

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي الاغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématique et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : Marfoua Fatima

THEME

Stabilité du système de Timoshenko avec terme de viscoélastique et plusieurs amortissements.

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Dr. YAGOUB AMEUR

MCB

Président

Dr. RAHMOUNE ABDELAZIZ

MCB

Examineur

Dr. OUCHENANE DJAMEL

MCA

Encadreur .

Année Universitaire 2019/2020

Remerciement

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donné le courage de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire Dr. Ouchenane Djamel. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je tiens à remercier vivement Mr A. Yagoub d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Je remercie vivement chef département Docteur Abdelaziz Rahmoune de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury, sans oublier tous mes enseignants.

J'exprime mes remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont aidé à l'accomplissement de ce modeste travail.

Dédicaces

Merci à dieu qui nous permis de bien accomplir ce travail.

De tout mon coeur je dédie ce travail

A ma chère mère, la lumière qui nous a guidés vers

le chemin de savoir.

A mon cher père, pour leur sacrifice.

A mes chers frères.

A toute ma famille.

A mes très chers amis les plus proches de mon coeur

Promotion Bac 2015

Promotion de Analyse Mathématique

Master 2020.

Résumé

Dans ce mémoire: nous nous intéressons à l'étude de la stabilité de certains systèmes hyperboliques où la dissipation est introduite par la présence d'un terme thermoélastique ou viscoélastique, nous avons utilisé trois systèmes différents. un système de Timoshenko avec terme de viscoélastique avec deuxième son, pour le dernier système en présence d'un terme de retard de distribution.

Pour démontrer la stabilité de ces systèmes. on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov équivalente à l'énergie considéré.

Mots clés : Décroissance d'énergie; Amortissement Thermo-élastique; Viscoélastique; deuxième son; Terme de distribution.

Abstract

In this memoir, we are interested in study the stabilisation of certain hyperbolic systems where the dissipation is introduced by the presence of a thermoelastic or viscoelastic term. we use three different systems. A system of Timoshenko with second sound, the last system in the presence of distributed delay term.

To show the stabilisation of these systems, we use a multiplier method, it is based on the construction of a lyapunov function equivalent to energy.

Key-words : Energy decay; Thermoelastic damping; Viscoelasticity; Second sound; Distributed delay.

ملخص

ندرس في هذه المذكرة، بعض الجمل الزائدية الخطية و الغير خطية من نوع ϕ مسهوك باضافة حد يمثل اللزوجة،
بأستعمال النظرية الطاقوية التي تعتمد على بناء دالة جديدة تسمى دالة ليبنر، نبرهن
الاستقرار للجمل المطروحة في الفصلين الثاني و الثالث.

الكلمات المفتاحية : اللزوجة، الصوت الثاني، توزيع التأخير، التخميد بالحرارة،
تناقص الطاقة.

Table des matières

1	Préliminaire	6
1.1	Introduction	6
1.2	Topologie faible $\sigma(X, X')$	6
1.3	Quelques espaces fonctionnels et inégalités connus	6
1.3.1	Espaces L^p	6
1.3.2	Les espaces $L^p(0, T; X)$	7
1.3.3	Espace de Sobolev	8
1.3.4	Certaines inégalités utiles	10
1.4	Opérateur maximal monotone	11
1.5	L'ensemble résolvant et la résolvante	12
1.6	Théorie des semi-groupes	12
1.6.1	C_0 -Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif	12
1.7	Stabilité exponentielle et analytique	13
1.8	Définition des quelques termes physiques	14
2	Stabilité du système de Timoshenko avec terme de viscolélastique	15
2.1	Introduction	15
2.2	Préliminaires :	18
2.3	La stabilité de système	19
3	Stabilité du système de Timoshenko avec terme de viscoélastique , deuxième son et terme de retard de distribution	31
3.1	Introduction	31
3.2	Préliminaires	33
3.3	La stabilité de système	33
3.4	La stabilité de système avec un terme de retard de distribution	45

Notations

Γ ,	la frontière régulière de Ω .
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,	le point générique d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n .
H ,	espace de Hilbert.
$L^P(\Omega)$,	l'espace de Lebesgue , $1 \leq P \leq \infty$.
A^* ,	adjoint de A .
$H^m(\Omega)$,	$W^{m,2}(\Omega)$.
$\nabla f(x)$,	$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$, le gradient de la fonction f en $x \in \mathbb{R}^n$.
Δ ,	le Laplacien ($\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).
$W^{m,p}(\Omega)$,	l'espace de Sobolev , $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$,	la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
φ_t ,	$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$ la dérivée de φ par rapport à t .
ψ_t ,	$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi'$ la dérivée de ψ par rapport à t .
φ_{tt} ,	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à t .
ψ_{tt} ,	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à t .
φ_{xt} ,	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x par rapport à t .
ψ_{xt}	$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x par rapport à t .

Introduction générale

Timoshinko[42], a donné le système de deux équations hyperboliques couplées suivant

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = (K(\varphi_x - \psi))_x, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x + K(\varphi_x - \psi), & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

où t désigne la variable de temps, x est la variable de l'espace le long du faisceau de longueur L dans sa configuration d'équilibre, φ est le déplacement transversal du faisceau, ψ est l'angle de rotation du filament, ρ , I_ρ , E , I et K désignent, respectivement, la densité, le moment polaire de l'inertie d'une coupe, module de Young d'élasticité, le moment de l'inertie d'une coupe et le module de cisaillement.

Système(1), avec les conditions aux bords, donné par :

$$EI\varphi_x \Big|_{x=0}^{x=L} = 0, \quad K(u_x - \varphi) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0$$

est conservative, et alors l'énergie totale est conservée, lorsque le temps tend vers l'infini. Plusieurs auteurs ont introduit différents types de mécanismes dissipatifs pour garantir la stabilité du système (1).

Kim et Renardy [18] ont considéré (1) avec deux contrôles sur le bord de la forme :

$$\begin{cases} K\psi(L, t) - K\varphi_x(L, t) = \alpha\varphi_t(L, t), & \forall t \geq 0 \\ EI\psi_x(L, t) = -\beta\varphi_t(L, t), & \forall t \geq 0, \end{cases}$$

et ont utilisé les techniques de multiplicateurs pour établir un résultat de stabilité exponentielle pour l'énergie normale de (1). Ils ont également fourni des évolutions numériques aux valeurs propres de l'opérateur liées au système (1). Raposo et al ont [38] considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - K(\varphi_x - \psi)_x + \varphi_t = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + K(\varphi_x - \psi) + \psi_t = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

avec des conditions au bord de type Dirichlet homogènes et deux amortissement frictionnel, et ont montré que l'énergie liée à (2) décroît exponentielle. Soufyane et Wehbe [41] ont prouvé que c'est possible de stabiliser uniformément (1) en employant un feedback localement distribué unique, Ainsi, ils ont considéré :

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} = (K(\varphi_x - \psi))_x & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x + K(\varphi_x - \psi) - b\psi_t & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

où b est une fonction positive et continue, qui satisfait

$$b(x) \geq b_0 > 0, \quad \forall x \in [a_0, a_1] \subset [0, L].$$

En fait, ils ont montré que la stabilité uniforme de (3), établit si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{K}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}\right)$. Muñoz Rivera et Racke [30] ont traité un système de Timoshenko non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma_1(\varphi_x, \psi)_x = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - \chi(\psi_x)_x + \sigma_2(\varphi_x, \psi) + d\psi_t = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \end{cases}$$

dans un domaine borné. La dissipation établi grâce à un amortissement par frottement agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation.

Ammar Khodja et al [1] ont considéré un système de Timoshenko linéaire avec un contrôle de type mémoire de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + K(\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, avec conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Ils ont employé la technique de multiplicateur et ont montré que le système est uniformément stable si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right)$ et g décroît exponentiellement vers 0, et la stabilité polynômiale si g décroît polynômialement.

Muñoz Rivera et Fernández [29] ont considéré un système de type Timoshenko avec un terme mémoire agissant dans une seule équation. Ils ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(t)\psi_{xx}(t-s, \cdot)ds + K(\varphi_x + \psi) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

avec des conditions aux limites homogènes dans un domaine borné, et ils ont montré que la dissipation donnée par le terme mémoire est suffisamment forte pour stabiliser le système (5) de façon exponentielle si et seulement si $\left(\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right)$ et la fonction de relaxation g décroît exponentiellement .

Pour les systèmes thermoélastique de Timoshenko de type III, Messaoudi et Saïd-Houari [28] ont discuté le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{ttx} - k\theta_{txx} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

dans $(0, +\infty) \times (0, 1)$ Ils ont prouvé une décroissance exponentielle dans le cas où $k_0 = 0$, $\left(k_0 = \frac{b}{\rho_2} - \frac{K}{\rho_1}\right)$. En ajoutant de ce dernier système un amortissement viscoélastique de la forme $\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds$. Ils ont prouvé que l'énergie décroît exponentiellement pour des vitesses de propagation égales et décroît polynomialement pour des vitesses

de propagations non égales.

Pour la stabilisation des systèmes de Timoshenko utilisant l'effet de la chaleur, le premier travail était par Rivera et Racke[32], où ils ont considéré, dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \\ \rho_3 \theta_t - k\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où φ, ψ et θ désignent le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation du filament et la différence de température, respectivement. Sous des conditions appropriées sur σ, ρ_i, b, k et γ , ils ont prouvé plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour le système linéaire et le résultat de non stabilité exponentielle pour le cas des vitesses d'onde différentes.

Dans la théorie classique, on obtient un système couplé hyperbolique-parabolique tel que le système hyperbolique d'élasticité avec le modèle parabolique classique de conduction de la chaleur, typiquement donnée par la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla \theta, \quad (8)$$

qui exprime le flux de chaleur proportionnellement au gradient spatial de température. Alors, la température se propage à vitesse infinie. Les expériences ont montré que la conduction de chaleur dans certains cristaux diélectrique à basse température est libre de ce paradoxe (la vitesse de propagation infinie) et les perturbations qui sont presque entièrement thermique, peuvent se propager à une vitesse finie.

