REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LAGHOUAT

DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle Et EDP

THEME DU PROJET :

Sur les opérateurs non linéaires nucléaires

Présenté par :

Asma HAMMOU

Dirigé par :

Dr. Amar BELACEL

DEVANT LES MEMBRES DU JURY

Z. BENDAOUD,	M.C.A.,	Université de Laghouat,	Présidente
A. MOKHTARI,	Professeur,	Université de Laghouat,	Examinateur
M.BENTOBACHE,	M.C.A.,	Université de Laghouat,	Examinateur
A. BELACEL,	M.C.A.,	Université de Laghouat,	Encadreur

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2017-2018

Résumé

Résumé

Dans ce mémoire, on a traité le concept des opérateurs p-nucléaires dans les cas: des opérateurs Lipschitz et polynômes m-homogènes. On a étudié les relations entre la classe des opérateurs de type p-nucléaires et les différentes définitions classes de sommabilité. (opérateurs p-sommant, opérateurs p-intégraux).

Mots clés:

opérateurs p-sommants, opérateurs p-intégraux, opérateurs p-nucléaires, opérateurs Lipschitz p-sommant, opérateurs Lipschitz p-intégraux, opérateurs Lipschitz p-nucléaires, Polynômes m-homogènes strictement p-intégraux, polynômes m-homogènes p-nucléaires.

Abstract

In this thesis, we studied the concept of p-nuclear operators for the cases of Lipschitz operators and m-homogeneous polynomials. We studied the relationship between the class of p-nuclear operators and the different definitions of summability. (p-summing operators, p-integral operators)

Keywords:

p-summing operators, p-integral operators, p-nuclear operators, Lipschitz p-summing operators, Lipschitz p-integral operators, Lipschitz p-nuclear operators, strictly p-integral m-homogeneous polynomials, p-nuclear m- homogeneous polynomials.

الملخص

في هذه المذكرة عالجنا مفهوم المؤثرات p -النووية ، في حالة المؤثرات الليبشيتزية وكثيرات الحدود المتجانسة. ثم أجرينا مقارنة لهذا المفهوم مع بقية المفاهيم الأخرى (p -جمعية و p -التكاملية).

كلمات مفتاحية:

مؤثر p-جمعية، مؤثرp- التكاملية، مؤثرp- النووية، مؤثر الليبشيتزية p -جمعية، مؤثر الليبشيتزية p -التكاملية، مؤثر الليبشيتزية p -النووي، كثيرات الحدود المتجانسة p- التكاملية، كثيرات الحدود المتجانسة p- النووية.

Remerciements

Je ne peux commencer et finir ce travail sans remercier au préalable le détenteur du savoir, en l'occurrence le tout puissant **ALLAH**.

Je tiens à remercier très vivement mon encadreur Monsieur **Dr.Amar BELACEL** Maître de conférences à l'université Amar Thelidji de Laghouat, et à lui exprimer ma profonde gratitude pour son aide et son soutien constant durant ce travail. J'espère avoir à nouveau l'occasion de travailler avec lui.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Mme **Dr. Zohra BENDAOUD** Maître de conférences à l'université Amar Thelidji de Laghouat, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

J'exprime mes remerciements aux honorables membres du jury de soutenance : Monsieurs **Pr. Abdelkader MOKHTARI** Professeur à l'université Amar Thelidji de Laghouat et **Dr. Mohand BENTOBACHE** Maître de conférences à l'université Amar Thelidji de Laghouat.

Je tiens particulièrement à remercier les membres de laboratoire de l'université de Laghouat, à commencer par son directeur, Mme **Zohra BENDAOUD**, qui a mis à notre disposition tous les moyens possibles pour qu'on puisse avancer.

Je remercie vivement mes enseignants pour leur soutiens et aides de l'université de Laghouat : Mrs **Abdelkader MOKHTARI**, **Youcef BELABBACI**, **Mohand BENTOBACHE**, **Djamel RAHOU** et Mmes **Zohra BENDAOUD**, **Yamna BOUKHATEM**

, ainsi que de École Normale Supérieure de Kouba, Alger :**Youcef ATIK**, **Abdelhafid MOKRANE** et **Boubaker Khaled SADALLAH**.

Je remercie particulièrement mes collègues étudiants de magister, sans oublier Melle **Khedidja BEY**.

Je remercie enfin ma famille pour m'avoir toujours soutenu durant mes études. Merci à ma mère et mon père, et je leur dois tous. Ce travail vous est dédié.

Notations

$L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$	L'espace de Lebesgue.
p^*	L'exposant conjugué de p : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^*}=1$.
$\|.\|_p$	La norme associée à l'espace de Lebesgue $L_p(\mu)$.
$\|.\|_X$	La norme associée à l'espace X.
$X \hookrightarrow Y$	L'injection de X dans Y.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires réels ou complexes.
B_X	Boule unité fermée de l'espace X.
$\sigma(X^*, X)$	Topologie faible-* définie sur X^*.
$C(K)$	Espace des fonctions continues sur un compact K.
$L(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires de X dans Y.
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$\Pi_p(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires $p-$sommants de X dans Y.
$\mathcal{N}_p(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires $p-$nucléaires de X dans Y.
$\mathcal{I}_p(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires $p-$intégraux de X dans Y.
$\mathrm{Lip}(X,Y)$	Espace des opérateurs Lipschitz de X dans Y.
$X^\sharp = \mathrm{Lip}_0(X,\mathbb{R})$	Dual de l'espace de Lipschitz de X.
$\mathcal{M}(X)$	Espace linéaire de toutes les molécules sur X.
$Æ(X)$	Espace de Arens et Eells.
u^*	Adjoint d'un opérateur linéaire u.
$T^\sharp$	Adjoint d'un opérateur Lipschitz T.
$X \otimes Y$	Le produit tensoriel de X par Y.
$X \otimes_\epsilon Y$	Le produit tensoriel injectif de X par Y.
$X \otimes_\pi Y$	Le produit tensoriel projectif de X par Y.
$\Pi_p^L(X,Y)$	Espace des opérateurs Lipschitz $p-$sommants de X dans Y.
$\mathcal{N}_p^L(X,Y)$	Espace des opérateurs Lipschitz $p-$nucléaires de X dans Y.
$\mathcal{I}_p^L(X,Y)$	Espace des opérateurs Lipschitz $p-$intégraux de X dans Y.
$L(X_1,...,X_m;Y)$	Espace des opérateurs m-linéaires de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y.
$\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$	Espace des opérateurs m-linéaires continus de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y.
$\mathcal{P}(^mX,Y)$	Espace des polynômes m-homogènes de X dans Y.
$\mathcal{P}_{N-p}(^mX,Y)$	Espace des polynômes m-homogènes $p-$nucléaires de X dans Y.
$\mathcal{P}_{I-p}(^mX,Y)$	Espace des polynômes m-homogènes strictement $p-$intégraux de X dans Y.

Table des matières

Introduction

Dans [22], le célèbre mathématicien A. Grothendieck a introduit et étudié, pour la première fois, le concept des opérateurs linéaires 1-nucléaires. Dans [22], Persson et Pietsch ont généralisé cette notion pour tout p, $1 < p \leq \infty$, et ils est établi des relations entre l'espace constitué par ces opérateurs et les espaces bien connus : l'espace des opérateurs linéaires $p-$sommants et l'espace des opérateurs linéaires $p-$intégraux.

Plusieurs auteurs ont étudié les polynômes nucléaires entre deux espaces de Banach ([2], [5], [16], [29]) comme extension aux cas polynomiaux, les résultats connus dans le cas linéaire et autres.

Récemment, Chen et Zheng [12] ont introduit la notion des opérateurs Lipschitz $p-$nucléaires où ils ont donné, parmi d'autres résultats, le théorème de la factorisation pour cette classe d'opérateurs.

Dans ce mémoire. Nous avons étudié tous les travaux cités pour comprendre premièrement et pour laisser nos traces sur ce thème, pour se faire nous avons organisé ce manuscrit comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé quelques définitions importantes pour notre travail, tels que, les opérateurs linéaires continus, topologie faible, topologie faible-*, espaces de Banach,...

Le deuxième chapitre est consacré aux opérateurs linéaires $p-$nucléaires au sens de Pietsch, un opérateur linéaire $u : X \to Y$ entre deux espaces de Banach est $p-$nucléaire s'ils existent des suites $(x_n^*)_n \in \ell_p(X^*)$ et $(y_n)_n \in \ell_{p^*}^w(Y)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ telles que

$$u = \sum_n x_n^* \otimes y_n.$$

où la série est convergente dans $\mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{N}_p(X,Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires $p-$nucléaires. Des propriétés essentielles, quelques relations avec les opérateurs linéaires $p-$sommants et les opérateurs linéaires $p-$intégraux sont données.

Dans le troisième et le quatrième chapitres, nous avons généralisé quelque les notions et les résultats étudiés dans le deuxième chapitre aux opérateurs Lipschitz et aux polynômes, respectivement.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et notations concernant les espaces de Banach, les résultats élémentaires et les outils que nous aurons à utiliser dans ce mémoire.

1.1 Les espaces de Banach

Définition 1.1.1 (Espaces métriques) [21] *Une distance sur un ensemble X est une application*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+,$$

telle que :

a) $\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation),*

b) $\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*

c) $\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ \forall z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

On appelle espace métrique tout couple $(X; d)$ constitué d'un ensemble X et d'une distance d sur X.

Définition 1.1.2 *Une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ dans un espace métrique (X, d) est dite de* ***Cauchy*** *si elle vérifie la propriété suivante*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ d(u_n, u_m) < \epsilon.$$

Exemple 1.1.3 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.1.4 [21] *Si dans un espace métrique (X, d) toute suite de Cauchy est convergente, on dit que cet espace complet.*

Définition 1.1.5 (Espace vectoriel normé) *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une application $\| \,.\, \|: X \to \mathbb{R}_+$ est une norme ssi*

i) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ *(homogénéité).*

ii) $\forall x, y \in X$, $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(inégalité triangulaire).*

iii) $\forall x \in X$, $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.
Si seules les deux premières propriétés sont satisfaites, on dit que $\|.\|$ est une semi-norme.

Remarque 1.1.6 *Définissons l'application :*

$$\begin{aligned} d: \quad X \times X &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\|, \end{aligned}$$

On peut montrer que d est une distance sur X.
Ainsi tout espace vectoriel normé est un espace métrique.

Définition 1.1.7 (Espace de Banach) *Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Exemple 1.1.8 (Les espaces de suites) *Pour $1 \leq p < \infty$, on note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou tout simplement par ℓ_p formé des suites $x = (x_n)_n \subset \mathbb{K}$ telles que $\sum\limits_n |x_n|^p < +\infty$.*
L'espace ℓ_p est un espace de Banach muni de la norme :

$$\| x \|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des suites bornées muni de la norme :

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach noté $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ou tout simplement par ℓ_∞.
On note $c_0(\mathbb{N})$ ou c_0 le sous-espace fermé de ℓ_∞ des suites qui convergent vers zéro.

Exemple 1.1.9 (Les espaces de fonctions continues) *Soit K un espace topologique compact. On désigne par $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme :*

$$\| f \|_{C(K)} = \sup_{x \in K} | f(x) | .$$

Exemple 1.1.10 (Les espaces de fonctions intégrables) *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré,* f *une fonction* Σ*-mesurable. On définit*

$$\begin{cases} \|f\|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} ess|f(x)|, & si \quad p = +\infty, \end{cases}$$

Pour $1 \leq p < +\infty$*, l'espace de Banach* $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *représente l'espace de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions* Σ*-mesurables telles que* $\|f\|_p < +\infty$*,* μ *la mesure de Lebesgue.*

Remarque 1.1.11 *On a* $\ell_p = L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ *avec* μ *la mesure de comptage.*

1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires

Définition 1.2.1 [21] *Soient* X *et* Y *deux espaces vectoriels topologiques. Une application* u *définie de* X *dans* Y *est dite* ***opérateur linéaire*** *s'il vérifie les conditions suivantes : pour tout* x*,* y *dans* X *et* α *dans* $\mathbb{K}$

i) $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.

ii) $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

On note par $L(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y.

Définition 1.2.2 [21] *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques. On dit qu' un opérateur* u *de* X *dans* Y *est* ***continu*** *au point* x_0*, si pour tout ouvert* V *de* Y *contenant* $y_0 = ux_0$*, il existe un ouvert* U *de* X *contenant* x_0*, tel que l'image de* U *par* u *est contenu dans* V*.*
Un opérateur $u : X \to Y$ *est appelé continu, lorsqu'il est continu en tout* $x \in X$*.*

Proposition 1.2.3 *Soient* X *et* Y *deux espaces normés,* $u : X \to Y$ *un opérateur. Alors* u *est continu au point* x_0*, si et seulement si,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(x_0)\|_Y < \epsilon.$$

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans Y. On écrira $\mathcal{L}(X)$ à la place de $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, l'ensemble des formes linéaires sur X. L'ensemble $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.2.4 *Un opérateur linéaire u de X dans Y est dit* ***borné*** *s'il est défini partout dans X et transforme tout ensemble borné de X en un ensemble borné de Y.*

Proposition 1.2.5 (Linéarité et continuité) *Soient X et Y deux espaces normés, $u : X \to Y$ un opérateur linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) L'opérateur u est continu sur X.

(2) L'opérateur u est continu en 0.

(3) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u(x)\| \leq C\|x\|, \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } X.$$

(4) L' opérateur u est borné.

On pose, alors

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\ &= \inf\{C, C \text{ vérifiant l'inégalité ci-dessus}\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.6 *Soient X, Y deux espaces normés.*
Si un opérateur linéaire $u : X \to Y$ est bijectif continu et si $u^{-1} : Y \to X$ est continue, on dit que u est ***un isomorphisme*** *entre X et Y.*

On dit que X et Y sont ***isomorphes*** *$(X \sim Y)$, s'il existe un isomorphisme entre X et Y ; on dit qu'il sont* ***isométriques*** *$(X \simeq Y)$ s'il existe* ***un isométrie*** *$u : X \to Y$, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$.*

1.3 Dualité, Topologies faible et faible-*

On notera par X et Y deux espaces de Banach et la boule unité de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X, l'espace des formes linéaires continues sur X, muni de la norme duale

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x\in B_X} |f(x)|.$$

Les éléments de X^* seront le plus généralement notés par x^*. Pour $x^* \in X^*$ et $x \in X$ on écrira souvent $\langle x^*, x\rangle$ au lieu de $x^*(x)$.
On note par X^{**} le bidual de X $(X^{**} = (X^*)^*)$.

Définition 1.3.1 (Adjoint d'un opérateur linéaire) *Soit $u : X \to Y$ une application linéaire continue, on appelle adjoint ou dual de u l'unique application linéaire continue $u^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ tel que*

$$\forall x \in X, \forall y^* \in Y^*, \; < u^*y^*, x >=< y^*, ux > .$$

De plus, on a $\|u\| = \|u^*\|$.

Le dual de u^* soit $u^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ sappelle le bidual de u.

Remarque 1.3.2 *On a $(uv)^* = v^*u^*$ pour tout $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $v \in \mathcal{L}(Z, X)$.*

Définition 1.3.3 *L'injection canonique $k_X : X \to X^{**}$ qui à tout $x \in X$ associe $k_X(x)$ telle que*

$$\langle k_X(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle \,, \; \forall x^* \in X^*.$$

- *k_X est une application linéaire isométrique i.e $\|k_X(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ pour tout $x \in X$.*
- *X est **réflexif** si k_X est bijective i.e. surjective.*

Exemple 1.3.4 *L'espace L_p est réflexif pour $1 < p < \infty$, et L_1 n'est pas réflexif.*

Définition 1.3.5 (Topologies faible et faible-*) *Si X un espace de Banach, sa topologie faible $\sigma(X, X^*)$, plus simplement notée w, est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues (pour la norme) $\varphi \in X^*$ restent continues.*
Sur le dual X^*, outre la topologie de la norme $\|\cdot\|$ et la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, on peut définir la topologie préfaible, ou faible-, notée aussi $\sigma(X^*, X)$ qui est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications linéaires $(\varphi_x)_{x\in X}$ où*

$$\begin{aligned} \varphi_x : \quad X^* &\to \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi_x(f) =< f, x > \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$.

On a naturellement une notion de convergence pour la topologie faible-* sur X^* qui se définit comme suit : On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de X^* converge faiblement-* vers f, ce que l'on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, pour tout $x \in X$. On vérifie sans peine les propriétés suivantes de la convergence faible-* :

- Si (f_n) converge faiblement-*, sa limite faible-* est unique,
- Si $f_n \to f$ (i.e. $\|f_n - f\| \to 0$) alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$,
- Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(X^*, X^{**})$ alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$,
- Toute suite faiblement-* convergente de X^* est bornée,
- Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ alors $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$,
- Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et si $x_n \to x$ dans X (fort) alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Théorème 1.3.6 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) . *La boule unité fermée B_{X^*} de X^* est compacte pour la topologie faible* $\sigma(X^*, X)$.*

Le théorème suivant donne une caractérisation importante des espaces réflexifs.

Théorème 1.3.7 (Kakutani) *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si*

$$B_X = \{x \in X; \|x\|_X \leq 1\}$$

est compact pour la topologie $\sigma(X, X^*)$.

1.4 Définitions

Définition 1.4.1 (Opérateur de rang fini) *Soient X et Y deux espaces normés et $u : X \to Y$ un opérateur linéaire. On dit que u est un opérateur de rang fini si* ***Imu*** *est un espace de dimension finie.*
De plus, u est de rang fini si et seulement si

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} < x_i^*, x > y_i.$$

avec $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ et $y_1, ..., y_n \in Y$. L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X, Y)$.

Définition 1.4.2 *Soit u un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y. On dit que u est* ***un opérateur compact*** *s'il envoie tout ensemble borné X_0 dans X à un ensemble relativement compact $u(X_0)$ dans Y. Autrement dit, la fermeture $\overline{u(X_0)}$ est compact.*

Remarque 1.4.3 *Tout opérateur u de rang fini continue est compact. En effet, l'ensemble $u(B_X)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie(Théorème de Riesz). D'après le résultat précédent, toute limite u en norme d'opérateur d'une suite $(u_n)_n$ d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts.*

Définition 1.4.4 [19] *On dit qu'un espace de Banach Z est* ***injectif*** *si pour tout espace de Banach X, pour tout sous-espace de Banach X_0 de X et pour tout opérateur continu $u : X_0 \to Z$, il existe une extension continue $\tilde{u} : X \to Z$ de u, telle que $\|u\| = \|\tilde{u}\|$.*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & Z \\ X \arrow[ur, "\tilde{u}"'] & \end{tikzcd}$$

Définition 1.4.5 [19] *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\lambda > 1$. On dit qu'un espace de Banach X est un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espace, si pour tout sous-espace E de dimension finie de X, il existe un sous espace F de dimension finie de X contenant E et un isomorphisme $v : F \to \ell_p^{dim(F)}$ avec $\|v\|.\|v^{-1}\| < \lambda$.*

On dit que X est un $\mathcal{L}_p$-espace s'est un $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-espace, pour un certain $\lambda > 1$.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, pour $1 \leq p \leq \infty$ les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ sont des $\mathcal{L}_p$espaces . L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K est un $\mathcal{L}_\infty$espace.

