الجــــمهورية الـــجزائريـــــة الديمــــــــقراطيــــــــة الشعبيــــة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعـليـــم العــالـــــــتي و البـــحــــث العلـــــمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جــــامعة عمــــــار ثليـــــــجي بالأغـــــــواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كليــــة العلـــوم و الهـنــــدسة

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématique informatique (MI)

Filière : Mathématique

Option : Analyse mathématique

Présenté par :

BABAGHAYOU Soumia

THEME

Equation intégrale de type de convolution

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Encadreur : M.BELABBACI Youcef

Président :

Examinateur :

Examinateur :

Année universitaire 2011-2012

Remerciement

o Je tiens à remercier vivement le professeur Y. BELABBACI, pour avoir accepter de diriger ce travail.

o Je remercie aussi le professeur B.NOUIRI d'avoir accepter la présidence du jury.

o Ainsi qu'aux professeurs B. BENABDERRAHMANE, et A.RAHMOUNE, pour avoir accepter de juger ce travail.

o Et a tous les professeurs, les amis et proches qui m'ont aidé a l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Une équation intégrale est une équation fonctionnelle dons laquelle la fonction inconnue figure sous le signe somme. Les équations les plus répandues sont celles de Fredholm et de Volterra. Leurs résolutions sont différentes en fonction des noyaux.

Le noyau que nous nous proposons d'étudier est de la forme $k(x-y)$.

Ce mémoire a pour objet l'étude de la résolution des équations intégrales de type de convolution, en utilisant les transformées de Fourier ou de Laplace. Il sagit d'équations de la forme :

$$y(x) = f(x) + \int_{\mathbb{R}} k(x-t)y(t)dt.$$

Pour atteindre notre objectif nous avons divisé ce travail en trois chapitres :

Le premier chapitre concerne l'étude des propriétés des transformées de Fourier et de Laplace dans divers espaces fonctionels. Nous commençerons par l'étude des transformées de Fourier dans l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R})$, qui sont bien définies dans cet espace,ainsi que l'inversion de Fourier d'aprés la stabilité de l'espace par rapport à $\mathcal{F}$ (transformée de Fourier). A l'aide du théorème de densité de $S(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout p , nous définissons $\mathcal{F}$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, et justifions la validité des propriétés.On étudie aussi les transformées de Laplace et leurs propriétés.

Au second chapitre nous passerons à la résolution des équations intégrales de Fredholm. Pour celà, nous étudions d'abort le produit de convolution :

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

ses propriétés ; ainsi que les conditions d'existence.

Au troisième chapitre, nous étudions d'autres applications aux équations intégrales de Volterra de type de convolution.

Chapitre I

Etude des propriétés des transformées de Fourier et de Laplace dans divers espaces fonctionnels

1 Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

Définition 1 *On désigne par $S(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz défini par :*

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}(ou\mathbb{R})) : \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x| \to \infty} |x^{\alpha} f^{(\beta)}(x)| = 0\}.$$

Ses éléments seront appelées les bonnes fonctions ou fonctions régulières.

Remarque
Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$: $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.
En effet ; soit $f \in S(\mathbb{R})$ on peut trouver $A > 0$ tel que
$\forall x \in \mathbb{R}$ $|(1 + x^2) f(x)| \leqslant A$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \leqslant A^p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^p} < +\infty[2].$$

Définition 2 *Pour toute $f \in S(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Puisque $|f(x)e^{-ix\xi}| < |f(x)|$ et $f \in S(\mathbb{R})$ donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

converge uniformément, donc la définition est justifiée.

Théorème 1 *Soit $f \in S(\mathbb{R})$.*

1. $\hat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}.i.e$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \xi, \xi_0 \in \mathbb{R} : |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| < \varepsilon.$$

2. $\hat{f}$ est uniformement bornée et on a :

$$\| \hat{f} \|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

Preuve

1. $\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \xi, \xi_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| &= |\int_{\mathbb{R}} f(x) \{ e^{-ix\xi} - e^{-ix\xi_0} \} dx| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-ix\xi} - e^{-ix\xi_0}| dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| | \int_{\xi}^{\xi_0} (-ix) e^{-ix\eta} d\eta | dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |x| |\xi - \xi_0| dx. \end{aligned}$$

Puisque $f \in S(\mathbb{R})$, donc l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| |x| dx < +\infty$$

$$\text{On pose} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{I} \quad \text{où} \quad I = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |x| dx \quad \text{donc} \quad |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} 2. \; \| \hat{f} \|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| &\leqslant \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-ix\xi}| dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx. \end{aligned}$$ □

Remarque (Parité).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \in S(\mathbb{R})$
1. f paire $\Rightarrow \quad \hat{f}$ réelle.
2. f impaire $\Rightarrow \quad \hat{f}$ imaginaire.

Remarque (Linéarité).

Pour tout $(f, g) \in S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha \mathcal{F}(f)(\xi) + \beta \mathcal{F}(g)(\xi) \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1 *Soit $f \in S(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$*

1. $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ *où* $\quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$.
2. $\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.
3. $\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \dfrac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{\xi}{a})$

Preuve

$$1. \quad \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-a) e^{-ix\xi} dx.$$

On pose $y = x - a$ on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i(y+a)\xi} dy \\ &= e^{-ia\xi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\xi} dy \\ &= e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \mathcal{F}(e^{iax} f(x)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iax} f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(\xi - a)x} dx \\ &= \hat{f}(\xi - a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \mathcal{F}(f(ax))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-ix\xi} dx \qquad y = ax \quad donc \quad dx = singn(a) \frac{1}{a} dy \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{y}{a}\xi} dy \\ &= \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{\xi}{a}). \qquad \square \end{aligned}$$

1.1 Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R})$ et dérivabilité

1.1.1 Transformée de Fourier d'une dérivée

Théorème 2 *Soit $f \in S(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$*

1. $\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.
2. $\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Preuve

$$1. \qquad \widehat{f'}(\xi) = \lim_{A\to\infty}\{\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-ix\xi}dx\}$$

par intégration par partie on obtient

$$\widehat{f'}(\xi) = \lim_{A\to\infty}\{f(x)e^{-ix\xi}|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A}(-ix\xi)f(x)e^{-ix\xi}dx\}$$

les limites $\{\lim_{A\to\infty} f(\pm A)\}$ existent et sont nulles.

D'où

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

2. Pour $\widehat{f^{(k)}}$ il suffit de faire une intégration par partie k fois. □

1.1.2 Dérivée d'une transformée de Fourier

Théorème 3 *Soient $f \in S(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi) = (-i)^k\mathcal{F}(x^k f(x))(\xi).$$

Preuve

La fonction $h : \xi \mapsto e^{-ix\xi}f(x)$ est infiniment dérivable et on a

$$h^{(k)}(\xi) = (-ix)^k e^{-ix\xi}f(x)$$

et

$$|h^k(\xi)| = |x^k f(x)|.$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour $k \in \mathbb{N}^*$ et on a

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{(k)}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}(-ix)^k f(x)dx \\
&= (-i)^k \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) e^{-ix\xi} dx \\
&= (-i)^k \mathcal{F}(x^k f(x))(\xi). \qquad \forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 4 *(Riemann-Lebesgue). Si $f \in S(\mathbb{R})$ alors :*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Preuve

Soient $f \in S(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, $\exists a \in \mathbb{R}_+$ assez grand tel que

$$\int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx + \int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx &= -\frac{1}{i\xi} f(x)e^{-ix\xi}|_{-a}^{a} + \frac{1}{i\xi}\int_{-a}^{a} f'(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{1}{i\xi}\{-f(a)e^{-ia\xi} + f(-a)e^{+ia\xi} + \int_{-a}^{a} f'(x)e^{-ix\xi}dx\}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$|\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx| \leqslant \frac{1}{|\xi|}\{|f(a)| + |f(-a)| + \int_{-a}^{a} |f'(x)|dx\}.$$

On note $M = \sup_{x \in [-a,a]} |f'(x)|$ existe car $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc

$$|\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx| \leqslant \frac{1}{|\xi|}\{|f(a)| + |f(-a)| + 2aM\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Donc quand $|\xi| \to \infty$ on a

$$|\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= |\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx + |\int_{-a}^{a} f(x)e^{-ix\xi}dx| + \int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 5 *L'espace $S(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier. i.e.*

$$f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}).$$

Preuve

Soit $f \in S(\mathbb{R})$, donc $\hat{f}$ est infiniment dérivable. On montre que la fonction $\hat{f}$ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. i.e.