La loi classique de Fourier du flux de chaleur est dépendant de l'effet de mémoire et remplacée par la formule suivante :

$$q = -\frac{\kappa}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-s)} \nabla \theta(x, s) ds, \quad (9)$$

où $\tau > 0$ est le temps de relaxation,. Il en résulte facilement de (9) que l'on obtient l'équation de Maxwell-Cattaneo

$$\tau q_t + q + \kappa \nabla \theta = 0, \quad (\tau > 0,),$$

A la fin du siècle dernier, Green et Naghdi ont introduit trois types de la théorie thermoélastique fondés sur une égalité entropique au lieu de l'inégalité entropique habituelle. Dans chacune de ces théories, le flux thermique est donné par une hypothèse de comportement différent. Lorsque ces théories sont linéarisées, le type I conduit à la conduction de la chaleur habituelle par la loi de Fourier (8), le type II conduit à une équation du télégraphe

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\tau} \tau \theta_t = c^2 \Delta \theta \quad (10)$$

qui est hyperbolique et transmet des ondes à une vitesse finie c , et Le type III conduit à l'équation de type de Jeffrey

$$\tau q_t + q + k \nabla \theta + \tau k_1 \nabla \theta_t = 0.$$

Messaoudi et al[28] ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta \psi_{tx} = 0, \\ \tau_0 q_t + q + \kappa \theta_x = 0, \end{cases}$$

où $(x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty)$, $\mu > 0$ et la fonction non linéaire σ est supposée être suffisamment lisse et satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\psi}(0, 0) = k$$

et

$$\sigma_{\varphi_x \varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\varphi_x \psi}(0, 0) = \sigma_{\psi \psi} = 0.$$

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaire et non linéaire ont été établies en présence d'un amortissement par frottement fort $\mu \varphi_t$. Concernant le système de Timoshenko avec terme de retard de distribution, ont étudié le système de la forme

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \varphi_t(x, t - s) ds = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \int_0^t g(t - s) (a(x) \psi_x(s))_x ds + \mu_3(t) b(x) f(\psi_t) + \gamma \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + k q_x + \gamma \psi_{tx} = 0, \\ \rho_4 q_t + \delta q + k \theta_x = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Les auteurs ont montré la stabilité du système (11), on utilise la condition $\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds$.

Ce mémoire est répartie on trois chapitres :

chapitre 1 : Nous rappellons quelques propriétés de l'analyse fonctionnelle, qui seront utilisés dans ce mémoire .

chapitre 2 : Concerne un problème viscoélastique, il est constitue de stabilité exponentielle sous les conditions plus faible sur la fonction de relaxation.

chapitre 3 : Dans ce chapitre nous étudions deux systèmes viscoélastique de Timoshenko avec deuxième son et un terme d'amortissement $\mu \varphi_t$ tel que le deuxième système liée d'un terme de retard de distribution .En utilisant le méthode de multiplicateurs nous démontrons la stabilité de ces systèmes.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Introduction

Dans ce chapitre consacré aux rappels, nous avons regroupé les notions essentielles de quelques espaces fonctionnels, certaines inégalités dans ces espaces qu'on utilisera ultérieurement et nous donnons brièvement, théorèmes fondamentaux et aussi quelques termes physiques qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

1.2 Topologie faible $\sigma(X, X')$

soit X un espace de Banach et soit $f \in X'$ (X' l'espace dual de X). On désigne par $\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f = \langle f, x \rangle$. Lorsque f parcourt X' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans \mathbb{R} .

Définition 1.2.1. *La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.*

Pour définir cette topologie d'une façon plus précise il suffit de définir une base de voisinages pour tout élément $x \in X$ comme suit :

Etant donné un point $x \in X$ on obtient une base de voisinages de x pour la topologie $\sigma(X, X')$ en considérant les ensembles de la forme $\cap_{f \in I} \varphi_f^{-1}(V_f)$, où V_f est un voisinage de $\varphi_f(x)$ dans \mathbb{R} .

(i.e. $V_f =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $a = (f, x)$).

1.3 Quelques espaces fonctionnels et inégalités connus

1.3.1 Espaces L^p

Définition 1.3.1. *soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble mesurable de \mathbb{R}^n au sens de Lebesgue on définit*

$$L^p(\Omega) = \{(\text{classe de fonctions}) f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Si $p = \infty$

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \begin{array}{l} f \text{ mesurable et il existe une constante } C \\ \text{telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On définit sur $L^{\infty}(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{\infty} = \text{Inf} \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

Notation :

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposition 1.3.1. .

- 1) Si $p \in [1, +\infty]$, alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach (i.e. normé complet).
- 2) Si $p \in [1, +\infty[$, alors $L^p(\Omega)$ est séparable (i.e. il existe un ensemble dénombrable dense dans $L^p(\Omega)$).
- 3) $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Proposition 1.3.1. La distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $L^p(\Omega)$ s'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où $1 \leq p \leq \infty$ et il est bien connu que f est unique.

1.3.2 Les espaces $L^p(0, T; X)$

Définition 1.3.2. Soit X un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace des (classes de) fonctions $t \mapsto f(t)$ de $]0, T[\rightarrow X$ qui sont mesurables à valeur dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty, \quad (1.1)$$

si $p = \infty$, on remplace la norme (1,1) par

$$\|f\|_{L^{\infty}(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \|f(t)\|_X. \quad (1.2)$$

1.3.3 Espace de Sobolev

Définition 1.3.3. Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [0, \infty]$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \quad \text{tel que } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } \right. \\ \left. |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m, \text{ où } , \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} \right\}.$$

Remarque 1.3.1. Lorsque $P = 2$,

$$W^{m,2} := H^m(\Omega) \\ W_0^{m,2}(\Omega) := H_0^m(\Omega) .$$

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $v \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à m -prises au sens des distributions sont dans $L^2(\Omega)$.

Ces espaces jouent dans l'analyse des équations aux dérivées partielles un rôle fondamental.

Remarque 1.3.2. On définit $L^q(0, T; H_0^1(\Omega_t))$ comme étant l'espace des fonctions $w \in L^q(0, T; H_0^1(\Omega))$ telles que $w(x, t) = 0$ p.p dans $\Omega \setminus \Omega_t$, où $1 \leq q \leq \infty$, muni de la norme

$$\| w \|_{L^q(0,T;H_0^1(\Omega_t))} = \left(\int_0^T \| w(t, x) \|_{H_0^1(\Omega_t)}^q \right)^{1/q} .$$

Si $q = \infty$

$$\| w \|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t))} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess } \| w(t, x) \|_{H_0^1(\Omega_t)} .$$

On définit de la même façon les espaces $L^q(0, T; L^p(\Omega_t))$, $1 \leq q < \infty$.

lemme 1.3.1. Si $f \in L^p(0, T; X)$ et $\frac{df}{dt} \in L^p(0, T; X)$ (au sens des distributions) ($1 \leq p \leq \infty$), alors $f \in C(0, T; X)$.

lemme 1.3.2. Soit $O =]0, T[\times \Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^x$, g_μ, g des fonctions de $L^q(0, T; L^q(\Omega))$,

$1 < q < \infty$ telles que

$$\| g_\mu \|_{L^q(0,T;L^q(\Omega))} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$$

et

$$g_\mu \rightarrow g \text{ p.p. dans } O.$$

Alors $g_\mu \rightarrow g$ dans L^q (faiblement).

Définition 1.3.4. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit :

$$H^m(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \} \quad (1.3)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u(x) |^2 dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^{\alpha} u \|_2^2 \right)^{1/2}.$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{adhrence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) \\ &= \text{sous - espace de } H^1(\Omega) \text{ des fonctions "nulles" sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Puisque (par définition) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace de distribution sur Ω :

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))', \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \quad (1.4)$$

Les injections dans (1.4) sont continues .

Les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ sont sommes de dérivées de 1^{er} ordre de fonctions de $L^2(\Omega)$.

Proposition 1.3.2. :

- 1/ Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $H^{m'}(\Omega)$.
- 2/ $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_m$ est un espace de Hilbert .

Remarque 1.3.3. On a pour $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ et pour Γ assez régulière

$$C \| \varphi(t) \|_{H^2(\Omega)} \leq \| \Delta\varphi(t) \|_2 .$$

Théorème 1.3.1. (Formule de Green). Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$- \int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u à Γ dirigée vers l'extérieur.

Remarque 1.3.4. Les espaces $H_0^1(\Omega_t)$, (resp. $L^2(\Omega_t)$) s'identifient à des sous espaces fermés de $H_0^1(\Omega)$, (resp. $L^2(\Omega)$), $\forall t \in]0, T[$.

Notion de trace

Pour une fonction $u \in C^0(\overline{\Omega})$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{cases} \gamma(u) : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow u(x). \end{cases}$$

En d'autres termes, $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$. On introduit alors l'application de trace

$$\begin{cases} \gamma : C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\partial\Omega) \\ u \rightarrow \gamma(u) \end{cases}$$

qui est une application linéaire. À une application définie sur un ouvert Ω , elle associe la restriction de cette application au bord de l'ouvert.

Proposition 1.3.2.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\}.$$

Autrement dit, $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord de Ω (quand ce bord est défini)

1.3.4 Certaines inégalités utiles

Nous allons lui donner des inégalités importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliquées.

Lemme 1.3.1. (Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (1.5)$$

Remarque 1.3.1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas $p = 2, p' = 2$.

Lemme 1.3.2. (Inégalité de Hölder généralisée). Soient f_1, f_2, \dots, f_k des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

Lemme 1.3.3. (Inégalité de Young) On suppose $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$, $1 < p' < \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1 \geq 0$. Alors $(f * g) \in L^r(\mathbb{R})$ et

$$\| f * g \|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R})} \| g \|_{L^{p'}(\mathbb{R})} .$$

Lemme 1.3.4. (Inégalité de Minkowski) Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\| u + v \|_{L^p} \leq \| u \|_{L^p} + \| v \|_{L^p}$$

Soient $1 \leq p \leq r \leq p'$, tel que $\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{p'}$, et $1 \leq a \leq 1$.

Alors

$$\| u \|_{L^r} \leq \| u \|_{L^p}^a \| u \|_{L^{p'}}^{1-a} .$$

Si $\mu(\Omega) < \infty$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, alors $L^{p'} \hookrightarrow L^p$, et

$$\| u \|_{L^p} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \| u \|_{L^{p'}}$$

Lemme 1.3.5. (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n que l'on suppose borné. Alors, il existe une constante C telle que :

$$\| f \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| \nabla f \|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega). \quad (1.6)$$

Lemme 1.3.6. (Inégalité de Jensen) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ avec $a < b$, $f \in C([0, 1],]a, b[)$, et $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Alors :

$$\varphi \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x) dx.$$

1.4 Opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \rightarrow H$ un opérateur donné où $D(A)$ est son domaine de définition défini par $D(A) = \{u \in H \text{ tq } Au \in H\}$.

