

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
جامعة عمّار تليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
قسم الرياضيات و الإعلام الآلي  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



## *Mémoire de Master*

Domaine : Mathématique et Informatique  
Filière : Mathématique  
Option : Analyse Mathématique

## Thème

---

**Le lemme de Van Der Corput pour les espaces de Besov**

---

par :

*M<sup>lle</sup> Messaoudi Zineb*

asemSoutenu publiquement devant le jury composé de :

<i>M<sup>me</sup> BENDAOU D Zohra</i>	M.C.A, Université de Laghouat	<b>Présidente</b>
<i>Mr BELACEL Amar</i>	M.C.B, Université de Laghouat	<b>Examineur</b>
<i>Mr OUCHENANE Djamel</i>	M.C.B, Université de Laghouat	<b>Examineur</b>
<i>Mr BOUREGA Abdeldjabar</i>	M.A.A, Université de Laghouat	<b>Examineur</b>
<i>Mr ALLAOUI SalahEddine</i>	M.C.A, Université de Laghouat	<b>Encadreur</b>

Année universitaire 2015/2016

# Remerciement

Je veux tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et  
miséricordieux,  
qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.  
Je remercie mon encadreur Allaoui Salah Eddine.  
Je remercie tous les membres de jury,  
d'avoir accepté présider et examiner mon Travail.  
Je remercie ma famille qui par leur prières et leur encouragements,  
j'ai pu surmonter tous les obstacles.  
Je remercie ma chère amie et sa famille.  
Un spécial remerciement à mon fiancé.

# Abstract

In this work, we give a generalization of Van Der Corput lemma, where we use a new procedure of derivation. In an other part, we apply it to the continuity of Hilbert operator in  $L^2$  and Besov space.

Keywords : Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Hilbert operator.

# Résumé

Dans ce travail, on donne une généralisation du lemme de Van Der Corput, où nous utilisons une nouvelle procédure de dérivation. Dans une autre partie, il s'agit de l'appliquer à la continuité de l'opérateur de Hilbert sur  $L^2$  et l'espace de Besov.

Mots Clés : Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Opérateur de Hilbert.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Série de Littlewood-Paley . . . . .	9
1.1.1 La décomposition de Littlewood-Paley . . . . .	9
1.2 Opérateur de différences finis . . . . .	11
1.3 Espaces de Besov . . . . .	11
1.4 Espaces de Besov localisés . . . . .	12
1.5 Espaces de Lizorkin-Triebel . . . . .	12
1.6 L'opérateur de Dérivation . . . . .	13
1.7 Opérateurs de Hilbert . . . . .	13
<b>2 Généralisation du Lemme de Van Der Corput</b>	<b>14</b>
2.1 Résultat principal . . . . .	14
2.2 Conclusion . . . . .	18
<b>3 Continuité de l'opérateur de Hilbert et presque-de Hilbert</b>	<b>20</b>
3.1 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	20
3.1.1 Introduction et théorème de continuité . . . . .	20
3.1.2 Lemmes . . . . .	22
3.1.3 Preuve du théorème de continuité . . . . .	24

---

3.1.4	Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R})$ . . . . .	27
3.2	Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	28
3.2.1	Introduction et théorème de continuité . . . . .	28
3.2.2	Lemmes . . . . .	30
3.2.3	Preuve du théorème de continuité . . . . .	32
3.2.4	Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	36
3.3	Continuité de l'opérateur de presque-de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	37
3.3.1	L'opérateur de presque-de Hilbert . . . . .	37
3.3.2	Un résultat de continuité sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	38
3.3.3	Continuité de l'opérateur presque-de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R})$ . . . . .	41
3.4	Continuité de l'opérateur de presque-de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	42
3.4.1	L'opérateur de presque-de Hilbert . . . . .	42
3.4.2	Un résultat de continuité sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	43
3.4.3	Continuité de l'opérateur presque-de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Continuité de l'opérateur de Hilbert sur les espaces de Besov</b>	<b>48</b>
4.1	Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ . . . . .	48
4.2	Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	50
	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

# Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à l'opérateur de dérivation défini sur  $C^N([a, b], \mathbb{R})$  ( $N$  très grand) par

$$D^1 \cdot = (\cdot)', \dots, D^k \cdot = \alpha_k \left( \frac{D^{k-1} \cdot}{\beta_k} \right)', \quad 2 \leq k \leq N \quad (*)$$

avec  $(\alpha_k)$ ,  $(\beta_k)$  deux suites de fonctions de classe  $C^N([a, b], \mathbb{R})$  et  $D^k$  est l'opérateur de dérivation associé à  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  par rapport à  $k$ .

Quatre chapitres ont été considérés dans ce travail.

Le premier chapitre est destiné à rappeler quelques outils mathématiques qui seront utiles par la suite. Nous commençons par définition de la série de Littelwood-Paley et l'opérateur de différences finis, et nous terminons par définition de les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel et de l'opérateur de Hilbert.

Dans le second chapitre nous donnerons une généralisation du Lemme de Van Der Corput ( voir [S1]) où nous remplacerons la dérivation habituelle par celle de (\*) et on donne certains résultats sur l'opérateur de dérivation  $D^k$  associé à  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  qui seront utiles dans le chapitre suivant.

Dans le troisième chapitre :

- On étudie la continuité sur  $L^2(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R}^2)$  de l'opérateur de Hilbert défini à partir des intégrales singulières par une courbe à croissance rapide (voir la définition 3.2.25) :

$$H_R f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}^2)$$

avec les conditions suivantes sur la courbe  $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$  :

- i)  $\gamma$  impair sur  $[-R, R]$ ,
- ii)  $t \mapsto D^k \gamma_j(t)$  est positive et croissante sur  $[0, R]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,
- iii)  $D^1 \gamma_j(0) = 0, \quad \forall j = 1, 2.$

La condition sera  $t \mapsto \alpha_k(t) \searrow$  et  $t \mapsto \beta_k(t) \nearrow$ .

La continuité- $L^2(\mathbb{R})$  de  $H_R$ , fait appel à l'opérateur

$$H_{\varepsilon, R} f(x) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad (\forall f \in D(\mathbb{R}^2)),$$

qui est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  et ceci pour certain  $\gamma$ , (voir [NV1], [NV2] et [NV3]). On montre aussi que ces résultats établis sur  $L^2$  restent vrais sur  $H^s$ .

- On étudie la continuité de l'opérateur de presque-de Hilbert sur  $L^2(\mathbb{R})$  et  $L^2(\mathbb{R}^2)$  (voir [MA2]). Pour cela on commence par définir l'opérateur de presque-de Hilbert

$$\tilde{H}_{\varepsilon, R} f(x) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad (\forall f \in D(\mathbb{R}^2)),$$

où

- i)  $\omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  paire,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  de classe  $C^N$  ( $[-R, R], \mathbb{R}$ ) et impair,
- ii)  $t \mapsto D^k \gamma_j(t)$  positive et croissante sur  $[0, R]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,
- iii)  $D^1 \gamma_j(0) = 0, \quad \forall j = 1, 2,$
- 4i)  $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$  est décroissance sur  $[0, R]$ .

Dans le dernier chapitre, on étudie la continuité de l'opérateur de Hilbert sur les espaces de Besov.

Dans ces deux dernier chapitres, on a fait le même travail dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$ .

Ce mémoire se termine par une conclusion.

# Notations

- $x.y = x_1y_1 + x_2y_2$  produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$ .
- $\langle ., . \rangle$  : produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .
- $p.p$  : presque partout.
- $mes A$  : mesure de Lebesgue de l'ensemble  $A$ .
- $\text{supp } f$  : support de la fonction  $f$ .
- Soient  $f, g$  deux fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}^2$ , alors la fonction

$$x \longmapsto (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y)dy,$$

est appelée produit de convolution de  $f$  et  $g$ .

- $\mathbb{R}_\xi$  : i.e par rapport à la variable  $\xi$ .
- $\text{sgn } \xi$  : le signe de  $\xi$ .
- Soit  $f \in S(\mathbb{R}^2)$ , alors  
 $\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)e^{-ix.\xi}dx$  désigne la transformation de Fourier et  
 $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi)e^{ix.\xi}d\xi$  la transformation de Fourier inverse.
- Pour une distribution  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  et  $a \in \mathbb{R}^2$ , on définit l'opérateur de translation par

$$\tau_a f(x) = f(x-a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

- $C^k(\mathbb{R}^2)$  : les fonction  $k$  fois continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^2$ .
- $D(\mathbb{R}^2) = C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  est l'espace des fontions de classe  $C^\infty$  et à support compact.
- $S(\mathbb{R}^2)$  : l'espace des fonctions à décroissances rapides, et  $S'(\mathbb{R}^2)$  est le dual de

$S(\mathbb{R}^2)$ .

–  $L^2(\mathbb{R}^2)$  : l'espace des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^2$  et de norme

$$\|f\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

–  $L^\infty(\mathbb{R}^2)$  : l'espace des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^2$  et de norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |f(x)| < \infty.$$

–  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$  : l'ensemble des fonctions localement intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ .

–  $H^s(\mathbb{R}^2)$  : l'espace de sobolev des distributions tempérées telle que

$$\|f\|_{H^s} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right\}^{1/2} < \infty.$$

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Série de Littlewood-Paley

#### 1.1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit  $\varphi \in S(\mathbb{R})$  telle que

*i)*  $\text{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbb{R} : 2^{-1} \leq |x| \leq 2^1\}$ ,

*ii)*  $\varphi(x) > 0$  pour  $2^{-1} \leq |x| \leq 2^1$ ,

*iii)*  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}x) = 1$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

On pose

$$\psi(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}x),$$

on obtient une fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp}\psi \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$

alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}x) = 1. \tag{1.1.1}$$

La relation (1.1.1) converge dans  $S(\mathbb{R})$  est appelée la partition de l'unité.