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \quad \lim_{|\xi| \to \infty} |\xi|^\alpha |\hat{f}^{(\beta)}(\xi)| = 0.$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Comme f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, les fonctions $x \mapsto (-ix)^\beta f(x)$ et $x \mapsto (-ix)^\beta f(x)$ appartiennent à $S(\mathbb{R})$. En appliquant les théorèmes (3) puis (2), on a $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \hat{f}^{(\beta)}(\xi) &= \xi^\alpha \mathcal{F}[(-xi)^\beta f(x)](\xi) \\ &= \frac{1}{(i)^\alpha} \mathcal{F}[\{(-xi)^\beta f(x)\}^{(\alpha)}](\xi). \end{aligned}$$

Ainsi, le théorème de Riemann-Lebesgue entraîne que

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\xi^\alpha \hat{f}^{(\beta)}(\xi)| = \lim_{|\xi| \to \infty} |\mathcal{F}[\{(-xi)^\beta f(x)\}^{(\alpha)}](\xi)| = 0. \qquad \square$$

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions de $S(\mathbb{R})$, alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont dans $S(\mathbb{R})$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)dy \quad \{Formule \quad d'échange\}.$$

Preuve

En vertu du théorème(1) $\hat{g}$ est bornée. $f\hat{g}$ est donc dans $S(\mathbb{R})$. De même $\hat{f}g \in S(\mathbb{R})$ et puisque $e^{-ixy} f(x)g(y) \in S(\mathbb{R}^{\nvDash})$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\{\int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} g(y)dy\}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx\}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\hat{f}(y)dy. \qquad \square \end{aligned}$$

1.2 Transformée de Fourier inverse

Théorème 6 *(Théorème d'inversion dans $S(\mathbb{R})$). Si $f \in S(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ et on a*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Preuve

Soit $f \in S(\mathbb{R})$ et soit $A \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\xi} dy \} e^{ix\xi} d\xi,$$

D'aprés la convergence de $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, on peut changer l'ordre.On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{i(x-y)\xi} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{-A}^{A} e^{i(x-y)\xi} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{e^{i(x-y)\xi}}{i(x-y)} |_{-A}^{A} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) A \frac{e^{i(x-y)A} - e^{-i(x-y)A}}{i(x-y)A} dy. \end{aligned}$$

On pose $z = (x-y)A \Rightarrow y = -\frac{z}{A} + x \Rightarrow dy = -\frac{dz}{A}$ donc on obtient que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{iz} f(-\frac{z}{A} + x) dz.$$

On a

$$| \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{iz} \right) (f(\frac{-z}{A} + x) - f(x))| < \frac{2}{A} \left| \frac{f(\frac{-z}{A} + x) - f(x)}{\frac{-Z}{A}} \right|.$$

Quand $A \to \infty$; $|\frac{f(-\frac{z}{A}+x)-f(x)}{-\frac{z}{A}}|$ existe car $f \in S(\mathbb{R})$ et $\frac{2}{A} \to 0$ donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) A \frac{e^{i(x-y)A} - e^{-i(x-y)A}}{i(x-y)A} dy \text{ converge uniformément en } A.$$

Donc on peut rentrer la limite, alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{iz}f(x)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{-2i\sin z}{iz}f(x)dz \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}-\frac{-\sin(-z)}{-z}f(x)dz \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(u)}{u}f(x)du.
\end{aligned}$$

Puisque on a

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(u)}{u}du = \pi.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = f(x). \qquad \square$$

Définition 3 *Soit $f \in S(\mathbb{R})$, on définit Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$ par :*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Si on munit $S(\mathbb{R})$ du produit scalaire,

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx.$$

on a le résultat suivant

Théorème 7 *Pour tout $(f,g) \in S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$ on a*

1. $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)d\xi \quad \{Plancherel\}.$$

En particulier

2. $$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi \quad \{Parseval\}.$$

Preuve

Soit $(f,g) \in S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$

1. D'aprés le théorème 6 d'inversion et définition 3, on a $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(x))$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)\overline{g}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\}\overline{g}(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \{\hat{f}(\xi)\int_{\mathbb{R}} \overline{g}(x)e^{ix\xi}d\xi\}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \{\hat{f}(\xi)\overline{\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi}dx}\}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

2. Le point (2) se montre en appliquant (1) avec $f = g$. □

2 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 4 *On désigne par $L^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$ tel que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty.$$

Remarque

$L^1(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé complet muni de la norme

$$\| f \|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

Définition 5 *La transformée de Fourier d'une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Théorème 8 *$S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit : pour toute fonction $f(x)$ de $L^1(\mathbb{R})$, et tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite de fonctions $(g_n(x))_n$ de $S(\mathbb{R})$ telle que $\| g_n - f \|_1 < \varepsilon$.[11]*

(On démontrera ce théorème dans le chapitre 2.)

Théorème 9 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$*

1. $\hat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.i.e

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 : \quad \forall\xi, \xi_0 \in \mathbb{R} : |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| < \varepsilon.$$

2. $\hat{f}$ est uniformément bornée et on a :

$$\| \hat{f} \|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leqslant \| f \|_1 .$$

Preuve

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$;

1. puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc il existe une suite de fonctions $(g_n)_n$ de $S(\mathbb{R})$ telle que $\| g_n - f \|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$.

On a $\widehat{g_n}$ est uniformément continue $\forall n$.i.e

$(\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \xi, \xi_0 \in \mathbb{R} : |\xi - \xi_0| < \delta \Rightarrow |\widehat{g_n}(\xi) - \widehat{g_n}(\xi_0)| < \frac{\varepsilon}{3})$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| &= |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0) + \widehat{g_n}(\xi) - \widehat{g_n}(\xi) + \widehat{g_n}(\xi_0) - \widehat{g_n}(\xi_0)| \\
&\leqslant |\hat{f}(\xi) - \widehat{g_n}(\xi)| + |\hat{f}(\xi_0) - \widehat{g_n}(\xi_0)| + |\widehat{g_n}(\xi) - \widehat{g_n}(\xi_0)| \\
&< \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - f(x)| dx + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< 2 \| g_n - f \|_1 + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. $\| \hat{f} \|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_1 .$ □

2.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et dérivabilité

2.1.1 Transformée de Fourier d'une dérivée

Théorème 10 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue et de classe C^1 par morceaux et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = (i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Si de plus f est de classe C^k par morceaux où $k \in \mathbb{N}$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Preuve

1. $$\widehat{f'}(\xi) = \lim_{A\to\infty}\{\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-ix\xi}dx\}$$

par intégration par partie on obtient

$$\widehat{f'}(\xi) = \lim_{A\to\infty}\{f(x)e^{-ix\xi}|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A}(-ix\xi)f(x)e^{-ix\xi}dx\}$$

les limites $\{\lim_{A\to\infty} f(\pm A)\}$ existent et sont nulles.

En effet $f(\pm A) = \lim_{n\to\infty} g_n(\pm A)$ où $g_n \in S(\mathbb{R})$ et $\lim_{A\to\infty}\{\lim_{n\to\infty} g_n(\pm A)\} = 0$.

D'où

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx. \qquad \square$$

2.1.2 Dérivée d'une transformée de Fourier

Théorème 11 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $x \longmapsto x^k f(x)$ est intégrable pour tout k, alors $\hat{f}$ est de classe C^k et on a pour tout ξ*

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi) = (-i)^k \mathcal{F}(x^k f(x))(\xi).$$

Preuve

La preuve du théorème se fait de la même manière que la preuve du théorème 3

Théorème 12 *(Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Preuve

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$, donc il existe une suite de fonction $(g_n(x))_n$ de $S(\mathbb{R})$ telle que $\| g_n - f \|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \widehat{g_n}(\xi) + \widehat{g_n}(\xi)| &\leqslant |\widehat{g_n}(\xi) - \hat{f}(\xi)| + |\widehat{g_n}(\xi)| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - f(x)|dx + |\widehat{g_n}(\xi)|. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 4, on obtient :

$|(\xi)| \leqslant \| g_n - f \|_1 + \frac{\varepsilon}{2}$
$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ $\square$

Proposition 3 *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)dy \quad \{Formule \quad d'échange\}.$$

Preuve

En vertu du théorème(9) $\hat{g}$ est bornée. $f\hat{g}$ est donc dans $L^1(\mathbb{R})$. De même $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$ et puisque $e^{-ixy}f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\{\int_{\mathbb{R}} e^{-iyx}g(y)dy\}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx\}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\hat{f}(y)dy. \qquad \square\end{aligned}$$

2.2 Transformée de Fourier inverse

Théorème 13 *(Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

appartient à $C^0(\mathbb{R})$ et $f(x) = \varphi(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve

Soit g_n une suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g_n(x) = e^{-\frac{|x|}{n}}$, sa transformée de Fourier est $\widehat{g_n}(\xi) = \frac{2n}{1+n^2\xi 2}$. Puisque les fonctions g_n et $\widehat{g_n}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ donc on peut appliquer la proposition d'échange pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $h : x \mapsto e^{ix\xi}g_n(x)$ comme suit

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{h}(y)dy$$

et d'après le point 2 de la proposition (3) on obtient que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{h}(y)dy &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathcal{F}(e^{ix\xi}g_n(x))(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-\xi)dy.\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$ on peut passer à la limite dans

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g_n(y)e^{iy\xi}dy$$

grâce au théorème de Lebesgue, en effet

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1 \text{ pour tout } x \text{ et } |\hat{f}(y)g_n(y)e^{iy\xi}| \leqslant |\hat{f}(y)|$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g_n(y)e^{iy\xi}dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{iy\xi}dy.$$

Supposons que f est continue en ξ. Il reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-\xi)dy$$

converge vers $2\pi f(\xi)$. Comme $\widehat{g_n} \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}(\xi)d\xi = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{2n}{1+n^2\xi 2}d\xi = 2\pi$$

On pose $z = y-\xi \Rightarrow y = z+\xi \Rightarrow dy = dz$ donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-\xi)dy - 2\pi f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(z+\xi)\widehat{g_n}(z)dz - 2\pi f(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z+\xi)\widehat{g_n}(z)dz - \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\widehat{g_n}(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} [f(z+\xi)-f(\xi)]\widehat{g_n}(z)dz\end{aligned}$$