Définition 1.4.1. Un opérateur linéaire non borné dans H est un couple $(A, D(A))$ où $D(A)$ un sous-espace vectoriel de H et A est une application linéaire de $D(A)$ dans H . Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A .

Définition 1.4.2. Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H est dissipatif si

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in D(A),$$

Définition 1.4.3. Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H est m -dissipatif si :

1/ A est dissipatif .

2/ $\text{Im} (I - A) = H$ i.e. $\forall f \in H, \exists v \in D(A)$ tel que $v - Av = f$.

1.5 L'ensemble résolvant et la résolvante

Définition 1.5.1. On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble de points réguliers de l'opérateur T et note par $\rho(T)$ tel que

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : D(A) \subset H \rightarrow H. \text{ inversible}\}$$

Définition 1.5.2. L'application

$$R(\cdot, T) : \rho(T) \rightarrow \mathcal{L}(H) R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1},$$

s'appelle la résolvante de A .

1.6 Théorie des semi-groupes

Définition 1.6.1. Une famille $T(t)$ avec $(0 \leq t < \infty)$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continue si :

2/ $T(0) = I_d$

1/ $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0,$

3/ Pour chaque $x \in X$, $T(\cdot)x$ est continue en t sur $[0, \infty)$.

Dans la suite, on appelle une telle application semi-groupe de class C_0 et on la note par C_0 -semi-groupe.

Définition 1.6.2. Le générateur infinitésimal de C_0 - semi - groupe $T(t)$ est l'opérateur linéaire et continue \mathcal{A} de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \text{ pour } x \in D(\mathcal{A}).$$

Exemple 1.6.1. Soit l_2 l'espace défini par :

$$l_2 = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

$(T(t)x)_n = (e^{-\frac{t}{n}}x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un C_0 -semi-groupe et $(\mathcal{A}x)_n = (-\frac{x_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est son générateur infinitésimal .

1.6.1 C_0 -Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif

Proposition 1.6.1. Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe . Il existe deux constantes $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\| T(t) \| \leq M e^{wt} \quad \text{pour } 1 \leq t < \infty. \quad (1.7)$$

Théorème 1.6.1. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X et soit $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ les constantes qui vérifient

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

pour le générateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ de $(T(t))_{t \geq 0}$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

1/ Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds. \quad (1.8)$$

Existe pour tout $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda)$.

2/ Si $\operatorname{Re}(\lambda) > w$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, et le résolvant $R(\lambda, \mathcal{A})$ est donné par l'expression l'intégrale (1.8).

3/ $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - w}$ pour tout $\operatorname{Re}(\lambda) > w$.

Définition 1.6.3. Si $w = 0$, $T(t)$ est dit borné et si de plus $M = 1$, il est appelé C_0 -semi-groupe de contractions.

Théorème 1.6.2. (Hille-Yosida) Un opérateur linéaire (non borné), \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $T(t), t \geq 0$ si et seulement si :

1/ \mathcal{A} est un opérateur fermé et $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.

2/ l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} contient \mathbb{R}^+ et pour tout $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.6.3. (Lumer-phillips). Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire et $D(\mathcal{A})$ dense dans H . Alors \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction si et seulement si

1/ \mathcal{A} est dissipatif,

2/ Il existe $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = H$.

1.7 Stabilité exponentielle et analytique

Théorème 1.7.1. Soit $\{T(t) = e^{tA}\}_{t \geq 0}$ un C_0 - semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors $T(t)_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda, \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

et

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < +\infty.$$

Théorème 1.7.2. Soit $\{T(t) = e^{At}\}_{t \geq 0}$ un C_0 - semi-groupe sur un espace de Hilbert. On suppose que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$. Alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est analytique si et seulement si

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|\lambda(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty.$$

1.8 Définition des quelques termes physiques

Thermoélastique : La thermoélastique est une relation entre l'élasticité d'un corps et à sa dilattion en fonction de la chaleur

Viscoélasticité : En rhéologie , le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module E et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité η . L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie . Les polymères , en fait plupart des matériaux , ont un comportement viscoélastique .

Stabilité de la solution

Il existe plusieurs degrés de stabilité : Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro ,i.e :

$$E(t) \rightarrow 0. \text{ Lorsquet} \rightarrow +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte .

Pour le second , on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide , c'est-à-dire lorsque celle-ici tend vers 0 de manière exponentielle , i.e :

$$E(t) \leq C \exp(-\alpha t), \quad \forall t > 0,$$

ou C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales .

Quant au troisième , il étudie des situations intermédiaires , dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle , mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\beta}, \quad \forall t > 0.$$

ou C et β sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Fonction de Lyapunov : une fonction de Lyapunov est une fonction qui permet d'estimer la stabilité d'une solution d'une équation différentielle.

Chapitre 2

Stabilité du système de Timoshenko avec terme de viscolélastique

2.1 Introduction

D'après A. Guesmia et S. A. Messaoudi [14], on étudié dans ce chapitre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + \varphi_x + \psi + \int_0^t g(t - \tau)(a(x)\psi_x(\tau))_x d\tau + b(x)h(\psi_t) = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, L) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L) , \end{array} \right. \quad (2.1)$$

(soumis à un contrôle frictional et un contrôle de type mémoire complémentaires) et ont étudié l'influence de ces contrôles sur le taux de stabilité des solution. Ils ont obtenu la stabilité exponentielle et polynômiale sous des conditions plus faibles sur la fonction de relaxation g .

Un modèle simple décrivant la vibration transversale d'un faisceau a été développé dans [42] et donné par le système des équations hyperboliques couplées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} = (K(u_x - \varphi))_x & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_p \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi) & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) . \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Où t désigne la variable de temps, x est la variable de l'espace le long du faisceau de longueur L dans sa configuration d'équilibre, u est le déplacement transversal du faisceau, φ est l'angle de rotaion du filament du faisceau, et ρ, I_p, E, I et K désignent, respectivement, la densité (la masse par unité de longueur) le moment polaire de l'inertie d'une coupe, module de Young d'élasticité le moment de l'inertie d'une coupe, et le module de cisaillement. Kim et Renardy [18] on considéré (2.2) avec deux contrôles sur le bord de la forme :

$$\begin{aligned} Ku(L, t) - Ku_x(L, t) &= \alpha u_t(L, t), \quad \forall t \geq 0 \\ EI\varphi_x(L, t) &= -\beta\varphi_t(L, t), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

et ont utilisé les techniques de multiplicateurs pour établir un résultat de stabilité exponentielle pour l'énergie normale de (2.2). Ils ont également fourni des évolutions numériques aux valeurs propres de l'opérateur liées au système (2.2). Un résultat analogue a été également établi par Feng où la stabilisation d'un système de Timoshenko a été étudiée. Raposo et al [38] ont étudié (2.2) avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes et des contrôles linéaires ; ils ont regardé le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - K(u_x - \varphi)_x + u_t = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} - b\varphi_{xx} - K(u_x - \varphi) + \varphi_t = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(L, t) = \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

et ont montré que l'énergie liée à (2.3) décroît exponentielle. Ce résultat est semblable celui obtenu par Taylor. La méthode utilisée est différente de l'habituelle telle que la méthode classique d'énergie. Il emploie principalement la théorie de semi-groupe. Soufyane et Wehbeb [41] ont prouvé que c'est possible de stabiliser uniformément (2.2) en employant un feedback localement distribué unique. Ainsi ils ont considéré :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = (K(u_x - \varphi))_x & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ I_\rho \varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + K(u_x - \varphi) - b\varphi_t & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(L, t) = \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

où b est une fonction positive et continue qui satisfait

$$b(x) \geq b_0 > 0, \quad \forall x \in [a_0, a_1] \subset [0, L].$$

En fait, ils ont montré que la stabilité uniforme de (2.4), établit si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{K}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}\right)$. Muñoz Rivera et Racke [30] ont traité un système non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \gamma(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_3 \theta_t - K\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases}$$

où φ, ψ et θ sont des fonctions de (x, t) modélisant le déplacement transversal du faisceau, l'angle de rotation du filament et la température de différence, respectivement. Sous des conditions appropriées sur $\gamma, \rho, b, K, \delta, (i = 1, 2, 3)$, ils ont prouvé la stabilité exponentiel du système dans les cas des mêmes vitesses de propagation. Ammar Khodja et al [1] ont considéré un système de Timoshenko linéaire avec un contrôle de type mémoire de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + K(\varphi_x + \psi) = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) , \end{cases} \quad (2.5)$$

avec conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Ils ont employé la technique de multiplicateur et ont montré que le système est uniformément stable si et seulement si les vitesses de propagation sont égales $\left(\frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}\right)$ et g décroît exponentiellement vers 0, et la stabilité polynômiale si g décroît polynômialement. Ils ont également considéré quelques conditions techniques supplémentaires sur g' et g'' pour obtenir leur résultat. Les feedbacks de type mémoire ont été également employé par DE LIMA SANTOS où ils ont considéré un système de Timoshenko et ont montré à que la présence des deux feedbacks du type mémoire sur une partie de la frontière stabilise le système uniformément. Ils ont également obtenu le taux de décroissance de l'énergie en fonction des feedbacks. Shi et Feng ont étudié un système de Timoshenko non uniforme rayonné de relaxation soumis à des contrôles localement distribués et ont montré la stabilité exponentielle du système.

2.2 Préliminaires :

Maintenant, on va considérer quelques hypothèses qui seront largement utilisées dans la suite.

