

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par:

Brihmat Amal Bochra

THEME

Caractérisation concrète des espaces de Besov localisés uniformes

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr A. Mokhtari

Professeur

Président

Mr A. Yagoub

M.A.(A)

Examineur

Mr A. Ben oum hani

M.C.(B)

Examineur

Mr S.E. Allaoui

M.C.(A)

Encadreur

Mr D. Ouchenane

M.A.(B)

Co-encadreur

Année Universitaire 2016/2017

Remerciements

Avant toute chose, je remercie mon Dieu de me donner la force et le courage d'aboutir à ce travail

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de mon mémoire :

En premier lieu, je remercie mon encadreur Sallah Eddine Allaoui.

Je remercie aussi tous les membres de jury d'avoir accepté présider et examiner Notre Travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers,

À Mes parents, mes professeurs de toujours, qui me donnent l'amour, la volonté et
bénédiction.

À mes frères pour leurs tendresse et encouragements, et ma grande famille.

À mes amies qui sont avec moi dans la joie et le detress et que me donnent l'amour et la
volonté.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intresse d'une part au calcul symbolique pour les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel à valeur dans \mathbb{R} , et on donne des conditions pour que la fonction f réelle soit lipschizienne ou non. D'autre part, on démontre, dans notre travail quatre théorèmes importants pour la localisation uniforme.

Mots clés : Espace de Besov, Espace de Lizorkin-Triebe, Localisation uniforme, Caractérisations concrète.

Abstract

In this dissertation, we are interested, in one hand, in the symbolic calculation for Besov and Lizorkin-Triebel with values in \mathbb{R} , and we give conditions for the real function f with Lipschitz or not. On the other hand, we demonstrate, in this work, four important theories for the uniformed localization.

Keywords : Besov space, Lizorkin-Triebel space, uniformed Localization, Concrete characteristics.

Table des matières

- Notations** **3**

- Introduction** **5**

- 1 Définitions et résultats préliminaires** **7**
 - 1.1 Définitions et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel 7
 - 1.1.1 Espace de Besov 7
 - 1.1.2 Espace de Lizorkin-Triebel 8
 - 1.2 Espaces de Besov généralisé et de Lizorkin-Triebel généralisé 8
 - 1.2.1 Espace de Besov généralisé 8
 - 1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel généralisé 9
 - 1.3 La multiplication dans une algèbre 9
 - 1.4 Série de Littlewood-Paley 10
 - 1.4.1 La décomposition de Littlewood-Paley 10
 - 1.5 Opérateur de différences finis 12
 - 1.6 L'interpolation 12
 - 1.6.1 L'interpolation dans l'espace de Besov 13
 - 1.6.2 L'interpolation dans l'espace de Lizorkin-Triebel 13
 - 1.7 Inégalités de Base 14
 - 1.7.1 Inégalités de Young 14
 - 1.7.2 Inégalités de Hölder 14
 - 1.7.3 Inégalité de Monkowski 15
 - 1.7.4 Inégalité de Bernstein 15
 - 1.8 Une autre variante de la décomposition de Littlewood-Paley 16

2	Calcul symbolique dans certains des espaces de Besov et Lizorkin Triebel	19
2.1	Quelques fonctions de test	20
2.2	Normes équivalentes	21
2.3	Conditions nécessaires pour le calcul symbolique	22
2.4	Résultats préliminaires	22
3	Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel	32
3.1	Généralités sur la localisation uniforme	32
3.2	Définitions des espaces fonctionnels	35
3.3	Normes équivalentes dans quelques espaces	38
	Conclusion	45
	Bibliographie	46

Notations

- * $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.
- * $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, est appelé espace des distributions sur \mathbb{R} .
- * $S(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide sur \mathbb{R} .
- * $S'(\mathbb{R})$ est le dual de $S(\mathbb{R})$, est appelé espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} .
- * $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ est le produit de convolution des fonctions.
- * On note T_f l'opérateur de composition, défini par : $T_f(g) = f \circ g$.
- * S_f version locale de l'opérateur de composition T_f , définie par :

$$S_f(x) := \varphi(f \circ g)$$

- * Pour une distribution f définie sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur de translation par :

$$\tau_a f(x) = f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- * Pour une distribution f définie sur \mathbb{R} , on définit l'opérateur de différence finie par :

$$\Delta_m f = \tau_{-m} f - f.$$

- * Si $f \in S(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier est :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx,$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi} dx.$$

- * L'ensemble de distribution est noté E_{lu} , c'est un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation pour $\| - \|_{E_{lu}}$.

* On définit le opérateur Q_i sur $S'(\mathbb{R})$, par :

$$Q_i := \gamma(2^{-i}D) \quad (i \geq 1), \quad Q_0 := \varphi(D).$$

* On note M_i la norme de l'opérateur :

$$g \mapsto \varphi_i g, \quad \text{appliquant sur } B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}).$$

* On pose : $E_{p,q}^s(\mathbb{R}) := B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ ou $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

* On pose : $\varepsilon_{p,q}^s := E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$.

* Un espace de Banach de distributions (E.B.D.). E est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et

$$\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$$

pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$.

* On note $g(D)$ l'opérateur pseudodifférentiel de symbole g , défini sur les distributions tempérées par

$$\widehat{g(D)f} := g\widehat{f}, \quad \forall f \in S'(\mathbb{R}).$$

Introduction

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre : est consacré essentiellement aux rappels des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.

On rappelle quelques propriétés principales sur ces espaces qui seront utilisées dans le chapitre 2 et le chapitre 3.

Au deuxième chapitre, on considère le calcul symbolique pour les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebels, et on montre que les conditions de Lipschitz, locale ou globale sont nécessaires pour la démonstration des quatre théorèmes.

Dans le troisième chapitre, on montre les théorèmes suivants :

Théorème 0.1. [3] *Si $0 < s < 1$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que :*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left(t^{-s} \xi_{p,I+a}(f;t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 0.2. [3] *$B_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left(t^{-1} \beta_{p,I+a}(f;t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 0.3. [3] *Si $0 < s < 1$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que :*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m f(\cdot)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 0.4. [3] *$F_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-2} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2 f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$.

Chapitre 1

Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques notions essentielles qu'on va utiliser dans la suite à savoir : l'espace de Besov, l'espace de Lizorkin-Triebel, Besov généralisé, Lizorkin-Triebel généralisé et quelques propriétés principales.

1.1 Définitions et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

On va rappeler les définitions des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.

1.1.1 Espace de Besov

Définition 1.1. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, \infty]$, l'espace de Besov noté $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \|\Delta_k f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 2} 2^{sk} \|\Delta_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.1. [2] Soient ℓ entier, et $p, q \in]0, \infty]$, si $0 < s < \ell$, alors l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant :

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposition 1.2. [9]

- $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$).
- Soient $p_0 < p$ et $s_0 - \frac{1}{p} = s - \frac{1}{p}$ alors : $B_{p_0}^{s_0,q} \hookrightarrow B_p^{s,q}$.

1.1.2 Espace de lizorkin-Triebel

Définition 1.2. Soit $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, l'espace de Lizorkin-Triebel, noté $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |\Delta_k f|^q \right\|_p^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \left\| \sup_{k \geq 0} 2^{sk} |\Delta_k f| \right\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.3. [9]

- $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est un espace quasi-Banach.
- $F_p^{0,2}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ si $1 < p < \infty$.

Proposition 1.4. [7] Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, \infty[$, $q \in]0, \infty]$, si $\frac{1}{\min(p,q)} < s < m$, l'espace de Lizorkin-Triebel admet une quasi-norme équivalent :

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^m f(\cdot)|^q \frac{dh}{|h|^{1+sq}} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \|f\|_p + \left\| \sup_{h \in \mathbb{R}} (|\Delta_h^m f| |h|^{-s}) \right\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.2 Espaces de Besov généralisé et de Lizorkin-Triebel généralisé

On donne dans ce paragraphe les définitions des espaces de Besov généralisé $B_p^{v,q}(\mathbb{R})$ et Lizorkin-Triebel généralisé $F_p^{v,q}(\mathbb{R})$.