Définition 1.4.6 (Sous-espace complémentaire) *. Soit X un espace de Banach et Y un sous-espace fermé de X. On dit que Y est complémentaire (complemented) dans X s'il existe un sous-espace fermé Z tel que*

$$X = Y \oplus Z.$$

Le sous-espace fermé Z s'appelle complémentaire de Y.

Théorème 1.4.7 *Soit X un espace de Banach, pour tout sous-espace Y de dimension finie de X, il existe une projection continue P de X sur Y, c'est à dire qu'il existe un sous-espace fermé Z tel que*

$$X = Y \oplus Z.$$

Chapitre 2

Opérateurs linéaires $p-$nucléaires

2.1 Opérateurs linéaires $p-$sommants

Commençons cette section par quelques préliminaires. Soient X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $\ell_p^n(X)$ (pour $n = +\infty$, on a $\ell_p^n(X) = \ell_p(X)$) l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^n$ dans X $p-$sommables, muni de la norme

$$\begin{cases} \|(x_i)_{i=1}^n\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p\right)^{1/p}, & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_\infty = \sup_i \|x_i\|_X, & \text{si} \quad p = +\infty \end{cases}.$$

On note par $\ell_p^{nw}(X)$ l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^n$ dans X faiblement $p-$sommables, muni de la norme

$$\begin{cases} w_p((x_i)_{i=1}^n) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n | < x^*, x_i > |^p\right)^{1/p}, & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ w_\infty((x_i)_{i=1}^n) = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_i | < x^*, x_i > |, & \text{si} \quad p = +\infty \end{cases}.$$

Si $p = +\infty$, on a $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$, pour plus de détails voir [19].

Rappelons la définition d'un opérateur linéaire $p-$sommant introduite par Grothendieck pour $p = 1$, dans [22].
En 1967, Pietcsh était le premier qui a généralisé la notion des opérateurs $p-$sommants,

il a défini la classe des opérateurs $p-$sommants et a montré quelques propriétés intéressantes, parmi les principaux résultats parûs dans [35] on peut trouver les théorèmes des dominations, factorisations, les théorèmes d'inclusions,...

Définition 2.1.1 *On suppose que* $1 \leq p < \infty$*. Soit* $u : X \to Y$ *entre deux espaces de Banach. On dit que l'opérateur* u *est* ***p-sommant*** *s'il existe une constante* $c \geq 0$ *et pour toute suite finie* $(x_i)_{i=1}^n$ *de* X*, on ait :*

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p \leq c^p \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p. \tag{2.1}$$

On désigne par $\pi_p(u)$ *la plus petite constante* c *vérifiant* (2.1)*. On désigne par* $\Pi_p(X,Y)$ *l'espace des opérateurs* $p-$*sommants de* X *dans* Y*.*

Remarque 2.1.2 *1) la formule* (2.1) *peut s'écrire :*

$$\|(u(x_i))_{i=1}^n\|_p \leq c w_p((x_i)_i^n). \tag{2.2}$$

Donc des opérateurs $p-$*sommants transforment les suites faiblement* $p-$*sommantes vers suites fortement p-sommantes.*

2) Il est clair que pour tout $u \in \Pi_p(X,Y)$ *on a* $\|u\| \leq \pi_p(u)$*. Donc,* u *est continu.*

3) Si $p = \infty$*, la formule* (2.2) *s'écrit :*

$$\|(u(x_i))_{i=1}^n\|_\infty \leq c w_\infty((x_i)_{i=1}^n). \tag{2.3}$$

on aura :

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|u(x_i)\| \leq c \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|.$$

On conclut que si $p = \infty$ *l'ensemble* $\Pi_p(X,Y)$ *sera identique à* $\mathcal{L}(X,Y)$*.*

Proposition 2.1.3 ([19], p 38) $\Pi_p(X,Y)$ *muni de la norme* $\pi_p(.)$ *est un espace de Banach.*

L'opérateur suivant constitue un exemple de base pour les opérateurs $p-$sommants.

Exemple 2.1.4 ([19], p 41) *Soient* K *un compact et* μ *une mesure de probabilité régulière sur* K*. Alors*

1) L'injection canonique $(1 \leq p < \infty)$

$$j_p : C(K) \to L_p(K, \mu)$$

est p-sommant avec $\pi_p(j_p) = 1$.

2) L'opérateur d'inclusion suivant

$$\begin{array}{lll} i_p : & L_\infty(\mu) & \to L_p(\mu) \\ & f & \mapsto i_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant et on a $\pi_p(i_p) = 1$.

3) Soit $1 \leq p < \infty$, *L'opérateur diagonal*

$$\begin{array}{lll} M_\lambda : & \ell_\infty & \to \ell_p \\ & (\xi_n)_n & \mapsto (\lambda_n \xi_n)_n \end{array}$$

tel que $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$, *est p-sommant. De plus, on a* $\|M_\lambda\| = \pi_p(M_\lambda) = \|\lambda\|_p$.

Théorème 2.1.5 [19] *Si* $1 \leq p < q < \infty$, *alors*

$$\Pi_p(X, Y) \subseteq \Pi_q(X, Y)$$

De plus,

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u) \text{ pour tout } u \in \Pi_p(X, Y).$$

Preuve. Soit $(x_i)_{i=1}^n \subset X$. On pose $\lambda_i = \| u(x_i) \|^{\frac{q}{p}-1}$, donc

$$\| u(x_i) \|^q = \| u(\lambda_i x_i) \|^p .$$

Si $u \in \Pi_p(X, Y)$, on aura

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \| u(x_i) \|^q \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n \| u(\lambda_i x_i) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i^p x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder $\left(\dfrac{1}{q/p}+\dfrac{1}{q/(q-p)}=1\right)$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\|u(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \pi_p(u)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{qp/(q-p)}\right)^{(q-p)/qp}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^{pq/p}\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \\ &= \pi_p(u)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{i}^{n}\|u(x_i)\|^q\right)^{(1/p)-(1/q)}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

On trouve

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|u(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u)\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

C'est à dire

$$\pi_q(u)\leq\pi_p(u)\ \text{ pour tout }\ u\in\Pi_q(X,Y).$$

■

Proposition 2.1.6 ([19], p 37) *Si $u\in\mathcal{L}(X,Y)$ est de rang fini. Alors u est p-sommant pour tout $1\leq p<\infty$.*

Théorème 2.1.7 (Propriété d'idéal) *Soit $1\leq p<\infty$.*
Si $u\in\mathcal{L}(Y_0,Y), w\in\mathcal{L}(X,X_0)$ et $v\in\Pi_p(X_0,Y_0)$, alors

$$uvw\in\Pi_p(X,Y)\ \textit{et}\ \pi_p(uvw)\leq\|u\|\pi_p(v)\|w\|.$$

Preuve. On a $\|uvw(x)\|\leq\|u\|\|v(w(x))\|,\ \forall x\in X.$

Soient $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, donc $(w(x_i))_{i=1}^n \subset X_0$ et

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|v(w(x_i))\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{X_0^*}} \left(\sum_{i=1}^n |< y^*, w(x_i) >|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{X_0^*}} \left(\sum_{i=1}^n |< w^*(y^*), x_i >|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(v)\|w^*\| \sup_{y^* \in B_{X_0^*}} \left(\sum_{i=1}^n |< \frac{w^*(y^*)}{\|w^*\|}, x_i >|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(v)\|w^*\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |< x^*, x_i >|^p\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\sum_{i=1}^n \|uvw(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|\pi_p(v)\|w\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |< x^*, x_i >|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors

$$uvw \in \Pi_p(X, Y) \text{ et } \pi_p(uvw) \leq \|u\|\pi_p(v)\|w\|.$$

■

Proposition 2.1.8 (Propriété d'injectivité) *Si Y est un sous-espace de Y_0 et $i : Y \to Y_0$ une isométrique, alors*

$$u \in \Pi_p(X, Y) \Leftrightarrow iu \in \Pi_p(X, Y_0).$$

De plus,

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u).$$

On va maintenant présenter le théorème qui caractérise les opérateurs $p-$sommants. Pour la démonstration, voir [19].

Théorème 2.1.9 (Le théorème de domination /factorisation de Pietsch) *Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) u est p-sommant,

ii) Il existe une mesure de probabilité régulière μ sur B_{X^*} et une constante $C > 0$ telles que pour tout $x \in X$,

$$\|u(x)\|^p \leq C^p \int_{B_{X^*}} | < x^*, x > |^p d\mu(x^*).$$

(Domination de Pietsch).

iii) Il existe une mesure de probabilité régulière μ sur B_{X^*}, munie de la topologie faible, un sous-espace S_p de $L_p(\mu)$ et un opérateur $\tilde{u} \in \mathcal{L}(S_p, Y)$ tel que*

$$u = \tilde{u}\tilde{j}_p i_X$$

où $i_X : X \to i_X(X) \subset C(B_{X^*})$ est une isométrie injective et $\tilde{j}_p : i_X(X) \to S_p$ est restreint j_p à $i_X(X)$. Autrement dit le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\quad u \quad} & Y \\
{\scriptstyle i_X}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \tilde{u}} \\
i_X(X) & \xrightarrow{\quad \tilde{j}_p \quad} & S_p \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
C(B_{X^*}) & \xrightarrow{\quad j_p \quad} & L_p(\mu)
\end{array}$$

De plus, on a

$$\pi_p(u) = \|\tilde{u}\|.$$

(Factorisation de Pietsch).

Le corollaire suivant nous donne une factorisation des opérateurs $p-$sommants à valeurs dans un espace de Banach injectif.

Corollaire 2.1.10 ([19], p 47) *Soit K un espace compact de Hausdorff. Si Y est un espace de Banach injectif alors l'opérateur $u : X \to Y$ est p-sommant si et seulement s'il existe une mesure de probabilité de Borel régulière μ sur K et une application $\tilde{u} \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y)$ tel que $u = \tilde{u}j_p i_X$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
C(K) \arrow[r, "j_p"] & L_p(\mu) \arrow[u, "\tilde{u}"']
\end{tikzcd}$$

avec $\pi_p(u) = \|\tilde{u}\|$.

Le corollaire suivant nous donne une factorisation des opérateurs $p-$sommants définis sur $C(K)$.

Corollaire 2.1.11 ([19], p 48) *Soit K un espace compact de Hausdorff, $u : C(K) \to Y$ est $p-$sommant si et seulement s' il existe une mesure de probabilité de Borel régulière μ sur K et une application $\tilde{u} \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y)$ telle que $\tilde{u} j_p = u$:*

$$\begin{tikzcd}
C(K) \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "j_p"'] & Y \\
& L_p(\mu) \arrow[u, "\tilde{u}"']
\end{tikzcd}$$

et on a dans ce cas $\|\tilde{u}\| = \pi_p(u)$.

Théorème 2.1.12 (Théorème de composition) *Soient* $1 \leq p, q < \infty$ *et* $\dfrac{1}{r} = min\{1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\}$, *si* $u \in \Pi_p(Y, Z)$ *et* $v \in \Pi_q(X, Y)$, *alors*

$$uv \text{ est } r\text{-sommant, et } \pi_r(uv) \leq \pi_p(u).\pi_q(v).$$

2.2 Opérateurs linéaires $p-$nucléaires

On commence cette section par introduire quelques définitions, propriétés et notations concernant les opérateurs $p-$nucléaires. Pour plus de détails voir ([19], [40]).

Définition 2.2.1 ([40], p40) *On suppose que $1 \leq p \leq \infty$. Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire $u : X \to Y$ est dite p-nucléaire s'ils existent des suites $(x_n^*)_n \subset X^*$ et $(y_n)_n \subset Y$ telles que*

$$u = \sum_n x_n^* \otimes y_n$$

et $N_p\left((x_n^*)_n,(y_n)_n\right)<\infty$*, avec*

$$
\begin{array}{rcll}
N_p((x_n^*)_n,(y_n)_n) & = & \left(\sum\limits_n \|x_n^*\|\right)\left(\sup\limits_n \|y_n\|\right), & p=1 \\
N_p((x_n^*)_n,(y_n)_n) & = & \left(\sum\limits_n \|x_n^*\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup\limits_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum\limits_n |<y^*,y_n>|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}, & 1<p<\infty \\
N_p((x_n^*)_n,(y_n)_n) & = & \left(\sup\limits_n \|x_n^*\|\right) \sup\limits_{y^*\in B_{Y^*}} \sum\limits_n |<y^*,y_n>|, & p=\infty.
\end{array}
$$

L'espace formé par ces opérateurs est noté $\mathcal{N}_p(X,Y)$ *et on le muni par la norme*

$$\nu_p(u) := \inf N_p((x_n^*)_n,(y_n)_n).$$

Remarque 2.2.2 *Les opérateurs 1-nucléaires sont souvent appelés opérateurs nucléaires.*

Exemple 2.2.3 *L'opérateur diagonal est nucléaire, on peut l'écrire comme suivant :*

$$M_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n,$$

telle que $(e_n)_n$ *est la base de* ℓ_1*.*
On a $\nu(M_\lambda) \leq \sum\limits_n |\lambda_n| = \|M_\lambda\|$*, on sait que* $\|M_\lambda\| \leq \nu(M_\lambda)$ *donc* $\nu(M_\lambda)=\|M_\lambda\|$*.*

Théorème 2.2.4 (Propriété d'idéal) *. Soit* $1\leq p\leq\infty$*.*
Si $u\in\mathcal{L}(Y,Y_0), v\in\mathcal{N}_p(X,Y)$ *et* $w\in\mathcal{L}(X_0,X)$*, alors,*

$$uvw\in\mathcal{N}_p(X_0,Y_0) \text{ et } \nu_p(uvw)\leq\|u\|\nu_p(v)\|w\|.$$

Preuve. En effet, soit $v=\sum\limits_n x_n^*\otimes y_n$ avec $\nu_p(v):=\inf\|x_n^*\|\|y_n\|<\infty$. Alors, pour tout $x\in X$,

$$u(vwx) = u\left(\sum_n <x_n^*,wx>y_n\right) = \sum_n <x_n^*,wx>u(y_n).$$

D'où

$$uvw = \sum_n w^*(x_n^*)\otimes u(y_n)$$

Donc, $uvw\in\mathcal{N}_p(X_0,Y_0)$ et on a

$$
\begin{aligned}
\nu_p(uvw) &\leq \|w^*(x_n^*)\|\|u(y_n)\| \\
&\leq \|w^*\|\|x_n^*\|\|u\|\|y_n\| \\
&= \|w\|\|u\|\|x_n^*\|\|y_n\|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\nu_p(uvw) \leq \|u\|\nu_p(v)\|w\|.$$

■

Lemme 2.2.5 *Les opérateurs : a de ℓ_p dans X et b de X dans ℓ_∞ sont définis respectivement par :*
$(x_n)_n \mapsto \sum\limits_n x_n y_n$ *et* $x \mapsto (< x_n^*, x >)_n$.

Théorème 2.2.6 *Un opérateur $u \in \mathcal{L}(X,Y)$ est p-nucléaire si et seulement s'il admet la factorisation suivante,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

avec a et b sont des opérateurs linéaires bornés. Pour $u \in \mathcal{N}_p(X,Y)$ on définit

$$\nu_p(u) = \inf \|a\|\|\lambda\|_p\|b\|.$$

Preuve.

On suppose que u est $p-$nucléaire donc ils existent des suites $(x_n^*)_n \subset X^*$ et $(y_n)_n \subset Y$ telles que $u = \sum\limits_n x_n^* \otimes y_n$. Soient

$$\begin{aligned} b: &\quad X \to \ell_\infty, \quad x \mapsto \left(\frac{x_n^*(x)}{\|x_n^*\|}\right)_n, \\ M_\lambda: &\quad \ell_\infty \to \ell_p, \quad (t_n)_n \mapsto \Big(\|x_n^*\|t_n\Big)_n, \qquad \lambda = (\|x_n^*\|)_n \\ a: &\quad \ell_p \to Y, \quad (s_n)_n \mapsto \sum_n s_n y_n. \end{aligned}$$

Évidemment, $u = aM_\lambda b$ et $\|M_\lambda\| = \left(\sum\limits_n \|x_n^*\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$ pour $p = 1$, on a

$$\|a((s_n)_n)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} | < y^*, \sum_n s_n y_n > | \leq \left(\sum_n |s_n|\right)\left(\sup_n \|y_n\|\right).$$

Donc

$$\|a\| \leq \sup_n \|y_n\| \quad pour \ p = 1.$$

Pour $1 < p < \infty$, on a

$$\|a((s_n)_n)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} | < y^*, \sum_n s_n y_n > | \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n \| < y^*, y_n > \|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

donc

$$\|a\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n \| < y^*, y_n > \|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad pour \ 1 < p < \infty.$$

Pour $p = \infty$,

$$\|M_\lambda\| = \sup_n \|x_n^*\|, \quad \|a\| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n | < y^*, y_n > |,$$

donc

$$u = aM_\lambda b \quad \text{et} \quad \inf \|a\| \|M_\lambda\| \|b\| \leq \nu_p(u).$$

L'inégalité opposée de vient que de M_λ est $p-$nucléaire et de la propriété d'idéal. ■

Remarque 2.2.7 *a) On remarque que $\|u\| \leq \nu_p(u)$. Alors $\mathcal{N}_p(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

b) Tout opérateur p-nucléaire est une limite, ou norme, d'une suite d'opérateurs de rang fini, alors c'est un opérateur compact.

Proposition 2.2.8 [19] *Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) u est p-nucléaire.

ii) u admet une factorisation $u : X \xrightarrow{b} c_o \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{a} Y$ où a et b sont des opérateurs compacts.

iii) Il existe des suites $(\lambda_n) \in \ell_p$, $(x_n^*) \subset B_{X^*}$ et $(y_n) \in \ell_p^w(Y)$ telles que

$$u = \sum_n \lambda_n x_n^* \otimes y_n,$$

la série étant convergente dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

Preuve.

