilde{V^*(c^*)})$ . Cela montre que  $R(S^*) \subseteq R(T^*)$ .

2. Supposons (2), alors on a  $N(T) \subseteq N(S)$ , donc l'application linéaire

$$\begin{aligned} V : R(T) &\longrightarrow G \\ T(a) &\longmapsto V(T(a)) = S(a), \end{aligned}$$

est bien défini pour tout  $a \in E$ . Supposons  $V$  est non borné. Alors il existe une suite  $a_n \subseteq E$  avec  $\|T(a_n)\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\|S(a_n)\| \rightarrow +\infty$ , soit  $c^* \in G^*$  et on choisit  $\widetilde{V^*(c^*)} \in F^*$  tel que  $S^*(c^*) = T^*(\widetilde{V^*(c^*)})$ .

Alors

$$\begin{aligned} |\langle S(a_n), c^* \rangle| &= |\langle a_n, S^*(c^*) \rangle| \\ &= \left| \langle a_n, T^*(\widetilde{V^*(c^*)}) \rangle \right| \\ &= \left| \langle T(a_n), \widetilde{V^*(c^*)} \rangle \right|, \forall n \geq 1 \\ &\leq \left\| \langle \widetilde{V^*(c^*)} \rangle \right\|. \end{aligned}$$

D'après le principe de la convergence uniforme, on a  $(\|S(a_n)\|)$  est bornée, donc contradiction. Et comme en pronons  $V$  est borné sur  $R(T)$  et  $S = V \circ T$ , alors  $T$  majore  $S$ .

3. Maintenant, en pronons  $T$  et  $S$  sont comme dans (3) avec  $R(S) \subseteq R(T)$ , ceci implique que  $N(T^*) \subseteq N(S^*)$ . En effet, soit  $b \in N(T^*) \subseteq F^*$  et pour tout  $a \in E$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle T^*(b), a \rangle &= \langle b, T(a) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela implique  $b \perp R(T)$ , et Comme  $R(S) \subseteq R(T)$  nous avons  $b \perp R(S)$ . Alors pour tout  $c \in G$ , on a :

$$\langle b, S(c) \rangle = 0$$

Cela implique

$$\langle S^*(b), c \rangle = 0.$$

Donc  $b \in N(S^*)$ .

On défini :

$$\begin{aligned} U : R(T^*) &\longrightarrow Z^* \\ T^*(b^*) &\longmapsto U(T^*(b^*)) = S^*(b^*), \end{aligned}$$

Pour tout  $b^* \in F^*$ . Il est clair que  $U$  est bien défini. Si  $U$  est non borné, alors il existe  $(b_n^*) \subseteq F^*$  tel que  $\|T^*(b_n^*)\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\|S^*(b_n^*)\| = \|U(T^*(b_n^*))\| \longrightarrow +\infty$ . Pour tout  $c \in G$ , on choisi  $a \in E$  tel que  $S(c) = T(a)$ .

Alors

$$\begin{aligned} |\langle c, S^*(b_n^*) \rangle| &= |\langle S(c), b_n^* \rangle| \\ &= |\langle T(a), c_n^* \rangle| \\ &= |\langle a, T^*(b_n^*) \rangle| \\ &\leq \|a\|. \end{aligned}$$

Du Principe de bornitude uniforme,  $\|S^*(b_n^*)\|$  est une suite borné. Cette contradiction prouve que  $U$  est borné. Par conséquent, comme  $S^* = U \circ T^*$ , on obtient  $T^*$  majore  $S^*$ .

4. Considérons les hypothèses dans (4). Par la Proposition 2.1.1,  $S^* = V \circ T^*$  où  $V : \overline{R(T^*)} \rightarrow G^*$  est une application linéaire bornée. Alors  $V^* : G^{**} \rightarrow \overline{R(T^*)}^*$ . Soit  $c \in G$ . Alors  $c \in G^{**}$  et  $V^*(c) \in \overline{R(T^*)}^*$ , et soit  $\widetilde{V^*(c)}$  une extension de  $V^*(c)$  dans  $E^{**}$  (Théorème de Hahn Banach).