1.2.1 Espace de Besov généralisé

Définition 1.3. Soit $v :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et $0 < p, q \leq \infty$, l'espace de Besov généralisé noté $B_p^{v,q}(\mathbb{R})$ de l'ensemble de $f \in S'(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f\|_{B_p^{v,q}(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{B_p^{v,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel généralisé

Définition 1.4. Soit $v : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et $0 < p, q \leq \infty$ l'espace de Lizorkin-Triebel généralisé noté $F_p^{v,q}(\mathbb{R})$ de l'ensemble de $f \in S'(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f\|_{F_p^{v,q}(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{F_p^{v,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|)^q \right\|_p^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \left\| \sup_{k \geq 0} v(2^{-k}) \|\Delta_k f\| \right\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.3 La multiplication dans une algèbre

On va rappeler quelques propriétés sur les espaces $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ et $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$.

Définition 1.5. On dit qu'un espace vectoriel normé E est une algèbre s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|fg\|_E \leq c \|f\|_E \|g\|_E.$$

Pour tout f et g appartient à E .

Proposition 1.5. [7] Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, \infty]$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $B_p^{v,q}(\mathbb{R})$ est une algèbre,
- b) $B_p^{v,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$,
- c) $s > \frac{1}{p}$ ou $s = \frac{1}{p}$ et $0 < q < 1$.

Proposition 1.6. [7] Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, \infty]$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $F_p^{v,q}(\mathbb{R})$ est une algèbre,
- b) $F_p^{v,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$,
- c) $s > \frac{1}{p}$ ou $s = \frac{1}{p}$ et $0 < p < 1$.

Lemme 1.1. Soit $0 < p < 1$ et $s < \frac{1}{p} - 1$:

- Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}).$$

- Il existe une constante $c > 0$ telle que : $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in F_p^{s,q}(\mathbb{R}).$

1.4 Série de Littlewood-Paley

1.4.1 La décomposition de Littlewood-Paley

On donne la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée :

Soit $\gamma \in S(\mathbb{R})$ telle que

- $\text{supp} \gamma \subset \{x \in (\mathbb{R}) : 2^{-1} \leq |x| \leq 2^1\}$,
- $\gamma > 0$ pour $2^{-1} < |x| < 2^1$,
- $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-i}x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On pose

$$\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{-k}x) = 1, \quad (1.1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp} \varphi \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$.

La relation (1.1) converge dans $S(\mathbb{R})$ est appelée la relation de l'unité.

A cette relation, on associe une suite d'opérateurs de convolution.

$$\Delta_k : S'(\mathbb{R}) \mapsto C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto (\Delta_k f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-k}x) * f)(x), \quad (k \leq 1),$$

$$\phi_i : S'(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto (\phi_i f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-i}x)) * f)(x) \quad (i \geq 0),$$

avec $\Delta_0 = \phi_0$.

Par écrire la relation (1.1) au point 2^{-k} on a

$$\varphi(2^{-k}x) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \gamma(2^{-i}x) = 1.$$

En multipliant par \hat{f} alors

$$\varphi(2^{-k}x)\hat{f} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \gamma(2^{-i}x)\hat{f} = \hat{f}. \quad (1.2)$$

En appliquant l'application \mathcal{F}^{-1} sur (1.2) donc

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-k}x)\hat{f}) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-i}x)\hat{f}) = f,$$

alors

$$\phi_k f + \sum_{i=k+1}^{\infty} \Delta_i f = f, \quad (1.3)$$

pour $k = 0$ on a

$$\phi_0 f + \sum_{i=k+1}^{\infty} \Delta_i f = f.$$

Puisque $\phi_0 = \Delta_0$ alors

$$\Delta_0 f + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i f = f,$$

donc

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i f.$$

On remplace f dans (1.3), on obtient

$$\phi_k f + \sum_{i=k+1}^{\infty} \Delta_i f = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i f,$$

donc

$$\phi_k f = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i f.$$

Remarque 1.1. On peut construire la série de Littlewood-Paley de la manière suivante :

Soit $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ et

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On pose

$$\beta(x) = \psi(x) - \psi(2x),$$

alors

- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta(2^{-k}x) = 1, x \neq 0.$
- $\psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta(2^{-k}x) = 1, x \in \mathbb{R}.$

et

$$\text{supp}\beta \subset \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}.$$

1.5 Opérateur de différences finis

Définition 1.6. Soient $f \in S'(\mathbb{R})$ et $x, h \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, l'opérateur différences finis est noté par Δ_h^m telle que

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^k f(x + (m-k)h),$$

où

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

1.6 L'interpolation

Définition 1.7. Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach $0 < \theta < 1$. On dit que $a \in A_{[\theta]} = (A_0, A_1)$ si et seulement s'il existe f à variable complexe telle que :

- f analytique sur la bonde $\{Z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(z) \leq 1\}$ et à valeur dans $A_0 + A_1$ continue et bornée sur la bonde $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$.
- $f(k + it)$ (où $k = 0, 1$) continue sur A_k tel que tend vert 0 si $|t| \mapsto +\infty$
- $a = f(\theta)$.

On muni $A_{[\theta]}$ par la norme

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf_f \max(\sup \|f(iy)\|_{A_0}, \sup \|f(1 + iy)\|_{A_1}).$$

Remarque 1.2. $A_{[\theta]}$ est un espace d'interpolation.

Proposition 1.7. [7] Soient $A_j, B_j (j = 0, 2)$ quatre espaces de Banach et T un opérateur envoie A_0 dans B_0 et A_1 dans B_1 . Alors T envoie $A_{[\theta]}$ dans $B_{[\theta]}$ et

$$\|T\|_{A_{[\theta]}, B_{[\theta]}} \leq \|T\|_{A_0, B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1, B_1}^{\theta},$$

où

$$\|T\|_{A_j, B_j} = \sup_{\|f\|_{A_j}} \|T(f)\|_{B_j}.$$

Proposition 1.8. [4] *Soient $(M, \alpha), (N, \beta)$ deux espaces mesurés et $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ avec $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$. On suppose que T est un opérateur qui envoie $L^{p_0}(M, \alpha)$ dans $L^{q_0}(N, \beta)$, et $L^{p_1}(M, \alpha)$ dans $L^{q_1}(N, \beta)$ tel que, pour toute fonction simple f*

$$\|Tf\|_{q_i} \leq C_i \|f\|_{p_i}, \quad (i = 0, 1).$$

Alors T renvoie $(L^{p_0}, L^{p_1})_{[\theta]} = L^p$ dans $(L^{q_0}, L^{q_1}) = L^q$ telles que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

de plus

$$\|Tf\|_q \leq C_0^{1-\theta} C_1^\theta \|f\|_p.$$

1.6.1 L'interpolation dans l'espace de Besov

Soient $1 \leq p_0, p_1, q_0 \leq \infty$ et $1 \leq q_1 \leq \infty$, donc

$$[B_{p_0}^{s_0, q_0}, B_{p_1}^{s_1, q_1}]_\theta = B_p^{s, q},$$

avec

$$\begin{aligned} S &= (1-\theta)_{s_0} + \theta_{s_1}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

1.6.2 L'interpolation dans l'espace de Lizorin-Triebel

Soient $1 \leq p_0, q_0 \leq \infty$ et $1 \leq p_1, q_1 \leq \infty$, alors

$$[F_{p_0}^{s_0, q_0}, F_{p_1}^{s_1, q_1}]_\theta = F_p^{s, q},$$

avec

$$\begin{aligned} S &= (1 - \theta)_{s_0} + \theta s_1 \\ \frac{1}{q} &= \frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \\ \frac{1}{p} &= \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

1.7 Inégalités de Base

1.7.1 Inégalités de Young

Proposition 1.9. [9] Soient $1 < p, q < \infty$ et $a, b \geq 0$. Donc

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.7.2 Inégalités de Hölder

Proposition 1.10. [9] Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p, q \leq +\infty$ alors $f, g \in L^1(\Omega)$,

et

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (1.4)$$

Démonstration. 1. Si $p = 1$ et $q = \infty$ la conclusion est évidente.