Comme f est continue en ξ, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|y-\xi| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y)-f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}[f(z+\xi)-f(\xi)]\widehat{g_n}(z)dz &= \int_{|z|\leqslant\eta}[f(z+\xi)-f(\xi)]\widehat{g_n}(z)dz \\ &+ \int_{|z|\geqslant\eta}[f(z+\xi)-f(\xi)]\widehat{g_n}(z)dz.\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}|\int_{|z|\leqslant\eta}[f(z+\xi)-f(\xi)]\widehat{g_n}(z)dz| &\leqslant \int_{|z|\leqslant\eta}|f(z+\xi)-f(\xi)||\widehat{g_n}(z)|dz \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|z|\leqslant\eta}|\widehat{g_n}(z)|dz<\varepsilon.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}|\int_{|z|\geqslant\eta}f(\xi)\widehat{g_n}(z)dz| &= |f(\xi)\int_{|z|\geqslant\eta}\widehat{g_n}(z)dz| \\ &= |f(\xi)||2\pi-4\arctan(n\eta)|.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $\widehat{g_n}$ est paire et décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$$|\int_{|z|\geqslant\eta}f(z+\xi)\widehat{g_n}(z)dz|\leqslant\widehat{g_n}(\eta)\parallel f\parallel_1 .$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}|2\pi-4\arctan(n\eta)|=0$ et $\lim_{n\to\infty}\widehat{g_n}(\eta)=0$ le théorème est donc démontré. $\square$

3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Définition 6 *On désigne par $L^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}(ou\mathbb{C})$ telles que*

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx<+\infty.$$

Remarque

$L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f|g)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g}(x)dx.$$

Et de la norme

$$\parallel f\parallel_2=(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx)^{1/2}$$

Théorème 14 *Pour toute fonction $f(x)$ de $L^2(\mathbb{R})$, et tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite de fonctions $(g_n(x))_n$ de $S(\mathbb{R})$ telle que $\| g_n - f \|_2 < \varepsilon$.*

(la démonstration est dans le chapitre 2).

Définition 7 *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ est définie comme limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $(g_n)_n$ avec*

$$g_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x)e^{-ix\xi}dx[2].$$

Justification

On pose $f_n = f.\Pi_{[-n,n]}$, avec $\Pi(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x \in [-n,n]; \\ 0 & sinon. \end{cases}$

D'après le théorème de Lebesgue on a

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_2 = 0.$$

Comme $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ on a $g_n = \widehat{f_n}$ et par continuité de la transformée de Fourier on a

$$\lim_{n\to\infty} \| g_n - \hat{f} \|_2 = 0.$$

Remarque

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}f$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite h_n définie par :

$$h_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} f(x)e^{ix\xi}dx.$$

En effet ;

On pose $f_n = f.\Pi_{[-n,n]}$. D'aprés le théorème de Lebesgue on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Comme $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ on a $h_n = \mathcal{F}^{-1}f_n$ et par continuité de la transformée de Fourier inverse on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|h_n - \mathcal{F}^{-1}f\right\|_2 = 0.[2]$$

Théorème 15 *(Transformée de Fourier-Plancherel)*

1. $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ *presque partout.*
2. $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$ $(f|g) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}|\hat{g})$.
3. $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ $\| f \|_2{}^2 = \frac{1}{2\pi}\| \hat{f} \|_2{}^2$.

Preuve

1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, d'après le théorème(14) il existe une suite de fonctions $(f_n(x))_n$ de $S(\mathbb{R})$ telle que $\| f - f_n \|_2 < \varepsilon$. Donc, d'après le théorème(6) on a

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f_n = f_n \qquad (1)$$

et en vertu de la continuité de la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse on peut passer à la limite dans la formule(1), d'où

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f.$$

2. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, d'après le théorème(14) il existe $(f_n(x))_n$ et $(g_n(x))_n$ des suites de fonctions de $S(\mathbb{R})$ telles que $\| f - f_n \|_2 < \varepsilon$ et $\| g - g_n \|_2 < \varepsilon$. Donc, d'après le théorème(7) on a

$$(f_n|g_n) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f_n}|\widehat{g_n}) \qquad (2)$$

et en vertu de la continuité du produit scalaire et de la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse on peut passer à la limite dans la formule(2), d'où

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}|\hat{g}).$$

3. La preuve du point 3 se fait de même manière que du point 2 avec $f = g$.

Proposition 4 *Soient f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Alors $f\hat{g}$ et $g\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\hat{f}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Preuve

D'après le théorème (14), on peut approcher f et g par des suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ de $S(\mathbb{R})$. En vertu de la propositon(2) on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\widehat{f_n}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\widehat{g_n}(x)dx.$$

Donc

$$(g_n|\widehat{f_n}) = (f_n|\widehat{g_n}). \qquad (3)$$

Puisque le produit scalaire est continu donc on peut passer à la limite dans(3). $\square$

3.1 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et dérivabilité

3.1.1 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ d'une dérivée

Théorème 16 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.*

Si f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = (i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux où $k \in \mathbb{N}$ et telle que les dérivée $f^{(k)}$ sont de carré intégrables alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Preuve

1. $$\widehat{f'}(\xi) = \lim_{A\to\infty}\{\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-ix\xi}dx\}$$

par intégration par partie on obtient

$$\widehat{f'}(\xi) = \lim_{A\to\infty}\{f(x)e^{-ix\xi}|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A}(-ix\xi)f(x)e^{-ix\xi}dx\}$$

les limites $\{\lim_{A\to\infty} f(\pm A)\}$ existent et sont nulles.

En effet $f(\pm A) = \lim_{n\to\infty} g_n(\pm A)$ où $g_n \in S(\mathbb{R})$ et $\lim_{A\to\infty}\{\lim_{n\to\infty} g_n(\pm A)\} = 0$.

D'où

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

2. Pour $\widehat{f^{(k)}}$ il suffit de faire une intégration par partie k fois.

Remarque

La dérivée d'une transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ n'a pas de sens. En effet, si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, il n'est pas toujours vrai que $\hat{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ [5].

4 Transformée de Laplace

Définition 8 *On appelle transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, lorsqu'elle existe, la fonction de la variable complexe $p = s + i\sigma$ définie par la relation :*

$$\mathcal{L}(f)(p) = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Définition 9 *On appelle original toute fonction $f(t)$ de la variable réelle t satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *$f(t)$ est continue avec ses dérivées d'ordre suffisamment élevés sur l'axe des t, excepté en certains points en lesquels $f(t)$ ou ses dérivées ont des discontiniutés de première espèce, en outre sur chaque intervalle fini de l'axe des t de tels points ne peuvent être qu'en nombre fini.*
2. *$f(t) = 0$ pour les t négatifs.*
3. *il existe des constantes $M > 0$ et s_0 telles que pour tous les t*

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}.$$

le nombre s_0 est appelé indice de croissance de $f(t)$.

Théorème 17 *Pour tout original $f(t)$, l'image $F(p)$ est définie dans le demi-plan $Re(p) > s_0$, où s_0 est l'indice de croissance de $f(t)$. et est une fonction analytique dans ce demi-plan.*

Preuve.

Pour $Re(p) = s > s_0$,on a

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \leqslant \int_0^\infty Me^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0}.$$

D'où $F(p)$ est bien définie.

Dans tout demi-plan $Re(p) \geqslant s_1 > s_0$,

on a $\frac{d}{dp}(f(t)e^{-pt}) = -tf(t)e^{-pt}$.

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \leqslant \int_0^\infty Mte^{-(s_1-s_0)t}dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}.$$

D'où la fonction $F(p)$ a une dérivée en tout point du demi-plan $Re(p) > s_0$.

5 Propriétés de la transformée de Laplace

5.1 Linéarité

Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p).$$

5.2 Transformée de Laplace de la translation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace.

Proposition 5

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(p) = e^{-\alpha p}\mathcal{L}(f)(p), \qquad avec \quad f_\alpha(t) = f(t-\alpha).$$

preuve

Remarquons d'abord que

$$(f_\alpha)(t) = \begin{cases} f(t-\alpha) & si \quad t-\alpha \geq 0 \\ 0 & si \quad t-\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(p) = \int_0^\infty (f_\alpha)(t)e^{-tp}dt = \int_0^\infty f(t-\alpha)e^{-pt}dt.$$

On pose $x = t - \alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_\alpha)(p) &= \int_0^\infty f(x)e^{-(\alpha+x)p}dx \\ &= \int_0^\infty f(x)e^{-\alpha p}e^{-xp}dx \\ &= e^{-\alpha p}\int_0^\infty f(x)e^{-xp}dx \\ &= e^{-\alpha p}\mathcal{L}(f)(p). \end{aligned}$$

5.3 Transormée de Laplace de l'homothétie

Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace.

Proposition 6

$$\mathcal{L}(f_k)(p) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{k}), \qquad \textit{avec} \quad f_k(t) = f(kt).$$

preuve

$$\mathcal{L}(f_k)(p) = \int_0^\infty f_k(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(kt)e^{-pt}dt.$$

On pose $y = kt$, donc $dt = \frac{dy}{k}$.

$$\mathcal{L}(f_k)(p) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(y)e^{-y(\frac{p}{k})}dy = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right).$$

5.4 Transformée de Laplace des dérivées

Proposition 7 *si $f'(t)$ ou plus généralement $f^{(n)}(t)$ est un original ,alors*

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$

ou encore

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0).$$

preuve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(p) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt \\
&= e^{-pt}f(t)|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \\
&= p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).
\end{aligned}$$

Car nous avons $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(s-s_0)t}$ et quand $t \longrightarrow \infty, e^{-pt}f(t) \longrightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'')(p) = \mathcal{L}((f')')(p) &= p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0) \\
&= p[p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)] - f'(0) \\
&= p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Supposons que $\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{(n+1)})(p) &= \mathcal{L}((f')^{(n)})(p) \\
&= p^n\mathcal{L}(f')(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0) \\
&= p^n(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0) \\
&= p^{n+1}\mathcal{L}(f)(p) - p^n f(0) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0) \\
&= p^{n+1}\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=1}^{n+1} p^{k-1} f^{(n+1-k)}(0).
\end{aligned}$$

5.5 Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ une primitive de f. On a alors $F' = f$ et $F(0) = 0$.