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolution

$$\begin{aligned} Q_k : S'(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (Q_k f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-k}x)) * f)(x), & (k \geq 1), \\ S_j : S'(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (S_j f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-j}x)) * f)(x), & (j \geq 0), \end{aligned}$$

avec  $Q_0 = S_0$ .

Ecrivons la relation (1.1.1) au point  $2^{-k}x$ , alors

$$\psi(2^{-k}x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \varphi(2^{-j}x) = 1.$$

En multipliant par  $\widehat{f}$  donc

$$\psi(2^{-k}x)\widehat{f} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \varphi(2^{-j}x)\widehat{f} = \widehat{f}. \quad (1.1.2)$$

En appliquant l'application  $\mathcal{F}^{-1}$  sur (1.1.2), on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}x)\widehat{f}) + \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \varphi(2^{-j}x)\widehat{f}\right) = f,$$

$$S_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = f. \quad (1.1.3)$$

Pour  $k = 0$

$$Q_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f = f,$$

alors

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f.$$

On remplace  $f$  dans (1.1.3), on trouve

$$S_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f,$$

$$S_k f = \sum_{j=0}^k Q_j f.$$

**Remarque 1.1.1.** On peut construire la série de Littlewood-Paley de la manière suivante

Soit  $f \in D(\mathbb{R})$ , telle que

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

et

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On pose  $\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(2x)$ , nous avons alors

$$i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(2^{-k}x) = 1, \quad x \neq 0.$$

$$ii) \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(2^{-k}x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

et

$$\text{supp} \Psi \subset \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}.$$

## 1.2 Opérateur de différences finis

**Définition 1.2.2.** Soient  $f \in S'(\mathbb{R})$  et  $x, h \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , l'opérateur de différences finis est noté par  $\Delta_h^m$  telle que

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k (-1)^k f(x + (m-k)h),$$

où

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

## 1.3 Espaces de Besov

**Définition 1.3.3.** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $1 \leq q \leq \infty$ , l'espace de Besov noté  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  est l'ensemble des  $f \in S'(\mathbb{R})$  telle que  $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} < \infty$ ,

$$\text{où} \quad \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \|Q_k f\|_p^q \right)^{1/q}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} 2^{sk} \|Q_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.3.4.** Soient  $l$  un entier, et  $p, q \in ]0, \infty[$ , si  $0 < s < l$ , alors l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  est l'ensemble des distributions tempérées  $f$  vérifiant

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \left( \int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^l f(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 1.4 Espaces de Besov localisés

Soit  $\psi$  une fonction de classe  $C^\infty$ , telle que  $\text{supp } \psi \subset [0, R]$  avec  $R > 1$ , vérifier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(x - k) = 1, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Définition 1.4.5.** Soient  $s \in \mathbb{R}$ , et  $1 \leq p, q, r \leq \infty$ . L'espace de Besov localisé noté  $(B_{p,q}^s)_{l^r}$ , est l'ensemble des  $f \in S'(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|f\|_{(B_{p,q}^s)_{l^r}} := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\tau_k \psi \cdot f\|_{B_{p,q}^s}^r \right)^{1/r} < +\infty.$$

## 1.5 Espaces de Lizorkin-Triebel

**Définition 1.5.6.** Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$  et  $0 < q < \infty$ , l'espace de Lizorkin-Triebel, noté  $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$  est l'ensemble des  $f \in S'(\mathbb{R})$  telle que  $\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} < \infty$ ,

$$\text{où} \quad \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |Q_k f|^q \right)^{1/q} \right\|_q, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \left\| \sup_{k \geq 0} 2^{sk} |Q_k f| \right\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.5.7.** Pour  $1 \leq p < \infty$ , alors l'espace de Lizorkin-Triebel  $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$  est

l'ensemble des distributions tempérées vérifiant :

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \left\| \left( \int_0^1 \left( t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h^t f(\cdot)|^q dh \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty.$$

**Proposition 1.5.8.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées : ( voir [TH1] )*

(i)  $L_p(\mathbb{R}^n) = F_{p,2}^0(\mathbb{R}^n)$ , si  $0 < p < \infty$ ,

(ii)  $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$ , si  $0 < p < \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,

(iii)  $H_p^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n)$ , si  $0 < p < \infty$ ,

pour les définitions de  $L_p(\mathbb{R}^n)$  et  $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ , voir les notations.

## 1.6 L'opérateur de Dérivation

**Définition 1.6.9.** Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  et  $\beta_1, \beta_2, \dots$  deux suites de fonctions réelles définies sur  $[a, b]$  de classe  $C^N$ , ( $N$  très grand ).

Pour toute fonction  $f$  appartient à  $C^N([a, b], \mathbb{R})$ , on définit la dérivation par

$$D^1 f = f', \dots, D^k f = \alpha_k \left( \frac{D^{k-1} f}{\beta_k} \right)', \quad k \geq 2. \quad (1.6.4)$$

Remarquons que pour  $\alpha_k \equiv \beta_k \equiv 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on a la dérivation habituelle.

## 1.7 Opérateurs de Hilbert

On définit l'opérateur de Hilbert  $H_R$  par

$$H_R(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}^n),$$

avec les conditions suivantes sur la courbe  $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$

- $\gamma$  impaire sur  $[-R, R]$ ,
- $t \mapsto D^k \gamma_j(t)$  est positive et croissante sur  $[0, R]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,
- $D^1 \gamma_j(0) = 0$ ,  $\forall j, 2 \leq j \leq n$ .

# Chapitre 2

## Généralisation du Lemme de Van Der Corput

Dans ce chapitre, nous donnerons une généralisation du Lemme de Van Der Corput. En utilisant une nouvelle procédure de dérivation, comme ce que nous avons défini dans le premier chapitre.

### 2.1 Résultat principal

**Proposition 2.1.10.** *Supposons que*

i)  $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1$ ,

ii)  $t \longrightarrow \alpha_k(t)$  positive et décroissante sur  $[a, b]$ ,  $\forall k \geq 2$ ,

iii)  $t \longrightarrow \beta_k(t)$  strictement positive et croissante sur  $[a, b]$ ,  $\forall k \geq 2$ ,

soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  telles que

4i)  $D^1 f$  est monotone,

5i) il existe  $\lambda > 0$ , telle que  $|D^k f(t)| \geq \lambda$ ,  $\forall k \geq 1$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Alors

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt \right| \leq c_k \left\{ \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_k(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_k(a)} \right\}^{-1/k}, \quad (2.1.1)$$

où  $c_k$  ne dépend que de  $k$  avec  $c_1 = 2$  et  $c_k = 2 + 2c_{k-1}$ .

**Démonstration.** On démontrera ceci par récurrence sur  $k$  :

Pour  $k = 1$ , on suppose que  $D^1 f$  est croissante et  $D^1 f \geq \lambda$ . Alors par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{if(t)} dt \right| &= \left| \int_a^b \frac{1}{if'(t)} d(e^{if(t)}) \right| \\ &\leq \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(a)} + \int_a^b \left| d\left(\frac{1}{if'(t)}\right) \right| \\ &= \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(a)} - \int_a^b d\left(\frac{1}{f'(t)}\right) \\ &= \frac{2}{f'(a)} \leq \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

On suppose que  $D^{k+1} f(t) \geq \lambda$ , ( la même démonstration si  $D^{k+1} f(t) \leq -\lambda$ ).

On pose  $h = D^k f$ .

$\beta_k$  et  $h$  sont des fonctions continues sur  $[a, b]$ , ce qui donne pour  $k \geq 1$ ,  $\frac{h}{\beta_{k+1}}$  est continue sur  $[a, b]$ , donc il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(c) \right| = \min_{t \in [a, b]} \left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(t) \right|.$$

L'hypothèse du récurrence donne  $\frac{h}{\beta_{k+1}}$  est croissante  $\forall k \geq 1$ .

On décompose l'intervalle  $[a, b]$  en  $[a, c - \delta]$ ,  $[c - \delta, c + \delta]$  et  $[c + \delta, b]$  avec  $\delta > 0$ .

Quand  $t \notin [c - \delta, c + \delta]$ , on a pour  $t \in [c + \delta, b]$  (de même pour  $t \in [a, c - \delta]$ ) :

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(t) \right| + \left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(c) \right| \geq \left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(c + \delta) - \frac{h}{\beta_{k+1}}(c) \right|,$$

puisque

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(t) \right| \geq \frac{h}{\beta_{k+1}}(c + \delta),$$

et

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(c) \right| \geq -\frac{h}{\beta_{k+1}}(c),$$

en appliquant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(t) \right| \geq \delta \left( \frac{h}{\beta_{k+1}} \right)'(\xi) - \left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(c) \right|, \quad (c < \xi < c + \delta). \quad (2.1.2)$$

**1<sup>er</sup> cas :**

Si  $\frac{h}{\beta_{k+1}}(c) = 0$ , alors

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(t) \right| \geq \delta \left( \frac{h}{\beta_{k+1}} \right)'(\xi) = \delta \frac{D^{k+1}f(\xi)}{\alpha_{k+1}(\xi)}, \quad (c < \xi < c + \delta).$$

Puisque  $\beta_{k+1}$  (resp  $\alpha_{k+1}$ ) est positive et croissante (resp positive et décroissante),

on a

$$|h(t)| \geq \delta \lambda \frac{\beta_{k+1}(a)}{\alpha_{k+1}(a)}.$$

Décomposons l'intégrale

$$\left\{ \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b \right\} e^{if(t)} dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

**Estimation de  $I_2$**

$$|I_2| \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} |e^{if(t)}| dt = 2\delta. \quad (2.1.3)$$

**Estimation de  $I_1$  et  $I_3$**

L'hypothèse de récurrence donne directement

$$|I_1| = \left| \int_a^{c-\delta} e^{if(t)} dt \right| \leq c_k \left( \delta \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_{k+1}(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_{k+1}(a)} \right)^{-1/k}, \quad (2.1.4)$$

$$|I_3| = \left| \int_{c+\delta}^b e^{if(t)} dt \right| \leq c_k \left( \delta \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_{k+1}(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_{k+1}(a)} \right)^{-1/k}. \quad (2.1.5)$$

**2<sup>ème</sup> cas**

Si  $\frac{h}{\beta_{k+1}}(c) \neq 0$ , alors  $c = a$  ou  $c = b$ . Supposons que  $c = a$  et écrivons

$[a, b] = [a, a + \eta] \cup [a + \eta, b]$  avec  $\eta > 0$ .