- (H1) $a, b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que :

$$a \in C^1([0, 1]), b \in L^\infty([0, 1])$$

$$a = 0 \text{ ou } a(0) + a(1) > 0, \inf_{x \in (0, 1]} a(x) + b(x) > 0$$

- (H2) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable non décroissante telles que ils existe des constantes $\varepsilon', c_1, c_2 > 0$ et une fonction convexe et croissant $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de class $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2((0, \infty))$ satisfait $H(0) = 0$ et H est linéaire sur $[0, \varepsilon']$ ou $(H'(0) = 0 \text{ et } H'' > 0 \text{ sur } (0, \varepsilon'])$ tels que

$$c_1 |s| \leq |h(s)| \leq c_2 |s| \quad \text{si } |s| \geq \varepsilon'$$

$$s^2 + h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)) \quad \text{si } |s| \leq \varepsilon'$$

- (H3) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable telle que

$$g(0) > 0, \quad 1 - \|a\|_\infty \int_0^{+\infty} g(s) ds = l > 0$$

- H(4) il existe une fonction différentiable non croissant $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$g'(s) \leq -\xi(s)g(s) \quad \forall s \geq 0$$

Proposition 2.2.1. Soient $(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$, supposons que (H1) – (H3) sont vérifiées. Alors le système (2.1) admet une solution globale (faible) unique vérifiant :

$$\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \quad (2.6)$$

Si

$$(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \times H_0^1(0, 1),$$

alors la solution satisfait (dite forte) :

$$\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \cap W^{1, \infty}(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, 1)) \cap W^{2, \infty}(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)). \quad (2.7)$$

Si h est linéaire et

$$(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \times H_0^1(0, 1),$$

alors la solution satisfait (dite classique) :

$$\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+; H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, 1)) \cap C^2(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)).$$

2.3 La stabilité de système

Maintenant ; nous présentons la fonction d'énergie suivant :

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \left(1 - a(x) \int_0^t g(s) ds \right) \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2 \right) dx + \frac{1}{2} (g \circ \psi_x) \quad (2.8)$$

où, pour tout $v \in L^2(0, 1)$,

$$(g \circ v)(t) = \int_0^1 a(x) \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))^2 ds dx \quad (2.9)$$

Le résultat de stabilité de ce chapitre est le suivant :

Théorème 2.3.1. *Soient $(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$. Supposons que (H1) – (H4) sont satisfaites. Alors il existe des constantes positives c', c'' et ε_0 telles que la solution (faible) du système (2.1) satisfait :*

$$E(t) \leq c'' H_1^{-1} \left(c' \int_0^t \xi(s) ds \right) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

où $H_1(t) = \int_t^1 (1/H_2(s)) ds$,

$$H_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \varepsilon'] \\ tH'(\varepsilon_0 t) & \text{si } H'(0) = 0 \text{ et } H'' > 0 \text{ sur } (0, \varepsilon']. \end{cases}$$

et $\xi = 1$ si $a = 0$.

Dans cette section, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs pour démontrer la stabilité du système (2.1), le principe de cette méthode est de construire une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov F , équivalente à l'énergie E , satisfait, pour toute constantes positives c' et t_0 ,

$$F'(t) \leq -c' \xi(t) H_2(F(t)) \quad \forall t \geq t_0.$$

Pour cela, nous allons démontrer plusieurs lemmes .

Lemme 2.3.1. *Soient (φ, ψ) une solution (faible) de (2.1). Alors la fonction d'énergie satisfait :*

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\frac{1}{2} g(t) \int_0^1 a(x) \psi_x^2 dx - \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx + \frac{1}{2} (g' \circ \psi_x) \\ &\leq -\int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx + \frac{1}{2} (g' \circ \psi_x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Démonstration. En multipliant les deux équation du système (2.1) par φ_t et ψ_t , respectivement, et intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx = \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx$$

en intégrant par parties le membre droite, on trouve

$$\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx = - \int_0^1 \varphi_x \varphi_{tx} dx - \int_0^1 \psi \varphi_{tx} dx \quad (2.12)$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation (2.1)₂ par ψ_t et en intégrant sur $(0,1)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx &= \int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx - \int_0^1 \varphi_x \psi_t dx - \int_0^1 \psi \psi_t dx \\ &\quad - \int_0^1 \psi_t \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds dx - \int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t) dx, \end{aligned}$$

et grâce à la formule d'intégration par parties, on déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx &= - \int_0^1 \psi_x \psi_{tx} dx - \int_0^1 \varphi_x \psi_t dx - \int_0^1 \psi \psi_t dx \\ &\quad + \int_0^1 \psi_{tx} \int_0^1 g(t-s)(a(x)\psi_x(s)) ds dx - \int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t) dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \left(1 - a(x) \int_0^t g(s) ds\right) \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi) \right)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (g \circ \psi_x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx + \int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx + \int_0^1 \psi_{xt}\psi_x dx \\ &\quad - \int_0^1 a(x)\psi_{xt}\psi_x \int_0^t g(s) ds dx - \frac{1}{2}g(t) \int_0^1 a(x)\psi_x^2 dx + \int_0^1 \varphi_{xt}\varphi_x dx + \int_0^1 \psi_t \psi dx \\ &\quad + \int_0^1 \varphi_{xt}\psi dx + \int_0^1 \varphi_x \psi_t dx + \frac{1}{2}(g' \circ \psi_x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

d'après (2.12), (2.13), on trouve

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\frac{1}{2}g(t) \int_0^1 a(x)\psi_x^2 dx - \int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t) dx + \frac{1}{2}(g' \circ \psi_x) \\ &\leq - \int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t) dx + \frac{1}{2}(g' \circ \psi_x) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

□

Puis, on utilise la fonction α a été obtenu par Cavalcanti et Oquendo [7]. D'après le fait que $a(0) > 0$ et a est continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\inf_{x \in [0, \varepsilon]} a(x) \geq \varepsilon$.

$$d = \min \left\{ \varepsilon, \inf_{x \in [0,1]} a(x) + b(x) \right\} > 0$$

et $\alpha \in C^1([0, 1])$ tel que $0 \leq \alpha \leq a$ et

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= 0 \quad \text{si } a(x) \leq \frac{d}{4} \\ \alpha(x) &= a(x) \quad \text{si } a(x) \geq \frac{d}{2}\end{aligned}$$

on pose

$$g \odot v = \int_0^1 \alpha(x) \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s)) ds dx,$$

pour tout $v \in L^2(0, 1)$ et c est une constante générique.

Lemme 2.3.2. (Cavalcanti et Oquendo [7]). *La fonction α est non identiquement nulle et satisfait :*

$$\inf_{x \in [0,1]} \{\alpha(x) + b(x)\} \geq \frac{d}{2}$$

Démonstration. Pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, on a $a(x) \geq \varepsilon \geq d \geq \frac{d}{2}$; donc, par définition, $\alpha(x) = a(x) \geq \varepsilon$; où α est non identiquement nulle sur $[0, 1]$.

D'autre part si $a(x) \geq d/2$, alors $\alpha(x) \geq d/2$, ce qui implique $\alpha(x) + b(x) \geq d/2$. Si $a(x) < d/2$, alors, d'après (H1), $b(x) > d/2$. Par conséquent, $\alpha(x) + b(x) \geq d/2$. Donc $\inf_{x \in [0,1]} \alpha(x) + b(x) \geq d/2$. \square

Lemme 2.3.3. (Cavalcanti et Oquendo [7]). *Il existe une constante positive c tel que*

$$(g \odot v)^2 \leq cg \circ v_x,$$

pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$.

Démonstration. Soit $S_a = \{x \in [0, 1] : a(x) > d/4\}$, $0 \in S_a$; $\partial S_a \cap \partial(0, 1) \neq \emptyset$ et $\text{supp} \alpha \subset S_a$:

$$(g \odot v)^2 = \left(\int_{\text{supp} \alpha} \alpha(x) \int_0^t g^{1/2}(t-s)g^{1/2}(t-s)(v(t) - v(s)) ds dx \right)^2.$$

D'après l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré([7]) :

$$\begin{aligned}(g \odot v)^2 &\leq c \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left(\int_{\text{supp} \alpha} \int_0^t g(t-s)(v(t) - v(s))^2 ds dx \right) \\ &\leq c \int_{S_a} \int_0^t g(t-s)(v_x(t) - v_x(s))^2 ds dx,\end{aligned}$$

par la définition de S_a , on a

$$(g \odot v)^2 \leq c \int_{S_a} a(x) \int_0^t g(t-s)(v_x(t) - v_x(s))^2 ds dx \leq cg \circ v_x$$

\square

Lemme 2.3.4. *Sous les hypothèses (H1) – (H4). Alors la fonction I_1 définie par :*

$$I_1'(t) := - \int_0^1 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx$$

satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} I_1'(t) \leq & - \left(\int_0^t g(s) ds - \delta \right) \int_0^1 \alpha(x) \psi_t^2 dx + \delta \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c\delta \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & - \frac{c}{\delta} g' \circ \psi_x + c \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right) g \circ \psi_x + \frac{c}{\delta} \int_0^1 b(x) h^2(\psi(t)) dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

pour toute $\delta > 0$.

Démonstration. En utilisant les équations du système (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= - \int_0^1 \alpha \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx - \int_0^1 \alpha \psi_t^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) dx \\ &\quad - \int_0^1 \alpha \left[\psi_{xx} - \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds - \varphi_x - \psi - b(x)h(\psi_t) \right] \\ &\quad \times \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ &= - \int_0^1 \alpha \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx - \int_0^1 \alpha \psi_t^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \alpha \psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds dx + \int_0^1 \alpha (\varphi_x + \psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ &\quad - \int_0^1 \alpha a \left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \alpha' \left(\psi_x - a \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\ &\quad + \int_0^1 b(x) h(\psi_t) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx. \end{aligned}$$

Maintenant, on va estimer le terme du membre droite de notre inégalité; puis, en utilisant les inégalités de Young et LEMME 2.2.3 on obtient, pour tout $\delta > 0$,

$$- \int_0^1 \alpha \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \leq \delta \int_0^1 \alpha(x) \psi_t^2 dx - \frac{c}{\delta} g' \circ \psi_x$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \alpha \psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds dx \leq \delta \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\delta} g \circ \psi_x \\
& \int_0^1 \alpha (\varphi_x + \psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \leq \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\delta} g \circ \psi_x \\
& - \int_0^1 \alpha a \left(\int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right) dx \\
\leq & \delta' \int_0^1 a \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(s) - \psi_x(t) + \psi_x(t)) ds \right)^2 dx \\
& + \frac{c}{\delta'} \int_0^1 a \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right)^2 dx \\
\leq & 2\delta' \int_0^1 a \psi_x^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right)^2 dx + \left(2\delta' + \frac{c}{\delta'} \right) \int_0^1 a \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right)^2 dx \\
\leq & c\delta' \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\delta' + \frac{1}{\delta'} \right) g \circ \psi_x \leq \delta \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\delta \frac{1}{\delta} \right) g \circ \psi_x \\
& \int_0^1 \alpha' \left(\psi_x - a \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
\leq & \delta \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\delta \frac{1}{\delta} \right) g \circ \psi_x
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 b(x) h(\psi_t) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \leq \delta \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx + c \left(\delta \frac{1}{\delta} \right) g \circ \psi_x.$$