$$\begin{array}{ccc}
 R(T^*) & & \\
 \downarrow i & \searrow V^*(c) & \\
 E^* & \xrightarrow{\widetilde{V^*(c)}} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Comme  $E$  est réflexif,  $\exists a \in E$  tel que  $\langle a, a^* \rangle = \langle \widetilde{V^*(c)}, a^* \rangle$  pour tout  $a^* \in E^*$  et  $b^* \in F^*$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle S(c), b^* \rangle &= \langle c, S^*(b^*) \rangle \\
 &= \langle c, V \circ T^*(b^*) \rangle \\
 &= \langle V^*(c), T^*(b^*) \rangle \\
 &= \langle b, T^*(b^*) \rangle \\
 &= \langle T(b), (b^*) \rangle.
 \end{aligned}$$

Ainsi  $S(c) = T(b)$ , donc  $R(S) \subseteq R(T)$ . ■

**Proposition 2.1.3.** *On considère  $T \in \mathcal{B}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{B}(G, F)$ .*

1. *Si  $R(S) \subseteq R(T)$  et  $T$  est compact, alors  $S$  est compact.*
2. *Si  $R(S) \subseteq R(T)$  et  $T$  est faiblement compact, alors  $S$  est faiblement compact.*

**Preuve.** (1). Puisque  $R(S) \subseteq R(T)$ , d'après le Théorème 2.1.1 partie 3,  $T^*$  majore  $S^*$ , et comme  $T^*$  est compact, donc d'après la Proposition 2.1.2,  $S^*$  est compact. Ainsi  $S$  est compact (théorème de Schauder 1.1.3).

(2). Supposons que  $R(S) \subseteq R(T)$ , d'après le Théorème 2.1.1 parties 3,  $T^*$  majore  $S^*$ , et comme  $T^*$  est faiblement compact, et d'après la Proposition 2.1.2,  $S^*$  est faiblement compact, ainsi  $S$  est faiblement compact (théorème de Gantmacher 1.1.4). ■

## 2.2 Factorisation

Supposons que  $T \in \mathcal{B}(E, F)$  et  $S \in \mathcal{B}(E, G)$ . Alors on dit que  $S$  est une multiple à gauche de  $T$  il existe  $V \in \mathcal{B}(F, G)$  tel que  $S = V \circ T$ . Il existe une terminologie similaire pour quand  $S$  est un multiple à droite de  $T$ ,  $S = T \circ U$ . Dans les deux cas on dit que  $S$  se factorise à travers  $T$ . Rappelons qu'un sous-espace fermé  $M$  de  $E$  est complété s'il existe un sous-espace fermé  $N$  de  $E$  tel que  $E = M \oplus N$ .

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $T \in \mathcal{B}(E, F)$ .*

1. *Si  $S \in \mathcal{B}(E, G)$  est majoré par  $T$  et  $\overline{R(T)}$  est complémenté, alors il existe  $V \in \mathcal{B}(F, G)$  tel que  $S = V \circ T$ .*
2. *Si  $S \in \mathcal{B}(G, F)$  avec  $R(S) \subseteq R(T)$  et  $N(T)$  est complémenté, alors il existe  $U \in \mathcal{B}(G, E)$  tel que  $S = T \circ U$ .*
3. *Si  $S \in \mathcal{B}(E, G)$  avec  $R(S^*) \subseteq R(T^*)$  et  $\overline{R(T)}$  est complémenté, alors il existe  $V \in \mathcal{B}(F, G)$  tel que  $S = V \circ T$ .*
4. *Supposons que  $E$  est réflexif. Si  $S \in \mathcal{B}(G, F)$ ,  $T^*$  majore  $S^*$ , et  $N(T)$  est complémenté, alors il existe  $U \in \mathcal{B}(G, E)$  tel que  $S = U \circ T$ .*