Proposition 8

$$\mathcal{L}(F)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p.}$$

Preuve

De la proposition(14) on a

$$\mathcal{L}(F')(p) = p\mathcal{L}(F)(p) - F(0) = p\mathcal{L}(F)(p).$$

On déduit que

$$\mathcal{L}(F)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}.$$

6 Transformée de Laplace inverse

Théorème 18 *Si une fonction $f(t)$ est un original, et si $F(p)$ est sa transformée de Laplace, alors en tout point de continuité la fonction $f(t)$ est égale à*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp.$$

Preuve

Considérons l'intégrale

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left(\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right)dp$$

on a

$$\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$$

converge uniformément par rapport à p dans le demi-plan $Re(p) \geqslant a$, donc on peut intervenir l'ordre d'intégration comme suit

$$\begin{aligned}
f_b(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}dp \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \left(\frac{e^{p(t-\tau)}}{t-\tau}\Big|_{a-ib}^{a+ib}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \left(\frac{e^{(a+ib)(t-\tau)} - e^{(a-ib)(t-\tau)}}{t-\tau}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \left(\frac{e^{a(t-\tau)}(e^{ib(t-\tau)} - e^{-ib(t-\tau)})}{t-\tau}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \left(e^{a(t-\tau)}\frac{2i\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\right)
\end{aligned}$$

on pose $\xi = \tau - t$,

$$\begin{aligned}
f_b(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty} f(\xi+t)e^{-a\xi}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-t}^{\infty} f(\xi+t)e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Vu que $f(t+\xi) = 0$ pour $t+\xi < 0$, donc

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+t)e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi.$$

Décomposant cette intégrale en deux intégrales correspondant respectivement aux segments $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ et faisant dans la deuxième le changement de variable $\xi = -\xi$, on obtient

$$\begin{aligned}
f_b(t) &= \frac{1}{\pi}e^{at}\int_0^{\infty} [f(t+\xi)e^{-a(t+\xi)} + f(t-\xi)e^{-a(t-\xi)}]\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [f(t+\xi)e^{-a\xi} + f(t-\xi)e^{a\xi}]\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f_b(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(t+\xi)e^{-a\xi} + f(t-\xi)e^{a\xi}]\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty 2f(t)\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty 2f(t)\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(t+\xi)e^{-a\xi} + f(t-\xi)e^{a\xi}]\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi \\ &- \frac{1}{\pi}\int_0^\infty 2f(t)\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi + f(t) \end{aligned}$$

car

$$\int_0^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{[f(t+\xi)e^{-a\xi} - f(t)] - [f(t) - f(t+\xi)e^{a\xi}]}{\xi} \times \sin b\xi d\xi + f(t).$$

D'après la condition 1) des originaux, la fonction

$$g(\xi) = \frac{f(t+\xi)e^{-a\xi} - f(t)}{\xi} - \frac{f(t) - f(t+\xi)e^{a\xi}}{\xi}$$

dans tout segment fini peut avoir au plus un nombre fini de points de discontinuité qui sont des discontinuités de première espèce.

Alors pour chaque B fixe

$$\lim_{b\longrightarrow\infty}\int_0^B g(\xi)\sin b\xi d\xi = 0. \qquad \square$$

Théorème 19 *(Premier théorème de développement)([9]p 516)*

Si $F(p)$ est régulière au point à l'infini et admet, dans le voisinage de ce point, le dévelopement en série de Laurent.

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k},$$

alors la fonction

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}$$

est l'original de $F(p)$.De plus $f(t)$ est une fonction entière.

Théorème 20 *(Second théorème de développement)([9] p518)*

Soit $F(p)$ une fonction : 1)méromorphe et régulière dans le demi-plan $Re(p) > s_0$;

2)il existe un système de circonférences $C_n : |P| = R_n$, $R_1 < R_2 < ..., R_n \to \infty$, sur lequel $F(p)$ tend vers zéro uniformément par rapport à arg p ;

3)pour tout $a > s_0$, l'intégrale $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$ converge absolument.

Alors la fonction

$$f(t) = \sum_{(p_k)} Res_{p_k} \left\{ F(p)e^{pt} \right\},$$

où la somme des résidus est étendue à tous les points singuliers p_k de la fonction $F(p)$ dans l'ordre de non-décroissance de leurs modules, est l'original de $F(p)$.

Chapitre II

Application à la résolution des équations intégrales de Fredholm de type de convolution

1 Produit de convolution

Définition 10 *On dit que f et g sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Si f et g sont convolables, on définit alors le produit de convolution (ou la convolée) de f et g par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Remarque

1. Si f et g sont convolables, alors g et f le sont et on a

$$f * g = g * f.$$

2. Si f est convolable avec chacune des fonctions g et h, alors f est convolable avec $\alpha g + \beta h$ où $(\alpha, \beta) \in {}^2$ et on a

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h).$$

Définition 11 *On appelle support d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable, l'ensemble fermé noté $supp(f)$ défini par :*

$$supp(f) = \mathbb{R} \backslash \theta; \;\; où \; \theta == \bigcup_{i \in I} \theta_i;$$

les θ_i sont les ouverts de $\mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in I$ $f = 0$ p.p sur θ_i

Proposition 9 *Soient f et g deux fonctions telles que $f * g$ existe. On a*

$$supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g).$$

Preuve

On suppose que $x \notin supp(f) + supp(g)$. Alors pour tout $t \in supp(f)$ on a $(x - t) \notin supp(g)$ et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-t)f(t)dt = 0.$$

D'où $x \notin supp(f * g)$. $\square$

2 Condition d'éxistence d'un produit de convolution

Proposition 10 *Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$*

1. *$f * g$ est défini presque partout et il appartient à $L^1(\mathbb{R})$.*
2. *$\| f * g \|_1 \leqslant \| f \|_1 \| g \|_1$.*

Preuve

1. On considère

$$I = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy)dx;$$

d'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dx)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx)|g(y)|dy. \end{aligned}$$

On pose $t = x - y$. On obtient alors

$$I = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt)(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy).$$

Comme f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy)dx < +\infty;$$

alors la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

D'où $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

2. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(f*g)(x)|dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)|(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx)dy\end{aligned}$$

on pose $z = x - y$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(y)|(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dx)dy &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}} |f(z)|dz \\ &= \| g \|_1 \| f \|_1 .\end{aligned}$$

□

Définition 12 *Une fonction f est dite localement intégrable si, pour tout intervalle I borné de $\mathbb{R}$, l'intégrale*

$$\int_I |f(x)|dx$$

existe et est finie.

Notation

On désigne par $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions localement intégrables.

Proposition 11 *Soient f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et g dans $L^1(\mathbb{R})$.*

1. *Si supp(g) est borné alors $f*g$ existe p.p et apartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*
2. *Si f est bonée alors $f*g$ est défini pour tout x et appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.*

Preuve

1. Soit K un intervalle bornée de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_K |(f*g)(x)|dx &\leqslant \int_K\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|dydx \\ &= \int_{supp(g)} |g(y)|(\int_K |f(x-y)|dx)dy\end{aligned}$$

on pose $z = x - y$ on obtient

$$\int_{supp(g)} |g(y)|(\int_K |f(x-y)|dx)dy = \int_{supp(g)} |g(y)|dy \int_K |f(z)|dz$$

puisque

$$\int_{supp(g)} |g(y)|dy \text{ et } \int_K |f(z)|dz$$

existent, car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, donc $f * g$ existe et appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ on a pour tout x

$$|\int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)du| \leqslant \| f \|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g(x-u)|du = \| f \|_\infty \| g \|_1$$

D'où

$$\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_\infty \| g \|_1 . \qquad \square$$

Proposition 12 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

1. $f * g$ est partout défini, continu et borné sur $\mathbb{R}$.

2. $\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_1 \| g \|_\infty$.

Preuve

En vertu du point (2) de la proposition (11), $f * g$ est par tout défini et est borné.

Il reste à établir la continuité. On a :

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(y-t)||g(t)|dt \\ &\leqslant \| g \|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(y-t)|dt \end{aligned}$$

On établit d'abord la continuité pour f continue à support compact. Soit $]-a, a[$ un intervalle contenant $supp(f)$. Pour y suffisament près de x on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(y-t)|dt &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-y+u) - f(u)|du \\ &= \int_{-a}^{+a} |f(x-y+u) - f(u)|du \\ &\leqslant 2a \sup_{|u| \leqslant a} |f(x-y+u) - f(u)| \end{aligned}$$

f étant uniformément continue sur $[-a, a]$ on en déduit la continuité uniforme de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$ on procède par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

On prend une suite f_n de fonctions continues à support compact telle que

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_1 = 0.$$

On fait passer à la limite dans le résultat de continuité établi pour $f_n * g$

$$\begin{aligned} |f*g(x) - f*g(y)| &\leqslant |f*g(x) - f_n*g(x)| + |f_n*g(x) - f_n*g(y)| \\ &+ |f_n*g(y) - f*g(y)| \\ &\leqslant 2 \parallel g \parallel_\infty \parallel f - f_n \parallel_1 + |f_n*g(x) - f_n*g(y)|. \end{aligned}$$

On obtient la continuité uniforme de $f * g$ car

$$\lim_{n\to\infty} \parallel f - f_n \parallel_1 = 0$$

et $f_n * g$ est uniformément continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposition 13 *Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$.*

1. *$f * g$ est partout définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*
2. $\parallel f * g \parallel_\infty \leqslant \parallel f \parallel_2 \parallel g \parallel_2$

Preuve

1. La preuve se fait de la même manière que la preuve dans proposition 12.
2. On utilise l'inégalité de Schwarz. On a

$$|f*g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|dt \leqslant (\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^2 dt)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt)^{1/2}$$

d'où :

$$\parallel f * g \parallel_\infty \leqslant \parallel f \parallel_2 \parallel g \parallel_2 . \qquad \square$$

Proposition 14 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors*

1. *$f * g(x)$ existe presque partout.*
2. *$f * g$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et on a*

$$\parallel f * g \parallel_2 \leqslant \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_2$$

Preuve

1. On a

$$|f(u)g(x-u)| = (|f(u)||g(x-u)|^2)^{1/2} (|f(u)|)^{1/2}. \qquad (1)$$

Comme $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ et $|g|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $u \mapsto |f(u)||g(x-u)|^2$ est intégrable pour presque tout x ; $f * g$ est donc définie pour presque tout x.