De même que plus haut, on vérifie que pour toute suite $\lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ il existe $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in c_0$ et $\sigma = (\sigma_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ telles que $\lambda_n = \alpha_n.\sigma_n$ et on peut vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir α et σ de façon que $\alpha_n \geq 0$ et $\|\alpha\|\|\lambda\| \leq (1+\varepsilon)\|\lambda\|$.
Comme $(\alpha_n^{\frac{1}{2}})_{n\geq 1} \in c_0$, cette suite peut être utilisée pour construire deux opérateurs diagonaux $b_0 : \ell_\infty \to c_0$ et $a_0 : \ell_p \to \ell_p$. A partir de la décomposition $u = a \circ M_\lambda \circ b$ avec $a \in \mathcal{L}(\ell_p, Y)$, $b \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$, on obtient la factorisation $u = (a \circ a_0) \circ M_\lambda \circ (b_0 \circ b)$ qui est du type (ii). De plus, on a $\nu_p(u) = \inf \|a\|\|\lambda\|\|b\|$ où l'inf est calculé sur toutes les décompositions données en (ii).
Le reste de la proposition provient du fait que l'application $u \to (ue_n)_{n\geq 1}$ définit un isomorphisme isométrique de $\mathcal{L}(\ell_p, Y)$ sur $\ell_p^w(Y)$ pour $1 < p < \infty$, tandis que pour $p = 1$ cette application définit un isomorphisme isométrique de $\mathcal{L}(c_0, Y)$ sur $\ell_1^w(Y)$. ■

Théorème 2.2.9 [19] *Si* $1 \leq p < q < \infty$. *alors*

$$\mathcal{N}_p(X,Y) \subset \mathcal{N}_q(X,Y).$$

De plus,

$$\nu_q(u) \leq \nu_p(u) \quad \textit{pour tout} \quad u \in \mathcal{N}_p(X,Y).$$

Preuve. Soit $u \in \mathcal{N}_p(X,Y)$, alors il existe $a \in \mathcal{L}(\ell_p, Y)$, $b \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ et $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$ tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

Notons que M_λ peut être obtenu en composant M_β avec M_α tels que
M_β et M_α sont des opérateurs multiplications avec

$$\alpha_n = |\lambda_n|^{1-(q/p)} \text{ et } \beta_n = (sign\lambda_n)|\lambda_n|^{(q/p)},$$

donc $M_\lambda = M_\alpha \circ M_\beta$. Alors, on obtient le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "b"'] & & Y \\
\ell_\infty \arrow[rr, "M_\lambda"] \arrow[dr, "M_\beta"'] & & \ell_p \arrow[u, "a"'] \\
& \ell_q \arrow[ur, "M_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \\
\ell_\infty \arrow[r, "M_\beta"] & \ell_q \arrow[u, "\tilde{a}"']
\end{tikzcd}$$

avec $\tilde{a} = aM_\alpha$.
Ce qui implique $u \in \mathcal{N}_q(X, Y)$ et

$$\begin{aligned}
\nu_q(u) &\leq \|b\|\|M_\beta\|\|\tilde{a}\| \\
&\leq \|b\|\|M_\beta\|\|a\|\|M_\alpha\| \\
&= \|b\|\|M_\lambda\|\|a\|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\nu_q(u) \leq \nu_p(u).$$

■

2.3 Opérateurs linéaires $p-$intégraux

Les opérateurs 1-intégraux (ou, tout simplement intégraux) sont introduit par A. Grothendieck en 1955. En effet, un opérateur linéaire u entre deux espaces de Banach X et Y est 1-intégral s'il existe une mesure de probabilité μ sur $B_{X^*} \times B_{Y^{**}}$ tel que, pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$ on a

$$< u(x), y^* >= \int_{B_{X^*} \times B_{Y^{**}}} < x^*, x >< y^{**}, y^* > d\mu(x^*, y^{**}).$$

Pour cette formule, Grothendieck a obtenu une factorisation de l'opérateur $k_Y u$ comme suit :

$$k_Y u : \ X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_1} L_1(\mu) \xrightarrow{a} Y^{**},$$

où a et b sont des opérateurs linéaires bornés.

En 1971, A. Pietsch a discuté les opérateurs $p-$intégraux. Cependant, A. Persson et A. Pietsch (1969) ont déjà étudié les opérateurs strictement $p-$intégraux dans leurs article [32].

Définition 2.3.1 *Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire entre deux espaces de Banach. On dit que u est un opérateur $p-$intégral pour $(1 \leq p \leq \infty)$. S'il existe un espace mesuré de probabilité (Ω, Σ, μ) et des opérateurs linéaires bornés $b : X \to L_\infty(\mu)$ et $a : L_p(\mu) \to Y^{**}$ tels que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "\iota_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

Nous noterons par $\mathcal{I}_p(X,Y)$ l'espace des opérateurs p-intégraux de X dans Y, muni de la norme

$$\iota_p(u) := \inf \|a\| \|b\|$$

est un espace de Banach.

Remarque 2.3.2 *Il est clair que pour tout $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$, on a $\|u\| \leq \iota_p(u)$ puisque*

$$\|u\| = \|k_Y u\| = \|a i_p b\| \leq \|a\| \|b\|.$$

D'où

$$\|u\| \leq \iota_p(u).$$

Théorème 2.3.3 [19] *Soit $1 \leq p \leq \infty$, un opérateur $u : X \to Y$ est* ***p-intégral*** *si et seulement s'il existe une mesure de probabilité régulière ν sur B_{X^*} et un opérateur $\tilde{u}$:*

$L_p(\nu) \to Y^{**}$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\ C(B_{X^*}) \arrow[rr, "j_p"] & & L_p(\nu) \arrow[u, "\tilde{u}"'] \end{tikzcd}$$

tel que $i_X(x)(x^*) =< x^*, x >$. Dans ce cas, on a

$$\iota_p(u) = \inf \|\tilde{u}\|.$$

tel que l'infimum étant pris sur toutes les mesures ν et les opérateurs $\tilde{u}$ possibles.

Preuve. On pose $\Delta = \inf \|\tilde{u}\|$. Si $k_Y u$ admet la factorisation suivante :

$$k_Y u : X \xrightarrow{i_X} C(B_{X^*}) \xrightarrow{j_p} L_p(\nu) \xrightarrow{\tilde{u}} Y^{**}$$

on a :

$$j_p : C(B_{X^*}) \xrightarrow{j_\infty} L_\infty(\nu) \xrightarrow{i_p} L_p(\nu)$$

donc

$$k_Y u : X \xrightarrow{b=j_\infty i_X} L_\infty(\nu) \xrightarrow{i_p} L_p(\nu) \xrightarrow{\tilde{u}} Y^{**}$$

ce qui montre que u est $p-$intégral et

$$\begin{aligned} \iota_p(u) &\leq \|\tilde{u}\|\|b\| \\ &= \|\tilde{u}\|\|j_\infty i_X\| \\ &\leq \|\tilde{u}\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\iota_p(u) \leq \Delta.$$

Inversement, si $u \in \mathcal{I}_p(X, Y)$, on a

$$k_Y u : X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu) \xrightarrow{a} Y^{**}.$$

Le fait que l'espace $L_\infty(\mu)$ est injectif voir([19], p 86), l'opérateur linéaire borné b admet une extension $\tilde{b} \in L(C(B_{X^*}), L_\infty(\mu))$ avec $\|b\| = \|\tilde{b}\|$,

$$b : X \xrightarrow{i_X} C(B_{X^*}) \xrightarrow{\tilde{b}} L_\infty(\mu).$$

On sait que i_p est $p-$sommant, alors par la propriété d'idéal on a

$$i_p\tilde{b} : C(B_{X^*}) \to L_p(\mu) \text{ est } p\text{−sommant.}$$

D'après le corollaire 2.1.11, il existe une mesure de probabilité régulière ν sur B_{X^*} tels que

$$i_p\tilde{b} : C(B_{X^*}) \xrightarrow{j_p} L_p(\nu) \xrightarrow{w} L_p(\mu) \quad \text{et} \quad \|w\| = \pi_p(i_p\tilde{b}).$$

On obtient le diagramme suivant qui est commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "v"] \arrow[dl, "i_X"'] \arrow[d, "b"] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\
C(B_{X^*}) \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[dr, "j_p"'] & L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "a"'] \\
& L_p(\nu) \arrow[urr, "w"'] & &
\end{tikzcd}$$

Enfin on trouve la factorisation

$$k_Y u : X \xrightarrow{i_X} C(B_{X^*}) \xrightarrow{j_p} L_p(\nu) \xrightarrow{aw} Y^{**}.$$

De plus, on a

$$\Delta \leq \pi_p(i_p\tilde{b})\|a\| \leq \pi_p(i_p)\|\tilde{b}\|\|a\| = \|b\|\|a\|.$$

En passant à l'infimum, on trouve

$$\Delta \leq \iota_p(u).$$

■

Proposition 2.3.4 (Inclusion) *Soient X, Y deux espaces de Banach. Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors*

$$\mathcal{I}_p(X, Y) \subset \mathcal{I}_q(X, Y).$$

De plus, on a :

$$\iota_p(u) \leq \iota_q(u) \text{ pour tout } u \in \mathcal{I}_p(X, Y).$$

Preuve. Supposons que $u \in \mathcal{I}_p(X, Y)$. Alors,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] \arrow[dr, "i_q"'] & & L_p(\mu) \arrow[u, "a"'] \\
& L_q(\mu) \arrow[ur, "a_1"'] &
\end{tikzcd}$$

donc

$$k_Y u : X \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_q} L_q(\mu) \xrightarrow{aa_1} Y^{**},$$

ce qui implique

$$u \in \mathcal{I}_q(X,Y) \text{ et } \iota_q(u) \leq \iota_p(u).$$

■

Théorème 2.3.5 (Propriété d'idéal) . *Soit* $1 \leq p \leq \infty$.
Si $u \in \mathcal{L}(Y,Y_0), v \in \mathcal{I}_p(X,Y)$ *et* $w \in \mathcal{L}(X_0,X)$, *alors*

$$uvw \in \mathcal{I}_p(X_0,Y_0) \textit{ et } \iota_p(uvw) \leq \|u\|\iota_p(v)\|w\|.$$

Preuve. Soit $v \in \mathcal{I}_p(X,Y)$, alors il existe $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu),Y)$, $b \in \mathcal{L}(X, L_\infty(\mu))$, tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

On note que $k_{Y_0}uvw$ se factorise de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} & & & Y_0 \arrow[dr, "k_{Y_0}"] & \\ X_0 \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "bw"'] & X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & Y \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \arrow[r, "u^{**}"] & Y_0^{**} \\ & L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "u^{**}a"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $k_{Y_0}u = u^{**}k_Y$, on a

$$k_{Y_0}uvw = u^{**}ai_pbw,$$

Ce qui implique que $uvw \in \mathcal{I}_p(X_0,Y_0)$ et on a

$$\begin{aligned} \iota_p(uvw) &\leq \|u^{**}a\|\|bw\| \\ &\leq \|u\|\|a\|\|b\|\|w\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\iota_p(uwv) \leq \|u\|\iota_p(v)\|w\|.$$

■

Définition 2.3.6 *On dit que $u : X \to Y$ est* ***strictement p-intégral*** *s'il existe une mesure de probabilité μ et deux opérateurs bornés $a : L_p(\mu) \to Y$ et $b : X \to L_\infty(\mu)$ tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"] & L_p(\mu) \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on a

$$\iota_p(u) := \inf \|a\|.\|b\|.$$

On désigne par $S\mathcal{I}_p(X,Y)$, l'espace des opérateurs strictement $p-$intégraux de X dans Y.

Proposition 2.3.7 *Si Y est réflexif, tout opérateur p-intégral est strictement p-intégral.*

Proposition 2.3.8 [19] *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $u : X \to Y$ un opérateur entre deux espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$,

ii) $u^{**} \in \mathcal{I}_p(X^{**},Y^{**})$,

iii) $k_Y u \in \mathcal{I}_p(X,Y^{**})$.

De plus, on a :

$$\iota_p(u) = \iota_p(u^{**}) = \iota_p(k_Y u).$$

2.4 Relations entre les espaces $\mathcal{N}_p(X,Y)$, $\mathcal{I}_p(X,Y)$ et $\Pi_p(X,Y)$

Nous allons étudier les relations entre les différents espaces $\mathcal{N}_p(X,Y)$, l'espace des opérateurs $p-$nucléaires, $\mathcal{I}_p(X,Y)$, l'espace des opérateurs $p-$intégraux et $\Pi_p(X,Y)$. Nous verrons aussi les théorèmes de compositions entre ces classes des opérateurs.

Proposition 2.4.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

$$\mathcal{N}_p(X,Y) \overset{(2)}{\subset} \mathcal{I}_p(X,Y) \overset{(1)}{\subset} \Pi_p(X,Y),$$

avec $\pi_p(u) \leq \iota_p(u) \leq \nu_p(u)$, *pour tout* $u \in \mathcal{N}_p(X,Y)$.

Preuve. (1) Si $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

Comme i_p est $p-$sommant d'après l'exemple (2.1.4), donc d'après le théorème (2.1.7) et la proposition (2.1.8), on a

$$\begin{aligned} \pi_p(u) &= \pi_p(k_Y u) \\ &= \pi_p(a i_p b) \\ &\leq \|a\|\|b\|. \end{aligned}$$

Donc u est $p-$sommant et $\pi_p(u) \leq \iota_p(u)$, pour tout $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$.
(2) On utilise la définition. ∎

Proposition 2.4.2 ([19], p 111) *Soient* $1 \leq p < \infty$, μ *et* ν *deux mesures et* $u : L_{p^*}(\mu) \to L_p(\nu)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) u est p-intégral,

ii) u est p-sommant,

iii) u^* *est p-intégral,*

iv) u^* *est p-sommant.*

De plus, on a :

$$\iota_p(u) = \pi_p(u) = \iota_p(u^*) = \pi_p(u^*).$$

Théorème 2.4.3 [19] *Soit* $u : X \to Y$ *un opérateur entre deux espaces de Banach. On dit que u est p-nucléaire* $(1 \leq p < \infty)$ *si et seulement s'il admet la factorisation*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

tel que Z est un espace de Banach, $w \in \mathcal{I}_p(X, Z)$ et $v : Z \to Y$ un opérateur compact, avec

$$\nu_p(u) = \inf \|v\|.\iota_p(w).$$

Corollaire 2.4.4 *Soit $1 \leq p < \infty$. Si Y est un espace de Banach injectif, alors tout opérateur p-sommant $u : X \to Y$ est p-intégral et*

$$\pi_p(u) = \iota_p(u).$$

Corollaire 2.4.5 *Soit $1 \leq p < \infty$. Si K est un espace compact, alors tout opérateur p-sommant $u : C(K) \to Y$ est p-intégral et*

$$\pi_p(u) = \iota_p(u).$$

Théorème 2.4.6 [32] *Soit $1 \leq p < \infty$. Si $v : X \to Z$ un opérateur faiblement compact et $w : Z \to Y$ un opérateur strictement p-intégral, alors $wv : X \to Y$ est un opérateur p-nucléaire et*

$$\nu_p(wv) \leq \iota_p(w).\|v\|.$$

Corollaire 2.4.7 *Si X est espace réflexif. Alors pour $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\mathcal{N}_p(X, Y) = S\mathcal{I}_p(X, Y).$$

Théorème 2.4.8 [19] *Soient X, Y, Z des espaces de Banach, soient $v \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $u \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On suppose que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfont $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.*

a) Si u est p-sommant et v est q-intégral, alors uv est r-intégral, et

$$\iota_r(uv) \leq \pi_p(u).\iota_q(v).$$

b) Si u est p-intégral et v est q-sommant, alors uv est r-intégral, et

$$\iota_r(uv) \leq \iota_p(u).\pi_q(v).$$

Théorème 2.4.9 [40] *Soient X, Y, Z des espaces de Banach, soient $v \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $u \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On suppose que $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{r} = min\{1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\}$.*

a) Si u est p-nucléaire et v est q-sommant, alors uv est r-nucléaire, avec

$$\nu_r(uv) \leq \nu_p(u).\pi_q(v).$$

b) Si u est p-sommant et v est q-nucléaire, alors uv est r-nucléaire, et

$$\nu_r(uv) \leq \pi_p(u).\nu_q(v).$$

Lemme 2.4.10 *pour tout $1 \leq p < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(\ell_\infty^N, Y)$, on a*

$$\nu_p(u) = \iota_p(u).$$

Preuve.

Pour un ensemble fini $K = \{1, 2, ..., N\}$, on a $C(K) \simeq \ell_\infty^N$. Soit $u : C(K) \to Y$ un opérateur. Par le corollaire 2.1.11 et le corollaire 2.4.5 il existe une mesure de probabilité $\mu \in C(K)^*$ et un opérateur $\tilde{u} : L_p \to Y$ tel que

$$u : C(K) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu) \xrightarrow{\tilde{u}} Y \text{ et } \|\tilde{u}\| = \iota_p(u).$$

On définit pour tout $1 \leq k \leq N$

$$\lambda_k := \mu(\{k\})$$

donc $\mu = \sum\limits_{k \leq N} \lambda_k \delta_k$.

On pose $\varrho_k = \lambda_k^{-1}$ pour $\lambda_k > 0$ et $\varrho_k = 0$ sinon, et l'opérateur

$$\begin{aligned} v : \quad \ell_\infty^N &\to L_p \\ (f_k) &\mapsto (\varrho_k f_k) f \end{aligned}$$

a la norme < 1, et $i_p = vM_\lambda$ tel que $M_\lambda : \ell_\infty^N \to \ell_p^N$ est un opérateur diagonal par une suite $\lambda = (\lambda_k)_{k \leq N}$. On sait que $\|M_\lambda\| \leq 1$, par conséquent

$$\nu_p(u) \leq \|\tilde{u}\| \|v\| \|M_\lambda\| \leq \|\tilde{u}\| = \iota_p(u).$$

Ce que termine la preuve du lemme.

■

Théorème 2.4.11 [19] *Si l'un des espaces de Banach X et Y est dimension fini. Alors pour tout $1 \leq p < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(X,Y)$,*

$$\nu_p(u) = \iota_p(u).$$

Preuve.