2. Si $1 < p < \infty$ d'après l'**inégalité de Young**, on a

$$|f(x)| |g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q, \quad \text{et p, q sur } \Omega.$$

On conclut que $fg \in L^1(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q.$$

On remplace f par λf et ($\lambda > 0$) donc

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_q^q. \quad (1.5)$$

On désigne

$$\lambda = \|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{\frac{q}{p}}.$$

De manière à minimiser le membre à droite dans (1.5) on trouve

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

1.7.3 Inégalité de Monkowski

Proposition 1.11. Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors pour toute fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. En employant (1.4), on obtient

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left\{ \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{1/p} \right\}. \end{aligned}$$

□

1.7.4 Inégalité de Bernstein

Proposition 1.12. Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{N}$, il existe $c = c(\lambda, p, q, 1) > 0$ tel que

pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \hat{f} \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| < \mathbb{R}\}$ on a

$$\|f^{(\lambda)}\| \leq c \mathbb{R}^{|\lambda| + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_p$$

1.8 Une autre variante de la décomposition de Littlewood-Paley

Pour toutes fonctions f, g définies sur \mathbb{R} , on pose

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On définit

$$v_0(x, y) - v_0(2x, 2y) = v_1(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

les opérateurs v_0 et $v_{\beta,i}$ ($i \geq 1, \beta = 1, 2$) sur $S'(\mathbb{R})$, par

$$v_{\beta,i} := v_{\beta}(2^{-i}D), \quad v_0 := v_0(D).$$

Proposition 1.13. [1] *Soit $s \in \mathbb{R}$, f une distribution tempérée appartient à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si*

$$\|v_0 f\|_p + \sum_{\beta=1,2} \left(\sum_{i \geq 1} (2^{si} \|v_{\beta,i} f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

$$\|v_0 f\|_p + \sum_{\beta=1,2} \left\| \left(\sum_{i \geq 1} (2^{si} |v_{\beta,i} f|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty,$$

et les expressions ci-dessus sont des normes équivalentes sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$, respectivement.

Proposition 1.14. [1]

- Si $f \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $g \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$, alors $f \otimes g \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et

$$\|f \otimes g\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \|g\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})}. \quad (1.6)$$

- g est une fonctions non nulle, appartient à $L_p(\mathbb{R})$, dans le cas Besov, bornée uniformément continue dans le cas Lizorkin-Triebel.

Alors il existe une constante $c(g) > 0$ telle que

$$\|f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c(g) \|f \otimes g\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})}. \quad (1.7)$$

Démonstration. On munit l'espace $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ des normes équivalentes données dans la proposition (1.10). Dans toute la preuve, on suppose que $f \neq 0$.

Étape1 : le cas Besov

On a

$$\|f \otimes g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \|\varphi(D)f\|_p \|\varphi(D)g\|_p + \left(\sum_{i \geq 1} (2^{si} \|\nu_1(2^{-i})f \otimes g\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i \geq 1} (2^{si} \|\nu_2(2^{-i})f \otimes g\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|Q_0f\|_p \|Q_0g\|_p + \left(\sum_{i \geq 1} (2^{si} \|\varphi(2^{1-i}D)f\|_p \|Q_i g\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i \geq 1} (2^{sj} \|\varphi(2^{-i}D)g\|_p \|Q_i f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En utilisant le plongement

$$E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}), \quad \forall s > 0. \quad (1.8)$$

les opérateurs $\varphi(2^{-i}D)$ sont bornés sur L_p , uniformément par rapport à i , par l'inégalité (1.4) dans le cas Besov.

Soit g une fonction non nulle dans $L_p(\mathbb{R})$, On a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(2^{-i}D)g = g \quad \text{dans } L_p(\mathbb{R}),$$

donc il existe i_0 tel que

$$\|\varphi(2^{-i}D)g\|_p \geq \frac{1}{2} \|g\|_p, \quad \forall i > i_0,$$

alors

$$\frac{1}{2} \|g\|_p \left(\sum_{i > i_0} (2^{si} \|Q_i f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f \otimes g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

Et d'autre part on a

$$\|Q_i f\|_p \leq c_1 \|f\|_p \leq \frac{c_2}{\|g\|_p} \|f \otimes g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

Donc

$$\left(\sum_{i=0}^{i_0} (2^{si} \|Q_i f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{c_2 2^{si_0}}{\|g\|_p} \|f \otimes g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

D'où l'inégalité(1.5).

Étape2 : le cas Lizorkin-Triebel.

On a

$$\begin{aligned} \|f \otimes g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} &= \|Q_0f\|_p \|Q_0g\|_p + \left\| \left(\sum_{i \geq 1} |(2^{si} \varphi(2^{1-i}D)f \otimes Q_i g|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &\quad + \left\| \left(\sum_{i \geq 1} |(2^{sj} Q_i f \otimes \varphi(2^{-i}D)g|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{0 \leq \beta \leq i-1} Q_\beta f(x) = \varphi(2^{1-i}D)f(x),$$

par la condition $s > 0$, cela entraîne

$$|(\varphi(2^{1-i}D)f)(x)| \leq c \left(\sum_{k \geq 0} |2^{sk} Q_k f(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall i \geq 1.$$

Donc

$$\left\| \left(\sum_{i \geq 1} |2^{si} \varphi(2^{1-i}D)f \otimes Q_i g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

Dans le cas Lizorkin-Triebel, on termine la preuve de (1.4) par la même façon pour les autres termes. Soit g une fonction non nulle et uniformément continue .

On a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(2^{-i}D)g = g \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Alors il existe I un intervalle ouvert dans \mathbb{R} , un nombre $v > 0$, et un entier i_0 , tels que

$$|\varphi(2^{-i}D)g(x)| \geq v, \quad \forall x \in I, \forall i > i_0,$$

il devient

$$\left\| \left(\sum_{i > i_0} |2^{si} Q_i f \otimes \varphi(2^{-i}D)g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(\mathbb{R})} \geq v |I|^{\frac{1}{p}} \left\| \left(\sum_{i > i_0} |2^{si} Q_i f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Par hypothèse on a $f \otimes g \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ alors $f \otimes g \in L_p(\mathbb{R})$, à cause de plongement (1.6).

Donc on donne $f \in L_p(\mathbb{R})$ et $g \in L_p(\mathbb{R})$. En utilisant le plongement $l^1 \hookrightarrow l^q$, pour $q \geq 1$,

il devient

$$\left(\sum_{0 \leq i \leq i_0} |2^{si} Q_i f(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \sum_{0 \leq i \leq i_0} |2^{si} Q_i f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En considérant les normes $L_p(\mathbb{R})$, alors

$$\left\| \left(\sum_{0 \leq i \leq i_0} |2^{sj} Q_i f(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c_1 \|f\|_p \leq \frac{c_2}{\|g\|_p} \|f \otimes g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

D'où le résultat. □

Chapitre 2

Calcul symbolique dans certains des espaces de Besov et Lizorkin Triebel

Dans ce chapitre, on étudie le calcul symbolique pour les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeur vectorielles $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$, il contient quelques fonctions de test, autres normes équivalentes, conditions nécessaires pour le calcul symbolique, et résultat préliminaires.

Définition 2.1. Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. Les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$, sont déterminés respectivement par

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \left(\sum_{i \geq 0} (2^{si} \|Q_i f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \left\| \left(\sum_{i \geq 0} (2^{sj} |Q_i f|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty,$$

avec la modification usuelle dans le cas $q = \infty$.

Dans le cas Lizorkin-Triebel, on suppose que $p < \infty$.

Définition 2.2. Pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{R} , f qui vérifient

$$\|f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit l'espace $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{R} , f telles que

$$\|f\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Définition 2.3. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, on dit que φ opéré par multiplication sur $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si $\varphi f \in E$ pour tout $f \in E$.

Définition 2.4. Soit E un espace de Banach de distribution dans \mathbb{R} , on dit que E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module si tout élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ opéré par multiplication sur E .

Il est bien connu que les espaces $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ sont des $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -modules.