2. En utilisant l'inégalité de Schwarz et la formule (1) il vient

$$\begin{aligned} |f*g(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(u)||g(x-u)|du \\ &\leqslant (\int_{\mathbb{R}} |f(u)||g(x-u)|^2 du)^{1/2} (\int_{\mathbb{R}} |f(u)|du)^{1/2} \end{aligned}$$

d'où

$$|f*g(x)|^2 \leq (|f|*|g|^2(x)) \parallel f \parallel_1$$

et en intégrant terme à terme puisque $|f|*|g|^2$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ d'après la proposition 10 ; il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f*g(x)|^2 dx &\leqslant \parallel f \parallel_1 \int_{\mathbb{R}} |f|*|g|^2(x)dx \\ &\leqslant \parallel f \parallel_1 \parallel f \parallel_1 \parallel g^2 \parallel_1 \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\parallel f*g \parallel_2 \leqslant \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_2 . \qquad \square$$

Propriétés

Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$

1. Le produit de convolution est distributif sur l'adition

$$(f*(g+h))(x) = (f*g)(x) + (f*h)(x)$$

2. Le produit de convolution est associatif

$$((f*g)*h)(x) = (f*(g*h))(x).$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$(\tau_a(f*g))(x) = (f*\tau_a g)(x) = (\tau_a f * g)(x).$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$(\tau_a(f*g) - (f*g))(x) = (f*(\tau_a g - g))(x).$$

Preuve

Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$

$$1.\ (f*(g+h))(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)(g(y)+h(y))dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)dy$$
$$= (f*g)(x)+(f*h)(x).$$

$$2.\ ((f*g)*h)(x) = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f((x-y)-t)g(t)dt)h(y)dy$$

on pose $z = y+t$ donc $t = z-y$ et $dz = dt$

$$\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f((x-y)-t)g(t)dt)h(y)dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z-y)h(y)dydz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-z)(\int_{\mathbb{R}} g(z-y)h(y)dy)dz$$
$$= (f*(g*h))(x).$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$;
$\tau_a(f*g)(x) = (f*g)(x-a) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a-y)g(y)dy$. En posant $z = y+a$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-a-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z-a)dz$$
$$= (f*\tau_a g)(x).$$

$$4.\ (\tau_a(f*g)-(f*g))(x) = (f*g)(x-a)-(f*g)(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)(g(y-a)-g(y))$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)(\tau_a g(y)-g(y))$$
$$= (f*(\tau_a g-g))(x).$$

□

3 Dérivée du produit de convolution

Théorème 21 *Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $f*g$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{d^n}{dx^n}(f*g) = (\frac{d^n}{dx^n}f)*g.$$

Preuve

Pour $n = 1$. On a

Puisque $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})(\subset L^\infty(\mathbb{R}))$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, donc d'aprés la proposition 13 ,$f * g$ existe.

La fonction $x \longmapsto f(x-y)g(y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ car $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dx}(f(x-y)g(y))| &= |\frac{d}{dx}f(x-y)||g(y)| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |df||g(y)|; \end{aligned}$$

On a $\int_{\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |df||g(y)|dy$ existe. Donc on peut dériver sous signe somme.

D'où

$$\frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f(x-y)g(y)dy.$$

Pour $n \geq 2$, on procède de façon analoque par récurence. $\square$

4 Transformée de Fourier et produit de convolution

4.1 Dans $S(\mathbb{R})$

Théorème 22 *Soient f et g deux éléments de $S(\mathbb{R})$. Alors*

1. $f * g \in S(\mathbb{R})$ et on a

a) $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

b) $\mathcal{F}^{-1}(f * g)(x) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(f)(x)\mathcal{F}^{-1}(g)(x)$.

2. $fg \in S(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(fg)(\xi) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

Preuve

1. Soit $(f, g) \in S(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R})$.

On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^p(f*g)^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{p} C_p^j (x^{p-j}f) * (x^j g^{(q)})(x); \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

Comme $f * g \in \mathcal{C}^\infty$, il reste à montrer que

$$\lim_{|x|\to\infty} x^p(f*g)^{(q)}(x) = 0.$$

$$\begin{aligned}
x^p(f*g)^{(q)}(x) &= x^p(f*g^{(q)}(x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^p f(x-y)g^{(q)}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x-y+y)^p f(x-y)g^{(q)}(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{p} C_p^j (x-y)^{p-j} y^j f(x-y)g^{(q)}(y)dy \\
&= \sum_{j=0}^{p} C_p^j \int_{\mathbb{R}} (x-y)^{p-j} y^j f(x-y)g^{(q)}(y)dy \\
&= \sum_{j=0}^{p} C_p^j (x^{p-j}f)*(x^j g^{(q)})(x)
\end{aligned}$$

et comme $S(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par une fonction pôlynomiale, alors pour tout $j = \{0, 1, ..., p\}$, $x^{p-j}f$ et $x^j g^{(q)}$ sont dans $S(\mathbb{R})$ et

$$\lim_{|x|\to\infty} (x^{p-j}f)*(x^j g^{(q)}) = 0.$$

D'où

$$\lim_{|x|\to\infty} x^p(f*g)^{(q)}(x) = 0.$$

Donc $\mathcal{F}(f*g)(\xi)$ est dans $S(\mathbb{R})$ et on a :

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy)e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-ix\xi}dx)dy
\end{aligned}$$

On pose $z = x - y \Rightarrow x = z + y \Rightarrow dx = dz$ donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(y)(\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i(z+y)\xi}dz)dy \\
&= (\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iy\xi}dy)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(f*g)(\xi)e^{ix\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} f(\xi-t)g(t)e^{ix\xi}dtd\xi.\end{aligned}$$

On pose $\eta = \xi - t$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} f(\eta)g(t)e^{ix(\eta+t)}dtd\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} f(\eta)e^{ix\eta}d\eta\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{ixt}dt\right) \\ &= 2\pi\mathcal{F}^{-1}(f)(x)\mathcal{F}^{-1}(g)(x).\end{aligned}$$

2. Soit $(f,g)\in S(\mathbb{R})\times S(\mathbb{R})$. Comme $fg\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

$$\lim_{|x|\to\infty} x^p(fg)^{(q)}(x) = 0.$$

D'après la formule de Leibniz, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$(fg)^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{q} C_q^j f^{(j)}(x)g^{(q-j)}(x).$$

On a

$$\lim_{|x|\to\infty} x^p f^{(j)}(x) = 0 \text{ et } \lim_{|x|\to\infty} (g)^{(q-j)}(x) = 0.$$

D'où

$$\lim_{|x|\to\infty} x^p(fg)^{(q)}(x) = 0.$$

Donc d'après les points (1) et (2) de ce théorème on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}*\hat{g}) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = fg.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}*\hat{g}) = fg &\Leftrightarrow \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}*\hat{g})] = \mathcal{F}(fg) \\ &\Leftrightarrow \hat{f}*\hat{g} = \mathcal{F}(fg). \qquad \square\end{aligned}$$

4.2 Dans $L^1(\mathbb{R})$

Théorème 23 *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors*

1. $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.
2. $\mathcal{F}^{-1}(f * g)(x) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(f)(x)\mathcal{F}^{-1}(g)(x)$.
3. *Si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et on a*

$$\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}.$$

La preuve de ce théorème se fait de la même manière que théorème 22.

4.3 Dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 24

1. *Si $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ alors*

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

2. *Si $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ alors*

$$\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}.$$

Preuve

1. Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, donc il existe deux suites de fonctions $(f_n(x))_n$ et $(g_n(x))_n$ de $S(\mathbb{R})$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \| g_n - g \|_2 = 0.$$

D'après le théorème(22) on a

$$\mathcal{F}(f_n * g_n)(\xi) = \hat{f_n}(\xi)\hat{g_n}(\xi)$$

puisque la transformée de Fourier et le produit de convolution sont continus, alors on peut passer à la limite quand $n \to \infty$ et on trouve

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

2. Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, donc il existe deux suites de fonctions $(f_n(x))_n$ et $(g_n(x))_n$ de $S(\mathbb{R})$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_2 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \| g_n - g \|_2 = 0.$$

D'après le théorème(22) on a

$$\mathcal{F}(f_n g_n) = \hat{f_n} * \hat{g_n}$$

la continuité du produit de convolution et de la transformée de Fourier permet de passer à la limite, don on obtient

$$\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}. \qquad \square$$

5 La densité de $D(\mathbb{R})$ dans les $L^p(\mathbb{R})$

Définition 13 *On appelle suite régularisante une suite de fonctions $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $D(\mathbb{R})$ possédant les trois propriétés suivantes :*

1. $\rho_j(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{\mathbb{R}} \rho_j(x)dx = 1$;
3. *Le support de ρ_j est contenu dans un intervalle $I_j = [-\varepsilon, \varepsilon]$ où ε_j tendant vers 0 quand j tend vers $+\infty$.*

Une telle suite existe. En effet, soit ρ une fonction appartenant à $D(\mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :

1. $\rho(x) \geq 0 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$;
3. *Supp*$\rho \subset [-1, 1]$.