On suppose que X est de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} Y & \xrightarrow{k_Y} & Y^{**} \\ b\Big\downarrow & & & \Big\uparrow a \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un sous-espace de dimension finie E de $L_\infty(\mu)$, de dimension finie N, avec un isomorphisme $v : E \to \ell_\infty^N$ tels que

$$\|v\|\|v^{-1}\| \leq 1 + \epsilon \text{ et } b(X) \subseteq E.$$

De plus, $i_p(E)$ est contenu dans un sous-espace $(1+\varepsilon)$-complémentaire F de $L_p(\mu)$. Soit $J : F \to L_p(\mu)$ l'injection canonique correspondant et $P : L_p(\mu) \to F$ la projection correspondante avec $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

Le principe de réflexivité locale voir [[19], p. 178] assure l'existence d'un opérateur linéaire $w : a(F) \to Y$ tel que

$$\|w\| \leq 1 + \varepsilon \text{ et } wk_Y u(x) = u(x); \quad \forall x \in X$$

On considère

$$\tilde{u} = Pi_p|_E v^{-1} : \ell_\infty^N \to F.$$

Alors $\tilde{u}$ est $p-$sommant et donc $p-$intégral et

$$\begin{aligned} \pi_p(\tilde{u}) &= \iota_p(\tilde{u}) \\ &= \nu_p(\tilde{u}) \\ &\leq \|P\|\iota_p(i_p)\|v^{-1}\|, \\ &\leq (1+\varepsilon)\|v^{-1}\|. \end{aligned}$$

On note que

$$k_Y u = w k_Y u = w a i_p b = w a J \tilde{u} v b.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \nu_p(u) & = & \nu_p(k_Y u) \\ & = & \nu_p(w a J \tilde{u} v u) \\ & \leq & \nu_p(w a J) \nu_p(\tilde{u}) \|v b\| \\ & \leq & (1+\varepsilon)^2 \|a\| \|v^{-1}\| \|v\| \|b\| \\ & \leq & (1+\varepsilon)^3 \|a\| \|b\|. \end{array}$$

Ainsi,

$$\nu_p(T) = \iota_p(T).$$

On suppose maintenant que Y est de dimension finie. Soit $u : X \to Y$ un opérateur $p-$intégral qui se factorise comme suit :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad u \quad} & Y \\ b \big\downarrow & & \big\uparrow a \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\quad i_p \quad} & L_p(\mu) \end{array}$$

avec : $\|b\| = 1$ et $\|a\| \leq \varrho . \iota_p(u)$, où $\varrho = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$.
On a : $E := L_\infty(\mu)/Ker(a i_p)$ est un espace de dimension finie, de plus, c'est un dual d'un sous-espace de dimension finie de F dans $L_1(\mu)$. Donc, F est contenu dans G de $L_\infty(\mu)$ qui est de dimension finie, N, et il existe un isomorphisme $v : G \to \ell_1^N$ tel que : $\|v\| \leq \varrho$ et $\|v^{-1}\| \leq 1$.
Comme ci-dessus, on peut choisir G est $(1+\varepsilon)$-complémentaire dans $L_1(\mu)$. Soit $P : L_1(\mu) \to G$ est correspondance projection avec $\|P\| \leq 1+\varepsilon$ et soit l'injection canonique $J : G \to L_1(\mu)$. L'opérateur $w := a i_p P^* : G^* \to Y$ satisfait $w J^* = a i_p$.
On a : $w v^* : \ell_\infty^N \to Y$ a la représentation :

$$w v^* = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k z_k \otimes y_k$$

avec $z_k \in B_{\ell_1^N}$ pour $1 \leq k \leq N$, $w_{p^*}((y_k)_k) \leq 1$ et $\|\lambda_k\|_p \leq \iota_p(wv^*)$.
Mais :

$$\begin{array}{rcl} \iota_p(wv^*) & = & \iota_p(ai_pP^*v^*) \\ & \leq & \|a\|.\iota_p(i_p).\|P^*\|.\|v^*\| \\ & \leq & (1+\varepsilon)^2\iota_p(u). \end{array}$$

et $u = wv^*(v^{-1})^*J^*b$, donc

$$u = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k^* \otimes y_k$$

où $x_k^* := b^*Jv^{-1}z_k \in B_{X^*}$ pour tout $1 \leq k \leq N$. ■

Chapitre 3

Opérateurs Lipschitz $p-$nucléaires

3.1 Généralités

On présentera la propriété de Radon-Nikodým et la dérivée de ω^*-Gâteaux dans les espaces de Banach.

3.1.1 La propriété Radon -Nikodým

Définition 3.1.1 [7] *Un ensemble A convexe fermé et borné C dans un espace de Banach E a la propriété Radon -Nikodým (PRN) s'il a vérifie la propriété suivante :*
Soit (Ω, B) un espace mesurable, et soit τ une mesure E-évaluée et μ une mesure de probabilité sur (Ω, B). On suppose que $\tau(A)/\mu(A) \in C$ pour tout $A \in B$ avec $\mu(A) \neq 0$. Alors, il existe $f \in L_1(\mu, E)$, telle que

$$\tau(A) = \int_A f(\omega) d\mu(\omega), \ A \in B.$$

L'espace E est dit avoir une PRN si sa boule unité admet PRN.

3.1.2 Les ensembles Gauss nuls

Définition 3.1.2 (Mesure de Gauss) [7] *Une mesure de probabilité μ sur un espace de Banach E est dite mesure Gaussienne si pour tout $x^* \in E^*$ la mesure μ_{x^*} sur la droite réelle, définie par $\mu_{x^*}(A) = \mu\{y : < x^*, y > \in A\}$, a une distribution gaussienne. La mesure gaussienne est dite non dégénéré si pour tout $x^* \neq 0$ la distribution de μ_{x^*} est non dégénéré.*

Définition 3.1.3 [7] *Soit A un ensemble Borélien dans un espace de Banach séparable E.*

(i) L'ensemble A est dit ensemble Gauss nul si $\mu(A) = 0$ pour toute mesure de Gauss non dégénérée sur E.

(ii) L'ensemble A est dit ensemble Aronszajn nul s'il appartient à $\cap A(\{x_n\})$, où l'intersection est prise sur toutes les suites $\{x_n\}$ dont l'espace engendré dense dans E, i.e., pour toute suite $(x_n)_n$ de vecteurs non nuls avec l'espace engendré dense, A peut être décomposé comme une union des ensembles Boréliens de sorte que $A_n \in A(\{x_n\})$ pour tout n.

(iii) L'ensemble A est dit ensemble cube nul si $\tau_T(A) = 0$ pour toute mesure cube sur E.

Théorème 3.1.4 [7] *Soient E et F des espaces de Banach séparables, et soit $f : E \to F^*$ une application lipschitzienne. Alors f est ω^*-Gâteaux différentiable en dehors d'un ensemble Gauss nul. D'ailleurs, si f est lipschitzienne injective, alors $D_f^*(x_0)$ est un isomorphisme en dehors d'un ensemble Gauss nul.*

Proposition 3.1.5 [7] *Les ensembles Aronszajn nuls sont Gauss nuls.*

Proposition 3.1.6 [7] *Les ensembles Gauss nuls sont cube nuls.*

Théorème 3.1.7 [7] *Les ensembles cubes nuls sont Aronszajn nuls.*

Proposition 3.1.8 [7] *Soient E un espace de Banach séparable et F un espace avec PRN. Soit f une fonction lipschitzienne de l'ensemble ouvert $U \subset E$ dans F. Alors, l'ensemble des points de U dans lequelle f n'est pas différentiable au sens de Gâteaux est Aronszajn nul.*

3.2 Opérateurs Lipschitz

3.2.1 Définitions et propriétés

Définition 3.2.1 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit que l'application $f : X \to Y$ est lipschitzienne s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y), \tag{3.1}$$

pour tout $x,\ y \in X$. La plus petit des constantes C vérifiant (3.1) *s'appelle nombre de Lipschitz et notée par* $\mathrm{Lip}(f)$*, où* $\mathrm{Lip}(f)$ *est donnée par*

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}.$$

Proposition 3.2.2 ([41], proposition 1.2.2) *Soient X, Y, Z des espaces métriques. Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications lipschitziennes, alors $gf : X \to Z$ est lipschitzienne et*

$$\mathrm{Lip}(gf) \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot \mathrm{Lip}(g).$$

Preuve. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont lipschitziennes. Alors pour tous $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} d_Z(gf(x), gf(y) &\leq \mathrm{Lip}(g) d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq \mathrm{Lip}(g) \cdot \mathrm{Lip}(f) d_X(x,y). \end{aligned}$$

D'où gf est lipschitzienne et

$$\mathrm{Lip}(gf) \leq \mathrm{Lip}(f) \cdot \mathrm{Lip}(g).$$

■

3.2.2 Espace de Lipschitz

Définition 3.2.3 *Soient (X, d_X) un espace métrique et Y un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$. Notons* $\mathrm{Lip}(X,Y)$ *l'espace des applications lipschitziennes de X dans Y muni de la norme :*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} = \max\{\|f\|_\infty,\ \mathrm{Lip}(f)\}.$$

Si (X, d_X) est espace métrique pointé, (c'est-à-dire dans lequel est distingué un point particulier, noté e) et Y espace de Banach.

Notons par $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ *l'espace des applications lipschitziennes de X dans Y muni de la norme définie par la constante de Lipschitz :*

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d_X(x,y)}.$$

Si $Y = \mathbb{K}$*, alors on note* $\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{K}) = \mathrm{Lip}_0(X) = X^\sharp$.
$\mathrm{Lip}_0(X)$ *est un espace de Banach voir (* [41] *proposition 1.6.2) s'appelle aussi* ***dual de Lipschitz*** *de* X.

Maintenant, nous allons présenter quelques concepts sur le prédual de $\mathrm{Lip}_0(X)$ et l'adjoint des applications lipschitziennes, pour plus de détails voir([41] ou [3].)

Définition 3.2.4 [41] *Soit* X *un espace métrique. Une molécule sur* X *est une fonction* m *de* X *dans* $\mathbb{R}$ *à support fini telle que* $\sum\limits_{x \in X} m(x) = 0$.
On désigne par $\mathcal{M}(X)$ *l'espace linéaire de toutes les molécules sur* X.

Pour $x, x' \in X$, la molécule $m_{xx'}$ est définie par

$$m_{xx'} = \chi_{\{x\}} - \chi_{\{x'\}}$$

où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A. Pour $m \in \mathcal{M}(X)$ on peut écrire

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{x_i x_i'}.$$

Pour certains scalaires appropriés λ_i, et nous écrivons

$$\|m\|_{\mathcal{M}(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| d_X(x_i, x_i'),\ m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_{x_i x_i'} \right\}.$$

On note par Æ(X) la complété de l'espace normé $(\mathcal{M}(X), \|.\|_{\mathcal{M}(X)})$. Cet espace a été introduit pour la première fois par Arens et Eells [3] en 1956. (La terminologie Arens Eells espace X) est due à Weaver [41] et parfois l'espace Æ(X) s'appelle l'espace de Lipschitz libre de X [27] et on le note aussi par $\mathcal{F}(X)$.

Théorème 3.2.5 [41] *Soit* X *un espace métrique pointé.*
L'application $\delta_X : X \to$ *Æ*(X) *définie par*

$$\delta_X(x) = m_{xe}, \quad pour\ x \in X,$$

est une isométrie de X *dans* *Æ*(X).

Théorème 3.2.6 [41] *Soit X un espace métrique pointé. Alors*

$$Æ(X)^* = \mathrm{Lip}_0(X).$$

Cette identification se fait grâce à une isométrie linéaire J définie sur $\mathrm{Lip}_0(X)$ à valeurs dans $Æ(X)^*$ pour $f \in \mathrm{Lip}_0(X)$, $J(f)$ est définie par

$$J(f)(m) = \sum_{x \in X} m(x) f(x), \quad f \in \mathrm{Lip}_0(X).$$

L'espace $\mathrm{Lip}_0(X)$ étant le dual de $Æ(X)$, il est muni d'une topologie faible-*. Sur les bornés de $\mathrm{Lip}_0(X)$, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence simple.

Théorème 3.2.7 [19]
Soient X un espace métrique pointé, Y un espace de Banach et $T : X \to Y$ une application lipschitzienne qui préserve le point de base (i.e., $T(e) = 0$). Alors il existe un unique opérateur linéaire borné $T_L : Æ(X) \to Y$ tel que

$$T = T_L \delta_X.$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\delta_X"'] & & Y \\
& Æ(X) \arrow[ur, "T_L"'] &
\end{tikzcd}$$

*et $\|T_L\| = \mathrm{Lip}(T)$. L'opérateur T_L est appelé **linéarisation** de T.*

On définit un autre opérateur adjoint qui est appellé adjoint d'opérateur Lipschitz.

Définition 3.2.8 *Soient X et Y deux espaces métriques pointés, Sawashima [39] a défini l'adjoint lipschitzien $T^\sharp : Y^\sharp \to X^\sharp$ d'une application lipschitzienne $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ par la formule*

$$\begin{array}{lll} T^\sharp : & Y^\sharp & \to X^\sharp \\ & g & \mapsto T^\sharp g = gT \quad \big(i.e., < T(x), g > = < x, T^\sharp(g) > \big). \end{array}$$

Soit $T \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$. L'opérateur $T^\sharp$ est linéaire et $\|T^\sharp\| = \mathrm{Lip}(T)$.

3.3 Opérateurs Lipschitz $p-$sommants

La notion des opérateurs Lipschitz $p-$sommants a été introduite en 2009 par J.D Farmer et W.B Johnson dans leurs article [20]. Cette notion est une version non linéaire des opérateurs $p-$sommants et le théorème de domination, on verra aussi que, $T : X \to Y$ est un opérateur Lipschitz avec X un espace métrique pointé. Pour plus de détails voir [11] et [20].

Définition 3.3.1 [20] *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $T : X \to Y$ un opérateur Lipschitz. On dit que T est un opérateur Lipschitz $p-$sommant pour $1 \leq p < \infty$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ dans X et pour tous réels positifs a_i, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i d_Y(Tx_i, Ty_i)^p \leq C^p \sup_{f\in B_{X^\sharp}} \sum_{i=1}^{n} a_i |f(x_i) - f(y_i)|^p. \tag{3.2}$$

Si on pose $a_i = 1$ en raison de la densité des nombres, la définition est la même. On note $\Pi_p^L(X, Y)$ l'espace des opérateurs Lipschitz $p-$sommants de X dans Y muni de la norme $\pi_p^L(.)$ telle que

$$\pi_p^L(T) = \inf\{C \text{ vérifie } (3.2)\}.$$

Théorème 3.3.2 (Le théoréme de domination /factorisation de Pietsch) [20]
Soit $T : X \to Y$ un opérateur Lipschitz entre deux espaces métriques et $C \geq 0$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\pi_p^L(T) \leq C$ (L'opérateur T est Lipschitz p-sommant).

ii) Il existe une mesure de probabilité μ sur $B_{X^\sharp}$ telle que

$$d_Y(Tx, Ty)^p \leq C^p \int_{B_{X^\sharp}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f), \ \forall x, y \in X$$

(Domination de Pietsch).

iii) Pour toute isométrie J de Y dans un espace injectif Z, on a la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\quad i_p \quad} & L_p(\mu) \\ A\Big\uparrow & & \Big\downarrow B \\ X & \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{J} & Z \end{array}$$

avec $\mathrm{Lip}(A).\mathrm{Lip}(B) \leq C$ *(Factorisation de Pietsch).*

Le théorème de domination pour les opérateurs Lipschitz $p-$sommants donne le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 *Soit* $1 \leq p \leq q < \infty$. *Si* $T : X \to Y$ *est Lipschitz* $p-$*sommant, alors* T *est Lipschitz q-sommant, et*

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T).$$

Proposition 3.3.4 (Propriété d'idéal des opérateurs Lipschitz $p-$sommants) *Soient* $S : X \to Y$ *un opérateur Lipschitz p-sommant,* $R : Y \to Y_0$ *et* $T : X_0 \to X$ *deux applications lipschitziennes, alors* $RST : X_0 \to Y_0$ *est Lipschitz p-sommant et on a,*

$$\pi_p^L(RST) \leq Lip(R)\pi_p^L(S)Lip(T).$$

Preuve. D'après la proposition 3.2.2 on a : $RST \in Lip(X_0, Y_0)$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n d_{Y_0}(RST(x_i), RST(y_i))^p &\leq \mathrm{Lip}(R)^p \sum_{i=1}^n d_Y(ST(x_i), ST(y_i))^p \\
&\leq \mathrm{Lip}(R)^p \pi_p^L(S)^p \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \sum_{i=1}^n |f(T(x_i)) - f(T(y_i))|^p \\
&\leq \mathrm{Lip}(R)^p \pi_p^L(S)^p \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \mathrm{Lip}(fT)^p \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(T(x_i)) - f(T(y_i))}{\mathrm{Lip}(fT)} \right|^p \\
&\leq \mathrm{Lip}(R)^p \pi_p^L(S)^p \sup_{f \in B_{X^\sharp}} \mathrm{Lip}(f)^p \mathrm{Lip}(T)^p \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(T(x_i)) - f(T(y_i))}{\mathrm{Lip}(fT)} \right|^p \\
&\leq \mathrm{Lip}(R)^p \pi_p^L(S)^p \mathrm{Lip}(T)^p \sup_{g \in B_{X_0^\sharp}} \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(y_i)|^p.
\end{aligned}$$

Donc, RST est Lipschitz $p-$sommant, et

$$\pi_p^L(RST) \leq \mathrm{Lip}(R) \cdot \pi_p^L(S) \cdot \mathrm{Lip}(T).$$

■

Pour un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, il est clair que $\pi_p^L(T) \leq \pi_p(T)$. J. D. Farmer et W. B. Johnson ont prouvé que l'égalité inverse était vraie. Cela justifie que la notion d' opérateur Lipschitz $p-$sommant est vraiment une généralisation du concept d'opérateur linéaire $p-$sommant.

Proposition 3.3.5 *Supposons que* $1 \leq p < \infty$. *Soit* $T : X \to Y$ *un opérateur linéaire entre les espaces de Banach* X *et* Y. *Alors,* T *est p-sommant si et seulement si* T *est Lipschitz p-sommant et*

$$\pi_p^L(T) = \pi_p(T).$$

3.4 Opérateurs Lipschitz $p-$nucléaires

Les opérateurs Lipschitz $p-$nucléaires et fortement Lipschitz $p-$nucléaires sont introduits par D. Chen et B. Zeng dans [12].

Définition 3.4.1 *Soient* X *un espace métrique et* Y *un espace de Banach. On dit qu'un opérateur Lipschitz* $T : X \to Y$ *est* ***Lipschitz p-nucléaire*** $(1 \leq p \leq \infty)$ *s'ils existent des opérateurs* $A \in \mathrm{Lip}(\ell_p, Y)$, $B \in \mathrm{Lip}(X, \ell_\infty)$ *et une suite* $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$ *tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd}$$

On note par $\mathcal{N}_p^L(X, Y)$ *l'espace des opérateurs Lipschitz* $p-$*nucléaires de* X *dans* Y *muni de la norme*

$$\nu_p^L(u) = \inf \mathrm{Lip}(A) \cdot \|M_\lambda\| \cdot \mathrm{Lip}(B).$$

Le théorème suivant montre que sous certaines conditions, la norme Lipschitz $p-$nucléaire d'une application lipschitzienne coïncide avec sa norme $p-$nucléaire. La technique de différentiation est utilisée dans cette preuve. Pour les définitions de différentiabilité au sens de Gâteaux et différentiabilité ω^*- au sens de Gâteaux [7].

Théorème 3.4.2 (Relation avec les opérateurs linéaires $p-$nucléaires) *Soit* T *un opérateur linéaire borné de l'espace de Banach séparable* X *dans l'espace dual* Y. *Alors,* $\nu_p^L(T) = \nu_p(T)$, $(1 \leq p < \infty)$.