Quand  $t \in [a, a + \eta]$ , grâce à (2.1.2) on a

$$\left| \frac{h}{\beta_{k+1}}(t) \right| \geq \frac{1}{2} \eta \left( \frac{h}{\beta_{k+1}} \right)'(\xi), \quad (c < \xi < a + \eta)$$

d'où

$$|h(t)| \geq \frac{1}{2} \eta \lambda \frac{\beta_{k+1}(a)}{\alpha_{k+1}(a)}, \quad (2.1.6)$$

ce qui donne, après qu'on a découpé l'intégrale comme le suivant

$$\int_a^b e^{if(t)} dt = \left\{ \int_a^{a+\eta} + \int_{a+\eta}^b \right\} e^{if(t)} dt = I_4 + I_5.$$

**Estimation de  $I_4$ .**

$$|I_4| \leq \int_a^{a+\eta} |e^{if(t)}| dt = \eta. \quad (2.1.7)$$

**Estimation de  $I_5$ .**

L'inégalité (2.1.6) permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence et d'obtenir

$$|I_5| = \left| \int_{a+\eta}^b e^{if(t)} dt \right| \leq c_k \left( \frac{1}{2} \eta \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_{k+1}(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_{k+1}(a)} \right)^{-1/k}, \quad (2.1.8)$$

finalement, il suffit de regrouper (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.7), (2.1.8) et de choisir

$$\frac{\delta}{2} = \eta = \left( \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_{k+1}(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_{k+1}(a)} \right)^{-1/(k+1)}.$$

pour obtenir (2.1.1) avec  $c_{k+1} = 2 + 2c_k$ .

**CQFD**

■

**Proposition 2.1.11.** *Etant donnée deux suites de fonctions réelles positives  $(\alpha_k)_k$  et  $(\beta_k)_k$  telles que*

*i)  $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1$ ,*

*6i)  $\beta_k(t) \geq \max_{s \in [a, b]} \alpha_k(s)$ ,  $\forall k \geq 2$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .*

Soit  $f \in C^N([a, b], \mathbb{R})$ , ( $N$  très grand), telles que

4i)  $D^1 f$  est monotone,

5i) il existe  $\lambda > 0$ , telle que :  $|D^k f(t)| \geq \lambda$ ,  $\forall k \geq 1$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Alors

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt \right| \leq c_k \lambda^{-1/k}, \quad (2.1.9)$$

où  $c_k$  ne dépend que de  $k$  avec ( $c_1 = 2$ ,  $c_k = 2 + 2c_{k-1}$ ).

**Démonstration.** La même démonstration avec celle de la Proposition 2.1.10, mais dans (2.1.6) on utilisera l'hypothèse 6i) et cela implique que  $|h(t)| \geq \frac{1}{2}\eta\lambda$ . ■

## 2.2 Conclusion

**Corollaire 2.2.12.** Soient  $f_1, f_2, \dots, f_k$  des fonctions définies sur  $[a, b]$  de classe  $C^\infty$ , telles que

7i)  $t \mapsto D^1 f_j(t)$  est monotone ( $1 \leq j \leq k$ ),

8i)  $|D^n f_j(t)| \geq 1$ , ( $1 \leq j \leq k$ ),  $\forall n \geq 1$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

Alors pour toutes suites de fonctions  $(\alpha_n)_n$  et  $(\beta_n)_n$  vérifiant (i, Proposition 2.1.10) et (6i, Proposition 2.1.11), on a

$$\left| \int_a^b e^{i \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(t)} dt \right| \leq c_n \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j \right)^{-1/n},$$

où  $\lambda_j > 0$ , ( $\forall j : 1 \leq j \leq k$ ) et  $c_n$  ne dépend que de  $n$ .

**Démonstration.** On pose  $F(t) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(t)$ , il suffit d'appliquer la Proposition 2.1.11 pour la fonction  $F$ . ■

**Corollaire 2.2.13.** Sous les hypothèses du Proposition 2.1.10, pour toute fonction

$f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$  et toute fonction  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , on a

$$\left| \int_a^b g(t) e^{if(t)} dt \right| \leq c_k \left\{ \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_k(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_k(a)} \right\}^{-1/k} \times \left( |g(b)| + \int_a^b |g'(t)| dt \right). \quad (2.2.10)$$

**Démonstration.** On pose  $F(x) = \int_a^x e^{if(t)} dt$ . Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) e^{if(t)} dt \right| &= \left| g(b)F(b) - \int_a^b F(t)g'(t) dt \right| \\ &\leq |g(b)||F(b)| + \int_a^b |F(t)||g'(t)| dt, \end{aligned}$$

d'après la Proposition 2.1.10, on obtient

$$|F(x)| \leq c_k \left( \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_k(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_k(a)} \right)^{-1/k}, \quad \forall x \in ]a, b]$$

d'où le résultat. ■

**Corollaire 2.2.14.** *Sous les hypothèses du Proposition 2.1.10, pour toute fonction  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  positive et décroissante on a*

$$\left| \int_a^b g(t) e^{if(t)} dt \right| \leq c_k g(a) \left\{ \lambda \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)\dots\beta_k(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)\dots\alpha_k(a)} \right\}^{-1/k}.$$

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le corollaire 2.2.13 et l'égalité

$$|g'(t)| = -g'(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

■

On va terminer ce chapitre par la Remarque suivante

**Remarque 2.2.15.** Si  $\alpha_k \equiv \beta_k \equiv 1$ , ( $\forall k \geq 1$ ), dans la Proposition 2.1.10, alors l'inégalité (2.1.9) est la forme standard du Lemme de Van Der Corput .

# Chapitre 3

## Continuité de l'opérateur de Hilbert et presque-de Hilbert

### 3.1 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$

#### 3.1.1 Introduction et théorème de continuité

Considérons l'application  $\gamma : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < R < \infty$  avec  $\gamma \in C^N([-R, R], \mathbb{R})$  ( $N$  très grand).

Si  $\varepsilon \in ]0, R[$ , on définit l'opérateur de Hilbert le long d'une courbe par la formule

$$H_R f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad (\forall f \in D(\mathbb{R})). \quad (3.1.1)$$

On sait que si  $\gamma(t) = t$ , alors :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} f(x - t) \frac{dt}{t}$  existe en norme  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 < p < \infty$ . (voir [S<sub>1</sub>, p.35]).

On sait aussi que si  $\gamma : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction impaire, positive lorsque  $t \in [0, R]$  et  $\gamma''(t) > 0$  pour tout  $t \in ]0, R[$ , alors  $H_R$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  (voir [MO1] ou [SW]).

**Définition 3.1.16.** On dit que  $\gamma$  est une courbe à croissance rapide si elle possède les propriétés suivantes

- (1)  $t \mapsto D^k \gamma(t)$  positive et croissante sur  $[0, R]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,
- (2)  $D^1 \gamma(0) = 0$ , et  $\alpha_k(0) = 0$ ,  $\forall k \geq 2$ .

**Remarque 3.1.17.** ([SW, p.1284])

Soient  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , et  $t \mapsto \gamma(t)$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , alors

*i)*  $x \mapsto f(x - \gamma(t))$  et  $t \mapsto f(x - \gamma(t))$  sont mesurables.

*ii)*  $t \mapsto f(x - \gamma(t))$  appartient à  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

*iii)* L'opérateur  $H_R$  de Hilbert est bien défini.

En effet, on pose  $f(x - \gamma(t)) = f \circ h(x)$ , où  $h(x) = x - \gamma(t)$ . On a  $x \mapsto h(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc mesurable sur  $\mathbb{R}$  et on a aussi  $x \mapsto f(x)$  mesurable sur  $\mathbb{R}$ , d'où *i)*.

On fait la même chose pour la fonction  $t \mapsto f(x - \gamma(t))$ .

Pour *ii)*, soient  $K_1, K_2$  deux compacts mesurables dans  $\mathbb{R}$ .

Puisque la fonction  $t \mapsto \|f(\cdot - \gamma(t))\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}_x)}$  est continue sur  $K_2$ , alors il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$\|f(\cdot - \gamma(t))\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}_x)} \leq c_0,$$

par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \times K_2} |f(x - \gamma(t))| dx dt &= \int_{K_2} \|f(\cdot - \gamma(t))\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R})} dt \\ &\leq c_0 \text{mes} K_2 < \infty, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

De *(i)* et *(ii)* on obtient *(iii)*.

On s'intéresse maintenant à la continuité de l'opérateur  $H_R$  (on le définit sous la forme tronquée)

$$H_{\varepsilon,R}(f)(x) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}). \quad (3.1.2)$$

**Théorème 3.1.18.** *Soit  $\gamma$  une courbe à croissance rapide et impaire, alors*

*i)  $H_{\varepsilon,R}$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$ , i.e.*

$$\exists c_0 > 0, \quad \|H_{\varepsilon,R}f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

*ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f = H_Rf$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$  et on a*

$$\|H_Rf\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants

### 3.1.2 Lemmes

**Lemme 3.1.19.** *Soit  $\gamma$  une courbe à croissance rapide, alors on a*

$$D^1\gamma(t) \geq \frac{\alpha_1(t)}{t\beta_1(t)}\gamma(t),$$

où  $t \in [0, R]$ .