2.1 Quelques fonctions de test

Lemme 2.1. Soit $s > 0$. Si $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une constante $c = c(v, s, p, q, 1) > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{i \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{ik} 2^{i((1/p)-s)} v(2^i(\cdot) - k) \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \left(\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{ik}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q},$$

$$\left\| \sum_{i \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{ik} 2^{i((1/p)-s)} v(2^i(\cdot) - k) \right\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \left\| \left(\sum_{i \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|\alpha_{ik}| 2^{i/p} \chi(2^i(\cdot) - k))^q \right)^{1/q} \right\|_p,$$

où χ choisit la fonction caractéristique de $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Lemme 2.2. Pour toute fonction $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une constante $c = c(v, s, p, q, 1) > 0$ telle que

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k v(\cdot - k) \right\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^p \right)^{1/p}.$$

Lemme 2.3. [1] On suppose que $E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \not\subset L_\infty(\mathbb{R})$ (autrement dit : $0 < s < \frac{1}{p}$ où $s = \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans cas Lizorkin-Triebel), alors il existe une suite $(\psi_m)_{m \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$, telles que $\psi_m(x) = 1$ sur le cube $[-2^{-m-1}, 2^{-m-1}]$ et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\psi_m\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} = 0.$$

Démonstration. Dans le cas $s < \frac{1}{p}$, on pose

$$\psi_m(x) := \varphi(2^m x),$$

on a

$$\|\psi_m\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq 2^{-m(1/p-s)} \|\varphi\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

Pour $s = \frac{1}{p}$ on pose

$$\psi_m(x) := m^{-1} \sum_{1 \leq i \leq m} \varphi(2^i x).$$

2.2. NORMES ÉQUIVALENTES

On a $\psi_m(x) = 1$ sur $[-2^{-m-1}, 2^{-m-1}]$ et $\psi_m(x) = 0$ hors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Le lemme 2.1 donne les inégalités

$$\|\psi_m\|_{B_{p,q}^{1/p}(\mathbb{R})} \leq cm^{(1/q)-1}.$$

De même

$$\|\psi_m\|_{F_{p,q}^{1/p}(\mathbb{R})} \leq cm^{-1} \left\| \sum_{1 \leq i \leq m} 2^{i/p} \chi_i \right\|_p,$$

où χ choisit la fonction caractéristique de $[-2^{-i-1}, 2^{-i-1}]$. Pour la norme L^p qui apparaît au seconde membre, on pose

$$S_k := [-2^{-k-1}, 2^{-k-1}] \setminus [-2^{-k-2}, 2^{-k-2}] \quad k = 1, \dots, m-1,$$

et

$$S_m := [-2^{-\nu-1}, 2^{-\nu-1}].$$

La fonction $\sum_{1 \leq i \leq \nu} 2^{i/p} \chi_i$ valant constamment $\sum_{1 \leq i \leq \nu} 2^{i/p}$ sur S_k , donc

$$\|\psi_m\|_{F_{p,q}^{1/p}(\mathbb{R})} \leq cm^{-1} \left(\sum_{1 \leq j \leq m} 2^k |S_k| \right)^{1/p} \leq c_1 m^{(1/p)-1}.$$

□

Lemme 2.4. Soient $s = 1 + \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. Alors il existe une suite $(\omega_m)_{m \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, telle que $\omega_m(x) = x_1$ pour $|x_1| \leq 2^{-m}$, on a

$$\|\omega_\nu\|_{B_{p,q}^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R})} \leq cm^{(1/q)-1}, \quad \|\omega_\nu\|_{F_{p,q}^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R})} \leq cm^{(1/q)-1}.$$

2.2 Normes équivalentes

Proposition 2.1. [1] Soit $0 < s < \ell$ avec ℓ entier. Une distribution f appartient à $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in L_p(\mathbb{R})$ et

$$N_{p,\ell}(f) := \sup_{0 < t \leq 1} t^{-s} \omega_{p,\ell}(f; t) < +\infty,$$

où $\omega_{p,\ell}(f; t) := \sup_{|h| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

De plus $\|f\|_p + N_{p,\ell}(f)$ est une norme équivalente dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2. [1] Soit $s > 0$. Une distribution f appartient à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in L_p(\mathbb{R})$ et $f' \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$. De plus $\|f\|_p + \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}$ est une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

2.3 Conditions nécessaires pour le calcul symbolique

Théorème 2.1. [1] Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, alors f est localement lipschitzienne.

Théorème 2.2. [1] Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \not\subseteq L_\infty(\mathbb{R})$ (autrement dit : $s < \frac{1}{p}$ ou $s = \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel). Si T_f envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, alors f est globalement lipschitzienne.

Théorème 2.3. [1] Soient $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$, (ou $s = 1 + \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, alors f est linéaire.

Théorème 2.4. [1] Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ alors $f \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}$.

2.4 Résultats préliminaires

Lemme 2.5. Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine telle que T_f envoie $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ (respectivement $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$) dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\| \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M,$$

pour tout la fonction g portée par $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, la norme de $\|g\|$ étant calculée respectivement dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Démonstration. On suppose, au contraire, pour tout cube \mathbf{R} et tous nombres M et δ , on trouve la fonction g , portée par \mathbf{R} , telle que

$$\|g\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta \quad \text{et} \quad \|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} > M.$$

On utilise une suite $(\mathbf{R}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de cubes disjoints et des fonctions $\varphi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ($i \geq 0$) telles que $\varphi_i(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}\mathbf{R}_i$ et $\varphi_i(x) = 0$ hors de \mathbf{R}_i .

Pour $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots$, on a

$$\text{supp } g_i \subset \frac{1}{2}\mathbf{R}_i, \quad \|g_i\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq 2^{-i}, \quad \|f \circ g_i\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} > iM_i.$$

2.4. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Donc la fonction $g := \sum_{i \geq 0} g_i$ appartient à $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et on a

$$\varphi_i(f \circ g) = f \circ g_i.$$

Alors

$$iM_i \leq \|(f \circ g)\varphi_i\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M_i \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})}, \quad \text{pour tout } i.$$

□

Lemme 2.6. Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que T_f envoie $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, alors quel que soit $a \in \mathbb{R}$, il existe un opérateur non linéaire $K_a : \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, et $\delta, M > 0$ tels que

$$K_a g(x) = f(a + g(x)) - f(a), \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

et

$$\|K_a g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\|g\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

Démonstration. On prendre l'opérateur non linéaire

$$V_a g(x) := \varphi(x)(f(a + g(x)) - f(a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$V_a g(x) = \varphi(x)(f(\varphi(x/2)(a + g(x)) - f(\varphi(x/2)a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

V_a envoie alors $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$ comme la preuve du lemme 2.5, il existe un cube $U \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $\delta, M > 0$ tels que

$$\|g\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta \implies \|V_a g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp} g \subset U$.

On pose $U = [-2^{-r}, 2^{-r}] + b$, avec $r > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, et

$$K_a g(x) := V_a(g(r^{-1}(\cdot - b)))(rx + b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$K_a g(x) := \varphi(rx + b)(f(a + g(x)) - f(a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $U \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on obtient $\varphi(rx + b) = 1$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. □

Lemme 2.7. Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$f_{a'} : x \mapsto f(a_1),$$

avec $a' := a_1 \in \mathbb{R}$.

On suppose que T_f envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, donc l'opérateur $S_{f_{a'}}$, envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$.

Démonstration. On prendre l'opérateur $\psi : E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow E_{p,q}^s(\mathbb{R})$, définie par

$$\psi(\mu)(x) = (a_1 \varphi(\frac{x}{2})).$$

Par définition de φ , on obtient

$$\varphi(\frac{x}{2}) = 1, \quad \text{si } \varphi(x) \neq 0.$$

Alors

$$\varphi(f_{a'} \circ v) = \varphi(f \circ \varphi(v)), \quad \forall v \in E_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

Cela montre que l'opérateur $S_{f_{a'}}$, envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$. □

Lemme 2.8. Soit $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$ ou $s = 1 + \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel). Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que l'opérateur S_f , envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, alors f est une fonction affine.

Démonstration. On rappelle que S_f vérifie le lemme 2.5.

Étape 1 :

Le cas $\frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p}$.

On pose $u(x) = x_1 \varphi(x)$. On suppose que $a > 0$ assez grand, et $0 < \varepsilon \leq 1$.