Preuve. Considérons la factorisation d'un opérateur Lipschitz $p-$nucléaire :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ B\Big\downarrow & & \Big\uparrow A \\ \ell_\infty & \xrightarrow{\quad M_\lambda \quad} & \ell_p \end{array}$$

D'après le théorème 3.1.4 $B : X \to \ell_\infty$ est différentiable ω^*-Gâteaux en dehors de l'ensemble Gauss nul. On prend $x_0 \in X$. Alors,

$$D_B^*(x_0)(x) = \omega^* - \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{B(x_0 + tx) - B(x_0)}{t}$$

existe pour tout $x \in X$. De plus, c'est un opérateur linéaire et borné dans x. Comme X est séparable, il s'en suit de proposition 3.1.8 que $M_\lambda B : X \to \ell_p$ est différentiable ω^*-Gâteaux en dehors de l'ensemble Aronszajn nul. Il est connu que, voir(proposition 3.1.5, 3.1.6, théorème 3.1.7) les ensembles Gauss nuls coïncident avec les ensembles Aronszajn nuls. Depuis $M_\lambda : \ell_\infty \to \ell_p$ est faible-* à faible continu, on a

$$M_\lambda D_B^* B(x_0) = D_{M_\lambda B}(x_0),\ x_0 \in X \setminus G, G \text{ est un ensemble Gauss nul dans } X.$$

Par translation, on suppose que $x_0 = 0$ et $B(0) = 0$, tel que $M_\lambda D_B^*(0) = D_{M_\lambda B}(0)$.

Ensuite, on montre que B peut être remplace par $D_B^*(0)$ en construisant une application lipschitzienne $\tilde{B} : \ell_p \to Y$ tel que

$$T = \tilde{B} M_\lambda D_B^*(0) \ et \ \mathrm{Lip}(\tilde{B}) \leq \mathrm{Lip}(A).$$

En effet, on définit, pour tout n,

$$B_n : \ell_p \to Y \text{ par } \xi \mapsto nA(\xi/n), \qquad \text{pour tout } \xi \in \ell_p,$$

Alors, $\mathrm{Lip}(B_n) = \mathrm{Lip}(A)$ et, pour tout $x \in X$, on a

$$\|Tx - B_n M_\lambda D_B^*(0)(x)\| \leq \mathrm{Lip}(A) \|n M_\lambda B\left(\frac{x}{n}\right) - D_{M_\lambda B}(0)(x)\| \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Depuis $\{B_n(\xi)\}_{n=1}^\infty$ dans Y et Y est l'espace dual, la limite faible-* de $B_n(\xi)$ pendant a travers via un ultrafiltre fixé $\mathcal{U}$ des nombres naturels existe pour tout $\xi \in \ell_p$. Alors, on pose

$$\tilde{B}(\xi) = \omega^* - \lim_{\mathcal{U}} B_n(\xi) \qquad \text{pour tout } \xi \in \ell_p.$$

Ainsi

$$T = \tilde{B}M_\lambda D_B^*(0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Lip}(\tilde{B}) \leq \mathrm{Lip}(A).$$

Finalement, comme $\tilde{B}|_{M_\lambda D_B^*(0)(X)}$ est linéaire et Y est 1-complémentaire dans Y^{**} . Le théorème 7.2 de [7] montre qu'il existe un opérateur linéaire $\tilde{A} : \ell_p \to Y$ tel que

$$T = \tilde{A}|_{M_\lambda D_B^*(0)(X)} = \tilde{B}|_{M_\lambda D_B^*(0)(X)} = T \qquad et \qquad \|\tilde{A}\| \leq \mathrm{Lip}(\tilde{B}).$$

Donc

$$T = \tilde{A}M_\lambda D_B^*(0) \qquad \text{et} \qquad \nu_p(T) \leq \nu_p^L(T).$$

Il résulte que,

$$\nu_p(T) = \nu_p^L(T).$$

■

Définition 3.4.3 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur Lipschitz de l'espace métrique pointé X dans un espace de Banach Y. On dit que T est* ***Lipschitz fortement p-nucléaire*** *si T peut s'écrire sous la forme*

$$T = \sum_n f_n \otimes y_n$$

où $(f_n)_n \subset X^\sharp$ et $(y_n)_n \subset Y$ satisfont $N_p^L((x_n^*), (y_n)_n) < \infty$, tels que

$$\begin{array}{lll} N_p^L\left((f_n)_n, (y_n)_n\right) & = & \left(\mathrm{Lip}(f_n)\right)\left(\sup_n \|y_n\|\right), \qquad p = 1 \\ N_p^L\left((f_n)_n, (y_n)_n\right) & = & \left(\sum_n \mathrm{Lip}(f_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^* \in B_Y^*} \left(\sum_n | < y^*, y_n > |^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}, \qquad 1 < p < \infty \\ N_p^L\left((f_n)_n, (y_n)_n\right) & = & \left(\sup_n \mathrm{Lip}(f_n)\right) \sup_{y^* \in B_Y^*} \left(\sum_n | < y^*, y_n > |\right), \qquad \lim_n \mathrm{Lip}(f_n) = 0, \quad p = \infty \end{array}$$

Munissons l'espace des opérateurs fortement Lipschitz $p-$nucléaires de la norme suivante

$$s\nu_p^L(T) := \inf N_p^L((f_n)_n, (y_n)_n).$$

l'infimum a était pris sur toutes les représentations de T ci-dessus.

Le théorème suivant est le résultat de factorisation pour les opérateurs Lipschitz $p-$nucléaires.

Théorème 3.4.4 *Soient $1 \leq p \leq \infty$, X un espace métrique pointé et Y un espace de Banach. Une application lipschitzienne $T : X \to Y$ est **fortement Lipschitz p-nucléaire** si et seulement si T admet la factorisation $T = AM_\lambda B$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif,*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad T \quad} & Y \\ B \big\downarrow & & \big\uparrow A \\ \ell_\infty & \xrightarrow{\quad M_\lambda \quad} & \ell_p(c_0, p=\infty) \end{array}$$

où $B \in \mathrm{Lip}(X, \ell_\infty)$, $A \in \mathcal{L}(\ell_p, Y)$ $(\mathcal{L}(c_0, Y), p = \infty)$ et $M_\lambda \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_p)(\mathcal{L}(\ell_\infty, c_0)$, si $p = \infty)$. De plus,

$$s\nu_p^L(T) = \inf \|A\|.\|M_\lambda\|.\mathrm{Lip}(B),$$

l'infimum a était pris sur toutes les factorisations ci-dessus.

Preuve. On suppose que T est fortement Lipschitz $p-$nucléaire donc il existe des suites $(f_n)_n \subset X^\sharp$ et $(y_n)_n \subset Y$ telles que $T = \sum\limits_n f_n \otimes y_n$. Soient

$$\begin{aligned} B : &\quad X \to \ell_\infty, & x &\mapsto \left(\frac{f_n(x)}{\mathrm{Lip}(f_n)}\right)_n, \\ M_\lambda : &\quad \ell_\infty \to \ell_p(c_0, p=\infty), & (t_n)_n &\mapsto (\mathrm{Lip}(f_n)t_n)_n, \qquad \lambda = (\mathrm{Lip}(f_n))_n \\ A : &\quad \ell_p(c_0, p=\infty) \to Y, & (s_n)_n &\mapsto \sum_n s_n y_n. \end{aligned}$$

Alors B est une application lipschitzienne de X dans ℓ_∞ avec

$B(0) = 0, \qquad \mathrm{Lip}(B) \leq 1,$ et $\qquad \|M_\lambda\| = \left(\sum\limits_n \mathrm{Lip}(f_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < \infty).$

Pour $p = 1$, on a

$$\|A((s_n)_n)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left|\left\langle y^*, \sum_n s_n y_n \right\rangle\right| \leq \left(\sum_n |s_n|\right)\left(\sup_n \|y_n\|\right),$$

donc

$$\|A\| \leq \sup_n \|y_n\| \qquad \text{pour } p = 1.$$

Pour $1 < p < \infty$, on a

$$\|A((s_n)_n)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left| \left\langle y^*, \sum_n s_n y_n \right\rangle \right| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n \left| \left\langle y^*, y_n \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}},$$

donc

$$\|A\| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n \left| \left\langle y^*, y_n \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \qquad \text{pour} \quad 1 < p < \infty.$$

Pour $p = \infty$, on a

$$\|M_\lambda\| = \sup_n \mathrm{Lip}(f_n), \quad \|A\| \leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n \left| \left\langle y^*, y_n \right\rangle \right|,$$

Donc,

$$T = AM_\lambda B \quad \text{et} \qquad \inf \|A\| \|M_\lambda\| \mathrm{Lip}(B) \leq s\nu_p^L(T).$$

Inversement, si $M_\lambda = \sum_n \delta_n e_n \otimes e_n$ et $\lambda = (\delta_n)_n \in \ell_p(c_0,\ p = \infty)$, alors pour $x \in X$,

$$T(x) = AM_\lambda B(x) = \sum_n \delta_n < B(x), e_n > A(e_n).$$

Soit $f_n = \delta_n < B(.), e_n >$. Alors, $f_n \in X^\sharp$ et $T = \sum_n f_n \otimes A(e_n)$.
Pour $p = 1$, on a

$$\sum_n \mathrm{Lip}(f_n) \leq \mathrm{Lip}(B) \|M_\lambda\| \quad \text{et} \quad \sup_n \|A(e_n)\| \leq \|A\|.$$

Pour $1 < p < \infty$, on a

$$\left(\sum_n \mathrm{Lip}(f_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mathrm{Lip}(B) \|M_\lambda\|$$

et

$$\begin{aligned} \left(\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n \left| \left\langle y^*, A(e_n) \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n \left| \left\langle A^* y^*, e_n \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|A^* y^*\| \\ &= \|A\|. \end{aligned}$$

Pour $p = \infty$, on a

$$\|M_\lambda\| = \sup_n |\delta_n|, \qquad \sup_n \mathrm{Lip}(f_n) \leq \mathrm{Lip}(B) \sup_n |\delta_n|$$

et

$$\lim_n \mathrm{Lip}(f_n) = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n | < y^*, (e_n) > | &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n | < A^* y^*, e_n > | \\
&= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|A^* y^*\| \\
&= \|A\|.
\end{aligned}$$

Donc, pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$N_p^L((f_n)_n, (y_n)_n) \leq \|A\| \|M_\lambda\| \mathrm{Lip}(B).$$

Ce qui implique

$$s\nu_p^L(T) \leq \inf \|A\| \|M_\lambda\| \mathrm{Lip}(B).$$

■

Remarque 3.4.5 *Il résulte du théorème précédent que les opérateurs fortement Lipschitz $p-$nucléaires sont Lipschitz $p-$nucléaires* $(1 \leq p < \infty)$.

En utilisant le résultat du théorème 3.4.4 et les mêmes conditions que celles du théorème 3.4.2, on va montrer que, si le domaine est séparable, alors la norme d'un opérateur Lipschitz fortement $p-$nucléaire est égale à la norme d'un opérateur linéaire $p-$nucléaire.

Théorème 3.4.6 *Soit T un opérateur linéaire borné de X espace de Banach séparable, dans un espace dual Y. Alors pour $1 \leq p < \infty$*

$$s\nu_p^L(T) = \nu_p(T).$$

Théorème 3.4.7 (Propriété d'idéal) *. Soit $1 \leq p \leq \infty$.*
Si $R \in \mathrm{Lip}(Y, Y_0)$, $S \in \mathcal{N}_p^L(X, Y)$ et $T \in \mathrm{Lip}(X_0, X)$. Alors,

$$RST \in \mathcal{N}_p^L(X_0, Y_0) \quad \text{et } \nu_p^L(RST) \leq \mathrm{Lip}(R) \nu_p^L(S) \mathrm{Lip}(T).$$

Preuve. Soit $S \in \mathcal{N}_p^L(X;Y)$, alors il existe $A \in \mathrm{Lip}(\ell_p, Y)$, $B \in \mathrm{Lip}(X, \ell_\infty)$, tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "B"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd}$$

On note que RST se factorise à la manière suivante

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "BT"'] & X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "B"] & Y \arrow[r, "R"] & Y_0 \\ & \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "RA"'] & \end{tikzcd}$$

donc $RST = RAM_\lambda BT$ par proposition 3.2.2 $BT \in \mathrm{Lip}(X_0, \ell_\infty)$ et $RA \in \mathrm{Lip}(\ell_p, Y_0)$ Ce qui implique $RST \in \mathcal{N}_p^L(X_0, Y_0)$, on a

$$\begin{aligned} \nu_p^L(RST) &\leq \mathrm{Lip}(RA)\|M_\lambda\|\mathrm{Lip}(BT), \\ &\leq \mathrm{Lip}(R)\mathrm{Lip}(A)\|M_\lambda\|\mathrm{Lip}(B)\mathrm{Lip}(T), \end{aligned}$$

d'où

$$\nu_p^L(RST) \leq \mathrm{Lip}(R)\nu_p^L(S)\mathrm{Lip}(T).$$

■

Théorème 3.4.8 (Théorème d'inclusion) . *Si $1 \leq p < q < \infty$. Alors,*

$$\mathcal{N}_p^L(X, Y) \subset \mathcal{N}_q^L(X, Y).$$

De plus,

$$\nu_q^L(T) \leq \nu_p^L(T) \quad \textit{pour tout} \quad T \in \mathcal{N}_p^L(X, Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{N}_p^L(X, Y)$, alors il existe $A \in \mathrm{Lip}(\ell_p, Y)$, $B \in \mathrm{Lip}(X, \ell_\infty)$ et $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd}$$

Notons que M_λ peut être obtenu en composant M_β avec M_α tels que
M_β et M_α sont opérateurs de multiplication avec

$$\alpha_n = |\lambda_n|^{1-(q/p)} \text{ et } \beta_n = (sign\lambda_n)|\lambda_n|^{(q/p)},$$

donc $M_\lambda = M_\alpha \circ M_\beta$. Alors, on obtient le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "B"'] & & Y \\ \ell_\infty \arrow[rr, "M_\lambda"] \arrow[dr, "M_\beta"'] & & \ell_p \arrow[u, "A"'] \\ & \ell_q \arrow[ur, "M_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\beta"] & \ell_q \arrow[u, "\tilde{A}"'] \end{tikzcd}$$

avec $\tilde{A} = AM_\alpha$
Ce qui implique $T \in \mathcal{N}_q^L(X, Y)$ et

$$\begin{aligned} \nu_q^L(T) &\leq \operatorname{Lip}(\tilde{A})\|M_\beta\|\operatorname{Lip}(B) \\ &\leq \operatorname{Lip}(A)\|M_\alpha\|\|M_\beta\|\operatorname{Lip}(B) \\ &= \operatorname{Lip}(A)\|M_\lambda\|\operatorname{Lip}(B). \end{aligned}$$

D'où

$$\nu_q^L(T) \leq \nu_p^L(T).$$

■

Proposition 3.4.9 [38] *Soit* $1 \leq p < \infty$.
L'opérateur Lipschitz $T : X \to Y$ *est fortement Lipschitz p-nucléaire si et seulement si sa linéarisation* T_L *est p-nucléaire.*

Preuve. Soit T un opérateur fortement Lipschitz $p-$nucléaire, on a

$$T = AM_\lambda B.$$

Nous utilisons la factorisation Lipschitz de T et B

$$T_L \delta_X = AM_\lambda B_L \delta_X$$

Par l'unicité de la linéarisation, nous obtenons

$$T_L = AM_\lambda B_L.$$

Par conséquent, T_L est $p-$nucléaire. L'inverse est immédiat. ■

3.5 Opérateurs Lipschitz $p-$intégraux

On commence cette section par les définitions des opérateurs Lipschitz $p-$intégraux et fortement Lipschitz $p-$intégraux.

Farmer et Johnson dans leurs article [20] ont introduit la définition suivante :

Définition 3.5.1 *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, X *espace métrique et* Y *espace métrique pointé.*
On dit que $T : X \to Y$ *est un opérateur Lipschitz p-intégral, s'il existe un espace mesuré de probabilité* (Ω, Σ, μ) *et deux opérateurs Lipschitz* $A : L_p(\mu) \to (Y^\sharp)^*$ *et* $B : X \to L_\infty(\mu)$ *tels que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & Y \arrow[r, "K_Y"] & (Y^\sharp)^* \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"']
\end{tikzcd}$$

où $K_Y : Y \to (Y^\sharp)^*$ *est l'application canonique.*
Nous noterons $\mathcal{I}_p^L(X,Y)$ *l'espace des opérateurs Lipschitz p-intégraux de* X *dans* Y *avec la norme*

$$\iota_p^L(T) = \inf \mathrm{Lip}(A).\mathrm{Lip}(B).$$

Quand Y est un espace normé, on peut remplacer K_Y par l'injection canonique k_Y de Y dans Y^{**} dans la définition précédente sans changer la norme Lipschitz $p-$intégrale parce que Y^{**} est 1- complémentaire dans $(Y^\sharp)^*$ [28].

Quand X et Y sont des espaces de Banach, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.5.2 [31] *Soit $1 \leq p < \infty$. Si $T : X \to Y$ un opérateur linéaire p-intégral entre deux espaces de Banach. Alors, T est un opérateur Lipschitz p-intégral et on a*

$$\iota_p^L(T) \leq \iota_p(T).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{I}_p(X, Y)$, alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"']
\end{tikzcd}$$

avec

$$\iota_p(T) = \inf \|A\|.\|B\|.$$

Puisque Y^{**} est 1-complémentaire dans $(Y^\sharp)^*$ [28] par une projection P. Alors on a la factorisation

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \arrow[r, "P|_{Y^{**}}"] & (Y^\sharp)^* \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "\tilde{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $P|_{Y^{**}} = id_{Y^{**}}$.

Le diagramme ci-dessus devient

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"] & Y \arrow[r, "K_Y"] & (Y^\sharp)^* \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "\tilde{A}"]
\end{tikzcd}$$

avec $\tilde{A} = P|_{Y^{**}}A$ et $J = P|_{Y^{**}}K_Y$. Donc, T est Lipschitz $p-$intégral, et

$$\begin{aligned}
\iota_p^L(T) &\leq \|B\|.\|\tilde{A}\| \\
&= \|B\|.\|P|_{Y^{**}}A\| \\
&\leq \|B\|.\|P|_{Y^{**}}\|.\|A\| \\
&= \|B\|.\|id_{Y^{**}}\|.\|A\| \\
&= \|B\|.\|A\|.
\end{aligned}$$

en passant à l'infimum, on aura

$$\iota_p^L(T) \leq \inf \|A\|.\|B\| = \iota_p(T).$$

■

Proposition 3.5.3 (Propriété d'idéal dans le cas des opérateurs Lipschitz) .