**Démonstration.** Par le théorème des accroissements finis et la croissance de la fonction

$t \mapsto D^1\gamma(t)$ , on a

$$D^1\gamma(t) \geq \frac{\alpha_1(t)}{t\beta_1(t)}\gamma(t).$$

■

**Lemme 3.1.20.** *Soient*

$$\beta_2 = \delta D^1\gamma, \quad (\delta > 0). \quad (3.1.3)$$

et

$$f(t) = \xi\gamma(t),$$

où  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, R]$ , alors :

$$|D^1 f(t)| \geq \xi D^1 \gamma(t), \quad (\forall t \in [0, R]).$$

**Corollaire 3.1.21.** Soit  $f(t) = \xi\gamma(t)$ , avec  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, R]$

on pose

$$\beta_2 = \delta D^1 \gamma, \quad (\delta > 0).$$

Alors on a

$$|D^1 f(t)| = |\xi| D^1 \gamma(t).$$

**Démonstration.** En appliquant directement le Lemme précédent. ■

**Lemme 3.1.22.** Pour toute fonction  $f$  dans  $S(\mathbb{R})$  on a

$$\mathcal{F}(H_{\varepsilon, R} f)(\xi) = m_{\varepsilon, R}(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

où

$$m_{\varepsilon, R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}.$$

**Démonstration.** Appliquons le théorème de Fubini, on obtient

$$\mathcal{F}(H_{\varepsilon, R} f)(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} \frac{1}{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x - \gamma(t)) dx \right\} dt.$$

On pose  $u = x - \gamma(t)$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\xi(u+\gamma(t))} du = \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi\gamma(t)}. \quad \text{CQFD}$$

■

**Lemme 3.1.23.** *Formule de Plancherel-Parseval*

$$\|\mathcal{F}g\|_2 = (2\pi)^{1/2}\|g\|_2, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}).$$

**Démonstration.** Pour toute fonction  $h$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(g), h \rangle_{L^2 \times L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi) \overline{h(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}_\xi} \overline{h(\xi)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_x} e^{-ix\xi} g(x) dx \right\} d\xi. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(g), h \rangle_{L^2 \times L^2} &= \int_{\mathbb{R}_x} g(x) \left\{ \overline{\int_{\mathbb{R}_\xi} e^{ix\xi} h(\xi) d\xi} \right\} dx \\ &= (2\pi) \int_{\mathbb{R}_x} g(x) \overline{\mathcal{F}^{-1}(h)}(x) dx \\ &= (2\pi) \langle g, \mathcal{F}^{-1}(h) \rangle_{L^2 \times L^2}, \end{aligned}$$

il suffit de prendre  $h = \widehat{g}$  pour obtenir le résultat. ■

### 3.1.3 Preuve du théorème de continuité

**Démonstration. Preuve de (i)**

En appliquant à (3.1.2) successivement les Lemme (3.1.22) et (3.1.23), on obtient

$$m_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}. \quad (3.1.4)$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}). \quad (3.1.5)$$

Comme  $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$ , un calcul élémentaire montre que la fonction  $h \mapsto \int_0^h \frac{\sin u}{u} du$  est croissante et majorée par  $\frac{\pi}{2}$  sur  $[0, \infty[$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} m_{\varepsilon,R}(\xi) &= -2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin(t\xi)}{t} dt \\ &= -2i \operatorname{sgn}(\xi) \int_{\varepsilon|\xi}^{R|\xi} \frac{\sin u}{u} du, \end{aligned}$$

alors

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| = 2 \int_{\varepsilon|\xi}^{R|\xi} \frac{\sin u}{u} du \leq \pi.$$

**Preuve de (ii)**

Pour montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R} f = H_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$ , il suffit de montrer que  $(H_{\varepsilon,R} f)_{\varepsilon > 0}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Existence**

Appliquons les lemmes (3.1.22) et (3.1.23) à la suite de fonctions

$$(H_{\varepsilon,R} f - H_{\varepsilon',R} f)_{\varepsilon, \varepsilon'}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

pour  $\varepsilon > \varepsilon'$ , nous obtenons

$$\mathcal{F}(H_{\varepsilon,R} f - H_{\varepsilon',R} f)(\xi) = m_{\varepsilon, \varepsilon'}(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi)$$

où

$$m_{\varepsilon, \varepsilon'}(\xi) = -2i \int_{\varepsilon'}^\varepsilon \frac{\{\sin(\xi \cdot \gamma(t))\}}{t} dt.$$

$\forall \varepsilon' : 0 < \varepsilon' < 1$ , on a

$$\begin{aligned} |m_{\varepsilon, \varepsilon'}(\xi)| &\leq 2 \int_{1-\varepsilon'}^{1+\varepsilon} \frac{dt}{t} \\ &= 2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|H_{\varepsilon,R}f - H_{\varepsilon',R}f\|_2 \leq 2\|f\|_2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'}.$$

Passons à la limite quand  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$ , on obtient

$$\|H_{\varepsilon,R}f - H_{\varepsilon',R}f\|_2 \rightarrow 0.$$

Donc  $(H_{\varepsilon,R}f)_{\varepsilon>0}$  converge vers une limite, soit  $L_Rf$ , dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

### Unicité

De la définition de l'opérateur  $H_R$ , on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f(x) = H_Rf(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$ , donc

$$H_Rf(x) = L_Rf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$H_Rf = L_Rf.$$

Montrons maintenant que

$$\|H_Rf\|_2 \leq c_0\|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Appliquons (i) et puisque  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f = H_Rf$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$ , on obtient

$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < R$

$$\|H_Rf\|_2 \leq \|H_{\varepsilon,R}f - H_Rf\|_2 + c_0\|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Ce qui donne lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|H_Rf\|_2 \leq c_0\|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

**CQFD**



### 3.1.4 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R})$

**Théorème 3.1.24.** *Soit  $\gamma$  une courbe à croissance rapide et impaire, alors*

*iii)  $H_{\varepsilon,R}$  est bornée sur  $H^s(\mathbb{R})$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$ .*

$$i.e., \exists c_0 > 0, \quad \|H_{\varepsilon,R}f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

*4i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f = H_Rf$  existe en norme  $H^s(\mathbb{R})$  et de plus*

$$\|H_Rf\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

**Démonstration.** Appliquons le théorème de Fubini et le Lemme 3.1.22, on obtient

$$\mathcal{F}\{(I - \Delta)^{s/2} H_{\varepsilon,R}f\}(\xi) = m_{\varepsilon,R}(\xi) \mathcal{F}\{(I - \Delta)^{s/2} f\}(\xi), \quad \forall f \in S(\mathbb{R}) \quad (3.1.6)$$

où

$$m_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}.$$

Comme dans la partie 3.1.3, on a démontré que

$$\exists c_0 > 0 : |m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c_0, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}).$$

Combinons cette inégalité et (3.1.6), on obtient

$$\|H_{\varepsilon,R}f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f = H_Rf$  existe dans  $H^s(\mathbb{R})$  ( grâce au Lemme 3.1.23 ) il suffit donc d'écrire

$$\|H_Rf\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|H_{\varepsilon,R}f - H_Rf\|_{H^s(\mathbb{R})} + c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}),$$

et de passer à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour obtenir

$$\|H_R f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

■

## 3.2 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

### 3.2.1 Introduction et théorème de continuité

Considérons l'application (vecteur)  $\gamma : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $0 < R < \infty$ , où

$\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$  avec  $\gamma \in C^N([-R, R], \mathbb{R}^2)$  ( $N$  très grand).

Si  $\varepsilon \in ]0, R[$ , on définit l'opérateur de Hilbert le long d'une courbe par la formule

$$H_R f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}^2). \quad (3.2.7)$$

**Définition 3.2.25.** On dit que  $\gamma$  est une courbe à croissance rapide si elle possède les propriétés suivantes :

- 1)  $t \mapsto D^k \gamma_j(t)$  positive et croissante sur  $[0, R]$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,
- 2)  $D^1 \gamma_j(0) = 0$ ,  $\forall j, j = 1, 2$  et  $\alpha_k(0) = 0$ ,  $\forall k \geq 2$ .

**Remarque 3.2.26.** ([SW, p.1284])

Soient  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ , et  $t \mapsto \gamma(t)$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , alors

*i)*  $x \mapsto f(x - \gamma(t))$  et  $t \mapsto f(x - \gamma(t))$  sont mesurables.

*ii)*  $t \mapsto f(x - \gamma(t))$  appartient à  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  ( $x \in \mathbb{R}^2, p.p$ ).

*iii)* l'opérateur  $H_R$  de Hilbert est bien défini.

En effet, on pose  $f(x - \gamma(t)) = f \circ h(x)$ , où  $h(x) = x - \gamma(t)$ . On a  $x \mapsto h(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , donc mesurable sur  $\mathbb{R}^2$  et on a aussi  $x \mapsto f(x)$  mesurable sur  $\mathbb{R}^2$ , d'où (*i*).

On fait la même chose pour la fonction  $t \mapsto f(x - \gamma(t))$ .

Pour (*ii*), soient  $K_1, K_2$  deux compacts mesurables respectivement dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}$ .

Puisque la fonction  $t \mapsto \|f(\cdot - \gamma(t))\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_x)}$  est continue sur  $K_2$ , alors il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$\|f(\cdot - \gamma(t))\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_x)} \leq c_0,$$

par le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \times K_2} |f(x - \gamma(t))| dx dt &= \int_{K_2} \|f(\cdot - \gamma(t))\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)} dt \\ &\leq c_0 \text{mes} K_2 < \infty, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

De (i) et (ii), on obtient (iii).