**Preuve.**

1.  $\overline{R(T)}$  est complémenté c-à-d qu'il existe un sous-espace fermé  $N$  de  $F$  tel que  $F = R(T) \oplus N$ . de la Proposition 2.1.3, il existe  $V \in \mathcal{B}(\overline{R(T)}, G)$  tel que  $S = V \circ T$ , alors (1) est vérifié.
2. Supposons (2). Soit  $W$  un sous-espace fermé de  $E$  avec  $E = N(T) \oplus W$ , et soit  $\tilde{T} : W \rightarrow F$  être la restriction de  $T$  à  $W$  et  $\tilde{T}^{-1}$  est une application linéaire fermée sur  $R(T)$ , et comme  $R(S) \subseteq R(T)$ ,  $\tilde{T}^{-1} \circ S : G \rightarrow W$  un opérateur fermé, donc borné par le théorème du graphe fermé. On peut considérer  $U \equiv \tilde{T}^{-1} \circ S$  est un opérateur dans  $\mathcal{B}(G, E)$ . donc il est clair que,  $S = T \circ \tilde{T}^{-1} \circ S = T \circ U$ .
3. Supposons (2). On a  $R(S^*) \subseteq R(T^*)$ , donc d'après Théorème 2.1.1;(2),  $T$  majore  $S$  et d'après la partie (1), alors il existe  $V \in \mathcal{B}(F, G)$  tel que  $S = V \circ T$ . (3) vérifié.
4. (4) vérifier le Théorème 2.1.1 ; (4) et partie (2). ■

## Chapitre 3

# Majorisation et factorisation des opérateurs de Lipschitz.

Dans ce chapitre, on définit le concept de majorisation pour les opérateurs de Lipschitz, et on étudie quelques propriétés concernant ce concept. Enfin, nous sommes intéressés en particulier au théorème de factorisation de Pietsch et à certaines applications de cette notion.

### 3.1 Majorisation

Soient  $X, Y$  deux espaces métriques pointés et  $E, F$  et  $G$  des espaces de Banach. Rappelons que l'image de l'opérateur de Lipschitz  $T \in Lip_0(X, E)$  est défini, et on noté par

$$Im_{Lip}(T) = \left\{ \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

On suppose le point de base de  $T(X)$  est 0.

**Définition 3.1.1.** Soient  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(X, F)$ . Alors  $T$  majore  $S$  s'il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|S(x_1) - S(x_2)\| \leq C\|T(x_1) - T(x_2)\|,$$

pour tous  $x_1, x_2 \in X$

**Remarque 3.1.1.** Soit  $T \in Lip_0(X, E)$ . Les affirmations suivantes est claire :

1. Si  $S_1, S_2 \in Lip_0(X, F)$  et  $T$  majore  $S_1$  et  $S_2$ , alors  $T$  majore  $S_1 + S_2$ .
2. Si  $S \in Lip_0(X, F)$ ,  $R \in Lip_0(F, G)$  et  $T$  majore  $S$ , alors  $T$  majore  $RS$ .

**Proposition 3.1.1.** Considérons les opérateurs de Lipschitz  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(X, F)$ . Alors  $T$  majore  $S$  si et seulement s'il existe  $V \in Lip_0(\overline{T(X)}, F)$  tel que  $S = V \circ T$  et  $Lip(V) \leq C$ .

**Preuve.** Supposons que  $T$  majore  $S$

On défini

$$\begin{aligned} V : T(X) &\longrightarrow F \\ T(x) &\longmapsto V(T(x)) = S(x) \end{aligned}$$

L'opérateur de Lipschitz  $V$  est bien défini. En effet :

Si  $T(x_1) = T(x_2) = z$ , on a  $V(T(x_1)) = S(x_1)$  et  $V(T(x_2)) = S(x_2)$ .

Alors,

$$\begin{aligned} \|V(T(x_1)) - V(T(x_2))\| &= \|S(x_1) - S(x_2)\| \\ &\leq C\|T(x_1) - T(x_2)\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

et cela implique que  $V$  est bien défini. D'après la définition de  $V$ , Nous avons  $T = V \circ S$  tel que  $Lip(V) \leq C$ . Et comme le point de base de  $T(X)$  est 0, et  $V$  conservant le point de base.

Et on a le daigramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ T \downarrow & \searrow S & \\ T(X) & \xrightarrow{V} & F \end{array}$$

On termine la preuve par extension de  $V$  par la densité à  $\overline{T(X)}$ . Donc  $V \in Lip_0(\overline{T(X)}, F)$ . La contradiction est claire. ■

**Proposition 3.1.2.** *Soient  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(X, F)$ . Si la linéarisation de  $T(T_L)$  majore la linéarisation de  $S(S_L)$ , alors  $T$  majore  $S$ .*

**Preuve.** Supposons que  $T_L$  majore  $S_L$  alors il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\|S_L(m)\| \leq C\|T_L(m)\| \text{ pour tout } m \in \mathcal{A}(X).$$

Tel que  $m = \sum_{i=1}^l \alpha_i \delta_{x_i y_i}$ .