Soient $S : X \to Y$ un opérateur Lipschitz p-intégral, $T : X_0 \to X$ et $R : Y \to Y_0$ deux applications lipschitziennes entre espaces métriques, alors $RST : X_0 \to Y_0$ est Lipschitz p-intégral et on a,

$$\iota_p^L(RST) \leq \mathrm{Lip}(R) \cdot \iota_p^L(S) \cdot \mathrm{Lip}(T).$$

Preuve. Soit $S \in \mathcal{I}_p^L(X, Y)$, alors il existe $A \in \mathrm{Lip}(L_p, (Y^\sharp)^*)$, $B \in \mathrm{Lip}(X, L_\infty)$, tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "S"] & Y \arrow[r, "K_Y"] & (Y^\sharp)^* \\
L_\infty(\mu) \arrow[u, "B"] \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"']
\end{tikzcd}$$

On note que RST se factorise de la manière suivante

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y_0 \arrow[dr, "K_{Y_0}"] & \\
X_0 \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "BT"'] & X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "B"] & Y \arrow[ur, "R"] \arrow[r, "K_Y"] & (Y^\sharp)^* \arrow[r, "(R^\sharp)^*"] & (Y_0^\sharp)^* \\
 & L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "(R^\sharp)^*A"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $K_{Y_0}R = (R^\sharp)^* K_Y$, on a

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & \xrightarrow{RST} Y_0 \xrightarrow{K_{Y_0}} & (Y_0^\sharp)^* \\
\tilde{B}\Big\downarrow & & \Big\uparrow\tilde{A} \\
L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\quad i_p \quad} & L_p(\mu)
\end{array}$$

avec $\tilde{A} = (R^\sharp)^* A$ et $\tilde{B} = BT$.
ce qui implique que $RST \in \mathcal{I}_p^L(X_0, Y_0)$. et

$$\begin{aligned}
\iota_p^L(RST) &\leq \mathrm{Lip}(\tilde{A}) \cdot \mathrm{Lip}(\tilde{B}) \\
&= \mathrm{Lip}((R^\sharp)^* A) \cdot \mathrm{Lip}(BT) \\
&\leq \mathrm{Lip}(A) \cdot \|(R^\sharp)^*\| \cdot \mathrm{Lip}(T) \cdot \mathrm{Lip}(B) \\
&= \mathrm{Lip}(A) \cdot \mathrm{Lip}(R) \cdot \mathrm{Lip}(T) \cdot \mathrm{Lip}(B).
\end{aligned}$$

En prenant l'infimum, on trouve

$$\begin{aligned}
\iota_p^L(RST) &\leq \inf \mathrm{Lip}(A) \cdot \mathrm{Lip}(B) \cdot \mathrm{Lip}(R) \cdot \mathrm{Lip}(T)) \\
&= \mathrm{Lip}(R) \cdot \iota_p^L(S) \cdot \mathrm{Lip}(T).
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.5.4 *Soit* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
Si T *est Lipschitz* p*-intégral, alors* T *est Lipschitz* q*-intégral et*

$$\iota_q^L(T) \leq \iota_p^L(T).$$

Preuve. On suppose que $T : X \to Y$ est Lipschitz $p-$intégral, alors il admet la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{K_Y} & (Y^\sharp)^* \\
B\Big\downarrow & & \Big\uparrow A \\
L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\quad i_p \quad} & L_p(\mu)
\end{array}$$

Avec $\iota_p^L(T) = \inf\left(\mathrm{Lip}(A) \cdot \mathrm{Lip}(B)\right)$.

donc T est Lipschitz $q-$intégral et

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"] & Y \arrow[r, "K_Y"] & (Y^\sharp)^* \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] \arrow[dr, "i_q"'] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"'] \\
& L_q(\mu) \arrow[ur, "i_{q,p}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce qui implique $T \in \mathcal{I}_q^L(X,Y)$ et

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{K_Y} & (Y^\sharp)^* \\
B\Big\downarrow & & & & \Big\uparrow\tilde{A} \\
L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{\quad i_q \quad} & & L_q(\mu)
\end{array}$$

avec $\tilde{A} = Ai_{q,p}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\iota_q^L(T) \leq \mathrm{Lip}(\tilde{A}) \cdot \mathrm{Lip}(B) &= \mathrm{Lip}(Ai_{q,p}) \cdot \mathrm{Lip}(B), \\
&\leq \mathrm{Lip}(A) \cdot \mathrm{Lip}(B) \cdot \pi^L(i_{q,p}), \\
&\leq \mathrm{Lip}(A) \cdot \mathrm{Lip}(B),
\end{aligned}$$

et

$$\iota_q^L(T) \leq \inf \{\mathrm{Lip}(A) \cdot \mathrm{Lip}(B)\} = \iota_p^L(T).$$

■

D. Chen, B. Zheng ont introduit les notions des opérateurs fortement Lipschitz $p-$intégraux.

Définition 3.5.5 *On dit qu'une application Lipschitzienne $T : X \to Y$ enter deux espaces de Banach est* ***un opérateur fortement Lipschitz p-intégral*** $(1 \leq p \leq \infty)$*, s'il existe un espace mesuré de probabilité (Ω, Σ, μ) et un opérateur Lipschitz $A : L_p(\mu) \to Y^{**}$ et un opérateur borné linéaire $B : X \to L_\infty(\mu)$ tels que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{k_Y} & Y^{**} \\
B\Big\downarrow & & & & \Big\uparrow A \\
L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{\quad i_p \quad} & & L_p(\mu)
\end{array}$$

On définit la norme Lipschitz fortement p-intégrale

$$s\iota_p^L(T) = \inf \operatorname{Lip}(A) \cdot \|B\|.$$

Ils ont donné une caractérisation des opérateurs fortement Lipschitz $p-$intégraux dont la preuve est similaire à celle du cas linéaire.

Théorème 3.5.6 *Soient $1 \leq p \leq \infty$, une application lipschitzienne $T : X \to Y$. Alors, T est **fortement Lipschitz p-intégral** si et seulement si on prend toujours un sous-ensemble normé faible-* compact K de B_{X^*}, il existe une mesure de probabilité régulière μ sur K et une application lipschitzienne $\tilde{T} : L_p(\mu) \to Y^{**}$ telles que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} Y & \xrightarrow{k_Y} & Y^{**} \\ i_X \Big\downarrow & & & \Big\uparrow \tilde{T} \\ C(K) & & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

où j_p et i_X sont des applications canoniques. Dans ce cas,

$$s\iota_p^L(T) = \inf \operatorname{Lip}(\tilde{T}).$$

l'infimum, est pris sur tous les μ et les $\tilde{T}$ possibles.

Avec le même argument que celui de la proposition 3.4.9, nous pouvons prouver ce qui suit :

Proposition 3.5.7 [38] *Soit $1 \leq p < \infty$. L'opérateur Lipschitz $T : X \to Y$ est fortement Lipschitz p-intégral si et seulement si sa linéarisation T_L est p-intégral.*

3.6 Relations entre les espaces $\mathcal{N}_p^L(X,Y)$, $\mathcal{I}_p^L(X,Y)$ et $\Pi_p^L(X,Y)$

Dans cette section, on va étudier les relations entre les espaces indiqués.

Proposition 3.6.1 *Soient X espace métrique et Y espace de Banach. Alors pour $1 \leq p < \infty$.*

i) $\mathcal{N}_p^L(X,Y) \subset \mathcal{I}_p^L(X,Y)$ avec $\iota_p^L(T) \leq \nu_p^L(T)$, pour tout $T \in \mathcal{N}_p^L(X,Y)$.

ii) $\mathcal{I}_p^L(X,Y) \subset \Pi_p^L(X,Y)$ avec $\pi_p^L(T) \leq \iota_p^L(T)$, pour tout $T \in \mathcal{I}_p^L(X,Y)$.

Preuve.

i) Soit $T \in \mathcal{N}_p^L(X,Y)$, on a

$$T = AM_\lambda B : \; X \xrightarrow{B} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} Y.$$

On sait que M_λ est un opérateur linéaire strictement $p-$intégral (voir l'exemple 2.2.3), donc

$$M_\lambda = ai_pb : \; \ell_\infty \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu) \xrightarrow{a} \ell_p,$$

telle que μ est une mesure de probabilité, $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), \ell_p)$ et $b \in \mathcal{L}(\ell_\infty, L_\infty(\mu))$, de plus

$$\|M_\lambda\| = \inf \|a\|\|b\|.$$

par suite, on obtient

$$K_Y T = k_Y A a i_p b B : \; X \xrightarrow{B} \ell_\infty \xrightarrow{b} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu) \xrightarrow{a} \ell_p \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{k_Y} Y^{**}.$$

Donc, $T \in \mathcal{I}_p^L(X,Y)$ et

$$\begin{aligned} \iota_p^L(T) &\leq \mathrm{Lip}(Aa)\mathrm{Lip}(Bb) \\ &\leq \mathrm{Lip}(A)\|a\|\|b\|\mathrm{Lip}(B) \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat en passant à l 'infimum,

$$\iota_p^L(T) \leq \mathrm{Lip}(A)\|M_\lambda\|\mathrm{Lip}(B).$$

D'où

$$\iota_p^L(T) \leq \nu_p^L(T).$$

ii) De la même façon, on peut démontrer la deuxième assertion.

■

D. Chen, B. Zheng dans leur article [12] ont prouvé, si que le domaine est un espace métrique fini, alors la norme d'un opérateur Lipschitz $p-$nucléaire est égale à la norme d'un opérateur Lipschitz $p-$intégrale.

Théorème 3.6.2 *Soient X un espace métrique fini et Y un espace de Banach. Alors, pour tout $1 \leq p < \infty$ et toute application $T : X \to Y$, on a*

(a) $\nu_p^L(T) = \iota_p^L(T)$
(b) $\nu_p^L(T) = \iota_p^L(T) \leq C.(\log|X|)^2 \cdot \mathrm{Lip}(T)$*, où* C *est une constante absolue.*

Preuve. (a) On considère un opérateur T $p-$intégral, tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"] & & L_p(\mu) \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd}$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un sous-espace de dimension finie E de $L_\infty(\mu)$, de dimension finie N, avec un isomorphisme $v : E \to \ell_\infty^N$ tel que

$$\|v\|\|v^{-1}\| \leq 1 + \epsilon \text{ et } B(X) \subseteq E$$

De plus, $i_p(E)$ est contenu dans un sous-espace $(1+\varepsilon)$-complémentaire F de $L_p(\mu)$. Soit $J : F \to L_p(\mu)$ l'injection canonique correspondant et $P : L_p(\mu) \to F$ la projection correspondante avec $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$. Le principe de réflexivité locale assure l'existence d'un opérateur linéaire $W : \overline{vect}\{Ai_pB(X)\} \to Y$ tel que
$\|W\| \leq 1 + \varepsilon$ et $W|_{\overline{vect}\{Ai_pB(X)\} \cap k_Y(Y)} = id_{k_Y(Y)}$.
Ainsi,
$k_Y T = W k_Y T$.
On considère $\tilde{u} = Pi_p|_E v^{-1} : \ell_\infty^N \to F$.
Alors $\tilde{u}$ est $p-$sommant et donc $p-$intégral et

$$\begin{aligned} \pi_p(\tilde{u}) &= \iota_p(\tilde{u}) \\ &= \nu_p(\tilde{u}) \\ &\leq \|P\|\iota_p(i_p)\|v^{-1}\| \\ &\leq (1+\varepsilon)\|v^{-1}\|. \end{aligned}$$

On note que

$$k_Y T = W k_Y T = W A i_p B = W A J \tilde{u} v B.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\nu_p^L(T) &= \nu_p^L(k_Y T) \\
&= \nu_p^L(WAJ\tilde{u}vB) \\
&\le \nu_p^L(WAJ)\nu_p(\tilde{u})\mathrm{Lip}(vB) \\
&\le (1+\varepsilon)^3 \mathrm{Lip}(A)\mathrm{Lip}(B).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nu_p^L(T) = \iota_p^L(T).$$

(b) Il s'ensuit du théorème de factorisation de Farmer et Johnson [20]

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
i(X) \arrow[r, "\tilde{j}_p"] \arrow[d, hook] & S_p \arrow[u, "\tilde{u}"'] \arrow[d, hook] \\
C(B_{X^*}) \arrow[r, "j_p"] & L_p(\mu)
\end{tikzcd}$$

où $\qquad T = \tilde{u} j_p i_X$ et $\qquad \pi_p^L(T) = \mathrm{Lip}(\tilde{u})$.

Il s'ensuit du théorème 1 de [26] qu'il existe $\widehat{u} : L_p(\mu) \to Y$ tel que

$$\widehat{u}|_{S_p} = \tilde{u} \ et \qquad \mathrm{Lip}(\widehat{u}) \le (C_1. \log |X|)\mathrm{Lip}(\tilde{u}),$$

où C_1 est une constante absolue. On note que,

$$j_p = i_p j_\infty : C(K) \xrightarrow{j_\infty} L_\infty(\mu) \xrightarrow{i_p} L_p(\mu).$$

Soit $b = j_\infty i_X$. Alors,

$$T = \tilde{u} j_p i_X = \widehat{u} i_p b.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\nu_p^L(T) &= \iota_p^L(T) \\
&\le \mathrm{Lip}(b)\mathrm{Lip}(\widehat{u}) \\
&\le (C_1 \log |X|)\pi_p^L(T).
\end{aligned}$$

Enfin, comme cela a été mentionné dans ,[20] Bourgain [8] a vraiment prouvé que

$$\pi_p^L(id_X) = \pi_1^L(id_X) \leq (C_2 \log |X|),$$

Où C_2 est une constante absolue. Il résulte de la propriété idéale des opérateurs Lipschitz $p-$sommants que

$$\pi_p^L(T) = \pi_p^L(Tid_X) \leq (C_2 \log |X|)\mathrm{Lip}(T).$$

Cela implique que

$$\nu_p^L(T) = \iota_p^L(T) \leq C_1 C_2 (\log |X|)^2 \mathrm{Lip}(T).$$

■

Comme dans le cas linéaire, K. Saadi a donné un résultat[38] de factorisation des opérateurs fortement Lipschitz $p-$nucléaires. Pour la preuve, il a utilisé les opérateurs de linéarisation et théorème 2.4.3.

Théorème 3.6.3 *Soit $1 \leq p < \infty$. Un opérateur Lipschitz $T : X \to Y$ est fortement Lipschitz p-nucléaire si et seulement s'il existe un espace Banach Z, un opérateur linéaire compact $v : Z \to Y$ et un opérateur fortement Lipschitz p-intégral $L : X \to Z$ tel que*

$$T = vL.$$

Dans ce cas

$$s\nu_p^L(T) = \inf \|v\| s\iota_p^L(L).$$

Preuve. Soit $T : X \to Y$ un opérateur fortement Lipschitz $p-$nucléaire, alors T_L : Æ$(X) \to Y$ est $p-$nucléaire. Le théorème 2.4.3 affirme qu'il existe un espace de Banach Z, un opérateur compact linéaire $v : Z \to Y$ et un opérateur $p-$intégral w : Æ$(X) \to Z$ tel que $T_L = vw$, alors

$$T_L \delta_X = vw\delta_X \Rightarrow T = vS$$

où $S = w\delta_X$ qui est fortement Lipschitz $p-$intégral par proposition 3.5.7.
Inversement, supposons que $T = vS$ où v est un opérateur compact et S est fortement Lipschitz $p-$intégral, alors

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\delta_X"'] & Y \\ \text{Æ}(X) \arrow[r, "S_L"'] & Z \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire $T_L = vS_L$, avec S_L est $p-$intégral.

Ainsi,

$$T_L = vS_L, \text{ est } p-\text{nucléaire, Alors } T \text{ est fortement Lipschitz } p-\text{nucléaire.} \quad \blacksquare$$

Notre contribution dans cette section est le théorème suivant où, nous avons généralisé les théorèmes [2.4.8], [2.4.9] aux opérateurs Lipschitz.

Théorème 3.6.4 *Soient X, Y et Z des espaces de Banach, soient $T \in \mathrm{Lip}(X,Y)$ et $S \in \mathrm{Lip}(Y,Z)$. On suppose que $1 \leq p,q,r \leq \infty$ satisfont $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.*

a) Si S est fortement Lipschitz p-intégral et T est Lipschitz q-sommant, alors ST est fortement Lipschitz r-intégral. avec

$$s\iota_r^L(ST) \leq s\iota_p^L(S).\pi_q^L(T).$$

b) Si S est p-sommant et T est fortement Lipschitz q-intégral, alors ST est fortement Lipschitz r-intégral.

$$s\iota_r^L(ST) \leq \pi_p^L(S).s\iota_q^L(T).$$

Preuve.

a) Soit $S : Y \to Z$ un opérateur fortement Lipschitz $p-$intégral, alors $S_L :\ \text{Æ}(Y) \to Z$ est $p-$intégral, et T un opérateur Lipschitz $q-$sommant alors

$$ST = S_L \delta_Y T = S_L \tilde{T}$$

où $\tilde{T} = \delta_Y T$ est Lipschitz $q-$sommant par la Proposition idéal 3.3.4

comme

$$\tilde{T} = \tilde{T}_L \delta_X \text{ et } \tilde{T}_L \text{ est linéaire } q-\text{sommant}$$

D'après le théorème 2.4.8 on trouve :

$$ST = S_L \tilde{T}_L \delta_X = R\delta_X$$

où R est linéaire $r-$intégral.

Alors ST est fortement Lipschitz $r-$intégral.

b) Soit $S : Y \to Z$ un opérateur linéaire $p-$sommant et T un opérateur Lipschitz fortement $q-$intégral alors $T_L :$ Æ$(X) \to Y$ est $q-$intégral, alors

$$ST = ST_L\delta_X$$

D'après le théorème 2.4.8 on trouve :
ST_L est linéaire $r-$intégral.
Alors ST est fortement Lipschitz $r-$intégral.

■

Théorème 3.6.5 *Soient X espace métrique pointé et Y, Z deux espaces de Banach, soient $T \in \mathrm{Lip}(X,Y)$ et $S \in \mathrm{Lip}(Y,Z)$. On suppose que $1 \leq p,q \leq \infty$ et $\frac{1}{r} = min\{1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\}$.*

a) Si S est fortement Lipschitz p-nucléaire et T est Lipschitz q-sommant, alors ST est fortement Lipschitz r-nucléaire. avec

$$s\nu_r^L(ST) \leq s\nu_p^L(S).\pi_q^L(T).$$

b) Si S est linéaire p-sommant et T est fortement Lipschitz q-nucléaire, alors ST est fortement Lipschitz r-nucléaire.

$$s\nu_r^L(ST) \leq \pi_p^L(S).s\nu_q^L(T).$$

Preuve.

a) Soit $S : Y \to Z$ un opérateur fortement Lipschitz $p-$nucléaire, alors $S_L :$ Æ$(Y) \to Z$ est $p-$nucléaire, et T un opérateur Lipschitz $q-$sommant alors

$$ST = S_L\delta_Y T = S_L\tilde{T}$$

où $\tilde{T} = \delta_Y T$ est Lipschitz $q-$sommant par la Proposition idéal 3.3.4
comme

$\tilde{T} = \tilde{T}_L\delta_X$ et $\tilde{T}_L$ est linéaire $q-$sommant

D'après le théorème 2.4.9 on trouve :

$ST = S_L\tilde{T}_L\delta_X = R\delta_X$

où R est linéaire $r-$nucléaire.
Alors ST est fortement Lipschitz $r-$nucléaire.

b) Soit $S : Y \to Z$ un opérateur linéaire $p-$sommant et T un opérateur Lipschitz fortement $q-$nucléaire alors $T_L :$ Æ$(X) \to Y$ est $q-$nucléaire, donc

$$ST = ST_L\delta_X$$

D'après le théorème 2.4.9 on trouve :

ST_L est linéaire $r-$nucléaire.