Par exemple :$\rho_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2n}, \\ n & |x| \leq \frac{1}{2n}. \end{cases}$

Posons ensuite $\rho_j(x) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right)$ où $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers 0. (par exemple : $\varepsilon_j = \frac{1}{j+1}$).Alors on vérifie facilement que $(\rho_j)_j \in \mathbb{N}$ est une suite régularisante.

En effet

1. $\rho_j(x) \geq 0$ car $\rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right) \geq 0$ et $\frac{1}{\varepsilon_j} > 0$
2. $\int_{\mathbb{R}} \rho_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right) dx$

   $y = \frac{x}{\varepsilon_j} \Rightarrow x = \varepsilon_j y \Rightarrow dx = \varepsilon_j dy.$

   $\int_{\mathbb{R}} \rho_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(y)dy = 1.$

$$\begin{aligned} \textit{3. Supp}\,\{\rho_j(x)\} &= \overline{\{x \in \mathbb{R} : \quad \rho_j(x) \neq 0\}} \\ &= \overline{\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \left(\frac{1}{\varepsilon_j}\right)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right) \neq 0\right\}} \\ &\subset \left[-\frac{1}{\varepsilon_j}, \frac{1}{\varepsilon_j}\right] \subset [-\varepsilon_j, \varepsilon_j] \end{aligned}$$

Lemme 1 *Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support compact à valeurs positives ou nulles, à support dans $[-1,1]$ et d'intégrale 1, soit*

$$\rho_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right).$$

Pour tout $\varepsilon_j > 0$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$. Alors

$$\lim_{j\to\infty} \|f * \rho_j - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Preuve Pour presque tout x, on a par définition de $f * \rho_j$ et puisque ρ_j est d'intégrale 1,

$$\begin{aligned} (f * \rho_j)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_j(x-y)dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_j(x-y)dy - \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_j(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x))\rho_j(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(x))\frac{1}{\varepsilon_j}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon_j}\right)dy. \end{aligned}$$

On pose

$$z = \frac{x-y}{\varepsilon_j} \Rightarrow y = x - \varepsilon_j z \Rightarrow dy = -\varepsilon_j dz$$

D'où

$$(f * \rho_j)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x - \varepsilon_j z))\rho(z)dz.$$

Si f est continue à support compact, on peut conclure que :

1. $f(x - \varepsilon_j z) - f(x)$ tend vers 0 lorsque j tend vers ∞.
2. $|f(x) - f(x - \varepsilon_j z)||\rho(z)| \leq 2|\rho(z)| \max_{[x-1,x+1]} |f|$,

Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue ;

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x - \varepsilon_j z) - f(x)||\rho(z)|dz = 0.$$

Donc $\{(f * \rho_j)(x) - f(x)\}$ tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact. omme $(f * \rho_j)(x) - f(x)$ est à support dans un compact $\{Supp\ f + [-1, 1]\}$, cela suffit pour avoir

$$\lim_{j\to+\infty} \|f * \rho_j - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

□

Théorème 25 *Pour tout* $p \in [1, +\infty[$*,l'ensemble des fonctions de classe* C^∞ *à support compact est dense dans* $L^p(\mathbb{R})$.

Preuve Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $[-1, 1]$, à valeurs positives ou nulles et d'intégrale 1. Pour tout ε, on considère

$$\rho_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j}\rho(\frac{x}{\varepsilon_j}).$$

Cette nouvelle fonction est à valeurs positives ou nulles, elle est à support dans $[\frac{1}{-\varepsilon_j}, \frac{1}{\varepsilon_j}]$ et d'intégrale 1.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\left(\int_{|x|>\frac{1}{\varepsilon_0}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Soit $\varepsilon_j > 0$ et f_j défini par

$$f_j(x) = \int_{-\frac{1}{\varepsilon_j}}^{\frac{1}{\varepsilon_j}} f(y)\rho_j(x-y)dy.$$

C'est-à$_d ire f_j = \left(\Pi_{[-\frac{1}{\varepsilon_j},\frac{1}{\varepsilon_j}]} f\right) * \rho_j . Soient$g $\in L^p(\mathbb{R})$ et $h \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\|g * h\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

La fonction f_j est à support compact inclus $[-\frac{1}{\varepsilon_j} - \varepsilon_j, +\frac{1}{\varepsilon_j} + \varepsilon_j]$ de classe C^∞ car ρ_j est de classe C_∞.

pour tout $\varepsilon_j \in]0, \varepsilon_0]$,

$$\|f_j - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left\|(\Pi_{(|x|>\frac{1}{\varepsilon_0})})|f| * \rho_j\right\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|f * \rho_j - f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|(\Pi_{(|x|>\frac{1}{\varepsilon_0})})|f|*\rho_j\right\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \left\|(\Pi_{(|x|>\frac{1}{\varepsilon_0})})|f|\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\rho_j\|_{L^p(\mathbb{R})}\\ &\leq \left(\int_{|x|>\frac{1}{\varepsilon_0}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Et d'aprés le lemme on a

$$\|f*\rho_j - f\|_{L^p(\mathbb{R})} < \frac{\alpha}{2}.$$

D'où

$$\|f_j - f\|_{L^p(\mathbb{R})} < \alpha.$$

6 Equations intégrales de Fredholm

On rappelle :

Q'une équation intégrale de Fredholm de second espèce est de la forme :

$$y(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)y(t)dt + f(x), \qquad (a \leq x \leq b).$$

1)Pour résoudre cette équation on peut appliquer le principe des contractions (théorème du point fixe) :

i) Supposont que $k(x,y)$ et $f(x)$ soint continues pour $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ et donc $|k(x,y)| \leq M$. Considérons l'application $A : C^{(0)}[a,b] \longrightarrow C^{(0)}[a,b]$, donnée par :

$$Ay(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)y(t)dt + f(x).$$

Verifions que $d(Ay_1, Ay_2) \leq Ld(y_1,y_2), \quad 0 \leq L < 1$. Où $d(Ay_1,Ay_2) = sup_{x\in[a,b]}|Ay_1 - Ay_2|$. On a

$$\begin{aligned}|Ay_1 - A_2| &= |\lambda\int_a^b k(x,t)[y_1(t) - y_2(t)]dt|\\ &\leq |\lambda|\int_a^b M|y_1(t) - y_2(t)|dt\\ &\leq |\lambda|MSup_{x\in[a,b]}(b-a).\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ l'application A est contractante.

Proposition 15 *Si* $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ *l'équation de Fredholm admet une solution unique continue unique pour tout* f*.*

Les approximations successives de cette solution $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ sont de la forme

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) y_{n-1}(t) dt + f(x).$$

Où $y_0 \in [a, b$.

ii)$k \in C^{(0)}(\mathbb{R}), f \in C^{(0)}[a,b]$,considérons $A : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b], \quad d(Ay_1, Ay_2)^2 = \|Ay_1 - Ay_2\|_2^2$.

$$d(Ay_1, Ay_2) \leq |\lambda| B d(y_1, y_2), \qquad B = \|k(.,.)\|_2 .$$

Proposition 16 *Si* $|\lambda| < \frac{1}{B}$*,alors l'équation de Fredholm admet une solution continue unique dans* $L_2[a,b]$*.*

iii)Hilbert Schmidt :$k(x,t) \in L_2(\mathbb{R}), f(x) \in L_2[a,b]$.

Proposition 17 *Si* $|\lambda| < \frac{1}{B}$*, alors l'équation de Fredholm admet une solution unique pour tout* f *dans* $L_2[a,b]$*.*

2)Comme on peut appliquer la méthode classique en utilisant la résolvante.

$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n;$

$c_0 = 1, c_n = \int_a^b ... \int_a^b k \begin{pmatrix} t_1, ...t_n \\ t_1, ...t_n \end{pmatrix} dt_1...dt_n.$

$D(x,t;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} B_m(x,t) \lambda^m; \quad B_0(x,t) = k(x,t), B_m = \int_a^b ... \int_a^b k \begin{pmatrix} x, t_1, ...t_n \\ t, t_1, ...t_n \end{pmatrix} dt_1...dt_n.$

La résolvante est une fonction méromorphe se présente sous la forme :

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}.$$

λ_0 est dite régulière si $R(x,t;\lambda)$ existe sinon λ_0 est dite valeur caracréristique.

Théorème 26 *Si* λ *est régulière, alors l'équation intégrale de Fredholm admet une solution unique donnée par la formule :*

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t) dt.$$

Théorème 27 *A toute valeur caractéristique est associé un nombre fini de fonctions propres linéairement indépendantes.*

Les solutions de l'équation homogène $y(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt$ non nuls sont appellées fonctions propres.[11]

7 Equations intégrales de Fredholm de type de convolution

Théorème 28 *(Théorème de Wiener). Supposons q'une fonction $F(\alpha)$ définie pour $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$ admette la représentation*

$$F(\alpha) = c + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx,$$

où $f(x)$ appartient à L_1, que $F(\alpha) \neq 0$ pour tous les α, ce qui entraîne $c = F(\pm\infty) \neq 0$.Alors la fonction $G(\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)}$ admet également la représentation

$$G(\alpha) = c^{-1} + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\alpha x}dx,$$

où $g(x)$ est une fonction de L_1.[11]

Soit l'équation intégrale

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)y(t)dt \qquad (2.1)$$

dont le noyau dépend de la différence $(x-t)$, $a = -\infty$, $b = +\infty$.