On s'intéresse maintenant à la continuité de l'opérateur  $H_R$  (on le définit sous la forme tronquée)

$$H_{\varepsilon,R}(f)(x) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{dt}{t}, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}^2). \quad (3.2.8)$$

**Théorème 3.2.27.** *Soit  $\gamma$  une courbe à croissance rapide et impaire, alors*

i)  $H_{\varepsilon,R}$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$ , i.e.

$$\exists c_0 > 0, \quad \|H_{\varepsilon,R}f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f = H_Rf$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et on a

$$\|H_Rf\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants

### 3.2.2 Lemmes

**Lemme 3.2.28.** *Soit  $\gamma$  une courbe à croissance rapide, alors on a*

$$D^2\gamma_2(t) \geq \frac{\alpha_1(t)\alpha_2(t)}{t^2\beta_1(t)\beta_2(t)}\gamma_2(t),$$

où  $t \in [0, R]$ .

**Démonstration.** Le théorème des accroissements finis et la définition 3.2.24 impliquent

$$\gamma_2 \leq t\gamma_2'(t), \quad \forall t > 0,$$

on fait la même chose à la fonction  $s \mapsto \frac{D^1\gamma_2}{\beta_2}(s)$ , pour tout  $s \in [0, t]$  et puisque  $\alpha_2$  est décroissante, alors

$$\alpha_2(t)\frac{D^1\gamma_2}{\beta_2}(t) \leq tD^2\gamma_2(\xi) \quad (0 < \xi < t),$$

ce qui donne

$$D^2\gamma_2(t) \geq \frac{\alpha_1(t)\alpha_2(t)}{t^2\beta_1(t)\beta_2(t)}\gamma_2(t).$$

■

**Lemme 3.2.29.** *Soient*

$$\beta_{j+1} = \delta D^j\gamma_j, \quad \text{pour } j = 1, 2, \quad (\delta > 0). \quad (3.2.9)$$

et

$$f(t) = \xi_1\gamma_1(t) + \xi_2\gamma_2(t),$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in [0, R]$ , alors

$$\exists \nu : 1 \leq \nu \leq 2 : |D^2f(t)| \geq \xi_\nu D^2\gamma_\nu(t), \quad \forall t \in [0, R].$$

**Corollaire 3.2.30.** Soit  $f(t) = \xi_1 t + \xi_2 \gamma_2(t)$ , avec  $\xi \in \mathbb{R}^2$  et  $t \in [0, R]$ . Pour  $j = 1, 2$  on pose

$$\beta_{j+1} = \delta D^j \gamma_j, \quad (\delta > 0).$$

Alors on a

$$|D^2 f(t)| = |\xi_2| D^2 \gamma_2(t).$$

**Démonstration.** En appliquant directement le Lemme précédent. ■

**Lemme 3.2.31.** Pour toute fonction  $f$  dans  $S(\mathbb{R}^2)$ , on a

$$\mathcal{F}(H_{\varepsilon, R} f)(\xi) = m_{\varepsilon, R}(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

où

$$m_{\varepsilon, R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}.$$

**Démonstration.** Appliquons le théorème de Fubini, on obtient

$$\mathcal{F}(H_{\varepsilon, R} f)(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} \frac{1}{t} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi \cdot x} f(x - \gamma(t)) dx \right\} dt.$$

On pose  $u = x - \gamma(t)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u) e^{-i\xi \cdot (u + \gamma(t))} du = \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi \cdot \gamma(t)}. \quad \text{CQFD}$$

**Lemme 3.2.32.** Formule de Plancherel-Parseval

$$\|\mathcal{F}g\|_2 = (2\pi) \|g\|_2, \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

**Démonstration.** Pour toute fonction  $h$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(g), h \rangle_{L^2 \times L^2} &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{g}(\xi) \overline{h(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}_\xi^2} \overline{h(\xi)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_x^2} e^{-ix \cdot \xi} g(x) dx \right\} d\xi. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(g), h \rangle_{L^2 \times L^2} &= \int_{\mathbb{R}_x^2} g(x) \left\{ \overline{\int_{\mathbb{R}_\xi^2} e^{ix \cdot \xi} h(\xi) d\xi} \right\} dx \\ &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}_x^2} g(x) \overline{\mathcal{F}^{-1}(h)}(x) dx \\ &= (2\pi)^2 \langle g, \mathcal{F}^{-1}(h) \rangle_{L^2 \times L^2}, \end{aligned}$$

il suffit de prendre  $h = \widehat{g}$  pour obtenir le résultat. ■

### 3.2.3 Preuve du théorème de continuité

**Démonstration. Preuve de (i)**

Appliquons à (3.2.8) successivement les lemmes 3.2.31 et 3.2.32, on trouve

$$m_{\varepsilon, R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}. \quad (3.2.10)$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$|m_{\varepsilon, R}(\xi)| \leq c, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^2). \quad (3.2.11)$$

On a  $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t))$  et  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,

en écrivant (3.2.10) sous la forme

$$\left\{ \int_{\varepsilon}^R + \int_{-R}^{-\varepsilon} \right\} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t} = I_1 + I_2.$$

En décomposant  $I_1$  en :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\varepsilon}^a \{e^{-i\xi\gamma(t)} - e^{-i\xi_1 t}\} \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon}^a e^{-i\xi_1 t} \frac{dt}{t} + \int_a^R e^{-i\xi\gamma(t)} \frac{dt}{t} \\ &= I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned}$$

avec  $a$  est défini par l'équation

$$|\xi_2| \gamma_2(a) = 1.$$

**Estimation de  $I_3$  et  $I_4$ .**

On a

$$|I_4| \leq \int_{\varepsilon}^a |e^{-i\xi_1 t} \frac{dt}{t}| \leq \pi.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} |e^{-i\xi\gamma(t)} - e^{-i\xi_1 t}| &= |e^{-i\xi_2 \gamma_2(t)} - 1| \\ &= 2 \left| \sin \left( \frac{\xi_2 \gamma_2(t)}{2} \right) \right|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq 2 \int_{\varepsilon}^a \left| \sin \left( \frac{\xi_2 \gamma_2(t)}{2} \right) \right| \frac{dt}{t} \\ &\leq |\xi_2| \int_{\varepsilon}^a \frac{\gamma_2(t)}{t} dt, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

les deux hypothèses  $\gamma_2(0) = 0$  et  $\gamma_2'$  croissante, impliquent  $\gamma_2(t) \leq t\gamma_2'(t)$ , d'où le dernier terme de l'inégalité précédente est majoré par

$$|\xi_2| \int_{\varepsilon}^a \gamma_2'(t) dt = |\xi_2| \gamma_2(a) = 1.$$

**Estimation de  $I_5$ .**

Puisque la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $[0, R]$  et grâce au corollaire 2.2.14, on obtient

$$|I_5| \leq \frac{c_0}{a} \left( |\xi_2| D^2 \gamma_2(a) \frac{\beta_1(a)\beta_2(a)}{\alpha_1(a)\alpha_2(a)} \right)^{-1/2}.$$

D'après le Lemme 3.2.31 et le corollaire 3.2.33, on a

$$|I_5| \leq c_0 (|\xi_2| \gamma_2(a))^{-1/2} = c_0.$$

### Estimation de $I_2$ .

De la parité de la fonction  $t \mapsto \gamma(t)$ , on a

$$I_2 = - \int_{\varepsilon}^R e^{i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}$$

on décompose  $I_2 = -(I_6 + I_7 + I_8)$  avec

$$I_6 = \int_{\varepsilon}^a \{e^{i\xi \cdot \gamma(t)} - e^{i\xi_1 t}\} \frac{dt}{t},$$

$$I_7 = \int_{\varepsilon}^a e^{i\xi_1 t} \frac{dt}{t},$$

$$I_8 = \int_a^R e^{i\xi \cdot \gamma(t)},$$

et on estime chaque terme comme dans les cas  $I_3$ ,  $I_4$  et  $I_5$ .

### Preuve de (ii)

Pour montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon, R} f = H_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , il suffit de montrer que  $(H_{\varepsilon, R} f)_{\varepsilon > 0}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

### Existence

En appliquant les lemmes 3.2.31 et 3.2.32 à la suite de fonctions

$$(H_{\varepsilon, R} f - H_{\varepsilon', R} f)_{\varepsilon, \varepsilon'}, \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2))$$

pour  $\varepsilon > \varepsilon'$ , on obtient

$$\mathcal{F}(H_{\varepsilon, R} f - H_{\varepsilon', R} f)(\xi) = m_{\varepsilon, \varepsilon'}(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi)$$

où

$$m_{\varepsilon, \varepsilon'}(\xi) = -2i \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \left\{ \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \right\} \frac{dt}{t}.$$

$\forall \varepsilon' : 0 < \varepsilon' < 1$ , on a

$$\begin{aligned} |m_{\varepsilon, \varepsilon'}(\xi)| &\leq 2 \int_{1-\varepsilon'}^{1+\varepsilon} \frac{dt}{t} \\ &= 2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|H_{\varepsilon, R}f - H_{\varepsilon', R}f\|_2 \leq 2\|f\|_2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'}.$$

Passons à la limite quand  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$ , on obtient

$$\|H_{\varepsilon, R}f - H_{\varepsilon', R}f\|_2 \rightarrow 0.$$

Donc  $(H_{\varepsilon, R}f)_{\varepsilon > 0}$  converge vers une limite, soit  $L_R f$ , dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