On pose  $i = 1$  et  $\alpha_i = 1$ , alors on a

$$\|S_L(\delta_{xy})\| \leq C\|T_L(\delta_{xy})\|.$$

Cela implique

$$\|S(x) - S(y)\| \leq C\|T(x) - T(y)\|.$$

Pour tous  $x, y \in X$ . Alors  $T$  majore  $S$ . ■

**Proposition 3.1.3.** *Soient  $T \in Lip_0(X, E)$ ,  $S \in Lip_0(X, F)$  et  $T_L$  majore  $S_L$ .*

1. *Si  $T$  est Lipschitz compact, alors  $S$  est Lipschitz compact .*
2. *Si  $T$  est Lipschitz faiblement compact, alors  $S$  est Lipschitz faiblement compact.*

**Preuve.**

1. Supposons que  $T$  est un opérateur de Lipschitz compact, alors on a d'après la Proposition 1.2.5  $T_L$  est un opérateur compact. Depuis la Proposition 2.1.2, on trouve que  $S_L$  est un opérateur compact. Alors  $S$  est un opérateur de Lipschitz compact par la Proposition 1.2.5.
2. La preuve est la même en utilisant les Proposition 1.2.5 et 2.1.2 lorsque  $T$  est un opérateur faiblement compact. ■

- Théorème 3.1.1.** 1. Soient  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(X, F)$ . Supposons que  $T$  majore  $S$ . Alors  $R(S^t) \subseteq R(T^t)$ .
2. Supposons que  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(X, F)$  telle que  $R(S^t) \subseteq R(T^t)$ , est que  $T$  injective, alors  $T$  majore  $S$ .
3. Supposons que  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(Y, E)$ , et cela  $Im_{Lip}(S) \subseteq Im_{Lip}(T)$ , alors  $T^t$  majore  $S^t$ .

**Preuve.**

1. Supposons que  $T$  majore  $S$ , donc d'après la Proposition 3.1.1, il existe  $V \in Lip_0(\overline{T(X)}, F)$  tel que  $S = V \circ T$ . Maintenant  $T^t \in \mathcal{B}(E^*, X^\#)$  et  $S^t \in \mathcal{B}(F^*, X^\#)$ . Considérer  $b^* \in F^*$ .

Pour tout  $x \in X$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |S^t(b^*)(x)| &= |b^*(S(x))| \\ &= |b^*(V(T(x)))| \\ &= |V^t(b^*)(T(x))|. \end{aligned}$$

Où  $V^t(b^*)$  dans  $\overline{T(X)}^\#$ . Soit  $\widetilde{V^t(b^*)}$  une extension de  $V^t(b^*)$  dans  $E^*$  (d'après théorème de Hahn Banach non linéaire), on a :

$$\begin{array}{ccc} \overline{T(X)} & & \\ \downarrow i & \searrow V^t(b^*) & \\ E & \xrightarrow{\widetilde{V^t(b^*)}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Alors pour tout  $x \in X$ , nous avons

$$\begin{aligned} |(S^t(b^*))(x)| &= |\widetilde{V^t(b^*)}(T(x))| \\ &= \left| \left( T^t \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right) \right) (x) \right|. \end{aligned}$$

Ainsi,  $S^t(b^*) = T^t \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right)$ . Donc  $R(S^t) \subseteq R(T^t)$ .