En combinant les estimations, ce qui donne l'inégalité recherchée. \square

Lemme 2.3.5. *Sous les hypothèses (H1) – (H4). Alors la fonction I_2 définie par :*

$$I_2(t) := - \int_0^1 (\psi \psi_t + \varphi \varphi_t) dx$$

satisfait l'estimation :

$$I_2'(t) \leq - \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + c g \circ \psi_x + c \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx. \tag{2.17}$$

Démonstration. En exploitant les équations de (2.5) et on répétant le même procédé,

on a :

$$\begin{aligned}
 I_2'(t) &= - \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx - \int_0^1 \varphi (\psi_x + \varphi_{xx}) dx \\
 &\quad - \int_0^1 \psi \left[\psi_{xx} - \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds - \varphi_x - \psi - b(x)h(\psi_t) \right] dx \\
 &= - \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 a(x)\psi_x \left(\int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds \right) dx \\
 &\quad + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 b(x)\psi h(\psi_t) dx \\
 &\leq - \int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2) dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + cg \circ \psi_x + c \int_0^1 b(x)h^2(\psi_t) dx.
 \end{aligned}$$

D'où la démonstration complète du LEMME 2.3.5 □

Lemme 2.3.6. *Sous les hypothèses (H1) – (H4). Alors la fonction I_3 définie par :*

$$I_3(t) := - \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_x dx - \int_0^1 a(x) \varphi_t \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx$$

satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned}
 I_3'(t) &\leq \left[\left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \varphi_x \right]_{x=0}^{x=1} - (1-\varepsilon) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 &\quad + \varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

pour tout $0 < \varepsilon < 1$.

Démonstration. l'exploitation de équation (2.1) implique

$$\begin{aligned}
 I_3'(t) &= \int_0^1 (\varphi_x + \psi) \left[\psi_{xx} - \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds - \varphi_x - \psi - b(x)h(\psi_t) \right] dx \\
 &\quad + \int_0^1 (\varphi_{xt} + \psi_t) \psi_t dx + \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx + \int_0^1 \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx \\
 &\quad - \int_0^1 a(x) (\varphi_x + \psi)_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx \\
 &\quad - \int_0^1 a(x) \varphi_t \left(g(0) \psi_x + \int_0^t g'(t-s) \psi_x(s) ds \right) dx \\
 &= \left[\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \varphi_x \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &\quad - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \int_0^1 b(x) (\varphi_x + \psi) h(\psi_t) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad + g(t) \int_0^1 a(x) \psi_x \varphi_t dx - \int_0^1 a(x) \varphi_t \int_0^t g'(t-s) (\psi_x(s) - \psi_x(t)) ds dx.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young, ce qui donne l'inégalité recherchée. □

Lemme 2.3.7. *Supposons que les hypothèses (H1) – (H4) sont satisfaites. Soit $m \in C^1([0, 1])$ une fonction vérifiant $m(0) = -m(1) = 2$. Alors il existe $c > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ les fonctions I_4 et I_5 définies par :*

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 m(x) \psi_t \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) dx, \\ I_5 &= \int_0^1 m(x) \varphi_t \varphi_x dx \end{aligned}$$

satisfait :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &\leq - \left(\left(\psi_x(1, t) - a(t) \int_0^t g(t-s) \psi_x(1, s) ds \right)^2 + \left(\psi_x(0, t) - a(0) \int_0^t g(t-s) \psi_x(0, s) ds \right)^2 \right) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \left(\int_0^1 \psi_x^2 dx + g \circ \psi_x \right) + c \left(\int_0^1 (\psi_t^2 + b(x) h^2(\psi_t)) dx - g' \circ \psi_x \right) \end{aligned}$$

et

$$I_5'(t) \leq -(\varphi_x^2(1, t) + \varphi_x^2(0, t)) + c \int_0^1 (\varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2) dx.$$

Démonstration. En exploitant les équations de (2.1) et en répétant le même procédé, on obtient

$$\begin{aligned} I_4'(t) &= \int_0^1 m \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) dx \\ &\quad - \int_0^1 m \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) (\varphi_x + \psi + b(x) h(\psi_t)) dx \\ &\quad + \int_0^1 m(x) \psi_t \left(\psi_{xt} - a(x) g(0) \psi_x - a(x) \int_0^t g'(t-s) \psi_x(s) ds \right) dx \\ &= - \left(\left(\psi_x(1, t) - a(1) \int_0^t g(t-s) \psi_x(1, s) ds \right)^2 + \left(\psi_x(0, t) - a(0) \int_0^t g(t-s) \psi_x(0, s) ds \right)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 m'(x) \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right)^2 dx \\ &\quad - \int_0^1 m(x) \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) (\varphi_x + b(x) h(\psi_t)) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 m'(x) \psi_t^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 m(x) a(x) \psi_t (g'(t-s) (\psi_x(t) - \psi_x(s))) ds dx + g(t) \int_0^1 m(x) a(x) \psi_x \psi_t dx \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Young et LEMME 2.3.3. d'où le resultat recherché. \square

De la même façon, on trouve facilement I_5'

Lemme 2.3.8. *Supposons que les hypothèses (H1) – (H4) sont satisfaites. Alors la fonction I_6 définie par :*

$$I_6(t) := I_3(t) + \frac{1}{4\varepsilon} I_4(t) + \varepsilon I_5(t)$$

satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} I_6'(t) &\leq -\left(\frac{3}{4} - c\varepsilon\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c\varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 b(x)h^2(\psi_t) dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{c}{\varepsilon} g' \circ \psi_x + \frac{c}{\varepsilon} g \circ \psi_x \end{aligned} \quad (2.19)$$

pour tout $0 < \varepsilon < 1$.

Démonstration. A l'aide de LEMME 2.3.6 et LEMME 2.3.7, les inégalités de Young, Poincarée et

$$\varphi_x^2 \leq 2(\psi + \varphi_x)^2 + 2\psi^2$$

et

$$\left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds\right) \varphi_x \leq \varepsilon \varphi_x^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left(\psi_x - a(x) \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds\right)^2$$

Ce qui achève la démonstration de (2.19). \square

Lemme 2.3.9. Soit $I_7 := I_6(t) + 2c\varepsilon I_2(t)$, d'après LEMME 2.3.5 et 2.3.8, on fixe ε assez petit, on obtient

$$\begin{aligned} I_7'(t) &\leq -\frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx - \tau \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 b(x)h^2(\psi_t) dx + cg \circ \psi_x - cg' \circ \psi_x \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\tau = c\varepsilon$.

Comme dans [1], nous considérons la fonction w définie par

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(1) = 0 \quad (2.21)$$

Lemme 2.3.10. La solution w de (16) satisfait :

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx$$

et

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

Démonstration. On multiplie l'équation (16) par w et on intègre par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 -w_{xx} w dx &= \int_0^1 \psi_x w dx \\ \Rightarrow \int_0^1 w_x^2 dx &= \int_0^1 \psi_x w dx = - \int_0^1 \psi w_x dx. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2 dx \Rightarrow \int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx.$$

De même

$$\int_0^1 w_{xt} dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 w_{xt}^2 dx.$$

alors

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

□

Lemme 2.3.11. *Sous les hypothèses (H1) – (H4). Alors la fonction I_8 définie par :*

$$I_8(t) := \int_0^1 (\psi\psi_t + w\varphi_t) dx$$

satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} I_8'(t) &\leq -\frac{l}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + c \left(\int_0^1 b(x)h^2(\psi_t) dx + g \circ \psi_x \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

pour tout $0 < \varepsilon < l$ (l est défini dans (H3)).

Démonstration. En exploitant les équations de (2.1), et en intégrant sur $(0,1)$, on trouve

$$\begin{aligned} I_8'(t) &= \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi_x^2) dx + \int_0^1 a(x)\psi_x \int_0^t g(t-s)\psi_x(s) ds dx \\ &\quad - \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + b(x)h(\psi_t)) dx - \int_0^1 w_x(\varphi_x + \psi) dx + \int_0^1 w_t\varphi_t dx \\ &\leq \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{l}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\int_0^1 b(x)h^2(\psi_t) dx + g \circ \psi_x \right) \\ &\quad + \int_0^1 (w_x^2 - \psi^2) dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \varepsilon \int_0^1 w_t^2 dx. \end{aligned}$$

D'après le LEMME 2.3.10, on a

$$\leq \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{l}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\int_0^1 b(x)h^2(\psi_t) dx + g \circ \psi_x \right) + \frac{c}{\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

□

Pour $N_1, N_2, N_3 > 1$, soit

$$I_9(t) := N_1 E(t) + N_2 I_1(t) + N_3 I_8(t) + I_7(t)$$

et soient $t_0 > 0$ et $g_0 = \int_0^{t_0} g(s) ds > 0$. En utilisant (2.11), (2.16), (2.20), (2.22), on choisit d'abord $\delta = 1/4N_2$, alors

$$\begin{aligned} I_9'(t) \leq & - \left(N_2 g_0 - \frac{1}{4} \right) \int_0^1 (\alpha(x) + b(x)) \psi_t^2 dx + c \frac{N_3}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & - N_1 \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx + \left(N_2 g_0 - \frac{1}{4} \right) \int_0^1 b(x) \psi_t^2 dx + c(N_2^2 + N_3) \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx \\ & - \left(\frac{lN_3}{2} - c - \frac{c}{N_2} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx - (c - N_3 \varepsilon) \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ & + \left(\frac{N_1}{2} - cN_2^2 - c \right) g' \circ \psi_x + c(N_2^2 + N_3) g \circ \psi_x \end{aligned} \quad (2.23)$$

pour tout $t \geq t_0$ et $0 < \varepsilon < l$. Maintenant, si $a \neq 0$, en choisissant N_3 assez grand, on déduit que

$$\frac{lN_3}{2} > c$$

et, ε assez petit tel que

$$\varepsilon < \frac{c}{N_3}$$

Puis, en choisissant N_2 assez grand, on trouve

$$N_2 g_0 - \frac{1}{4} > \frac{2cN_3}{d\varepsilon}, \quad \frac{lN_3}{2} - c - \frac{c}{N_2} > 0$$

Finalement, on choisit N_1 assez grand pour que

$$\frac{N_1}{2} - cN_2^2 - c \geq 0$$

En utilisant (H3), on arrive à

$$\begin{aligned} I_9'(t) \leq & -c \int_0^1 (\alpha(x) + b(x)) \psi_t^2 dx + c \int_0^1 b(x) (\psi_t^2 + h^2(\psi_t)) dx \\ & -c \int_0^1 (\psi_x^2 + \varphi_t^2) dx - \frac{1}{4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + cg \circ \psi_x \end{aligned} \quad (2.24)$$

D'après le LEMME 2.3.2 et en utilisant l'estimation de (2.8), alors

$$I_9'(t) \leq -cE(t) + cg \circ \psi_x + c \int_0^1 b(x) (\psi_t^2 + h^2(\psi_t)) dx \quad (2.25)$$

pour tout $t \geq t_0$.