### Unicité

De la définition de l'opérateur  $H_R$ , on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon, R}f(x) = H_R f(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$ , donc

$$H_R f(x) = L_R f(x), \quad (\forall x \in \mathbb{R}^2)$$

c'est-à-dire

$$H_R f = L_R f.$$

Montrons maintenant que

$$\|H_R f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

En appliquant (i) et puisque  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon, R}f = H_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , on obtient

$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < R$

$$\|H_R f\|_2 \leq \|H_{\varepsilon, R}f - H_R f\|_2 + c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Ce qui donne lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|H_R f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{R}^2)). \quad \text{CQFD}$$

■

### 3.2.4 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R}^2)$

**Théorème 3.2.33.** *Soit  $\gamma$  une courbe à croissance rapide et impaire, alors*

*iii)  $H_{\varepsilon,R}$  est bornée sur  $H^s(\mathbb{R}^2)$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$ .*

$$i.e. \exists c_0 > 0, \quad \|H_{\varepsilon,R} f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

*4i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R} f = H_R f$  existe en norme  $H^s(\mathbb{R}^2)$  et de plus*

$$\|H_R f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

**Démonstration.** Appliquons le théorème de Fubini et le Lemme 3.2.31, on obtient

$$\mathcal{F} \{ (I - \Delta)^{s/2} H_{\varepsilon,R} f \} (\xi) = m_{\varepsilon,R}(\xi) \mathcal{F} \{ (I - \Delta)^{s/2} f \} (\xi). \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^2) \quad (3.2.13)$$

où

$$m_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{dt}{t}.$$

Comme dans la partie 3.2.3, on a démontré que

$$\exists c_0 > 0 : |m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c_0, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^2).$$

Combinons cette inégalité et (3.2.13), on obtient

$$\|H_{\varepsilon,R} f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon,R}f = H_Rf$  existe dans  $H^s(\mathbb{R}^2)$  (grâce au Lemme 3.2.32) il suffit donc d'écrire

$$\|H_Rf\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq \|H_{\varepsilon,R}f - H_Rf\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} + c_0\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2),$$

et de passer à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , pour obtenir

$$\|H_Rf\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

■

### 3.3 Continuité de l'opérateur de presque-de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$

#### 3.3.1 L'opérateur de presque-de Hilbert

Nous allons étudier la continuité de l'opérateur de presque-de Hilbert sur  $L^2(\mathbb{R})$ , ce problème est plus général que celui qui a été étudié précédemment.

On considère deux applications  $\gamma \in C^N([-R, R], \mathbb{R})$ ,  $N$  très grand et  $\omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ .

**Définition 3.3.34.** On appelle opérateur d'intégrale singulière presque -de Hilbert tout opérateur de la forme

$$\tilde{H}_{\varepsilon,R}f(x) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}). \quad (3.3.14)$$

**Remarque 3.3.35.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_x)$ , alors

*i)*  $x \mapsto \omega(t)f(x - \gamma(t))$  et  $t \mapsto \omega(t)f(x - \gamma(t))$  sont mesurables,

*ii)*  $t \mapsto \omega(t)f(x - \gamma(t))$  appartient à  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  avec  $x \in \mathbb{R}$ .

En effet la fonction  $t \mapsto \omega(t)$  est continue donc mesurable et comme dans la Remarque 3.1.17 il est facile d'obtenir *i)* et *ii)*.

**Remarque 3.3.36.**  $\tilde{H}_{\varepsilon,R}f$  est bien défini grâce à la Remarque 3.3.35.

### 3.3.2 Un résultat de continuité sur $L^2(\mathbb{R})$

**Théorème 3.3.37.** *On suppose que*

*i)  $\gamma$  à croissance rapide et impaire,*

*ii)  $\omega$  une fonction paire et bornée telle que  $\frac{\omega(t)}{t}$  décroissante sur  $[0, R]$ .*

*Alors*

*iii)  $\tilde{H}_{\varepsilon, R}$  est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  sur  $L^2(\mathbb{R})$*

*4i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon, R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$  et de plus*

$$\|\tilde{H}_R f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

**Démonstration. Preuve de iii)**

Par un calcul direct, on obtient

$$m_{\varepsilon, R}(\xi) = -2i \int_{\varepsilon}^R \omega(t) \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \frac{dt}{t}.$$

Il suffit de démontrer qu'il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$|m_{\varepsilon, R}(\xi)| \leq c_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R].$$

On a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i} m_{\varepsilon, R}(\xi) &= \left\{ \int_{\varepsilon}^a + \int_a^R \right\} \omega(t) \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \frac{dt}{t} \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où  $a$  est défini par l'équation

$$|\xi| \frac{\gamma(a)}{\omega(a)} = 1.$$

**Estimation de  $I_1$** 

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{\varepsilon}^a |\omega(t) \sin(\xi \cdot \gamma(t))| \frac{dt}{t} \\
&\leq |\xi| \|\omega\|_{\infty} \int_{\varepsilon}^a \frac{\gamma(t)}{t} dt \\
&\leq |\xi| \|\omega\|_{\infty} \int_0^a \gamma'(t) dt \\
&= |\xi| \gamma(a) \|\omega\|_{\infty} \leq \|\omega\|_{\infty}^2.
\end{aligned}$$

**Estimation de  $I_2$** 

Si  $a = R$  alors  $I_2 = 0$

Si  $0 < a < R$  :

$$\left| \int_a^R \omega(t) \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \frac{dt}{t} \right| = \frac{1}{|\xi|} \left| \int_a^R \frac{\omega(t)}{t\gamma'(t)} d(\cos(\xi \cdot \gamma(t))) \right|.$$

Par intégration par partie, on obtient

$$|I_2| \leq \frac{1}{|\xi|} \left\{ \frac{\omega(R)}{R\gamma'(R)} + \frac{\omega(a)}{a\gamma'(a)} + \int_a^R \left| d \left( \frac{\omega(t)}{t\gamma'(t)} \right) \right| \right\}.$$

Puisque la fonction  $t \longrightarrow \frac{\omega(t)}{t\gamma'(t)}$  est décroissante, alors

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\omega(t)}{t\gamma'(t)} \right) \leq 0$$

d'où

$$|I_2| \leq \frac{2}{|\xi|} \frac{\omega(a)}{a\gamma'(a)} \leq \frac{2}{|\xi|} \frac{\omega(a)}{\gamma(a)} = 2,$$

ce qui montre que

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq 2(2 + \|\omega\|_{\infty}^2), \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}).$$

**Preuve de 4i)**

D'après le résultat établi en *ii*) du théorème 3.1.18, il est clair que

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$ , on utilise seulement l'hypothèse  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$ . ■

**Théorème 3.3.38.** *On suppose que*

*i)  $\gamma$  à croissance rapide et impaire,*

*5i)  $\omega$  paire,  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $\omega' \in L^1(\mathbb{R})$ .*

*Alors*

*iii)  $\tilde{H}_{\varepsilon,R}$  est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  sur  $L^2(\mathbb{R})$*

*4i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$  et de plus*

$$\|\tilde{H}_R f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

**Démonstration. Preuve de iii)**

Pour trouver l'inégalité

$$\|\tilde{H}_{\varepsilon,R} f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

il suffit de montrer qu'il existe  $c_0 > 0$  (ne dépend pas de  $\varepsilon$  et  $R$ ) tel que

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R].$$

Par intégration par partie, et d'après l'inégalité (3.1.5), on a

$$\left| \int_{\varepsilon < |s| \leq t} e^{-i\xi \cdot \gamma(s)} \frac{ds}{s} \right| \leq c_0, \quad (\forall t : \varepsilon < |s| \leq t).$$

D'où

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c_0 (\|\omega\|_\infty + \|\omega'\|_1).$$

**Preuve de 4i)**

Pour prouver que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R})$ , on applique le résultat ii)

du théorème 3.1.18 et l'hypothèse  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$ . ■

Nous terminons cette partie par deux exemples d'une fonction  $\omega$ , telles que  $\omega$  soit positive, paire et  $\frac{\omega(t)}{t}$  a une singularité en 0 :

1)  $\omega(t) = (1 + |t|^\alpha)^{-\beta}$  avec  $\alpha, \beta > 0$ .

2)  $\omega(t) = e^{-|t|^\alpha}$   $\alpha > 0$ .

### 3.3.3 Continuité de l'opérateur presque-de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R})$

On imite le résultat de la partie 3.1.4 pour montrer la continuité de l'opérateur  $\tilde{H}_R$  sur  $H^s(\mathbb{R})$ .

**Théorème 3.3.39.** *On suppose que*

*i)  $\gamma$  une courbe à croissance rapide et impaire,*

*ii)  $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$  décroissante sur  $[0, N]$ , tel que  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$  paire.*

*Alors*

*6i)  $\tilde{H}_{\varepsilon,R}$  est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  sur  $H^s(\mathbb{R})$ .*

*7i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $H^s(\mathbb{R})$  et de plus*

$$\|\tilde{H}_R f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

**Démonstration. Preuve de 6i)**

En utilisant le résultat du Lemme 3.1.22, alors pour tout  $f \in S(\mathbb{R})$ , on a

$$\mathcal{F} \left( (I - \Delta)^{s/2} \tilde{H}_{\varepsilon,R} f \right) (\xi) = m_{\varepsilon,R}(\xi) \mathcal{F} \left( (I - \Delta)^{s/2} f \right) (\xi)$$

où

$$m_{\varepsilon,R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{\omega(t)}{t} dt$$

et grâce aux hypothèses *i)* et *ii)* du théorème 3.3.37, on a

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R])$$

alors

$$\|\tilde{H}_{\varepsilon,R}f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

**Preuve de 7i)**

D'après le résultat (4i) du théorème 3.3.37, il est évident que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R}f = \tilde{H}_Rf$$

existe en norme  $H^s(\mathbb{R})$  d'où

$$\|\tilde{H}_Rf\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

■

**Remarque 3.3.40.** Pour  $\gamma(t) = t$  et  $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$ . Alors  $\tilde{H}_\varepsilon$  est borné sur  $H^s(\mathbb{R})$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$ .