2. Soient  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(X, F)$  tel que  $R(S^t) \subseteq R(T^t)$ , supposons que  $T$  est injective. Soit  $b^* \in F^*$  et on choisi  $\widetilde{V^t(b^*)} \in E^*$  tel que

$$S^t(b^*) = T^t \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right). \quad (3.1)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |b^*(V(T(x)) - V(T(y)))| &= |b^*(S(x) - S(y))| \\
 &= |b^*(S(x)) - b^*(S(y))| \\
 &= |S^t(b^*)(x) - S^t(b^*)(y)| \\
 (\text{Par égalité 3.1}) &= \left| T^t \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right) (x) - T^t \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right) (y) \right| \\
 &= \left| \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right) (T(x)) - \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right) (T(y)) \right| \\
 &\leq \text{Lip} \left( \widetilde{V^t(b^*)} \right) \|T(x) - T(y)\|.
 \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Hahn Banach, on trouve

$$V(T(x)) - V(T(y)) \leq \|V^t\| \|T(x) - T(y)\|.$$

Ainsi, nous avons que  $V$  est un opérateur de Lipschitz sur  $T(X)$  et  $S = V \circ T$ , alors  $T$  majore  $S$ .

3. Supposons  $T \in \text{Lip}_0(X, E)$  et  $S \in \text{Lip}_0(Y, E)$ . Depuis  $\text{Im}_{\text{Lip}}(S) \subseteq \text{Im}_{\text{Lip}}(T)$  on trouve  $N(T^t) \subseteq N(S^t)$ . En effet pour tout  $a^* \in N(T^t) \subset E^*$ , et pour tous  $x, x' \in X$ . Nous avons

$$T^t \circ a^*(x) - T^t \circ a^*(x') = 0 - 0 = 0,$$

cela implique

$$a^*(T(x) - T(x')) = 0.$$

Ainsi,

$$a^*(\text{Im}_{\text{Lip}}(T)) = \{0\}.$$

Comme  $\text{Im}_{\text{Lip}}(S) \subseteq \text{Im}_{\text{Lip}}(T)$ , ensuite nous avons  $a^*(\text{Im}_{\text{Lip}}(S)) = \{0\}$ , cela implique pour tous  $z, z' \in Y$

$$a^*(S(z) - S(z')) = 0.$$

Alors

$$S^t \circ a^*(z) - S^t \circ a^*(z') = 0.$$

Prendre  $z' = e_Y$ , cette moyenne  $S^t \circ a^*(z) = 0$  pour tout  $z \in Y$ . Ainsi  $a^* \in N(S^t)$ .

Maintenant on définit l'opérateur  $U$  :

$$\begin{aligned}
 U : R(T^t) &\longrightarrow Y^\# \\
 T^t(a^*) &\longmapsto U(T^t(a^*)) = S^t(a^*)
 \end{aligned}$$

Pour tout  $a^* \in E^*$ , il est clair que  $U$  est bien défini. Maintenant nous allons prouver que  $U$  est borné. Pour tous  $y, y' \in Y$ , choisir  $x_0, x'_0 \in X$  tel que  $S(y) - S(y') = T(x_0) - T(x'_0)$ .

Soit  $m \in \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)}$ , alors  $m = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{y_j y'_j}$

$$\begin{aligned}
 |(S^t(\alpha^*))_L(m)| &= \left| (S^t(\alpha^*))_L \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{y_j y'_j} \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j (S^t(\alpha^*))_L(\delta_{y_j y'_j}) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j (S^t(\alpha^*)(y_j) - S^t(\alpha^*)(y'_j)) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j (\alpha^*(S(y_j) - S(y'_j))) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j (\alpha^*(T(x_{0j}) - T(x'_{0j}))) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j (T^t(\alpha^*))_L(\delta_{x_{0j} x'_{0j}}) \right| \\
 &\leq \sup_{m' \in \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)}} |(T^t \circ \alpha^*)_L(m')| \\
 &\leq \|(T^t \circ \alpha^*)_L\| \leq Lip(T^t(\alpha^*)).
 \end{aligned}$$

On prend le sup sur  $m \in \mathcal{B}_{\mathcal{E}(X)}$ . Ainsi,

$$Lip(U(T^t(a^*))) = Lip(S^t(a^*)) \leq Lip(T^t(a^*))$$

$U$  est borné. Par conséquent, et comme  $S^t = U \circ T^t$ , ensuite  $T^t$  majore  $S^t$ . ■

**Proposition 3.1.4.** Soient  $T \in Lip_0(X, E)$  et  $S \in Lip_0(Y, E)$ .

1. Si  $Im_{Lip}(S) \subseteq Im_{Lip}(T)$  et  $T$  est Lipschitz compact, alors  $S$  est Lipschitz compact.
2. Si  $Im_{Lip}(S) \subseteq Im_{Lip}(T)$  et  $T$  est Lipschitz faiblement compact, alors  $S$  est Lipschitz faiblement compact.