Alors ST est fortement Lipschitz $r-$nucléaire.

■

Chapitre 4

Polynômes m-homogènes $p-$nucléaires

4.1 Opérateurs multilinéaires

Commençons par rappeler quelques notions de base et notations. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach, dont les normes sont, respectivement, notées par :

$$\| \cdot \|_1, ..., \| \cdot \|_m, \| \cdot \|_Y.$$

Définition 4.1.1 *Un opérateur U de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y est dit* ***multilinéaire*** *(ou m-linéaire) s'il est linéaire par rapport à chaque composante.*
On noté par $L(X_1, ..., X_m; Y)$ (si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $L(X_1, ..., X_m)$) l'espace des formes m-linéaires. Si $X_1 = \cdots = X_m = X$, on écrit simplement $L(^m X; Y)$.

Définition 4.1.2 *L'opérateur m-linéaire $U : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ est continu s'il est continu comme une fonction entre deux espaces normés*

Proposition 4.1.3 (Multilinéaire continu) .
Soit $U \in L(X_1, ..., X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) L'opérateur U est continu.

(2) L'opérateur U est continu en $(0, ..., 0)$.

(3) Il existe une constante $C > 0$ telle que
$\|U(x_1, ..., x_m)\| \leq C\|x_1\|_1 \times \cdots \times \|x_m\|_m$ *pour tout* $(x_1, ..., x_m)$ *dans* $X_1 \times \cdots \times X_m$.

(4) L'opérateur U est borné.

On pose, alors

$$\begin{aligned}\|U\| &= \sup_{\|x_j\|_{X_j}\leq 1, j=\overline{1,m}} \|U(x_1,...,x_m)\| \\ &= \inf\{C, C \text{ vérifiant l'inégalité ci-dessus}\}.\end{aligned}$$

L'espace des opérateurs m-linéaires continus (ou bornés) de $X_1,...,X_m$ dans Y est un espace de Banach, on le note $\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$. Si $Y=\mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}(X_1,...,X_m)$. Si $X_1=\cdots=X_m=X$, on note simplement $\mathcal{L}(^mX;Y)$.

Définition 4.1.4 (Adjoint d'un opérateur m-linéaire) *l'adjoint d' un opérateur m-linéaire est un opérateur unique linéaire $U^*: Y^* \to \mathcal{L}(X_1,..,X_m)$ défini par*

$$U^*(y^*)(x_1,...,x_m) = y^*U(x_1,...,x_m).$$

Définition 4.1.5 (Opérateur de rang fini) *Un opérateur m-linéaire $U \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ est de rang fini s'il s'écrit comme une somme finie d'opérateurs de la forme*

$$(x_1,\cdots,x_m) \mapsto x_1^*(x_1)x_2^*(x_2)...x_m^*(x_m)y,$$

où $x_i^* \in X_i^*$ $(1 \leq i \leq m)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs m-linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1,...,X_m;Y)$.

4.2 Polynômes m-homogènes

Définition 4.2.1 (Multilinéaire symétrique) *Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $U: X\times \overset{(m)}{\cdots} \times X \to Y$ un opérateur multilinéaire borné, l'opérateur U est dit symétrique s'il est invariant par rapport à toute permutation des variables, i.e.,*

$$U\circ\sigma(x_1,...,x_m) := U(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}) = U(x_1,...,x_m)$$

pour toute permutation σ.

Définition 4.2.2 *Un polynôme $P: X \to Y$ est m-homogène s'il existe un opérateur m-linéaire symétrique unique $U: X\times \overset{(m)}{\cdots} \times X \to Y$ tel que*

$$P(x) = U(x,...,x).$$

On désigne $\mathcal{P}(^mX,Y)$ l'espace de Banach des polynômes homogènes de degré m de X dans Y muni de la norme

$$\begin{aligned}\|P\| &= \sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\}\\ &= \inf\{C : \|P(x)\| \leq C\|x\|^m, x \in X\}\end{aligned}$$

Définition 4.2.3 (Polynôme de rang fini) *Un polynôme $P \in \mathcal{P}(^mX,Y)$ est de rang fini s'il s'écrit comme une somme finie d'opérateurs de la forme*

$$x \mapsto x^*(x)^m y,$$

où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$. L'espace des polynômes m-homogènes de rang fini sera noté $\mathcal{P}_f(^mX,Y)$.

4.3 Produits tensoriels des espaces de Banach

Dans cette section, nous présentons quelques éléments de la théorie du produit tensoriel des espaces de Banach pour l'ordre $m \geq 2$. En particulier, la norme projective, la norme injective

Définition 4.3.1 [36] *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach sur $\mathbb{K}$. On appelle le produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$, l'espace vectoriel*

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_m = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m,\ (\lambda_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{K} \ \ et\ x_i^j \in X_j (1 \leq j \leq m) \right\}$$

avec $x^1 \otimes \cdots \otimes x^m :\ L(X_1, \cdots, X_m) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire définie par $x^1 \otimes \cdots \otimes x^m(\phi) := \phi(x^1, \cdots, x^m)$, pour tout $\phi \in L(X_1, \cdots, \cdot X_m)$.
Si $X_1 = \cdots = X_m = X$ on écrit simplement $\otimes^m X$.

On note par $(X_1 \otimes_\alpha \cdots \otimes_\alpha X_m)$ le produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ muni la norme α. Sa complété, notée par $X_1 \widehat{\otimes}_\alpha \cdots \widehat{\otimes}_\alpha X_m$.

Définition 4.3.2 [36] *Soient X_j, $(j = 1, ..., m)$ des espaces normés sur le même corps. On dira qu'une norme α sur $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ est une norme raisonnable si α satisfait les conditions suivantes :*

1) Pour chaque $x^j \in X_j (j = 1, ..., m)$,

$$\alpha(x^1 \otimes \cdots \otimes x^m) \leq \|x^1\| \cdots \|x^m\|.$$

2) Pour chaque $\varphi^j \in X_j^*(j = 1, ..., m)$ le fonctionnel $\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^m \in (X_1 \otimes_\alpha \cdots \otimes_\alpha X_m)^*$ défini par

$$\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^m(z) := \sum_{i=1}^{n} \varphi^1(x_i^1)...\varphi^m(x_i^m),$$

pour $z = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ est continue avec norme

$$\|\varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^m\| \leq \|\varphi^1\| \cdots \|\varphi^m\|.$$

Exemple 4.3.3 *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach .*

1. *La norme **injective** sur $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ est définie par*

$$\epsilon(u) = \sup \left\{ |\sum_{i=1}^{n} \varphi^1(x_i^1)...\varphi^m(x_i^m)|, \ \varphi^j \in B_{X_j^*}(j = 1, ..., m) \right\}$$

où $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m$ est une représentation quelconque de $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$. Nous désignons par $X_1 \otimes_\epsilon \cdots \otimes_\epsilon X_m$ le produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ avec la norme injective.

2. *La norme **projective** sur $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ est définie par*

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x^1\| \cdots \|x^m\|, \ u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m \right\}.$$

Nous désignons par $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_m$ le produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$ avec la norme projective.

Ryan introduit, dans [36], des normes sur le produit tensoriel symétrique des espaces de Banach pour étudier des polynômes homogènes. Les normes tensorielles projectives et injectives pour le produit tensoriel symétrique sont définies comme suit :

Définition 4.3.4 *Soit X un espace de Banach. On désigné par $\otimes_s^m X$ le produit tensoriel symétrique m fois de X.*

1. *La norme tensorielle projective symétrique , π_s est la norme*

$$\pi_s(u) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\|x_i\|^m,\ n \in \mathbb{N}^*,\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes^m x_i\right\},$$

2. *La norme tensorielle symétrique injective, ϵ_s est la norme*

$$\epsilon_s(u) = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)^m\right|,\ \varphi \in B_{X^*},\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes^m x_i\right\}$$

Proposition 4.3.5 [37] *Un opérateur $P : X \to Y$ est un polynôme m-homogène s'il existe un unique opérateur linéaire borné $P_L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X, Y)$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\delta_m"'] & & Y \\ & \widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X \arrow[ur, "P_L"'] & \end{tikzcd}$$

où $\delta_m : X \to \widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X$ le polynôme canonique défini par

$$\delta_m(x) = x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x.$$

*L'opérateur P_L est appelé la **linéarisation** de P.*

4.4 Polynômes m-homogènes $p-$nucléaires

Définition 4.4.1 *On dit qu'un polynôme $P \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ est p-nucléaire s'il peut s'écrire sous la forme*

$$P(x) = \sum_n x_n^*(x)^m y_n, \qquad (x \in X)$$

où $(x_n^*) \subset X^*$ et $(y_n) \in B_{\ell^w_{p^*}(Y)}$, satisfait $N_p^m((x_n^*), (y_n)_n) < \infty$, tel que

$$\begin{aligned} N_p^m((x_n^*)_n, (y_n)_n) &= \left(\sum_n \|x_n^*\|^m\right)\left(\sup_n \|y_n\|\right), & p = 1 \\ N_p^m((x_n^*)_n, (y_n)_n) &= \left(\sum_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_n |< y^*, y_n >|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}, & 1 < p < \infty \\ N_p^m((x_n^*)_n, (y_n)_n) &= \left(\sup_n \|x_n^*\|^m\right) \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \sum_n |< y^*, y_n >|, & p = \infty \end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{P}_{N-p}(^mX,Y)$ l'espace de Banach des polynômes m-homogènes p-nucléaires de X dans Y, muni de la norme

$$\|P\|_{N-p} = \inf N_p^m((x_n^*)_n,(y_n)_n)$$

Théorème 4.4.2 (inclusion) *Soit $1 \leq p < q \leq \infty$, on a*

$$\mathcal{P}_{N-p}(^mX,Y) \subset \mathcal{P}_{N-q}(^mX,Y)$$

De plus, $\qquad \|P\|_{N-q} \leq \|P\|_{N-p} \quad$ *pour tout $P \in \mathcal{P}_{N-p}(^mX,Y)$*

Preuve. Soit $P \in \mathcal{P}_{N-p}(^mX,Y)$. Alors $P = \sum\limits_n x_n^{*m} \otimes y_n$ avec $x_n^* \in X^*$ et $y_n \in Y \quad (n = 1,2,...)$.
On pose $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ et

$$a_n = \|x_n^*\|^{p/r} \left(\sum_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{-1/mr} \qquad pour\ n = 1,2,...$$

On suppose $z_n^* = x_n^*/a_n$ et $z_n = a_n^m y_n$ pour $n = 1,2,...$, alors
$P = \sum\limits_n z_n^{*m} \otimes z_n$, et $\left(\sum\limits_n \|z_n^*\|^{mq}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum\limits_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\sum\limits_n a_n^{mr} = 1$
et d'après l'inégalité de Hölder $\left(\dfrac{1}{p^*/q^*} + \dfrac{1}{p^*/(p^*-q^*)} = 1\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
N_q^m((z_n^*)_n,(z_n)_n) &\leq \left(\sum_n \|z_n^*\|^{mq}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{z^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n |<z^*,z_n>|^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&= \left(\sum_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n |a_n^{mq^*} <y^*,y_n>|^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\leq \left(\sum_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n a_n^{\frac{mq^*p^*}{p^*-q^*}}\right)^{\frac{p^*-q^*}{q^*p^*}} \left(\sum_n |<y^*,y_n>|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\sum_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n a_n^{mr}\right)^{1/r} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n |<y^*,y_n>|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

on trouve

$$N_q^m((z_n^*)_n,(z_n)_n) \leq N_p^m((x_n^*)_n,(y_n)_n).$$

et par conséquent P est un polynôme $q-$nucléaire et

$$\|P\|_{N-q} \leq \|P\|_{N-p}$$

■

Théorème 4.4.3 *Un polynôme $P \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ est p-nucléaire si et seulement s'il existe des opérateurs $b \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$, $a \in \mathcal{L}(\ell_p, Y)$ et un polynôme $M_\lambda \in \mathcal{P}(^m \ell_\infty, \ell_p)$ de la forme $M_\lambda(z) = (\lambda_n z_n^m)_{n=1}^\infty$ avec $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_p$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "b"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

de plus, pour $P \in \mathcal{P}_{N-p}(^m X, Y)$ on a $\|P\|_{N-p} = \inf \|a\| \|\lambda\|_p \|b\|^m$.

Preuve.

Supposons que P est $p-$nucléaire donc ils existent des suites $(x_n^*)_n \subset X^*$ et $(y_n)_n \subset Y$ telles que $P = \sum\limits_n {x_n^*}^m \otimes y_n$. Soient

$$\begin{aligned} b: \quad & X \to \ell_\infty, \quad x \mapsto \left(\frac{x_n^*(x)}{\|x_n^*\|} \right)_n, \\ M_\lambda: \quad & \ell_\infty \to \ell_p, \quad (t_n)_n \mapsto \left(\|x_n^*\|^m t_n^m \right)_n, \qquad\qquad \lambda = (\|x_n^*\|^m)_n \\ a: \quad & \ell_p \to Y, \quad (s_n)_n \mapsto \sum_n s_n y_n. \end{aligned}$$

Évidemment, $P = aM_\lambda b$ et $\|M_\lambda\| = \|\lambda\| = \left(\sum\limits_n \|x_n^*\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$.
Pour $p = 1$,

$$\|a((s_n)_n)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} | < y^*, \sum_n s_n y_n > | \leq \left(\sum_n |s_n| \right) \left(\sup_n \|y_n\| \right),$$

donc

$$\|a\| \leq \sup_n \|y_n\| \textit{ pour } p = 1.$$

Pour $1 < p < \infty$, on a

$$\|a((s_n)_n)\| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} | < y^*, \sum_n s_n y_n > | \leq \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n |s_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n | < y^*, y_n > |^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

donc

$$\|a\| \leq \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n | < y^*, y_n > |^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \textit{ pour } 1 < p < \infty.$$

Pour $p = \infty$,

$$\|M_\lambda\| = \sup_n \|x_n^*\|^m, \ \ \|a\| \leq \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \sum_n | < y^*, y_n > |,$$

donc

$$P = aM_\lambda b \ \text{ et } \ \inf \|a\|\|M_\lambda\|\|b\|^m \leq \|P\|_{N-p}.$$

Inversement, si $M_\lambda = \sum_n \lambda_n e_n^m \otimes e_n$ et $\lambda = \lambda_n \in \ell_p(c_0, \ p = \infty)$, alors pour $x \in X$,

$$P(x) = aM_\lambda b(x) = \sum_n \lambda_n \langle b(x), e_n\rangle^m a(e_n).$$

Soit $x_n^{*m} = \lambda_n < b(.), e_n >^m$. Alors,
$x_n^* \in X^*$ et $P = \sum_n x_n^{*m} \otimes a(e_n)$.
Pour $p = 1$,

$$\sum_n \|x_n^*\|^m \leq \|b\|^m \|M_\lambda\| \ \text{ et } \ \sup_n \|a(e_n)\| \leq \|a\|.$$

Pour $1 < p < \infty$,

$$\left(\sum_n \|x_n^*\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|b\|^m \|M_\lambda\|$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(| < y^*, a(e_n) > |^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_n | < a^*y^*, e_n > |^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|a^*y^*\| \\ &= \|a\|. \end{aligned}$$

pour $p=\infty$
$\|M_\lambda\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$, $\sup_n \|x_n^*\|^m \leq \|b\|^m \sup\limits_n |\lambda_n|$

De plus,

$$\begin{aligned}\sup_{y^*\in B_{Y^*}} \sum_n |<y^*, a(e_n)>| &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \sum_n |<a^*y^*, e_n>| \\ &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|a^*y^*\| \\ &= \|a\|.\end{aligned}$$

Donc, pour $1 \leq p \leq \infty$.

$$N_p^m((x_n^*)_n, (y_n)_n) \leq \|a\|\|M_\lambda\|\|b\|^m.$$

Ce qui implique

$$\|P\|_{N-p} \leq \inf \|a\|\|M_\lambda\|\|b\|^m.$$

Théorème 4.4.4 (Propriété d'idéal) *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Si* $u \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$, $P \in \mathcal{P}_{N-p}(X, Y)$ *et* $w \in \mathcal{L}(X_0, X)$. *Alors,*

$$uPw \in \mathcal{P}_{N-p}(X_0, Y_0) \text{ et } \|uPw\|_{N-p} \leq \|u\| \cdot \|P\|_{N-p} \cdot \|w\|^m.$$

Preuve. En effet, uPw se factorise de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "bw"'] & X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "b"] & Y \arrow[r, "u"] & Y_0 \\ & \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "ua"'] & \end{tikzcd}$$

donc $uPw = \tilde{a}M_\lambda\tilde{b}$ tel que $\tilde{a} = ua$ *et* $\tilde{b} = bw$
Ce qui implique que $uPw \in \mathcal{P}_{N-p}(X_0, Y_0)$ et on a

$$\begin{aligned}\|uPw\| &\leq \|ua\|\|M_\lambda\|\|bw\|^m \\ &\leq \|u\|\|a\|\|M_\lambda\|\|b\|^m\|w\|^m.\end{aligned}$$

D'où

$$\|uPw\| \leq \|u\|\|P\|_{N-p}\|w\|^m.$$

■

Proposition 4.4.5 [14] *Soit $P : X \to Y$ un polynôme entre deux espaces de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) P est un polynôme $p-$nucléaire.

b) P admet une factorisation $P : X \xrightarrow{u} c_o \xrightarrow{M'_\lambda} \ell_p \xrightarrow{v} Y$ où u et v sont des opérateurs linéaires compacts, et $M'_\lambda \in \mathcal{P}(^m c_0, \ell_p)$ de la forme $M'_\lambda(z) = (\lambda_n z_n^m)_{n=1}^\infty$ avec $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_p$.

Preuve.

a) $\Rightarrow b)$. Soit $P : X \to Y$ un polynôme $p-$nucléaire alors le théorème 4.4.3 se factorise comme suit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "b"'] & Y \\ \ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

où $b \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$, $a \in \mathcal{L}(\ell_p, Y)$ et un polynôme $M_\lambda \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty, \ell_p)$ de la forme $M_\lambda(z) = (\lambda_n z_n^m)_{n=1}^\infty$ avec $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_p$.