## 3.4 Continuité de l'opérateur de presque-de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

### 3.4.1 L'opérateur de presque-de Hilbert

On considère deux applications  $\gamma \in C^N([-R, R], \mathbb{R}^2)$  et  $\omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  avec  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  et  $N$  très grand.

**Définition 3.4.41.** On appelle opérateur d'intégrale singulière presque-de Hilbert tout opérateur de la forme

$$\tilde{H}_{\varepsilon,R}f(x) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} f(x - \gamma(t)) \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}^2). \quad (3.4.15)$$

**Remarque 3.4.42.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_x)$ , alors

*i)*  $x \mapsto \omega(t)f(x - \gamma(t))$  et  $t \mapsto \omega(t)f(x - \gamma(t))$  sont mesurables,

*ii)*  $t \mapsto \omega(t)f(x - \gamma(t))$  appartient à  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  ( $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $p.p$ ).

En effet la fonction  $t \mapsto \omega(t)$  est continue donc mesurable et comme il est indiqué dans la Remarque 3.2.26 il est facile d'obtenir (i) et (ii).

**Remarque 3.4.43.**  $\tilde{H}_{\varepsilon,R}f$  est bien défini grâce à la Remarque 3.4.42.

### 3.4.2 Un résultat de continuité sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

**Théorème 3.4.44.** *On suppose que*

*i)*  $\gamma$  à croissance rapide et impaire,

*ii)*  $\omega$  une fonction paire et bornée telle que  $\frac{\omega(t)}{t}$  décroissante sur  $[0, R]$ .

Alors

*iii)*  $\tilde{H}_{\varepsilon,R}$  est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$

*4i)*  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R}f = \tilde{H}_Rf$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et de plus

$$\|\tilde{H}_Rf\|_2 \leq c_0\|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

**Démonstration. Preuve de (iii)**

Par un calcul direct, on obtient

$$m_{\varepsilon,R}(\xi) = -2i \int_{\varepsilon}^R \omega(t) \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \frac{dt}{t}.$$

Il suffit de démontrer qu'il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R],$$

Si  $\xi_2 = 0$  on a  $\xi \cdot \gamma(t) = \xi_1 \gamma_1(t)$ . On obtient

$$|m_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R].$$

Si  $\xi_2 \neq 0$ , alors  $\xi \cdot \gamma(t) = \xi_1 \gamma_1(t) + \xi_2 \gamma_2(t)$

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon}^c \omega(t) \{ \sin(\xi \cdot \gamma(t)) - \sin(\xi_1 \gamma_1(t)) \} \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon}^c \omega(t) \sin(\xi_1 \gamma_1(t)) \frac{dt}{t} + \int_c^R \omega(t) \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \frac{dt}{t} \\ &= I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned}$$

où  $c$  défini par l'équation

$$|\xi_2| \frac{\gamma_2(c)}{\omega(c)} = 1.$$

**Estimation de  $I_5$ .**

Si  $c = R$  alors  $I_5 = 0$ .

Si  $0 < c < R$ , on applique successivement le corollaire 2.2.14 (puisque  $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$  est décroissante) sur le Lemme 3.2.28 et le corollaire 3.2.30, on obtient

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_c^R \sin(\xi \cdot \gamma(t)) \frac{\omega(t)}{t} dt \right| \\ &\leq c_0 \frac{\omega(c)}{c} \left( |\xi_2| \frac{\gamma_2(c)}{c^2} \right)^{-1/2} \\ &= c_0 (\omega(c))^{1-1/2} \leq c_0 \|\omega\|_{\infty}^{1/2}. \end{aligned}$$

**Estimation de  $I_3$  et  $I_4$ .**

On obtient immédiatement

$$|I_4| \leq c_0.$$

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{\varepsilon}^c \omega(t) (\sin(\xi \cdot \gamma(t)) - \sin(\xi_1 \gamma_1(t))) \frac{dt}{t} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |\xi_2| \int_{\varepsilon}^c \omega(t) \frac{\gamma_2(t)}{t} dt \\ &\leq \frac{1}{2} |\xi_2| \|\omega\|_{\infty} \int_0^c \gamma_2'(t) dt, \end{aligned}$$

d'où

$$|I_3| \leq \frac{1}{2} \|\omega\|_{\infty}^2.$$

**Preuve de 4i)**

D'après le résultat (ii) du théorème 3.2.27, il est évident que

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon, R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , on utilise seulement l'hypothèse  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$ . ■

**Théorème 3.4.45.** *On suppose que*

i)  $\gamma$  à croissance rapide et impaire,

5i)  $\omega$  paire,  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $\omega' \in L^1(\mathbb{R})$ .

Alors

iii)  $\tilde{H}_{\varepsilon, R}$  est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$

4i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon, R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et de plus

$$\|\tilde{H}_R f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

**Démonstration. Preuve de iii)**

Pour trouver l'inégalité

$$\|\tilde{H}_{\varepsilon, R} f\|_2 \leq c_0 \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

il suffit de montrer qu'il existe  $c_0 > 0$  ( ne dépend pas de  $\varepsilon$  et  $R$  ) tel que

$$|m_{\varepsilon, R}(\xi)| \leq c_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R].$$

Par intégration par partie, et d'après l'inégalité (3.2.11), on a

$$\left| \int_{\varepsilon < |s| \leq t} e^{-i\xi \cdot \gamma(s)} \frac{ds}{s} \right| \leq c_0, \quad (\forall t : \varepsilon < |s| \leq t).$$

D'où

$$|m_{\varepsilon, R}(\xi)| \leq c_0 (\|\omega\|_\infty + \|\omega'\|_1).$$

**Preuve de 4i)**

Pour prouver que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon, R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , on applique le résultat

(ii) du théorème 3.2.27 et l'hypothèse  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$ . ■

Nous terminons cette partie par deux exemples d'une fonction  $\omega$ , telle que  $\omega$  soit positive, paire et  $\frac{\omega(t)}{t}$  a une singularité en 0 :

$$1) \omega(t) = (1 + |t|^{\alpha_1})^{-\beta_1} \cdot (1 + |t|^{\alpha_2})^{-\beta_2} \quad \text{avec } \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

$$2) \omega(t) = e^{-(|t|^{\alpha_1} + |t|^{\alpha_2})} \quad \text{avec } \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

### 3.4.3 Continuité de l'opérateur presque-de Hilbert sur $H^s(\mathbb{R}^2)$

On imite le résultat de la partie 3.2.4 pour montrer la continuité de l'opérateur  $\tilde{H}_R$  sur  $H^s(\mathbb{R}^2)$ .

**Théorème 3.4.46.** *On suppose que*

i)  $\gamma$  une courbe à croissance rapide et impaire,

ii)  $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$  décroissante sur  $[0, N]$ , tel que  $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$  paire.

Alors :

6i)  $\tilde{H}_{\varepsilon, R}$  est borné uniformément par rapport à  $\varepsilon$  et  $R$  sur  $H^s(\mathbb{R}^2)$ .

7i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon, R} f = \tilde{H}_R f$  existe en norme  $H^s(\mathbb{R}^2)$  et de plus

$$\|\tilde{H}_R f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0 \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

**Démonstration. Preuve de 6i)**

En utilisant le résultat du Lemme 3.2.31, alors pour tout  $f \in S(\mathbb{R}^2)$ , on a

$$\mathcal{F} \left( (I - \Delta)^{s/2} \tilde{H}_{\varepsilon, R} f \right) (\xi) = m_{\varepsilon, R}(\xi) \mathcal{F} \left( (I - \Delta)^{s/2} f \right) (\xi),$$

où

$$m_{\varepsilon, R}(\xi) = \int_{\varepsilon < |t| \leq R} e^{-i\xi \cdot \gamma(t)} \frac{\omega(t)}{t} dt$$

et grâce aux hypothèses (i) et (ii) du théorème 3.4.44, on a

$$|m_{\varepsilon, R}(\xi)| \leq c_0, \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \varepsilon \in ]0, R]),$$

alors

$$\|\tilde{H}_{\varepsilon,R}f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

**Preuve de 7i)**

D'après le résultat (4i) du théorème 3.4.44, il est évident que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{H}_{\varepsilon,R}f = \tilde{H}_Rf$$

existe en norme  $H^s(\mathbb{R}^2)$ . D'où

$$\|\tilde{H}_Rf\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq c_0\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

■

**Remarque 3.4.47.** Pour  $\gamma(t) = (t, t^2)$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$ . Alors  $\tilde{H}_\varepsilon$  est borné sur  $H^s(\mathbb{R}^2)$  uniformément par rapport à  $\varepsilon$ .

# Chapitre 4

## Continuité de l'opérateur de Hilbert sur les espaces de Besov

### 4.1 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$

D'après la Proposition 1.5.8. On a

- 1)  $B_{p,p}^s(\mathbb{R}) = F_{p,p}^s(\mathbb{R})$  (c-à-d  $p = q$ ),
- 2)  $H_p^s(\mathbb{R}) = F_{p,2}^s(\mathbb{R})$  ( $q = 2$ ),
- 3)  $B_{p,\min(p,q)}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow F_{p,q}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s(\mathbb{R})$ , ( voir [TH1] ).