Si $a = 0$, alors $I_1 = 0$ et $I_9(t) := N_1 E(t) + N_3 I_8(t) + I_7(t)$. Alors, on écrit l'inégalité (2.23) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} I_9'(t) \leq & c \frac{N_3}{\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx - N_1 \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx + cN_3 \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx \\ & - \left(\frac{N_3}{2} - c \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx - (c - N_3 \varepsilon) \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx. \end{aligned}$$

En répétant exactement les mêmes arguments de l'étape précédente pour obtenir (2.25), avec $\inf_{x \in [0,1]} b(x) \geq 0$.

D'autre part, en choisissant N_1 tel que

$$I_9(t) \sim E(t) \quad (2.26)$$

Maintenant on va estimer la dernière intégrale de (2.25), on peut considérer la partition de $(0,1)$ (où ε' est défini dans (H2)) :

$$\Omega^+ = \{x \in (0,1) : |\psi_t| > \varepsilon'\} \quad \text{et} \quad \Omega^- = \{x \in (0,1) : |\psi_t| \leq \varepsilon'\} \quad (2.27)$$

D'après (H2) et (2.15), on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} b(x)(\psi_t^2 + h^2(\psi_t))dx &\leq c \int_{\Omega^+} b(x)\psi_t h(\psi_t)dx \\ &\leq c \int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t)dx \leq -cE'(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Alors deux cas sont requis :

cas 1 : H est linéaire sur $[0, \varepsilon']$: Alors il existe $c'_1, c'_2 > 0$ tels que $c'_1 |s| \leq |h(s)| \leq c'_2 |s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc (2.28) est vérifiée pour tout $(0,1)$. En utilisant (2.25) et (2.28), on conclut

$$(I_9(t) + cE(t))' \leq -cH_2(E(t)) + cg \circ \psi_x \quad (2.29)$$

cas 2 : $H'(0) = 0$ et $H'' > 0$ sur $(0, \varepsilon']$, soit H^* la fonction convexe par la fonction dual de H au sens de Young. Car $H'' > 0$ sur $(0, \varepsilon_1]$ et $H'(0) = 0$

$$H^*(s) = s(H')^{-1}(s) - H[(H')^{-1}(s)] \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$$

En utilisant l'inégalité de Jensen (voire [39] et [40]), on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} b(x)(\psi_t^2 + h^2(\psi_t))dx &\leq c \int_{\Omega^-} b(x)H^{-1}(\psi_t h(\psi_t))dx \\ &\leq c \int_{\Omega^-} H^{-1}(b(x)\psi_t h(\psi_t))dx \leq cH^{-1}\left(\int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t)dx\right) \\ &\leq cH^{-1}(-cE'(t)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Alors (2.25), (2.28) et (2.30) impliquent que

$$I_9'(t) \leq -cE(t) + cH^{-1}(-cE'(t)) - cE'(t) + cg \circ \psi_x \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.31)$$

En utilisant alors l'inégalité de Young

$$H^* \leq s(H')(s), \quad E' \leq 0, \quad H'' \geq 0$$

en choisissant $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on obtient, pour $c_0 > 0$ assez grand,

$$\begin{aligned}
 (H'(\varepsilon_0 E(t))(I_9(t) + cE(t)) + c_0 E(t))' &= \varepsilon_0 E'(t) H''(\varepsilon_0 E(t))(I_9(t) + cE(t)) \\
 &\quad + H'(\varepsilon_0 E(t))(I_9'(t) + cE'(t)) + c_0 E'(t) \\
 &\leq -cH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + cH'(\varepsilon_0 E(t))H^{-1}(-cE'(t)) \\
 &\quad + c_0 E'(t) + cH'(\varepsilon_0 E(t))g \circ \psi_x \\
 &\leq -cH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + cH^*(H'(\varepsilon_0 E(t))) - cE'(t) \\
 &\quad + c_0 E'(t) + cg \circ \psi_x \\
 &\leq -cH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + c\varepsilon_0 H'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + cg \circ \psi_x \\
 &\leq -cH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + cg \circ \psi_x = -cH_2(E(t)) + cg \circ \psi_x
 \end{aligned}$$

Soit

$$I_{10}(t) = \begin{cases} I_9(t) + cE(t) & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \varepsilon'] \\ H'(\varepsilon_0 E(t))(I_9(t) + cE(t)) + c_0 E(t) & \text{si } H'(0) = 0 \text{ et } H'' > 0 \text{ sur } (0, \varepsilon']. \end{cases}$$

On utilise (2.26), on trouve

$$I_{10}(t) \sim E(t)$$

en exploitant (2.29), il en résulte que

$$I'_{10}(t) \leq -cH_2(E(t)) + cg \circ \psi_x \quad \forall t \geq t_0$$

On procède comme dans [26], on peut facilement voir que

$$\begin{aligned}
 (\xi(t)I_{10}(t))' &= \xi'(t)I_{10}(t) + \xi(t)I'_{10}(t) \\
 &\leq -c\xi(t)H_2(E(t)) + c\xi(t)g \circ \psi_x \\
 &\leq -c\xi(t)H_2(E(t)) + c(\xi g) \circ \psi_x \\
 &\leq -c\xi(t)H_2(E(t)) - cg' \circ \psi_x \\
 &\leq -c\xi(t)H_2(E(t)) - cE'
 \end{aligned}$$

Soit $F(t) = \varepsilon(\xi(t)I_{10}(t) + cE(t))$, où $0 \geq \varepsilon \geq \bar{\varepsilon}$ est une constante positive satisfait

$$\xi(t)I_{10}(t) + cE(t) \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}}E(t) \quad \forall t \leq 0$$

en plus On a $F \sim E$ et

$$\begin{aligned}
 F'(t) &\leq -c\varepsilon\xi(t)H_2(E(t)) \leq -c\varepsilon\xi(t)H_2(\bar{\varepsilon}(\xi(t)I_{10}(t) + cE(t))) \\
 &\leq -c\varepsilon\xi(t)H_2(\varepsilon(\xi(t)I_{10}(t) + cE(t))) = -c\varepsilon\xi(t)H_2(F(t))
 \end{aligned}$$

en intégrant sur (t_0, t) , on trouve

$$F(t) \leq H_1^{-1} \left(c\varepsilon \int_0^t \xi(s)ds + H_1(F(t_0)) - c\varepsilon \int_t^{t_0} \xi(s)ds \right)$$

où $H_1(t) = \int_t^1 (1/H_2(s))ds$.

Quand $\lim_{t \rightarrow 0} H_1(t) = +\infty$ et

$$0 \leq F(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}E(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}E(0)$$

nous prenons ε assez petit tel que

$$H_1(F(t_0)) - c\varepsilon \int_0^{t_0} \xi(s)ds \geq 0$$

Chapitre 3

Stabilité du système de Timoshenko avec terme de viscoélastique , deuxième son et terme de retard de distribution

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons les deux systèmes de Timoshenko :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - \bar{b} \psi_{xx} + \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds + K(\varphi_x + \psi) + b(x)h(\psi_t) + \gamma \theta_x = 0 \\ \rho_3 \theta_t + kq_x + \gamma \psi_{tx} = 0 \\ \tau_0 q_t + \delta q + k\theta_x = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $t \in (0, \infty)$ désigne la variable de temps, $x \in (0, 1)$ est la variable de l'espace, les fonctions φ et ψ est le déplacement du materiale élastique solide, la fonction θ est la température de différence, $q = q(x, t) \in \mathbb{R}$ est le flux de chaleur et $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma, \tau_0, \delta, k, \bar{b}$ et K désignent des constants positives et $\mu > 0$. Avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \varphi(., 0) &= \varphi_0(x), \varphi_t(., 0) = \varphi_1(x), \psi(., 0) = \psi_0(x) \\ \psi_t(., 0) &= \psi_1(x), \theta(., 0) = \theta_0(x), q(., 0) = q_0(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

et les conditions aux limites :

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0, \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

et

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) \varphi_t(x, t-s) ds = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds + \mu_3(t)b(x)f(\psi_t) + \gamma \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + kq_x + \gamma \psi_{tx} = 0, \\ \rho_4 q_t + \delta q + k\theta_x = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $t \in (0, \infty)$ désigne la variable de temps, $x \in (0, 1)$ est la variable de l'espace, les fonctions φ, ψ, θ et q désignent, respectivement, le déplacement transversal du faisceau, l'angle de rotation, la température de différence, le flux de chaleur. a, b, f, μ_3 et g sont des fonctions spécifiques. Les coefficients, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \gamma, \delta, k, \beta, \mu_1$ et K désignent des constantes positives, $\mu_2 : [\tau_1; \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée, où τ_1, τ_2 deux nombres réels satisfait $0 \leq \tau_1 < \tau_2$.

On considère les conditions initiales et les conditions aux bords suivantes de ce système :

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) &= \varphi_0(x), \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_t(x), \theta(\cdot, 0) = \theta_0(x) && \text{dans}(0, 1), \\ \psi(\cdot, 0) &= \psi_0(x), \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(x), q(\cdot, 0) = q_0(x) && \text{dans}(0, 1), \\ \varphi(0, t) &= \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0 && \text{dans } (0, \infty), \\ \varphi_t(x, -t) &= f_0(x, t) && \text{dans } (0, 1) \times (0, \tau_2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

où (f_0 history function.)

Pour les systèmes thermoélastique de Timoshenko de type III, Messaoudi et Saïd Houari [27] ont discuté le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_3 \theta_{tt} - \gamma\psi_{ttx} - k\theta_{txx} = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \end{cases}$$

et ont prouvé un résultat de décroissance exponentielle si les vitesses de propagation sont égales. Lorsque les vitesses de propagation sont différentes, un résultat de décroissance polynomiale a été obtenue récemment par Messaoudi et Farah.