On a

$$\|au(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq ca\varepsilon^{(1/p)-s} \|u\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})}.$$

On désigne

$$\varepsilon = \left(\frac{\delta}{ac \|u\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})}} \right)^{\frac{1}{p-s}},$$

on définit la fonction v par

$$v(x) := au(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\|v\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad \text{et } \text{supp } v \subset [-1, 1].$$

Alors

$$\|S_f(v)\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M.$$

Par la définition de ε , on a

$$\int_{|x| \leq \frac{a}{4}} |\Delta_J^\ell f(x)|^p dx \leq ca^{-sp+1+p}, \quad J \in]0, 1].$$

Pour $a \rightarrow +\infty$ et $s > 1 + \frac{1}{p}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_J^\ell f(x)|^p dx = 0, \quad J \in]0, 1].$$

on suppose que

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i,$$

avec $n > 1$ et $c_n \neq 0$,

où f est une fonction polynomiale, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_f(v)(x) = F(x) + G(x).$$

On a

$$\gamma \in E_{p,q}^s(\mathbb{R}), \quad \text{si } s < \frac{1}{p} + (n-1)\tau.$$

On désigne τ tel que

$$\frac{1}{n-1} \left(s - \frac{1}{p}\right) < \tau < \frac{1}{n} \left(s - \frac{1}{p}\right).$$

Donc il y a une contradiction, puisque S_f envoie $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$. On conclut que

$$f(x) = c_0 + c_1 x.$$

Étape 2 :

le cas $s = 1 + \frac{1}{p}$ et $p > 1$.

Dans le lemme 2.4 ν un entier assez grand, on pose

$$a = \delta \|\omega_\nu\|_{E_{p,q}^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R})}^{-1},$$

et

$$u(x) := 2^{-m} a \omega_m\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \text{avec } \varepsilon \in]0, 1],$$

alors

$$\|u\|_{\varepsilon^s_{p,q}(\mathbb{R})} \leq \delta, \quad \text{et } \text{supp} u \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

On définit P par

$$|x_1| < 2^{-m-1} \varepsilon,$$

Soient $J \in]0, \frac{1}{2}]$ et $h = 2^{-m} a^{-1} \varepsilon J e_1$, pour tout $x \in P$,

$$\Delta_h^2 S_f(u)(x) = \Delta_J^2 f\left(2^{\nu} \frac{a}{\varepsilon} x_1\right), \quad \forall x \in P,$$

pour $0 < s < 2$, et par la proposition 2.2, on a

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \sim \|f\|_p + \|f'\|_{B_{p,\infty}^{s-1}(\mathbb{R})},$$

et par la proposition 2.1, on obtient

$$\int_p |\Delta_h(S'_f u)(x)|^p dx \leq M^p |h|, \quad (2.1)$$

on conclut que

$$2^m a^p \varepsilon^{-p} \int_{|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}} |\Delta_J f'(x)|^p dx \leq M^p,$$

et par la définition de ε , il devient

$$\int_{|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}} |\Delta_J f'(x)|^p dx \leq c a^{-p}.$$

Pour m et a tendent vers $+\infty$, il vient

$$\Delta_J f'(x) = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $J \in]0, \frac{1}{2}]$, f' est une constante.

Ètape 3 : Le cas $s = 2$ et $p = 1$, c'est-à-dire : $B_{1,q}^2(\mathbb{R})$ ($q > 1$).

Le début de la démonstration est inchangé l'estimation (2.1) est remplacée par

$$\int_p |\Delta_h^2(S'_f u)(x)| dx \leq M |h|,$$

Où f est un polynôme de degré au plus 2; alors comme à la fin de l'étape 1, on conclut que

$$f(x) = c_0 + c_1x.$$

□

Preuves des théorèmes 2.1 et 2.2

Démonstration. Soient b, b' dans $\mathbb{R}, n \geq 1$ et r, m , qui seront choisis en fonction de b et b' . On considère l'ensemble

$$\gamma_n := k_1,$$

et on définit

$$y = \frac{1}{2\ell + 1},$$

où ℓ est entier fixé tel que $\ell > s$.

preuve du théorème 2.1

Démonstration. On suppose que T_f envoie l'espace de Besov $B_{p,1}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$ (c'est suffisant car l'espace $B_{p,1}^s(\mathbb{R})$ se plonge dans tous les $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$). Soit un nombre réel a qui reste fixé dans la suite de la preuve. Donc on obtient un opérateur K_a et des constantes δ, M comme le lemme 2.6. On considère

$$m = 1 \quad \text{et} \quad r := \frac{1}{6n},$$

car $y < \frac{1}{2}$, les cubes $r([-y, y] + k), k \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints.

Par définition de r , on a $r([\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] + k) \subset [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]/2$, pour tout $k \in \gamma_n$. Donc

$$K_a g(x) = f(a + b') - f(a), \text{ si } x \in r([\frac{-y}{2}, \frac{y}{2}] + k) \text{ pour } k \in \gamma_n, \quad (2.2)$$

$$K_a g(x) = f(a + b) - f(a), \text{ si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]/2 \setminus \bigcup_{k \in \gamma_n} r([-y, y] + k). \quad (2.3)$$

On désigne r tel que

$$c^{-1} r^{s-\frac{1}{p}} n^{-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{k \in \gamma_n} \varphi\left(\frac{1}{y}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{\infty} = c^{-1} 6^{\frac{1}{2}-s} n^{-s} \|\varphi\|_{\infty} \leq c^i.$$

En employant la relation entre r et n , on obtient

$$\|g\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R})} \leq c_2(n^s |b' - b| + |b|). \quad (2.4)$$

Alors

$$\max(|b|, |b - b'|) \leq \frac{\delta}{2c_2}, \quad (2.5)$$

et on définit n par la propriété

$$n^s \leq \frac{\delta}{2c_2|b - b'|} < (n + 1)^s.$$

On remarque la définition de n entraîne

$$n^s \geq \frac{\delta}{2^{s+1}c_2|b - b'|}. \quad (2.6)$$

Par la condition (2.5) et par définition de n , on a

$$\|g\|_{B_{p,1}^s(\mathbb{R})} \leq \delta,$$

car le support de $g \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on conclut que

$$\|K_a g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M. \quad (2.7)$$

Pour tout $x \in r([0, \frac{y}{2}] + k)$, on a

$$\begin{aligned} x + irye_1 &\in r([\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] + K), & \forall i = 0, \dots, \ell, \\ x + irye_1 &\notin r([-y, y] + K), & \forall i = 0, \dots, \ell, \end{aligned}$$

par (2.2) et (2.3) on a

$$|\Delta_{rye_1}^\ell(K_a g)(x)| = |f(a + b') - f(a + b)|.$$

Donc

$$|f(a + b) - f(a + b')| \leq \frac{2^{s+1}Mc_2}{c_4\delta}|b - b'|,$$

où f est lipschitzienne dans un voisinage de a . □

preuve du théorème 2.2

Démonstration. Soit f une fonction satisfaisant l'hypothèse du théorème 2.2, on pose des constantes $\sigma > 0$ et $k > 0$ telles que $|b' - b| < \sigma$ implique

$$|f(b') - f(b)| \leq K|b' - b|, \quad \forall b \text{ et } b' \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On précise les entier positive m et n , ainsi que le nombre $r \in]0, 1]$. Pour Le lemme 2.3 on choisit m tel que

$$|b| \|\psi_m\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta/2,$$

le part n et r devrons suffisant les relations suivants :

$$\delta(3|b' - b|)^{-1} < c_1 r^{(1/p)-s} n^{1/p} \leq \delta(2|b' - b|)^{-1} \quad (2.8)$$

$$rn < 2^{-m-2}. \quad (2.9)$$

Par la relation (2.8) implique

$$\|g\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

l'inégalité (2.9) nous assure l'inclusion

$$r([-2^{-1}, 2^{-1}] + k) \subset [-2^{-m-1}, 2^{-m-1}] \text{ pour } k \in \gamma_n, \quad (2.10)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} g(x) &= b', \text{ si } x \in r([-y/2, y/2] + k), & \text{pour } k \in \gamma_n, \\ g(x) &= b, \text{ si } x \in [-2^{-m-1}, 2^{-m-1}] \setminus \bigcup_{k \in \gamma_n} r([-y, y] + k). \end{aligned}$$

Pour $s < \frac{1}{p}$, on pose

$$r = (\delta(2c_1|b' - b|)^{-1} n^{-1/p})^{\frac{1}{\frac{1}{p}-s}},$$

donc $rn = c|b' - b|^{\frac{1}{s-\frac{1}{p}}} n^{\frac{1}{s-\frac{1}{p}}}$ est de l'ordre de grandeur de $n^{\frac{1}{s-\frac{1}{p}}}$, pour $0 < s < \frac{1}{p}$, on choisit $n = n(\delta, |b' - b|)$ permet d'avoir (2.9).