On suppose que les fonctions $k(x)$ et $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, et on cherche la solution dans la même classe.

En appliquant la transformée de Fourier dans (2.1),on obtient :

$$\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \lambda\hat{k}\hat{y}(\xi).$$

Il résulte

$$\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi)[1 - \lambda\hat{k}(\xi)]^{-1}, \quad avec \quad 1 - \lambda\hat{k}(\xi) \neq 0.$$

D'où par Fourier inverse

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\xi)}{1-\hat{k}(\xi)} e^{ix\xi} d\xi.$$

La condition $(1 - \lambda\hat{k}(\xi) \neq 0)$ est nécessaire et suffisante pour que la solution $y(x)$ existe dans $L^1(\mathbb{R})$.

En effet ;

D'aprés le théorème de Wiener , il existe une fonction $k_1(x)$ de $L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$[1 - \hat{k}(\xi)]^{-1} = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x) e^{-i\alpha x} dx = 1 + \hat{k_1}(\xi).$$

Donc

$$\hat{y}(\xi) = \hat{f}(\xi)[1 + \hat{k_1}(\xi)] = \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi)\hat{k_1}(\xi).$$

D'aprés la transformée de Fourier du produit de convolution, il vient

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-t) f(t) dt;$$

où $y(x) \in L^1$.

Soit maintenant l'équation de $1^{\text{ère}}$ espèce

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t) y(t) dt,$$

telles que $f, k \in L^1(\mathbb{R})$.De même en appliquant la transformée de Fourier on obtient pour $\hat{k}(\xi) \neq 0$,

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\xi)}{\hat{k}(\xi)} e^{ix\xi} d\xi.$$

Exemple.1

Soit l'équation de fredhom à noyau symetrique

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t) y(t) dt.$$

où $k(\xi) = e^{-\alpha|\xi|} \qquad (\alpha > 0)$

donc

$$\begin{aligned}
\hat{k}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}e^{-ix\xi}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}e^{-ix\xi}dx \\
&= \frac{e^{(\alpha-i\xi)x}}{\alpha-\xi}|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-\alpha-i\xi)x}}{-\alpha-i\xi}|_{0}^{+ß}\infty \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$1-\lambda\hat{k}(\xi) = 1-\frac{2\alpha\lambda}{\alpha^2+\xi^2} = \frac{\alpha^2+\xi^2-2\lambda\alpha}{\alpha^2+\xi^2},$$

donc pour $\alpha^2 - 2\alpha\lambda$ non identiquement nul et non négatif,

$$\hat{y}(\xi) = \frac{\alpha^2+\xi^2}{\alpha^2+\xi^2-2\lambda\alpha}\hat{f}(\xi).$$

On a

$$[1-\lambda\hat{k}(\xi)]^{-1} = 1+\hat{k_1}(\xi)$$

alors

$$\hat{k_1}(\xi) = \frac{\lambda\hat{k}(\xi)}{1-\lambda\hat{k}(\xi)} = \frac{2\alpha\lambda}{\alpha^2-2\alpha\lambda+\xi^2},$$

d'où

$$k_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\lambda e^{ix\xi}}{\alpha^2-2\alpha\lambda+\xi^2}d\xi.$$

En appliquant le théorème des résidus ,pour $x < 0$ et $x > 0$

$$k_1(x) = \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}}e^{-|x|\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}}.$$

Alors

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|\sqrt{\alpha^2-2\alpha\lambda}}f(t)dt.$$

Exemple.2

Soit

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)y(t)dt \qquad o\grave{u}$$

f(x)=e$^{-|x|}$; k(x)=$\begin{cases} \lambda e^{x} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

Cherchons les transformée de Fourier de $f(x)$ et $k(x)$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi} dx = \frac{2}{1+\xi^2}. \\ \hat{k}(\xi) &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x} e^{-ix\xi} dx = \frac{\lambda}{1-i\xi}. \end{aligned}$$

$$1 - \hat{k}(\xi) = \frac{1-\lambda-i\xi}{1-i\xi};$$

donc $1 - \hat{k}(\xi) \neq 0$ pour $\lambda - 1 \neq 0$ et non imaginaire.

$$\begin{aligned} \hat{y}(\xi) = \frac{\hat{f}}{1-\hat{k}} &= \frac{2}{1+\xi} . \frac{1-i\xi}{1-\lambda i\xi} \\ &= \frac{2}{(1-i\xi)(1-\lambda-i\xi)} \\ &= \frac{2}{(\xi-i)(\xi+i-\lambda i)}. \end{aligned}$$

on obtient

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{(\xi-i)(\xi+i-\lambda i)} d\xi.$$

Cette intégrale se calcule au moyen des résidus.

Pour $Re(1-\lambda) > 0$:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-\lambda} e^{-x} & (x > 0) \\ \frac{2}{2-\lambda} e^{(1-\lambda)x} & (x < 0) \end{cases}$$

Pour $Re(1-\lambda) < 0$:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-\lambda} (e^{-x} - e^{(1-\lambda)x}) & (x > 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Lorsque $\lambda = 2$ on obtient,

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{(\xi - i)^2}.$$

la solution s'écrit sous la forme :

$$y(x) = \begin{cases} -2xe^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Chapitre III

Autres applications aux équations intégrales de volterra du type précédent

1 Equation de volterra

On rappelle que si $f(s)$ est une fonction continue dans $a \leq s \leq b$,et $k(s,t)$ pour $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq s$ l'équation intégrale :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt. \qquad (3.1)$$

est appelée équation de volterra de second espèce .

Remarque

L'équation intérale de Volterra est un cas particulier de l'quation intégrale de Fredholm.

En effet ; On peut toujours effectuer dans l'équation de Volterra une intégration de $t = a$ à $t = b$, avec la condition surle noyau $k(x,t) = 0$ si $t > x$.

Théorème 29 *Pour tout λ, pour toute $f \in C^0[a,b]$. L'équation (3.1) admet une solution unique. Cette solution est donnée par le peincipe des approximations succesives.[11]*

On cherche la solution de (3.1) sous la forme d'une série :

$$y(s) = y_0(s) + y_1(s)\lambda + y_2(s)\lambda^2 + ... \qquad (3.2)$$

Pour les fonctions $y_n(s)$ on obtient les formules

$$y_0(s) = f(s); \quad y_n(s) = \int_a^s k(s,t)y_{n-1}(t)dt \quad (n = 1, 2, ...).$$

Sur un intervalle fini ou dans le carré nous avons la majoration suivante pour les fonctions continues :

$$|f(s)| \leq m; \quad |k(s,t)| \leq M.$$

ET pour $y_n(s)$ on a successivement :

$$\begin{aligned}
|y_0(s)| &\leq m; \\
|y_1(s)| &\leq \int_a^s |k(s,t)||y_0(t)|dt \leq mM(s-a), \\
|y_2(s)| &\leq \int_a^s |k(s,t)||y_1(t)|dt \leq mM^2 \int_a^s (t-a)dt = mM^2 \frac{(s-a)^2}{2},
\end{aligned}$$

et d'une façon générale

$$|y_n(s)| \leq m\frac{|M(s-a)|^n}{n!}.$$

Lorsque $s \in [a,b]$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n(s)$ converge uniformement et y(s) sa somme car :

$$|\lambda^n y_n(s)| \leq m\frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!}$$

converge pour n'import quel λ d'aprés Alembert.

Exprimons maintenant $y_n(s)$ directement en fonction de $f(s)$:

$$\begin{aligned}
y_1(s) &= \int_a^x k(s,t)f(t)dt \\
y_2(s) &= \int_a^x \int_a^x k(s,t)k(t,t_1)f(t_1)dt_1 dt = \int_a^x k_2(s,t_1)f(t_1)dt_1
\end{aligned}$$

d'une façon gérale

$$y_n(s) = \int_a^x k_n(s,t)f(t)dt \quad (n = 1, 2, ...).$$

La somme (3.2) est donc de la forme

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_a^x [\sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(s,t)\lambda^n] f(t)dt.$$

Cette expression peut s'écrire :

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_a^x R(s,t;\lambda) f(t) dt.$$

Théorème 30 *Soient $X(s)$, $Y(s)$ les transformées de Laplace de $x(t)$, $y(t)$ respectivement. Si pour tout $t \in [0,\infty)$:*

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$

alors

$$Y(S) = H(S)X(S).$$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} Y(S) &= \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau \right\} dt, \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-st} h(t-\tau) u(t-\tau) dt \right\} x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

avec $u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & si \quad t-\tau > 0, \\ 0 & si \quad t-\tau < 0. \end{cases}$

En posant $z = t - \tau$,on obtient

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-s(z+\tau)} h(z) u(z) dz \right\} x(\tau) d\tau, \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty e^{-sz} h(z) dz x(\tau) d\tau, \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} H(s) x(\tau) d\tau, \\ &= H(s)X(s). \end{aligned}$$

2 Equation de volterra de type de convolution

Soient $f(x)$ et $k(x)$ des fonctions continues.