En ce qui concerne les systèmes thermoélastique de Timoshenko avec deuxième son, Massaoudi et al[28]. ont étudié dans $(0, L) \times (0, +\infty)$, le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \sigma(\varphi_x, \psi)_x + \mu\varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + \gamma q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + q + K\theta_x = 0, \end{cases}$$

où φ est le déplacement transversal, ψ est l'angle de rotation du filament, θ est la différence de température, q est le flux de chaleur, $\rho_i, b, k, \gamma, \delta, K, \mu$ et τ sont des constantes positives.

La fonction non linéaire σ est supposée être suffisamment lisse et satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\psi}(0, 0) = k$$

et

$$\sigma_{\varphi_x \varphi_x}(0, 0) = \sigma_{\varphi_x \psi}(0, 0) = \sigma_{\psi \psi} = 0.$$

Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaire et non linéaire ont été établies en présence d'un amortissement par frottement fort $\mu\varphi_t$.

3.2 Préliminaires

On utilise les hypothèses suivantes :

- (H5) $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1 \quad (3.6)$$

- (H6) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et non décroissante telle que il existe deux constantes positives k_1, k_2 et l et a convexe, la fonction continue et croissante $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de class $C^1(\mathbb{R}_+) \cap C^2(]0, +\infty[)$ satisfaite : $h(0) = 0$ et $h'' = 0$ dans $[0, l]$ ou ($h' > 0$ et $h'' > 0$ dans $[0, l]$) telle que

$$\begin{aligned} h(s^2 + f^2(s)) &\leq f(s)s && \text{pour } |s| \leq l, \\ k_1 s^2 &\leq f(s)s \leq k_2 s^2 && \text{pour } |s| > l. \end{aligned} \quad (3.7)$$

- (H7) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable telle que

$$g(0) > 0, \int_0^\infty g(s) ds = g_1, \beta - \|a\|_\infty \int_0^\infty g(s) ds > 0. \quad (3.8)$$

- (H8) Il existe une fonction différentiable non croissante $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaite

$$g'(s) \leq -\eta(s)g(s), \text{ pour } s \geq 0.$$

- (H9) $\mu_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction de class C^1 non croissante satisfaite

$$\int_0^\infty \mu_3(s) ds = +\infty.$$

3.3 La stabilité de système

Dans cette section, d'après [35] on va étudier la stabilité de système (3.1) on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} (\phi * \psi)(t) &:= \int_0^t \phi(t - \tau) \psi(\tau) d\tau \\ (\phi \diamond \psi)(t) &:= \int_0^t \phi(t - \tau) |\psi(t) - \psi(\tau)| d\tau \\ (\phi \circ \psi)(t) &:= \int_0^t \phi(t - \tau) \int_\Omega |\psi(t) - \psi(\tau)|^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.1. *Pour toute fonction $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ et pour toute $\psi \in H^1(0, 1)$, on a*

$$\begin{aligned} (\phi * \psi)(t) \psi_t(t) &= -\frac{1}{2} \phi(t) |\psi(t)|^2 + \frac{1}{2} (\phi' \diamond \psi)(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (\phi \diamond \psi)(t) - \left(\int_0^t \phi(\tau) d\tau \right) |\psi(t)|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. *soient $(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ et $(\theta_0, q_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$. Supposons que les hypothèses (H1) – (H4) sont satisfaites, alors le problème (1) – (3) admet une solution globale (faible) unique vérifiant :*

$$\begin{aligned}\varphi, \psi &\in C(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)) \\ \theta, q &\in C(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1)).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré pour θ , comme dans [11],

$$\bar{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - \int_0^1 \theta_0(x) ds.$$

Alors, d'après la troisième équation de (3.1) on a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_0^1 \theta(x, t) dx &= 0 \\ \int_0^1 \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta(x, t) dx &= \int_0^1 \theta(x, t) dx - \int_0^1 \theta_0(x) dx \\ &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 \theta(x, t) &= \int_0^1 \theta_0(x) dx\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \bar{\theta}(x, t) &= \int_0^1 \theta(x, t) - \int_0^1 \int_0^1 \theta_0 dx dx \\ &= \int_0^1 \theta(x, t) dx - \int_0^1 \theta_0 dx \\ &= 0,\end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$. Dans ce cas en appliquant l'inégalité du Poincaré sur $\bar{\theta}$. D'autre part $(\varphi, \psi, \bar{\theta}, q)$ satisfait le même système (3.1), nous allons travailler avec $\bar{\theta}$, mais on va écrire simplement θ .

On définit la fonction d'énergie E comme suit

$$\begin{aligned}E(t, \varphi, \psi, \bar{\theta}, q) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \left(\bar{b} - a(x) \int_0^t g(s) ds \right) \psi_x^2 \right\} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \{ K(\varphi_x + \psi)^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2 \} dx + \frac{1}{2} (g \circ \psi_x).\end{aligned}\quad (3.9)$$

On note $E(t) = E(t, \varphi, \psi, \bar{\theta}, q)$ et $E(0) = E(0, \varphi_0, \psi_0, \bar{\theta}_0, q_0)$

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section

Théorème 3.3.2. *Soient $(\varphi_0, \varphi_1), (\psi_0, \psi_1) \in H_0^1 \times L^2(0, 1)$ et $(\theta_0, q_0) \in L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$. Supposons que les hypothèses (H1) – (H4) sont satisfaites, Alors il existe des constantes positives c', c'' et ε_0 telles que la solution (faible) du problème (1) – (3) vérifie*

$$E(t) \leq c'' H_1^{-1} \left(c' \int_0^t \xi(s) ds \right), \quad \forall t \leq 0, \quad (3.10)$$

où

$$H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2}(s) ds$$

et

$$H_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \varepsilon'] \\ tH'(\varepsilon_0 t) & \text{si } H'(0) = 0 \text{ et } H'' \leq 0 \text{ sur } (0, \varepsilon'] . \end{cases} \quad (3.11)$$

et $\xi = 1$ si $a = 0$.

La démonstration du THÉORÈME 3.3.2 se fait à travers les lemmes suivants

Lemme 3.3.2. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ la solution du système (1) – (3), alors l'énergie E définie par (3.9) satisfait*

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= -\delta \int_0^1 q^2 dx - \frac{1}{2} g(t) \int_0^1 a(x) \psi_x^2 dx - \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} (g' \circ \psi_x) - \mu \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \\ &\leq -\delta \int_0^1 q^2 dx - \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx + \frac{1}{2} (g' \circ \psi_x) - \mu \int_0^1 \varphi_t^2 dx \leq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Démonstration. Multiplions la première équation de (3.1) par φ_t , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_1 \varphi_t^2 dx + K \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx + K \int_0^1 \varphi_{tx} \psi dx = -\mu \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \quad (3.13)$$

Multiplions la deuxième équation de (3.1) par ψ_t , on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_2 \varphi_t^2 dx + \bar{b} \int_0^1 \psi_x \psi_{tx} dx + \int_0^1 \psi_t \int_0^t g(t-s) (a(x) \psi_x(s))_x ds dx \\ &+ K \int_0^1 \psi_t \varphi_x dx + K \int_0^1 \psi_t \psi dx - \gamma \int_0^1 \psi_{tx} \theta dx \\ &= - \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En suite, multiplions la troisième équation de (3.1) par θ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_3 \theta^2 dx + k \int_0^1 q_x \theta dx + \gamma \int_0^1 \psi_{tx} \theta dx = 0 \quad (3.15)$$

Finalement, multiplions la quatrième équation de (3.1) par q , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \tau_0 q^2 dx - k \int_0^1 \theta q_x dx = -\delta \int_0^1 q^2 dx. \quad (3.16)$$

Maintenant, en appliquant LEMME 3.3.1 à le troisième terme du membre gauche de (3.14) et en additionnant (3.8) – (3.11), on obtient alors le résultat recherché. \square

On définit la fonctionnelle I_1 par :

$$I_1(t) := - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ + \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx,$$

Pour la simplification on va écrire :

$$I_1(t) := \chi_1(t) + \chi_2(t). \quad (3.17)$$

Alors, on a :

Lemme 3.3.3. *soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ une solution de (3.1)–(3.3). Supposons que (H1)–(H4) sont satisfaites. Alors pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon'_1 > 0$,*

$$\frac{dI_1}{dt} \leq - \left(\rho_2 \int_0^t g(s) ds - \varepsilon_1 \left(\rho_2^2 + \int_0^t g(s) ds \right) \right) \int_0^1 \alpha(x) \psi_t^2 dx \\ + \varepsilon'_1 K^2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx \\ + \varepsilon'_1 (2\bar{b}^2 + 1) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(c\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^t g(s) ds \right) \int_0^1 q^2 dx \quad (3.18) \\ + c \left(\varepsilon'_1 + \frac{1}{\varepsilon'_1} \right) g \circ \psi_x + c \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) g \circ \psi_x - \frac{c}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x$$

Démonstration. En différentiant χ_1 par rapport au temps

$$\chi'_1(t) = - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_{tt} \int_0^t g(t-s)(\psi_t - \psi_s) ds dx \\ - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \quad (3.19) \\ - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t^2 \int_0^t g(s) ds dx.$$

Maintenant, en utilisant la deuxième équation de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_{tt} \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
= & \int_0^1 \bar{b} \alpha(x) \psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds dx \\
& + \int_0^1 K \alpha(x) (\varphi_x + \psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& - \int_0^1 \alpha(x) a(x) \left(\int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right) dx \\
& + \int_0^1 b(x) h(\psi_t) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
& + \int_0^1 \alpha(x) \gamma \theta_x \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
& + \int_0^1 \alpha'(x) \left(\bar{b} \psi_x - a(x) \int_0^t g(s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Puis, on va estimer le deuxième terme du membre droite de (3.19). Donc, en utilisant LEMME 2.3.3, on arrive à, pour tout $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
\leq & \varepsilon_1 \rho_2^2 \int_0^1 \alpha(x) \psi_t^2 dx - \frac{c}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

D'autre part, en différentiant χ_2 par rapport au temps

$$\begin{aligned}
\chi_2'(t) & = \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \alpha(x) q_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& + \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& + \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \psi_t \int_0^t g(s) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la quatrième équation de (3.1), on trouve

$$\begin{aligned}
\chi_2'(t) & = - \frac{\gamma \delta}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& - \int_0^1 \alpha(x) \gamma \theta_x \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
& + \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& + \frac{\gamma \tau_0}{k} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_0^1 \alpha(x) q \psi_t dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