Pour  $q = 2$ , on a

$$B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow F_{p,2}^s(\mathbb{R}) = H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}).$$

**Théorème 4.1.48.** *Soit l'opérateur de Hilbert tel que*

$$H_{\varepsilon,R} : B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}) \longrightarrow B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}),$$

*alors  $H_{\varepsilon,R}$  est continue sur l'espace de Besov  $B_{p,\min(p,2)}^s$  dans  $B_{p,\max(p,2)}^s$ .*

**Démonstration.** Puisque  $H_{\varepsilon,R}$  est continue sur  $H^s(\mathbb{R})$ , alors

$$\exists c > 0 : \|H_{\varepsilon,R}f\|_{H^s} \leq c \|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}).$$

Soit  $g$  une distribution tempérée,

puisque  $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R})$ , alors

$$\exists c_1 > 0 : \|g\|_{B_{p,\max(p,2)}^s} \leq c_1 \|g\|_{H^s} \quad \forall g \in B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}), \quad (4.1.1)$$

et puisque  $B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R})$ , alors

$$\exists c_2 > 0 : \|g\|_{H^s} \leq c_2 \|g\|_{B_{p,\min(p,2)}^s} \quad \forall g \in H^s(\mathbb{R}), \quad (4.1.2)$$

d'après l'inégalité (4.1.1), on a

$$\|H_{\varepsilon,R}f\|_{B_{p,\max(p,2)}^s} \leq c_1 \|H_{\varepsilon,R}f\|_{H^s} \leq c \|f\|_{H^s},$$

d'après l'inégalité (4.1.2), on a

$$\|f\|_{H^s} \leq c_2 \|f\|_{B_{p,\min(p,2)}^s},$$

combinons ces deux inégalités, on obtient

$$\exists c_3 > 0 : \|H_{\varepsilon,R}f\|_{B_{p,\max(p,2)}^s} \leq c_3 \|f\|_{B_{p,\min(p,2)}^s} \quad \forall f \in B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}).$$

D'où le résultat. ■

**Remarque 4.1.49.**

i) Dans le cas  $p \leq 2$  :  $\begin{cases} \max(p, 2) = 2, \\ \min(p, 2) = p. \end{cases}$

Alors l'opérateur de Hilbert est continue sur  $B_{p,p}^s(\mathbb{R})$  dans  $B_{p,2}^s(\mathbb{R})$ .

ii) Dans le cas  $p > 2$  :  $\begin{cases} \max(p, 2) = p, \\ \min(p, 2) = 2. \end{cases}$

Alors l'opérateur de Hilbert est continue sur  $B_{p,2}^s(\mathbb{R})$  dans  $B_{p,p}^s(\mathbb{R})$ .

iii) On a

Si  $p = q = r$ , alors  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}) = (B_{p,q}^s)_{l^r}(\mathbb{R})$  ( voir [MA] ).

Pour  $p = q = r = 2$ , on a

$B_{2,2}^s(\mathbb{R}) = (B_{2,2}^s)_{l^2}(\mathbb{R})$ , alors l'opérateur de Hilbert est continue sur  $(B_{2,2}^s)_{l^2}(\mathbb{R})$ .

## 4.2 Continuité de l'opérateur de Hilbert sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$

D'après la Proposition 1.5.8. On a

- 1)  $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^2) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}^2)$  (c-à-d  $p = q$ ),
- 2)  $H_p^s(\mathbb{R}^2) = F_{p,2}^s(\mathbb{R}^2)$  ( $q = 2$ ),
- 3)  $B_{p,\min(p,q)}^s(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s(\mathbb{R}^2)$ , ( voir [TH1] ).

Pour  $q = 2$ , on a

$$B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow F_{p,2}^s(\mathbb{R}^2) = H^s(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}^2).$$

**Théorème 4.2.50.** *Soit l'opérateur de Hilbert tel que*

$$H_{\varepsilon,R} : B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}^2) \longrightarrow B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}^2),$$

alors  $H_{\varepsilon,R}$  est continue sur l'espace de Besov  $B_{p,\min(p,2)}^s$  dans  $B_{p,\max(p,2)}^s$ .

**Démonstration.** Puisque  $H_{\varepsilon,R}$  est continue sur  $H^s(\mathbb{R}^2)$ , alors

$$\exists c > 0 : \|H_{\varepsilon,R}f\|_{H^s} \leq c \|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^2).$$

Soit  $g$  une distribution tempérée,

puisque  $H^s(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}^2)$ , alors

$$\exists c_1 > 0 : \|g\|_{B_{p,\max(p,2)}^s} \leq c_1 \|g\|_{H^s} \quad \forall g \in B_{p,\max(p,2)}^s(\mathbb{R}^2), \quad (4.2.3)$$

et puisque  $B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^2)$ , alors

$$\exists c_2 > 0 : \|g\|_{H^s} \leq c_2 \|g\|_{B_{p,\min(p,2)}^s} \quad \forall g \in H^s(\mathbb{R}^2), \quad (4.2.4)$$

d'après l'inégalité (4.2.3), on a

$$\|H_{\varepsilon,R}f\|_{B_{p,\max(p,2)}^s} \leq c_1 \|H_{\varepsilon,R}f\|_{H^s} \leq c \|f\|_{H^s},$$

d'après l'inégalité (4.2.4), on a

$$\|f\|_{H^s} \leq c_2 \|f\|_{B_{p,\min(p,2)}^s},$$

combinons ces deux inégalités, on obtient

$$\exists c_3 > 0 : \|H_{\varepsilon,R}f\|_{B_{p,\max(p,2)}^s} \leq c_3 \|f\|_{B_{p,\min(p,2)}^s} \quad \forall f \in B_{p,\min(p,2)}^s(\mathbb{R}^2).$$

D'où le résultat. ■

**Remarque 4.2.51.**

i) Dans le cas  $p \leq 2$  : 
$$\begin{cases} \max(p, 2) = 2, \\ \min(p, 2) = p. \end{cases}$$

Alors l'opérateur de Hilbert est continue sur  $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^2)$  dans  $B_{p,2}^s(\mathbb{R}^2)$ .

ii) Dans le cas  $p > 2$  : 
$$\begin{cases} \max(p, 2) = p, \\ \min(p, 2) = 2. \end{cases}$$

Alors l'opérateur de Hilbert est continue sur  $B_{p,2}^s(\mathbb{R}^2)$  dans  $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^2)$ .

iii) On a

Si  $p = q = r$ , alors  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) = (B_{p,q}^s)_{l^r}(\mathbb{R}^2)$  ( voir [MA] ).

Pour  $p = q = r = 2$ , on a

$B_{2,2}^s(\mathbb{R}^2) = (B_{2,2}^s)_{l^2}(\mathbb{R}^2)$ , alors l'opérateur de Hilbert est continue sur  $(B_{2,2}^s)_{l^2}(\mathbb{R}^2)$ .

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons donné une généralisation du Lemme de Van Der Corput. En utilisant une nouvelle procédure de dérivation, et nous avons appliqué ce Lemme à la continuité de l'opérateur de Hilbert et de presque-de Hilbert dans  $L^2$  et  $H^s$ , puis nous avons démontré la continuité de l'opérateur de Hilbert dans les espaces de Besov, ce qui montre que le Lemme de Van Der Corput est réalisé dans les espaces de Besov, mais avec des conditions fortes. Est-ce que le Lemme de Van Der Corput réalisé dans les espace de Lizorkin-Triebel? La question reste posée.

# Bibliographie

- [AS1] **S. Allaoui**,  
Intégrales singulière,  
Doctorat en sciences (2011), Université de Batna.
- [AS2] **S. Allaoui**,  
Boundedness of pseudo-differential operators on Lizorkin-Triebel spaces. Soumis. 2015.
- [AS3] **S. Allaoui**,  
A now characterization of the local uniform Besov spaces. Soumis. 2016.
- [DK] **K.Djeloud**,  
Sur la décomposition dans l'espace de Besov : un cas critique,  
Mémoire de Master (2013-2014), Département de Mathématique et Informatique Université de Laghouat.
- [MA1] **M.Moussai, S.Allaoui**,  
Pseudodifferential operators on localized Besov spaces,  
Acta Mathematica Vietnamica, volume 38. Number 1. 2013, page 8.
- [MA2] **M.Moussai, S.Allaoui**,  
Le Lemme de V.D. Corput pour les intégrales oscillantes,  
Annales de Mathématiques. S.B. Volume 7 (2000).
- [MO1] **M. Moussai**,  
Continuité de certains Opérateurs d'intégrales Singulières " Presque de Hilbert"  
sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

Colloque SMT Tunisie Mai 1995.

[MO2] **M. Moussai,**

Analyse Harmonique dans  $\mathbb{R}^n$ ,

Cours DEA (1996-1997), Département de Mathématiques Centre Universitaire de M'Sila.

[MO3] **M. Moussai,**

$L^p$  Fourier Multipliers and Partial-Differential Equations ,

Colloque SMT 1999, Tunisie, Tabarka 21-24/03/1999.

[NV1] **A. Nagl, J. Vance, S. Wainger et D.Weienberg,**

Hilbert Transformation for Convex Curves,

Vol 50, No.03 (1983).

[NV2] **A. Nagl, J. Vance, S. Wainger et D.Weienberg,**

Maximal Functions for Convex Curves,

Duke Mathematical Journal Vol.52, No.03 (1985).

[NV3] **A. Nagl, J. Vance, S. Wainger et D.Weienberg,**

Transformation for convex Curves in  $\mathbb{R}^n$ ,

American Journal of Mathematics 108 (1986), 485-504.

[S1] **E.M. Stein,**

Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,

Princeton University Press New Jersey 1970.

[SW] **E.M. Stein et S. Wainger,**

Problems in Harmonique analysis related to Curvature,

Bull. Amer. Math. Soc (1978) 1239-1295.

[TH1] **H. Triebel,**

Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.

[TH2] **H. Triebel,**

Theory of function spaces. II. Birkhäuser, Basel, 1992.