1^{er} **cas**

Considérons l'équation de volterra de second espèce de noyau

$k(x,t) = k(x-t)$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt. \qquad (3.3)$$

Supposons que

$$|f(x)| \leq Ae^{-ax}, \quad |k(x)| \leq Be^{-bx}, \qquad (3.3)$$

où $A, B > 0$ et $a, b \geq 0$.

Suposons que f_0 et k_0 sont les bornes supérieures de $|f(x)|$ et $|k(x)|$ pour $x \geq 0$.

En appliquant à (3.3) la méthde des approximation successive,on obtient pour $y(x), x \geq 0$,

$$|y(x)| \leq f_0 e^{k_0 x}.$$

Notons par $Y(s)$, $K(s)$, $F(s)$ les transformée de Laplace de $y(x)$ $k(x)$ $f(x)$ respectivement, qui sont régulière dans le demi-plan $c > k_0$. On a donc

$$Y(s) = F(s) + K(s)Y(s), \qquad (3.4)$$

d'où

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - K(s)}, \qquad (3.5)$$

Et par Laplace inverse on obtient

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s) e^{sx} ds.$$

Cherchons la résolvante $R(x-t)$ de (3.3),dont la solution de l'equation est sous la forme

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)dt.$$

D'où

$$Y(s) = F(s) + M(s)F(s). \qquad (3.6)$$

On a de (3.4) et (3.5)

$$Y(s) = F(s) + \frac{F(s)}{1 - K(s)} K(s), \qquad (3.7)$$

donc de (3.6)et (3.7) et par comparaison on obtient

$$M(s) = \frac{K(s)}{1 - K(s)},$$

et linversion donne

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) e^{sx} ds.$$

$2^{\text{ème}}$ **cas**

Soit maintenant l'équation de volterra de premièr :

$$\int_0^x k(x-t) y(t) dt = f(x).$$

Dans le but de l'application de la transformée de Laplace multipliant les deux membres par e^{-sx}, intégrant en x de 0 à ∞ on obtient en vertu du théorème de convolution

$$K(s) Y(s) = F(s),$$

supposons $K(s) \neq 0$ et donc

$$Y(s) = \frac{F(s)}{K(s)}.$$

En appliquant la formule d'inversion :

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx} Y(s) ds.$$

Exemple 1

Considérons l'équation

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt.$$

On a $k(x) = \sin x$ donc

$$\begin{aligned} K(s) &= \int_0^{+\infty} \sin x e^{-sx} dx \\ &= -e^{-sx} \cos x|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} s e^{-sx} \cos x dx \\ &= 1 - s e^{-sx} \sin x|_0^{+\infty} - s^2 \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin x dx, \end{aligned}$$

on a

$$K(s) = 1 - s^2 K(s), \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

$$1 - K(s) = 1 - \frac{1}{1+s^2} = \frac{s^2}{1+s^2}$$

d'où

$$M(s) = \frac{1}{1+s^2}.\frac{1+s^2}{s^2} = \frac{1}{s^2};$$

On obtient

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{s^2} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) e^{sx} ds,$$

D'prés la second théorème de développement

$$R(x) = Res_{s_0}(M(s)e^{sx}) = x.$$

alors

$$y(x) = x + \int_0^x (x-t) dt = x + \frac{x^3}{3!}.$$

Exemple 2

Soit

$$y(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t} y(t) dt,$$

on a $k(x) = e^x$.Donc

$$K(s) = \int_0^{\infty} e^{(1-s)x} dx = \frac{1}{s-1},$$

d'où

$$M(s) = \frac{K(s)}{1-K(s)} = \frac{1}{s-2}.$$

On obtient

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{s-2}ds = e^{2x}$$

$$y(x) = f(x) + e^{2x}\int_0^x e^{-2t}f(t)dt.$$

Exemple 3

Considérons une équation du deuxième ordre

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) - 2\int_0^x e^{2(x-t)}y(t)dt = e^{2x}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

D'aprés la transformée de Laplace des dérivées on obtient

$$s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + Y(s) - 2F(s)Y(s) = F(s),$$

on a $y(0) = y'(0) = 0$,

$$(s^2+1)Y(s) - 2F(s)Y(s) = F(s)$$

qui implique

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2+1-2F(s)},$$

cherchons maintenemt $F(s)$:

on a $f(x) = e^{2x}$, alors

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^{+\infty} e^{2x}e^{-sx}dx &= \int_0^{+\infty} e^{(2-s)x}dx \\ &= \frac{e^{(2-s)x}}{2-s}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2-s} \qquad pour \quad Re(s) > 2 \end{aligned}$$

D'où

$$Y(s) = \frac{-1}{s^3-2s^2+s},$$

et aprés Laplace inverse on obtient

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s)e^{sx}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{-e^{sx}}{s^3-2s^2+s}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{-e^{sx}}{s(s^2-2s+1)}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{-e^{sx}}{s(s-1)^2}ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{-e^{sx}}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{s-1}ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s-1)^2}ds \\
&= -1+e^x-xe^x.
\end{aligned}$$

Exemple 4

Soit

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\int_0^x y(t)y(x-t).$$

On a $k(x) = y(x)$, donc $K(s) = Y(s)$, alors

$$Y(s) = F(s) + \frac{1}{2}Y^2(s) \Leftrightarrow \frac{1}{2}Y^2(s) - Y(s) + F(s) = 0.$$

Posons $X = Y(s)$, et cherchons la solution de l'équation

$$\frac{1}{2}X^2 - X + F(s) = 0.$$

$\Delta = 1 - 2F(s)$,

$X_1 = 1 - \sqrt{1-2F(s)}$, $X_2 = -1 - \sqrt{1-2F(s)}$.

Cherchons $F(s)$,

on a $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$, donc

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin xe^{-sx}dx = \frac{1}{2(1+s^2)},$$

alors il résulte

$$X_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \quad X_2 = -1 - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

On utilise la fonction de Bessel $J_n(x)$ pour calculer $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Où On a

$$\mathcal{L}(J_n(x)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} J_n(x)dx = \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{\sqrt{1+s^2}}.$$

1)

$$\begin{aligned} X_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} &= \frac{\sqrt{1+s^2}-1}{\sqrt{1+s^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+s^2}-1+s-s}{\sqrt{1+s^2}} \end{aligned}$$

on a

$$\mathcal{L}(y_1) = X_1 = \frac{\sqrt{1+s^2}-s}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

alors

$$y_1(x) = J_1(x) - J_0(x) + I(x),$$

Cherchons I :

On sait que

$$\mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f * g),$$

donc on a

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \mathcal{L}(s * J_0(s))$$

alors

$$I = s * J_0 = \int_0^x (x-t)J_0(x)dt = \frac{x^2}{2}J_0(x).$$

D'où

$$y_1(x) = J_1(x) + (\frac{x^2}{2} - 1)J_0(x).$$

2)

$$X_2 = -1 - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{-(\sqrt{1+s^2}-s)}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

alors

$$y_2(x) = -J_1(x) - \frac{x^2}{2}J_0(x) - J_0(x).$$

D'où la solution est sous la forme :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudier les équations intégrales de Fredholm et de Volterra avec un noyau de type particulier $k(x, y) = k(x-y)$. Cette étude consiste à utiliser les transformations intégrales. Ainsi, nous avons appliqué la transformée de Fourier pour résoudre Fredholm ; et la transformée de Laplace pour l'équation de Volterra.

Bibliographie

[1] BERNARD.C, *Calcul intégrale*,Cassini,2009.

[2] BERGOUNIOUX.M, *Analyse Hilbertienne et Analyse de Fourier* ,MAPMO,2007.

[3] CHILOV.G,*Fonction d'une variable tome2*,Mir. Moscou, 1973.

[4] DUPONT.G,*série et intégrales*,Office des publications universitaires, Alger 1983.

[5] EL HAJ LAAMRI,*Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonction* ,Dunod, Paris 2007.

[6] GILLES.L et PASCAL.M,*Analyse fonctionnelle* ,Dunod, paris, 1999.

[7] H.BREZIS,*Analyse fonctionnelle* . Masson Paris 1984.

[8] JEAN-LUC RAIMBAULT,*Transformée de Laplace des fonctions et des distributions* , Université de Paris-Sud 2008.

[9] OLMOGOROV.A et FOMINE.S, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* ,Mir. Moscou, 1973.

[10] LAVRENTIEV.M et CHABAT.B, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe* , Mir. Moscou, 1977.

[11] SMIRNOV,V, *Cours de mathématiques supérieurs,tome 4, première partie* , Mir. Moscou, 1975.

[12] STRRICHARTZ.R.S, *A guide to distribution theory and Fourier transforms* , World Scientific publishing.Co.Inc,River Edge Nj 2003.

[13] PATRIQUE.W ET CLAUD.G, *Analyse de Fourier et Application* , Dunond,Paris 2009.

[14] SYLVIE BENZONI, *Analyse de Fourier* , Université de lyon 2011.

[15] VO-KHAC KHOAN, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielle, tome1*, Vuibert, Paris 1972.

[16] YVES CAUMEL, *Cours d'analyse fonctionnelle et complexe*, Cépadués, Toulouse 2003.

L'objectif de ce travail est d'étudier la résolution des équations intégrales de type de convolution.
Pour ce faire, nous avons étudié les transformées de Fourier et de Laplace qui sont les outils essentiels de leurs résolution.Nous avons également étudier le produit de convolution.

Mots clés : Produit de convolution, transformée de Fourier, transformée de Laplace.

The aim of this work is to study the resolution of the integral equations of convolution type.
To do this, we have studied the Fourier and Laplace transforms which are the key tools for their resolution. We have also study the convolution product.

Keywords : convolution product, Fourier transforms, Laplace transforms.