**Preuve.**

1. Supposons les hypothèses de (1). On a  $Im_{Lip}(S) \subseteq Im_{Lip}(T)$ , par le Théorème 3.1.1 parties (3),  $T^t$  majore  $S^t$ . Comme  $T$  est compact alors  $T^t$  est compact, d'après la Proposition 2.1.2 parties (1),  $S^t$  est compact. Alors  $S$  est Lipschitz compact dans la Proposition 1.2.4.

2. La preuve de (2) est la même que la preuve de (1). Puisque  $T$  est Lipschitz faiblement compact si et seulement si  $T^t$  est faiblement compact (voir la Proposition 1.2.4). ■

## 3.2 Applications

Soit ( $1 \leq p < \infty$ ), Farmer et W-B Johnson présentent la classe d'opérateurs de Lipschitz p-sommants  $T : X \mapsto E$  dans [8]. Rappelons qu'un opérateur de Lipschitz  $T$  est p-sommant s'il existe une constante  $C \geq 0$  tel que pour tout  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $X$  et tout  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ . Nous avons :

$$\sum_{i=1}^n a_i \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \leq C^p \sup_{f \in \mathcal{B}_{X^\#}} \sum_{i=1}^n a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p \quad (3.2)$$

On note par  $\prod_p^L(X, E)$  l'espace des opérateurs de Lipschitz p-sommant sous la norme  $\pi_p^L(\cdot)$  tel que

$$\pi_p^L(T) = \inf\{C, C \text{ vérifier 3.2}\}.$$

**Remarque 3.2.1.** *Chaque espace métrique pointé  $(X, d)$  est isométrique à un sous-espace de  $C(\mathcal{B}_{X^\#})$ . En effet,*

*On défini*

$$\begin{aligned} i_X : X &\longrightarrow C(\mathcal{B}_{X^\#}) \\ x &\longmapsto i_X(x) \end{aligned}$$

*Tel que,  $i_X(f) = f(x)$ , pour tout  $f \in \mathcal{B}_{X^\#}$ .*

*Nous avons*

$$\begin{aligned} \|i_X(x_1) - i_X(x_2)\| &= \sup_{f \in \mathcal{B}_{X^\#}} |i_X(x_1)(f) - i_X(x_2)(f)| \\ &= \sup_{f \in \mathcal{B}_{X^\#}} |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= \sup_{f \in \mathcal{B}_{X^\#}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{d(x_1, x_2)} d(x_1, x_2) \\ &\leq d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

*D'autre par, on Prend  $f_0(\cdot) = d(\cdot, x_2) - d(0, x_2)$  dans  $X^\#$ , a une constante de Lipschitz 1 et satisfait  $|f_0(x_1) - f_0(x_2)| = d(x_1, x_2)$ . Ceci implique que  $\|i_X(x_1) - i_X(x_2)\| = d(x_1, x_2)$  et donc  $\delta$  est isométrie.*

**Théorème 3.2.1.** Soit  $1 \leq p < \infty$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. L'opérateur  $T$  est Lipschitz  $p$ -sommant.
2. Il existe une constante positive  $C$  et une probabilité  $\mu$  sur  $\mathcal{B}_{X^\#}$  telle que pour tout  $x, y \in X$

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left( \int_{\mathcal{B}_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Théorème de Domination)

3. Pour l'injection canonique  $J_p$  de  $C(\mathcal{B}_{X^\#})$  dans  $L_p(\mathcal{B}_{X^\#}, \mu)$ , le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ \downarrow i_X & & \uparrow \tilde{T} \\ i_X(X) = S_\infty & \xrightarrow{J_p} & S_p = \overline{(J_p \circ i_X(X))} \\ \cap & & \cap \\ C(\mathcal{B}_{X^\#}) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\mathcal{B}_{X^\#}, \mu) \end{array}$$

**Preuve.** On trouve la preuve (1) $\Leftrightarrow$ (2) dans [8].

(2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que  $T \in Lip_0(X, E)$  est Lipschitz  $p$ -sommant ( $1 \leq p < \infty$ ), il existe une constante positive  $C$  et probabilité  $\mu$  dans  $\mathcal{B}_{X^\#}$  tel que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left( \int_{\mathcal{B}_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tous  $x, y \in X$ . On pose  $f = J_p \circ i_X$ .