On suppose que $s = \frac{1}{p}$.

Si $|b' - b| \leq \frac{\delta}{3}$, il est possible de trouver un entier $n \geq 1$ tel qu'on ait (2.8), on désigne r assez petit pour avoir (2.9). Il devient alors

$$\|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M.$$

Pour tout $x \in r([0, \frac{x}{2}] + k)$, On a

$$x + irye_1 \in r([0, \frac{x}{2}] + k) \setminus \bigcup_{k' \in \gamma_n} r([-y, y] + k'), \quad \forall i = 1, \dots, l.$$

Donc

$$|\Delta_{rye_1}^\ell(f \circ g)(x)| = |f(b') - f(b)|.$$

Et par la proposition 2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} &\geq (ry)^{-s} \left(\sum_{k \in \gamma_n} \int_{r([0, \frac{y}{2}] + K)} |\Delta_{rye_1}^\ell(f \circ g)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= |f(b') - f(b)| (2n+1)^{1/p} (ry)^{-s} |r[0, \frac{y}{2}]|^{1/p}. \end{aligned}$$

L'encadrement (2.8) entraîne

$$|f(b') - f(b)| \leq c_1 M r^{s-1/p} n^{-1/p} < c_2 M \delta^{-1} |b' - b|,$$

où f est globalement lipschitzienne. □

preuves des théorèmes 2.3 et 2.4

Preuve du théorème 2.3

Démonstration. On suppose que T_f envoie l'espace $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, donc par le lemme 2.7, $S_{f_{a'}}$, envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, et d'après le lemme 2.8 la fonction $x_1 \mapsto f_{a'}(x_1)$ est affine pour tout $a' \in \mathbb{R}$, donc

$$f_{a'}(x_1) = c_0 + c_1 x_1,$$

où c_0, c_1 dépendent des autres variables.

On obtient

$$c_\alpha^{-1} f(x_1) = x_1 u + x_1 v.$$

On considère une fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact, telle que $\theta \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$, on définit $g \in E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. par

$$g(x) = \theta(x).$$

Alors

$$(f \circ g)(x) = c_0 + c_1(x),$$

donc

$$c_\alpha^{-1}(f \circ g)(x) = \theta(x)u + \theta(x)v.$$

□

Preuve du théorème 2.4

Démonstration. Par définition on a

$$f \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc} \Leftrightarrow uf \in E_{p,q}^s(\mathbb{R}), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Soit v une fonction non nulle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et à support dans l'intervalle I . On suppose que le support de u est inclus dans l'intervalle I .

On désigne $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de façon que $g(x_1) = x_1$ pour tout $x_1 \in I \times I$.

On obtient

$$fu \otimes v = (f \circ g)(u \otimes v).$$

On a par hypothèse $f \circ g \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$. Comme $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module, on a $fu \otimes v \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$, donc on déduit que $fu \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})$. □

Chapitre 3

Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

Dans ce chapitre, on parle de Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, ce chapitre contient quelques définitions des théorèmes avec ses preuves.

3.1 Généralités sur la localisation uniforme

Un espace de Banach de distributions (E.B.D) sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ muni d'une norme complété $\| - \|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ soit continue.

Proposition 3.1. [2] *Soit E un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation. Pour toute distribution f appartient (E_{lu}) localement uniformément à E si l'une condition équivalentes suivantes est satisfaite :*

i) Il existe une fonction positive non nulle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $(\tau_a \psi_0)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et

$$\|f\|_{E_{lu}} := \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi_0)f\|_E < +\infty.$$

ii) Pour tout fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $(\tau_a \psi)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi)f\|_E < +\infty.$$

Si E est un (E.B.D) et v un entier positif, on peut considérer l'espace de Sobolev $W^r(E)$ d'ordre v de base E à prendre :

$$W^r(E) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f^{(\alpha)} \in E \text{ pour tout } |\alpha| \leq \nu\},$$

$W^r(E)$ est un E.B.D pour la norme

$$\|f\|_{W^r(E)} := \sum_{|\alpha| \leq \nu} \|f^{(\alpha)}\|_E.$$

Proposition 3.2. [2] *Soit E un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^r(E)$ et on a*

$$(W^r(E))_{lu} = W^r(E_{lu}),$$

avec des normes équivalentes.

Démonstration. $W^r(E)$ est un espace de Banach de distribution (E.B.D) pour la norme

$$\|f\|_{W^r(E)} = \sum_{|\alpha| < r} \|f^{(\alpha)}\|_E,$$

on a

$\psi f \in W^r(E)$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ puisque $\psi f \in E$ donc $W^r(E)$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\tau_a f \in W^r(E)$ alors

$$\|\tau_a f\|_{W^r(E)} = \|f\|_{W^r(E)}.$$

Car $\tau_a \in E$, alors $W^r(E)$ est isométriquement invariant translation.

$$f \in (W^r(E))_{lu} \Leftrightarrow \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \text{ on a } (\tau_a \psi) f \in (W^r(E)) \text{ pour tout } a \in \mathbb{R},$$

$$\text{et } \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi) f\|_{W^r(E)} < +\infty.$$

$$\Leftrightarrow \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), ((|\tau_a \psi|) f)^{(\alpha)} \in E \text{ pour } a \in \mathbb{R},$$

$$\text{et } \sup_{a \in \mathbb{R}} \|((\tau_a \psi) f)^{(\alpha)}\|_E < +\infty, |\alpha| < r.$$

$$\Leftrightarrow f \in (W^r(E_{lu})).$$

Donc

$$(W^r(E))_{lu} = W^r(E_{lu}).$$

□

Proposition 3.3. [2] *Soit $p \in [1, +\infty[$, alors f une fonction mesurable sur \mathbb{R} appartient $L_p(\mathbb{R})_{lu}$ si et seulement si*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

où I un intervalle ouvert donné dans \mathbb{R} .

De plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$.

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert, pour f a la propriété suivant on a

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty;$$

soit $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction non nulle telle que $\text{supp } \psi_0 \subset I$, on a

$$\begin{aligned} \|(\tau_a \psi_0) f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |(\tau_a \psi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{I+a} |(\tau_a \psi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{x \in (I+a)} |\tau_a \psi_0(x)| \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sup_{x \in I} |\psi_0(x)| \right) \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|\psi_0\|_\infty \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Alors

$$f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}.$$

On suppose que $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $(\tau_a \psi) f \in L_p(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi) f\|_p < +\infty.$$

Pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi(x) = 1$ sur I , on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{I+a} |f(x) \psi(x-a)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi) f\|_p < +\infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

□

Lemme 3.1. Pour tout $q \in [1, +\infty[$ et tout réel α , il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{0 < t < \frac{1}{2}} t^\alpha u(t) \leq c \left(\int_0^1 (t^\alpha u(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Pour tout fonction croissant u sur l'intervalle $[0, 1[$.

3.2 Définitions des espaces fonctionnels

Pour tout $p \in [1; +\infty[$ et tout ensemble borélien A de \mathbb{R} , on pose

$$\xi_{p,A}(f; t) := \sup_{h \leq t} \left(\int_A |\Delta_m f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$$\beta_{p,A}(f; t) := \sup_{h \leq t} \left(\int_A |\Delta_m^2 f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Où f est une fonction mesurable sur \mathbb{R} , et $t > 0$.

On note $\xi_p := \xi_{p,\mathbb{R}}$, de même pour β

Définition 3.1. Soient $0 < s < 1$, $p, q \in [1, +\infty]$. L'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonction f vérifiant

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-s} \xi_p(ft))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty.$$

Définition 3.2. Soient $0 < s < 1$, $q \in [1, +\infty]$, $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \left(\left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_m f(x)|^q dx \right)^{p/q} \frac{d}{t} \right)^{1/p} < +\infty.$$

- Dans les définitions précédents, en remplaçant l'intégrale \int_0^1 par l'intégrale \int_0^n , où n est n'importe quel réel fixé.
- Les espaces d'ordre 1, c'est-à-dire : les espaces $E_{p,q}^1(\mathbb{R})$, se définissent de la même manière, à condition d'échanger Δ_m par l'opérateur Δ_m^2 .
- les espaces d'ordre supérieur à 1 sont, par définition, les espaces de Sobolev basés sur les espaces d'ordre $0 < s < 1$.