On peut trouver $\alpha = (\alpha_n) \in c_0$, avec $\alpha_n > 0$, et $\tau = (\tau_n) \in \ell_p$ tel que $\lambda_n = \alpha_n \tau_n$ pour tout n. Définir

(i) l'opérateur $b \in \mathcal{L}(\ell_\infty, c_0)$ par $b(z) = (\alpha_n^{1/2m} z_n)_{n=1}^\infty$ pour $z = (z_n) \in \ell_\infty$,

(ii) l'opérateur $a \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_p)$ par $a(w) = (\alpha_n^{1/2} w_n)_{n=1}^\infty$ pour $w = (w_n) \in \ell_p$,

(iii) le polynôme $M \in \mathcal{P}(^m c_0, \ell_p)$ par $M(y) = (\tau_n y_n^m)_{n=1}^\infty$ pour $y = (y_n) \in c_0$,

Donc, a et b sont compacts, et $M_\lambda = aMb$.

(b)$\Rightarrow (a)$ Depuis,

$$M'_\lambda(y) = (\lambda_n y_n^m)_{n=1}^\infty = \sum_n \lambda_n y_n^m e_n = \sum_n \lambda_n [e_n(y)]^m e_n$$

pour tout $y = (y_n) \in c_0$, il s'ensuit que M'_λ est $p-$nucléaire. d'après la propriété d'idéal on a :

$$P = vM'_\lambda u \text{ est } p\text{−nucléaire.}$$

■

Théorème 4.4.6 [36] *Soit $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ un opérateur multilinéaire. Alors, il existe un opérateur unique $\tilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ satisfait*

$$\tilde{T}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = T(x_1, ..., x_m) \text{ pour tout } x_i \in X_i,\ i = \overline{1, m}.$$

La correspondance $T \leftrightarrow \tilde{T}$ est une isomorphisme isométrique entre

$$\mathcal{L}(X_1 \times \cdots \times X_m; Y) \text{ et } \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_m, Y).$$

Proposition 4.4.7 *Soit $1 \leq p < \infty$.*
Le polynôme m-homogènes $P : X \to Y$ est p-nucléaire si et seulement si sa linéarisation P_L est p-nucléaire.

Preuve. Pour la preuve, on utilise la définition d'un opérateur $p-$nucléaire.
d'une part, on a :

$$P(x) = \sum_n x_n^*(x)^m \cdot y_n$$

et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= (P_L \delta_m)(x) \\ &= P_L(\delta_m(x)) \\ &= P_L(x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x), \end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned} P_L(x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x) &= \sum_n (x_n^* \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_n^*)(x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x) y_n \\ &\overset{4.3.2}{=} \sum_n \varphi(x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x) y_n \in \mathcal{N}_p(\widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X, Y). \end{aligned}$$

■

4.5 Polynômes m-homogènes strictement $p-$intégraux

Définition 4.5.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach, on dit qu'un polynôme $P \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ est strictement p-intégral ($1 \leq p \leq \infty$), s'il existe un espace mesuré de probabilité (Ω, Σ, μ) tel que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "R_h"'] & Y \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

où $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y)$ *et* $h \in \mathcal{L}(X, L_\infty(\mu))$, *alors nous définissons un polynôme* $R_h \in \mathcal{P}({}^m X, L_\infty(\mu))$ *par* $R_h(x)(t) = h(x)(t)^m$ *pour tout* $x \in X$ *et* $t \in \Omega$ *qui sera appelé le polynôme naturel associé à* h.

On désigne par $\mathcal{P}_{I-p}({}^m X, Y)$ *l'ensemble de tous les polynômes m-homogènes strictement p-intégraux muni de la norme*

$$\|P\|_{I-p} = \inf \|h\|^m \|S\|.$$

où infimum est prise sur tout opérateurs h *et* S *le digramme*

Remarque 4.5.2 *Il est claire que la norme m-homogène strictement p-intégral domine la norme polynôme, i.e.*

$$\|P\| \leq \|P\|_{I-p}.$$

Théorème 4.5.3 ***inclusion***
Soit $1 \leq p < q \leq \infty$. *Il est facile de voir que*

$$\mathcal{P}_{I-p}({}^m X, Y) \subset \mathcal{P}_{I-q}({}^m X, Y).$$

De plus, $\qquad \|P\|_{I-q} \leq \|P\|_{I-p} \qquad$ *pour tout* $P \in \mathcal{P}_{I-p}({}^m X, Y)$.

Proposition 4.5.4 (Propriété d'idéal) *Soient* $P : X \to Y$ *un polynôme m-homogène p-intégral,* $u : X_0 \to X$ *et* $v : Y \to Y_0$ *deux applications linéaires bornées, alors* $vPu : X_0 \to Y_0$ *est un polynôme homogène p-intégral de plus, on a*

$$\|vPu\|_{I-p} \leq \|v\| \cdot \|P\|_{I-p} \cdot \|u\|^m.$$

Théorème 4.5.5 [16] *Soit* $1 \leq p < +\infty$, *et soit* $P \in \mathcal{P}({}^m X, Y)$, *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) P *est strictement p-intégral.*

(b) Il existe un espace compact de Hausdorff K, une injection h de X dans $C(K)$, une mesure μ de Borel sur K et un opérateur $S \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_p(K,\mu), Y)$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "R_h"'] & Y \\ C(K) \arrow[r, "j_p"'] & L_p(K,\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

Corollaire 4.5.6 [16] *Soient $1 \le p \le \infty$, un polynôme $P \in \mathcal{P}(^mX, Y)$ est strictement p-intégral si et seulement s'il existe un opérateur $u \in S\mathcal{I}_p(C(B_{X^*}), Y)$ tel que $P = uR$, où R est le polynôme associé à l'inclusion naturelle de X dans $C(B_{X^*})$.*
De plus,

$$\|P\|_{I-p} = \inf \iota_p(u).$$

Théorème 4.5.7 [16] *Soit $1 \le p < +\infty$, un polynôme $P \in \mathcal{P}(^mX, Y)$, Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) P est strictement p-intégral.

(b) Il existe un espace mesuré de probabilité (Ω, Σ, μ) tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "P"] \arrow[d, "h"'] & & Y \\ L_\infty(\mu) \arrow[r, "R"'] & L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

où $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y)$ et $h \in \mathcal{L}(X, L_\infty(\mu))$, et R est le polynôme donné par

$$R(f) := f^m \qquad \text{pour} \quad f \in L_\infty(\mu).$$

Proposition 4.5.8 [16] *Soit $1 \le p \le \infty$. Soit $P : X \to Y$ un polynôme m-homogène. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) $P \in \mathcal{P}_{I-p}(^mX, Y)$,

2) P_L est un opérateur linéaire strictement p-intégral de $\widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X$ dans Y.

Preuve. Soit P un polynôme m-homogène $p-$intégral, on a

$$P = Si_pR_h$$

Nous utilisons la factorisation de P et R_h

$$P_L\delta_m = Si_pR_{hL}\delta_m$$

Par l'unicité de la linéarisation, nous obtenons

$$P_L = Si_pR_{hL}.$$

Par conséquent, P_L est strictement $p-$intégral.
Inversement, supposons que P_L est un strictement $p-$intégral . Par [[19], proposition 6.12], il existe une extension $\tilde{P}_L \in S\mathcal{I}_p(C(B_{X^*}), Y)$ avec la même norme $p-$intégrale. Par le corollaire 4.5.6, le polynôme $\tilde{P}_LR$ est strictement $p-$intégral.
Clairement,$\tilde{P}_LR = \tilde{P}_Lj\delta_m = P_L\delta_m = P$, donc P est strictement $p-$intégral. ■

4.6 Relations entre les espaces $\mathcal{P}_{N-p}(^mX, Y)$ et $\mathcal{P}_{I-p}(^mX, Y)$

Proposition 4.6.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Tout polynôme p-nucléaire est strictement p-intégral, de plus on a*

$$\|P\|_{I-p} \leq \|P\|_{N-p} \text{ pour tout } P \in \mathcal{P}_{N-p}(^mX, Y).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la remarque 1.1.11. ■

Théorème 4.6.2 *Soient $1 \leq p \leq \infty$, X et Y deux espaces de Banach tels que $\mathcal{N}_p(X, Y) = S\mathcal{I}_p(X, Y)$, alors $\mathcal{P}_{N-p}(^mX, Y) = \mathcal{P}_{I-p}(^mX, Y)$.*

Preuve.

Fixe $e \in X$ tel que $x^*(e) = 1$. Définir [6] des opérateurs

$$\pi_j : \widehat{\otimes}^{j+1}_{\pi_s} X \to \widehat{\otimes}^{j}_{\pi_s} X (1 \leq j \leq m-1)$$

par

$$\pi_j(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(j+1)}{\cdots} \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} x^*(x) x_i \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes x_i.$$

On considéré $P \in \mathcal{P}_{I-p}(^m X, Y)$, tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & & & \xrightarrow{P} & & & Y \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_m} & & & & & & \uparrow{\scriptstyle u} \\
\widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X & \xrightarrow[\pi_{m-1}]{} & \widehat{\otimes}^{m-1}_{\pi_s} X & \cdots & \widehat{\otimes}^2_{\pi_s} X & \xrightarrow[\pi_1]{} & X
\end{array}$$

où $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\delta_m(x) = x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x$. Donc, d'après le Théorème 4.5.8 on a

$$P_L = u\pi_1 \cdots \pi_{m-1} : \widehat{\otimes}^m_{\pi_s} X \to Y$$

est linéaire strictement $p-$intégral.

Maintenant, comme il a été démontré dans la preuve de [[6], Théorème 3], il sont des opérateurs $k_j : \widehat{\otimes}^j_{\pi_s} X \to \widehat{\otimes}^{j+1}_{\pi_s} X$ $(1 \leq j \leq m-1)$ défini en termes de x^* et e tels que $\pi_j k_j$ est l'application identity de $\widehat{\otimes}^j_{\pi_s} X$, On a

$$u = u\pi_1 \cdots \pi_{m-1} k_{m-1} \cdots k_1 : X \to Y$$

par la propriété idéale, l'opérateur u est strictement $p-$intégral

Par hypothèse on obtient

$$u \in \mathcal{N}_p(X, Y)$$

en suit, par la propriété idéale,

$$P_L = u\pi_1 \cdots \pi_{m-1} \in \mathcal{N}_p(X, Y)$$

donc,

$$P \in \mathcal{P}_{N-p}(^m X, Y)$$

■

Corollaire 4.6.3 *Si X est espace réflexif, alors pour $1 \leq p \leq \infty$, on a*

$$\mathcal{P}_{N-p}(^m X, Y) = \mathcal{P}_{I-p}(^m X, Y).$$

Théorème 4.6.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, un polynôme $P : X \to Y$ est p-nucléaire si et seulement s'il existe un espace de Banach Z et un opérateur compact $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ et un polynôme strictement p-intégral Q tels que*

$$P = QA.$$

Dans ce cas
$$\|P\|_{N-p} \leq \|A\|^m \|Q\|_{I-p}.$$

Preuve. Si P est $p-$nucléaire, considérons la factorisation du Proposition 4.4.5, et prenons $Z = c_0$, $A = u$ et $Q = vM_\lambda$.

Inversement, si $P = AQ$ utilisons le théorème (FIGIEL, W. B. JOHNSON) dans ([18], p 260) il existe un espace de Banach W réflexif et deux opérateurs linéaires bornés $a_2 : X \to W$ et $a_1 : W \to Z$ tels que $A = a_1 a_2$.
Alors, on a la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "a_2"] & & Z \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "R_h"] & Y \\ & W \arrow[ur, "a_1"] & L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"'] & L_p(\mu) \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

on sait que $Qa_1 \in \mathcal{P}_{N-p}(^mW, Y)$.
Donc, d'après la propriété d'idéal des polynômes $p-$nucléaires.

$$QA = Qa_1a_2 \in \mathcal{P}_{N-p}(^mX, Y).$$

on a

$$\begin{aligned} \|Qa_1\|_{N-p} &= \|Qa_1\|_{I-p} \\ &\leq \|Q\|_{I-p} \cdot \|a_1\| \end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\|P\|_{N-p} &= \|QA\|_{N-p} \\
&= \|Qa_1a_2\|_{N-p} \\
&\leq \|Qa_1\|_{N-p} \cdot \|a_2\|^m \\
&\leq \|Qa_1\|_{I-p} \cdot \|a_2\|^m \\
&\leq \|Q\|_{I-p} \cdot \|a_1\|^m \cdot \|a_2\|^m \\
&\leq \|Q\|_{I-p} \cdot \|A\|^m.
\end{aligned}
$$

■

Bibliographie

[1] D. Achour. A. Belacel. Virtually $(r; r_1, ..., r_n; s)-$nuclear multilinear operators, Journal of Extracta Mathematicae 30 2 (2015) 235-250.

[2] R. Alencar. M. C. Matos. Some classes of multilinear mappings between Banach spaces. Publ. Dep. An. Mat. Univ. Complutense de Madrid 12 (1989).

[3] R. F. Arens and J. Eells. On embedding uniform and topological spaces. Pacific J. Math. 6 (1956) 397-403.

[4] A. Belacel. Opérateurs sommants et factorisation par les espaces de Köthe. Thèse de doctorat en Science (2015). Université de M'sila.

[5] A. Belacel. On (r,t,s)-nuclear polynomials. to appear in CJMS.

[6] F. Blasco. Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials. Studia Math.123.(1997) 165-173.

[7] Y. Benyamini. J. Lindenstrauss. Geometric Nonlinear Functional Analysis, 48. Amer. Math. Soc. Providence. (2000).

[8] J. Bourgain. On Lipschitz embedding of finite metric spaces in Hilbert space. Israel J. Math. 52 (1–2) (1985) 46–52.

[9] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris. (1983).

[10] C. S. Cardassi. Strictly $p-$integral and $p-$nuclear operators. in. Analyse harmonique. Groupe de travail sur les espaces de Banach invariants par translation. Exp. II. Publ. Math. Orsay. (1989).

[11] D. Chen, B. Zheng, Remarks on Lipschitz $p-$summing operators. Proc. Amer. Math. Soc. 139 (8) (2011) 2891–2898.

[12] D. Chen and B. Zheng. Lipschitz $p-$integral operators and Lipschitz $p-$nuclear operators. Nonlinear Analysis 75 (2012) 5270-5282.

[13] R. Cilia, M. D'Anna, and J. M. Gutierrez, Polynomials on Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$, Bull. Austral. Math. Soc. 70 (2004), 117-124.

[14] R. Cilia. Joaquin M. Gutiérrez. Nuclear and integral polynomials. J. Aust. Math. Soc. 76 (2004), 269–280.

[15] R. Cilia. Joaquin M. Gutiérrez. Polynomial characterization of Asplund spaces. Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin 12 (2005), 393–400.

[16] R. Cilia. Joaquin M. Gutiérrez. Asplund Operators and $p-$Integral Polynomials. J. Math. 10 (2013). 1435–1459.

[17] A. Defant. K. Floret. Tensor Norms and Operator ideals, North-Holland Math. Studies. vol. 176. North Holland. (1993).

[18] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. Vector Measures, Math. Surveys Number 15. American Mathematical Society. Providence ISLAND. (1977).

[19] J. Diestel. H. Jarchow. A. Tonge. Absolutely summing operators. in : Cambridge Studies in Adv. Math, vol. 43. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1995.

[20] J.D. Farmer. W.B. Johnson. Lipschitz $p-$summing operators. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (9) (2009) 2989–2995.

[21] S. Fomine A. Kolmogorov Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Édition Mir.Moscou. 2 edition. (1973).

[22] A.Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Am. Math. Soc. 16(1955).

[23] H. Hogbe-Nlend, V. B. Moscatelli. Nuclear and Conuclear Spaces. North- Holland Mathematics Studies : 52. North-Holland Publishing Company. (1981).

[24] G. J. O. Jamson. Summing and Nuclear Norms in Banach Space Theory. London Mathematical Society Student Texts : 8. Cambridge. University Press. (1987).

[25] A. Jimenez-Vargas. J. M. Sepulcre. and Moises Villegas- Vallecillos. Lipschitz compact operators. J. Math. Anal. Appl. 415 (2014). no. 2. 889-901.

[26] W.B. Johnson. J. Lindenstrauss. G. Schechtman. Extensions of Lipschitz maps into Banach spaces. Israel J. Math. 54 (2) (1986) 129–138.

[27] N. J. Kalton, Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications, Collect. Math. 55(2) (2004), 171-217.

[28] J. Lindenstrauss, On non-linear projections in Banach spaces. Michigan J, Math. 11 (1964) 268-287

[29] M. C. Matos. On multilinear mappings of nuclear type. Rev, math. 6. 1 (1993) 61-81.

[30] J.Mujica : Complex Analysis in Banach Spaces. Math. Studies, vol. 120, North-Holland, Amsterdam, (1986).

[31] B. Ndumba. Extension of results about $p-$summing operators to Lipschitz $p-$summing maps and their respective relatives, Mémoire de magistére. University of Pretoria, South Africa, July 2013.

[32] A. Persson. On some properties of $p-$nuclear and $p-$integral operators. Studia Math. 33. (1969) 213-222.

[33] A. Persson and A.Pietsch. $p-$nukleare and $p-$integrale Abbildungen in Banachräumen. StudiaMath. 33 (1969) 213-222.

[34] A. Pietsch. Operator Ideals. VEB Deutscher Verlag der Wissensehaften. Berlin (1979).

[35] A. Pietsch. Absolut $p-$summierende abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28, (1967) 333-353.

[36] R.A. Ryan. Introduction to tensor products of Banach spaces. Springer Monographs in Mathematics (2001).

[37] K. Saadi. Les opérateurs multi $p-$sommants et leurs applications. Thèse de doctorat en Science (2010). Université de Batna.

[38] K. Saadi. On the composition ideals of Lipschitz mappings. math.FA. (2015) 1507.05872

[39] I. Sawashima. Methods of Lipschitz duals. in Lecture Notes Ec. Math. Sust. 419. Springer Verlag (1975) 247-259.

[40] N. Tomczak-Jaegermann. Banach–Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals, in : Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. vol. 38. Longman Scientific Technical. Harlow. (1989).

[41] N. Weaver. Lipschitz algebras. World Scientific Publishing Co. Singapore (1999).

[42] P. Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

[43] R. Yahi. Certaines classes dopérateurs générés par une procédure dinterpolation. Thése de doctorat toisiéme cycle (2016). Université de M'sila.

[44] O. I. Zhukova. On modifications of the classes of $p-$nuclear, $p-$summing and $p-$integral operators. Siberian Math. J. Vol. 30 No. 5. (1998).