Ensuite, nous avons

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \|J_p \circ i_X(x) - J_p \circ i_X(y)\|_{L_p(\mathcal{B}_{X^\#}, \mu)}$$

Cela signifie  $J_p \circ i_X$  est majeure  $T$ . D'après la Proposition 3.1.1 on a  $\tilde{T} \in Lip_0(\overline{(J_p \circ i_X(X), E)})$  tel que  $T = \tilde{T}(J_p \circ i_X)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) évident. ■

# Bibliographie

- [1] R. F ARENS, AND J. EELLES, On embedding uniform and topological spaces. Pacific Journal of Mathematics,(1956), 6(3), 397-403.
- [2] B. BARNES, Majorization, range inclusion, and factorization for bounded linear operators. Proceedings of the American Mathematical Society,(1956), 133(1), 155-162.
- [3] Ş. COBZAŞ, Adjoints of Lipschitz mapping, Studia Univ. "Babeş - Bolyai ", Mathematica, XLVIII(1), (2009), 49 - 54.
- [4] Ş. COBZAŞ Ş. R. MICULESCU, AND A. Nicolae, (2019). Lipschitz functions (Vol.2241). Cham : Springer.
- [5] R. G. DOUGLAS, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space. Proceedings of the American Mathematical Society, 17(2).
- [6] .N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ, Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1964.
- [7] M. EMBRY, Factorization of operators on a Banach space, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 587-590.
- [8] J. FARMER, AND W. JOHNSON, Lipschitz p-summing operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 137(9), 2989-2995.
- [9] G. GODEFROY AND N. -J. KALTON, Lipschitz-free Banach spaces, Studia Math, 159 (2003), 121 - 141.
- [10] R. HARTE, Invertibility and Singularity for Bounded Linear Operators, Pure and Applied Math., Marcel Dekker, New York and Basel, 1988.
- [11] A. JIMÈNEZ-VARGAS, J. M. SEPULCRE, M. VILLEGAS-VALLECILLOS, Lipschitz compact operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 415(2), (2014) 889-901.
- [12] K. SAADI, Some Properties for Lipschitz strongly p-summing operators, J. Math. Anal. App. 423 (2015), 1410-1426.

- [13] I. SAWASHIMA, Methods duals, Lecture Notes Ec. Math Syst, Springer Verlag, 419 (1975) 247-259.
- [14] A. SAHRAOUI, Mémoire de Master "Majorizing Lipschitz Operators". Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2021.
- [15] N. Weaver, Lipschitz Algebras second edition, World Scientific, Singapore, 2018.

## ملخص :

في هذا العمل درسنا محدودية الموءثرات الخطية المعرفة بواسطة بارنس. قمنا بتعميم هذا المفهوم الى الحالة الليبتشيزية. و أخيرا درسنا كحالة خاصة نظرية تفكيك العوامل لبيتش، و بعض التطبيقات لهذا المفهوم.

### الكلمات المفتاحية :

موءثر ليبشيتز، موءثر ليبشيتز متراص (الضعيف المتراص)، موءثر ليبشيتز ب - التجميعية، التفكيك، المحدودية.

## Résumé :

Dans ce travail, nous avons étudié la majorisation des operateurs linéaires introduits par Barnes. Nous avons généralisé ce concept au cas Lipchitzien, finalement nous avons étudié comme cas particulier le théorème de factorisation de Pietsch et certaine applications de cette notion.

**Mots clés** : Opérateurs de Lipchitz, opérateurs de Lipchitz compact (faiblement compact), opérateurs de Lipchitz p-sommant, majorisation, factorisation.

## Abstract :

In this work, we studied the majorizing of linear operators introduced by Barnes. We generalized this concept to the Lipschitz case. Finally we studied as a particular case the Pietsch factorization theorem and some applications of this notion.

**Key words** : Lipschitz operators, Lipschitz compact (weakly compact) operators, Lipchitz p-summing operators, majorization, factorization.