Définition 3.3. Soient $s > 1$ et ν l'entier tel que $\nu < s \leq \nu + 1$. Alors $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f telles que $f^{(\alpha)} \in E_{p,q}^{s-\nu}(\mathbb{R})$ pour tout $|\alpha| \leq \nu$, cet espace est muni de la norme

$$\sum_{|\alpha| \leq \nu} \|f^{(\alpha)}\|_{E_{p,q}^{s-\nu}(\mathbb{R})}.$$

Résultats préliminaires

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{R}$ et soit f et g sont des fonctions quelconques, on pose des formules suivantes on a

$$\Delta_m f(x) = f(x + m) - f(x).$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta_m(fg)(x) &= f(x + m)g(x + m) - f(x)g(x) \\ &= f(x + m)g(x + m) - f(x)g(x) + f(x)g(x + m) - f(x)g(x + m) \\ &= (f(x + m) - f(x))g(x + m) + (g(x + m) - g(x))f(x) \\ &= (\Delta_m f(x))\tau_{-m}g(x) + (\Delta_m g(x))f(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\Delta_m(fg) = (\Delta_m f)\tau_{-m}g + f(\Delta_m g), \quad (3.1)$$

$$\Delta_m^2(fg) = (\Delta_m^2 f)(\tau_{-2m}g) + f(\Delta_m^2 g)(\tau_{-m}f) + (\Delta_m f)(\Delta_{2m}g). \quad (3.2)$$

Proposition 3.4. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\Delta_m = 2^{-k} \Delta_{2^k m} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l m}^2. \quad (3.3)$$

Pour démontrer cette proposition on a besoin le lemme suivant :

Lemme 3.2. Soit $m \in \mathbb{R}$ on a

$$\Delta_{2m'} - 2\Delta_{m'} - \Delta_{m'}^2 = 0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Delta_{2m'} f(x) - 2\Delta_{m'} f(x) - \Delta_{m'}^2 f(x) &= f(x + 2m') - f(x) - 2(f(x + m') - f(x)) - \\ &\quad \Delta_{m'}(f(x + m') - f(x)) \\ &= f(x + 2m') - f(x) - 2f(x + m') + 2f(x) - f(x + 2m') \\ &\quad + 2f(x + m') - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

3.2. DÉFINITIONS DES ESPACES FONCTIONNELS

Démonstration. Démonstration de la proposition (3.4), on utilise la démonstration par récurrence pour $k = 1$ on a

$$\begin{aligned}\Delta_m f(x) &= 2^{-1} \Delta_{2m} f(x) - 2^{-1} \Delta_m^2 f(x) \\ &= 2^{-1} (f(x+2m) - f(x)) - 2^{-1} (f(x+2m) - 2f(x+m) + f(x)) \\ &= f(x+m) - f(x),\end{aligned}$$

donc la propriété est vrai au rang 1.

On suppose que la propriété vrai au rang $k = n$

$$\Delta_m = 2^{-n} \Delta_{2^n m} - \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l m}^2.$$

On démontre que la propriété reste encore vrai au rang $k = n + 1$

$$\begin{aligned}\Delta_m &= 2^{-n-1} \Delta_{2^{n+1} m} - \sum_{l=0}^n 2^{-l-1} \Delta_{2^l m}^2 \\ &= 2^{-n} \Delta_{2^n m} + 2^{-n-1} \Delta_{2^{n+1} m} - 2^{-n} \Delta_{2^n m} - \sum_{l=0}^n 2^{-l-1} \Delta_{2^l m}^2 \\ &= 2^{-n} \Delta_{2^n m} - \sum_{l=0}^n 2^{-l-1} \Delta_{2^l m}^2 + 2^{-n-1} \Delta_{2^{n+1} m} - 2^{-n} \Delta_{2^n m} - 2^{-n-1} \Delta_{2^n m}^2 \\ &= \Delta_m + 2^{-n-1} [\Delta_{2^{n+1} m} - 2\Delta_{2^n m} - \Delta_{2^n m}^2].\end{aligned}$$

On pose $m' = 2^n m$.

D'après le lemme 3.1 , on a le résultat. □

Lemme 3.3. *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\xi_{p, I+a}(f, t) \leq ct \left\{ \left(\int_{2I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + H_{p,a}(f) |lnt| \right\},$$

pour tout $0 < t < 1/2$, tout $a \in \mathbb{R}$ et tout fonction localement intégrable f .

Où I un intervalle ouvert donné dans \mathbb{R} .

Démonstration. On définit l'entier $k \geq 1$ par $2^{-k-1} < t < 2^{-k}$. De la formule (3.3), on extait, pour $|m| \leq t$,

$$\left(\int_{I+a} |\Delta_m f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2^{-k} \left(\int_{I+a} |\Delta_{2^k m} f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \left(\int_{I+a} |\Delta_{2^l m} f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
 &\leq 2^{-k+1} \left(\int_{2I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \left(2^{l-k} H_{p,a}(f) \right), \\
 &\leq 4t \left(\int_{2I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \frac{1}{\ln 2} t |\ln t| H_{p,a}(t).
 \end{aligned}$$

□

3.3 Normes équivalentes dans quelques espaces

Théorème 3.1. [3] Si $0 < s < 1$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left(t^{-s} \xi_{p,I+a}(f;t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (3.4)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 3.2. [3] $B_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left(t^{-1} \beta_{p,I+a}(f;t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (3.5)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 3.3. [3] Si $0 < s < 1$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_m f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (3.6)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 3.4. [3] $F_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telle que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_m^2 f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (3.7)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$.

Preuves des théorèmes

on suppose que I un intervalle ouvert donné dans \mathbb{R} . Dans cette section, on fixe deux fonction ψ_0 et ψ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que

- $0 < \psi_0 < 1$, ψ_0 est non nulle et portée par $I/4$,
- $\psi_1(x) = 1$ sur $4I$.

preuve du théorème 1

Démonstration. On choisit par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (3.4), et par la formule (3.1) on a Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$. Par la formule (3.1), on a pour tout a et $m \in \mathbb{R}$ et $|m| \leq t \leq 1/2$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_m((\tau_a \psi_0)f)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq c_1 (\xi_{p, I+a}(f, t) + t \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}}). \end{aligned}$$

Par la condition $s < 1$, on a

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} \xi_p((\tau_a \psi_0)f, t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ & \leq c_1 \left(\left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} \xi_{p, I+a}(f, t) \right)^q \frac{dt}{t} \right) + \left(\int_0^{1/2} (t^{1-s})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}} \right). \end{aligned}$$

L'expression ci-dessus étant majorée par $c_2 A(f)$, pour c_2 une constante, on voit que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|\tau_a \psi_0 f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_3 A(f).$$

□

preuve du théorème 2

On choisit par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (3.5) et on pose

$$H_{p,q}(f) := \sup_{0 < t \leq 1/2} \frac{1}{t} \beta_{p, I+a}(f, t).$$

3.3. NORMES ÉQUIVALENTES DANS QUELQUES ESPACES

Démonstration. Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$, par la formule (3.2), il devient, pour $|m| \leq t \leq 1/4$,

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_m^2((\tau_a \psi_0)f)(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_m^2 f(x) \psi_0(x + 2m - a)|^p dx \right)^{1/p} \\
& \quad + \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x + m)|^p |\Delta_m^2(\tau_a \psi_0)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
& \quad + \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_m f(x) (\psi_0(x + 2m - a) - \psi_0(x - a))|^p dx \right)^{1/p} \\
& \leq \left(\int_{I+a} |\Delta_m^2 f(x)|^p dx \right)^{1/p} + c_1 t^2 \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + c_2 t \left(\int_{I+a} |\Delta_m f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
& \leq c_3 (\beta_{p, I+a}(f, t) + t^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{Iu}} + t \xi_{p, I+a}(f, t)),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{1/4} (t^{-1} \beta_p((\tau_a \psi_0)f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq c_3 \left(\int_0^{1/4} (t^{-1} \beta_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
& \quad + c_3 \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{Iu}} \left(\int_0^{1/4} t^{q-1} dt \right)^{1/q} + c_3 \left(\int_0^{1/4} (\xi_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

En résultant

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi_0)f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R})} \leq c_4 \left(A(f) + \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^{1/4} (\xi_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right).$$

Par le lemme (3.3), on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{1/4} (\xi_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
& \leq c_5 \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{Iu}} \left(\int_0^{1/4} t^{q-1} dt \right)^{1/q} + c_2 H_{p,a}(f) \left(\int_0^{1/4} t^{q-1} |lnt|^q dt \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme(3.1) à la fonction croissante $t \mapsto \beta_{p, I+a}(f, t)$, on déduire que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi_0)f\|_{B_{p,q}^1(\mathbb{R})} \leq c_7 A(f).$$

□

Preuve du théorème 3

On choisit par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (3.6)

Démonstration. Soit f une fonction telle que $A(f) < \infty$. Par la formule (3.1), on a

$$\begin{aligned} & \int_{|m| \leq t} |\Delta_m((\tau_a \psi_0)f(x))| dm \\ & \leq \int_{|m| \leq t} |\Delta_m f(x)| \psi_0(x+m-a) dm + |f(x)| \int_{|m| \leq t} |\Delta_m(\tau_a \psi_0)(x)| dm. \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m(\tau_a \psi_0)f(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_{I+a} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m f(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} + c_1 \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi_0)f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_2 A(f).$$

□

Preuve du théorème 4

Démonstration. On choisit par $A(f)$ le premier terme de l'inégalité (3.7)

$$R(x) := \left(\int_0^1 \left(t^{-2} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2 f(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Par la formule (3.2) on observe que, pour tous $a, x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2((\tau_a \psi_0)f(x))| dm \\ & \leq \int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2 f(x)| \psi_0(x+2m-a) dm + \int_{|m| \leq t} |f(x+m)| |\Delta_m^2(\tau_a \psi_0)(x)| dm + \int_{|m| \leq t} |\Delta_m f(x)| |\Delta_{2m} \tau_a \psi_0(x)| dm. \end{aligned}$$

On conclut que, pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/6} \left(t^{-2} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2((\tau_a \psi_0)f)(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{\frac{I}{2}+a} \left(\int_0^{1/6} \left(t^{-2} \int_{|m|\leq t} |\Delta_m^2((\tau_a \psi_0)f)(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq c_1 (E(a) + U(a) + T(a)),$$

avec

$$E(a) := \left(\int_{\frac{I}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} t^{-2} \int_{|m|\leq t} |\Delta_m^2 f(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p},$$

$$U(a) := \left(\int_{\frac{I}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} \left(\int_{|m|\leq t} |f(x+m)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p},$$

$$T(a) := \left(\int_{\frac{I}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-1} \int_{|m|\leq t} |\Delta_m f(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}.$$

On voit que

$$E(a) + U(a) \leq c_2 \left(\int_{I+a} R(x)^p dx \right)^{1/p} + c_3 \|f\|_{L_p(I+a)}. \quad (3.8)$$

Par $T(a)$, on pose

$$R_1(x) := \left(\int_0^{1/6} \left(t^{-1} \int_{|m|\leq t} |\Delta_m f(x)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

En dévisant l'intervalle $]0, 1/16]$ en intervalles dyadiques et en employant des majorations évidentes, on obtient

$$R_1(x) \leq c_4 R_2(x)$$

où

$$R_2(x) := \left(\sum_{i \geq 4} \left(2^i \int_{|m|\leq 2^{-i}} |\Delta_m f(x)| dh \right)^q \right)^{1/q}.$$

Par le changement de variable $m' = 2^{-i-3}m$, il vient

$$R_2(x) = \left(\sum_{i \geq 4} \left(\int_{|m|\leq 1/8} |\Delta_{2^{-i+3}m} f(x)| dm \right)^q \right)^{1/q}.$$

Par(3.3) on a

$$\Delta_{2^{-i+3}m} = 2^{-i+3} \Delta_m - \sum_{\ell=0}^{i-4} 2^{-\ell-1} \Delta_{2^{\ell-i+3}m},$$

d'où $R_2(x) \leq c_5(R_3(x) + R_4(x))$, avec

$$R_3(x) := \left(\sum_{i \geq 4} \left(2^{-i} \int_{|m| \leq 1/8} |\Delta_m f(x)| dm \right)^q \right)^{1/q},$$

et

$$R_4(x) = \left(\sum_{i \geq 4} \left(\int_{|m| \geq 1/8} \sum_{\ell=0}^{i-1} 2^{-\ell-1} |\Delta_{2^{\ell-i+3}m}^2 f(x)| dm \right)^q \right)^{1/q}.$$

Estimation de R_3 , on a

$$R_3(x) = c_6 \int_{|h| \leq 1/8} |\Delta_m f(x)| dm.$$

L'inégalité de Minokowski on donne, pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\frac{I}{2}+a} R_3(x)^p dx \right)^{1/p} &\leq c_6 \int_{|m| \leq 1/8} \left\{ \int_{\frac{I}{2}+a} |\Delta_m f(x)|^p dx \right\}^{1/p} dm \\ &\leq c_6 \int_{|m| \leq 1/8} \left\{ \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} dm + c_7 \left(\int_{\frac{I}{2}+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq c_8 \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Par R_4 et le lemme(3.1), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 < t \leq \frac{1}{2}$,

$$\int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2 f(x)| dm \leq c_9 t^2 R(x). \quad (3.9)$$

En raison du plongement $\ell_1 \hookrightarrow \ell_q$ on a

$$R_4(x) \leq \sum_{i \geq 4} \int_{|m| \leq 1/8} \sum_{\ell=0}^{i-4} 2^{\ell-1} |\Delta_{2^{\ell-i+3}m}^2 f(x)| dm.$$

On vérifie que

$$\int_{|m| \leq 1/8} |\Delta_{2^{\ell-i+3}m}^2 f(x)| dm = 2^{-3} 2^{-i-\ell} \int_{|h| \leq 2^{-\ell-i}} |\Delta_m^2 f(x)| dm.$$

En assoiant cette relation avec l'inégalité (3.9), on obtient

$$R_4(x) \leq c_{10} R(x) \sum_{i \geq 4} \sum_{\ell=0}^{i-4} 2^{-\ell-1} 2^{\ell-i} = c_{11} R(x),$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_{\frac{I}{2}+a} R_4(x)^p dx \right)^{1/p} \leq c_{11} \left(\int_{I+a} R(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

3.3. NORMES ÉQUIVALENTES DANS QUELQUES ESPACES

En prenant R_3 et R_4 , on peut déduire que l'expression $W(a)$ est estimée par

$$\left(\int_{I+a} R(x)^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

En associant avec (3.8), on déduit que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi_0) f\|_{F_{p,q}^1(\mathbb{R})} \leq c_{12} A(f).$$

□

Conclusion

Notre travail est articulé sur la caractérisation des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel.

En particulier,

On vient de montrer que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left(t^{-s} \xi_{p,I+a}(f; t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$$

est une norme équivalente à la norme de $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

De même pour l'expression

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left(t^{-1} \beta_{p,I+a}(f; t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$$

est une norme de $B_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$.

Alors que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m f(\cdot)| dm \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$$

est une autre norme de $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Notons également que la norme

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-2} \int_{|m| \leq t} |\Delta_m^2 f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$$

est norme équivalente à la norme de $F_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$.

Bibliographie

- [1] *S.E. Allaoui. Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles. Annales mathématiques Blaise pascal. 16 ,2 (2009), 399-429.*
- [2] *S.E. Allaoui. Integrales singulières. Thèse de Doctorat Université Batna, 2011, pp 63-76.*
- [3] *S.E. Allaoui et G.Bourdaud. Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. arXiv preprint arXiv, (2016),1-12.*
- [4] *G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, 23(1995).*
- [5] *G. Bourdaud. Localisations des espaces de Besov. Studia Math., 90 (1988), 153-163.*
- [6] *G. Bourdaud. Le calcul fonctionnel dans les espaces de sobolev . Inventiones mathematicae, 104(1) :435-446, 1991.*
- [7] *A. Djeriou. Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels. Thèse de Doctorat Université Batna, 2012, pp 15-24.*
- [8] *J. Peetre. New thoughts on Besov spaces, volume 1. Mathematics Department, Duke University,1976.*
- [9] *H. Triebel. Theory of function spaces. Birkhauser, Basel (1983).*