En procédant comme dans (3.21), en exploitant l'inégalité de Young, il nous reste à estimer le première terme du membre droite de (3.20) :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \bar{b}\alpha(x)\psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s))dsdx \\ & \leq \varepsilon'_1 \bar{b}^2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon'_1} g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.23)$$

De même,

$$\begin{aligned} & \int_0^t K\alpha(x)(\varphi_x + \psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s))dsdx \\ & \leq \varepsilon'_1 K^2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon'_1} g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant les mêmes techniques introduite par [18], satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \alpha(x)a(x) \left(\int_0^t g(s)\psi_x(s)ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s))ds \right) dx \\ & \leq \varepsilon'_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\varepsilon'_1 + \frac{1}{\varepsilon'_1} \right) g \circ \psi_x, \end{aligned} \quad (3.25)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^1 b(x)h(\psi_t) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s))ds \right) dx \\ & \leq \varepsilon_1 \int_0^1 b(x)h^2(\psi_t)dx + c \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.26)$$

D'où finalement,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \alpha'(x) \left(\bar{b}\psi_x - a(x) \int_0^t g(s)\psi_x(s)ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s))ds \right) dx \\ & \leq \varepsilon'_1 \bar{b}^2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\varepsilon'_1 + \frac{1}{\varepsilon'_1} \right) g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Comme dans (3.21), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma\tau_0}{k} \int_0^1 \alpha(x)q \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s))dsdx \\ & \leq \varepsilon_1 \int_0^1 q^2 dx - \frac{c}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Il nous reste à estimer le première terme du membre droite de (3.22) :

$$\begin{aligned} & - \frac{\gamma\delta}{k} \int_0^1 \alpha(x)q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s))dsdx \\ & \leq \left(\frac{\gamma\delta}{k} \right)^2 \varepsilon_1 \int_0^1 q^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_1} g \circ \psi_x \end{aligned} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma\tau_0}{k} \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_0^1 \alpha(x)q\psi_t dx \\ & \leq \left(\int_0^t g(s)ds \right) \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^1 q^2 dx + \left(\int_0^t g(s)ds \right) c\varepsilon_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Par conséquent, en additionnant toutes les estimations entre (3.19)-(3.30), Ceci termine la démonstration. \square

Maintenant, comme dans[38], soit w la solution de l'équation différentielle :

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(1) = 0 \quad (3.31)$$

Lemme 3.3.4. *La solution w de (3.31) satisfait :*

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx$$

et

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

La fonction I_2 définie par :

$$I_2(t) := \int_0^1 \left(\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w - \frac{\gamma\tau_0}{k} \psi q \right) dx. \quad (3.32)$$

Satisfait l'estimation :

Lemme 3.3.5. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ la solution du (3.1) – (3.3). Supposons que (H1) – (H4) sont satisfaites. Donc on obtient, pour tout $\varepsilon_2 > 0$*

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dt} & \leq - \left(\bar{b} + \frac{c\mu\varepsilon_2}{2} - 2c\varepsilon_2 - \frac{\delta\gamma\varepsilon_2}{2k} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\mu}{2\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + \left(\rho_2 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2k} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_2} g \circ \psi_x \\ & + \left(\frac{\gamma\tau_0}{2k\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2k\varepsilon_2} \right) \int_0^1 q^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^1 b(x)h^2(\psi_t)dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Démonstration. En différentiant la fonctionnelle $I_2(t)$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned} I_2'(t) & = \int_0^1 (\rho_2 \psi_{tt} \psi + \rho_2 \psi_t^2) dx + \int_0^1 (\rho_1 \varphi_{tt} w + \rho_1 \varphi_t w_t) dx \\ & - \frac{\gamma\tau_0}{k} \int_0^1 (\psi_t q + \psi q_t) dx \\ & := J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant la première et la quatrième équations de (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &= -K \int_0^1 \varphi \psi_x dx + K \int_0^1 w_x^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_t dx - \mu \int_0^1 \varphi_t w dx \\ &\quad - \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\delta \gamma}{k} \int_0^1 \psi q dx + \gamma \int_0^1 \psi \theta_x dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En utilisant la deuxième équation de (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} J_1 &= -\bar{b} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_x \int_0^1 g(t-s) a(x) \psi_x(s) ds dx \\ &\quad - K \int_0^1 \psi^2 dx - K \int_0^1 \varphi_x \psi dx - \int_0^1 b(x) \psi h(\psi_t) dx - \int_0^1 \gamma \psi \theta_x dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

LEMME 3.3.4 et (3.35), (3.36) impliquent

$$\begin{aligned} I_2'(t) &\leq -\mu \int_0^1 \varphi_t w dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_t dx - \frac{\gamma \tau_0}{k} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\delta \gamma}{k} \int_0^1 \psi q dx \\ &\quad - \bar{b} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 b(x) \psi h(\psi_t) dx \\ &\quad + \int_0^1 a(x) \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

En exploitant l'inégalité

$$|ab| \leq \frac{v}{2} a^2 + \frac{1}{2v} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, v > 0$$

pout tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} I_2'(t) &\leq -\bar{b} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \varphi_t^2 + \varepsilon_2 w_2 \right) + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \varphi_t^2 + \varepsilon_2 w_t^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{\gamma \tau_0}{2k} \int_0^1 \left(\varepsilon_2 \psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} q^2 \right) dx + \frac{\delta \gamma}{2k} \int_0^1 \left(\varepsilon_2 \psi^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} q^2 \right) dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 b(x) \psi h(\psi_t) dx \\ &\quad + \int_0^1 a(x) \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

On procède le troisième et le quatrième terme du membre droite de (3.38), d'après les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient :

$$\left| \int_0^1 b(x) \psi h(\psi_t) dx \right| \leq \varepsilon_2 c \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx. \quad (3.39)$$

En outre, d'après les inégalités de Young et de Cauchy -Schwartz, on a

$$\left| \int_0^1 a(x) \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx \right| \leq \varepsilon_2 c \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_2} g \circ \psi_x. \quad (3.40)$$

Alors, insérant (3.39) et (3.40) dans (3.38) et en utilisant la deuxième inégalité de lemme(3.3.4). Ce qui termine la preuve. \square

Maintenant, d'après [27]. La fonction I_3 définie par :

$$I_3(t) := \int_0^1 \rho_1 \varphi_t \varphi dx + \frac{\mu}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx. \quad (3.41)$$

Satisfait l'estimation :

Lemme 3.3.6. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ la solution de (3.1) – (3.3). Alors, pour tout $\varepsilon_3 > 0$, on a*

$$I'_3(t) \leq \left(\frac{K\varepsilon_3}{2} - K \right) \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{K}{2\varepsilon_3} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \quad (3.42)$$

Démonstration. En exploitant la première équation de (3.1) et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} I'_3(t) &= \int_0^1 \rho_1 \varphi_{tt} \varphi dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \tau \int_0^1 \varphi_t \varphi dx \\ &= \int_0^1 K \varphi (\varphi_{xx} + \psi_x) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &= -K \int_0^1 \varphi_x^2 dx + K \int_0^1 \varphi \psi_x dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\leq -K \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon_3 \varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon_3} \psi_x^2 \right) dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \end{aligned}$$

à l'aide de l'inégalité de Poincaré, on obtient le résultat recherché . \square

Maintenant, on définit la fonction I_4 par :

$$I_4(t) := -\tau_0 \rho_3 \int_0^1 q(t, x) \left(\int_0^x \theta(t, y) dy \right) dx. \quad (3.43)$$

Satisfait l'estimation :

Lemme 3.3.7. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ la solution de (3.1) – (3.3). Alors, pour tout $\varepsilon_4 > 0$, telles que*

$$\begin{aligned} I'_4(t) &\leq \left(-\rho_3 k + \frac{\varepsilon_4 \rho_3 \delta c}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_4 \tau_0 \gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \left(\tau_0 k + \frac{\rho_3 \delta}{2\varepsilon_4} + \frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Démonstration. En utilisant la quatrième équation de (3.1) , on obtient

$$\begin{aligned} I'_4(t) &= -\rho_3 \int_0^1 \tau_0 q_t \left(\int_0^x \theta dy \right) dx - \tau_0 \int_0^1 q \left(\int_0^x \rho_3 \theta_t dy \right) dx \\ &= -\rho_3 \int_0^1 (-\delta q - k \theta_x) \left(\int_0^x \theta dy \right) dx - \tau_0 \int_0^1 q \left(\int_0^x (-k q_x - \gamma \psi_{tx}) dy \right) dx \\ &= \rho_3 \delta \int_0^1 q \left(\int_0^x \theta dy \right) dx + \rho_3 k \int_0^1 \theta_x \left(\int_0^x \theta dy \right) dx \\ &\quad + \tau_0 k \int_0^1 q \left(\int_0^x q_x dy \right) dx + \tau_0 \gamma \int_0^1 q \left(\int_0^x \psi_{tx} dy \right) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 I_4'(t) &\leq \frac{\rho_3\delta}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon_4 \left(\int_0^x \theta^2 dy \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_4} q^2 \right) dx - \rho_3 k \int_0^1 \theta^2 dx \\
 &\quad + \tau_0 k \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau_0\gamma}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon_4 \psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_4} q^2 \right) dx.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ce qui donne (3.3.7) immédiatement. \square

Maintenant, nous sommes prêts à prouver le résultat principal de cette section.

Démonstration. Pour $N, N_1, N_2 > 0$. La fonction \mathcal{F} définie par

$$\mathcal{F}(t) := NE(t) + N_1 I_1 + N_2 I_2 + I_3 + I_4 \tag{3.46}$$

et soient t_0 , et $g_0(t) = \int_0^t g(s) ds > 0$, d'après la combinaison de (3.12), (3.18), (3.33), (3.42) et (3.45), et l'utilisation de

$$(\varphi_x + \psi)^2 \leq 2\varphi_x^2 + 2\psi^2$$

et l'inégalité de Poincaré, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} &\leq -N_1 (\rho_2 g_0 - \varepsilon_1 (\rho_2^2 + g_0)) \int_0^1 (\alpha(x) + b(x)) \psi_t^2 dx \\
 &\quad + \left(N_2 \left(\rho_2 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2k} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2} \right) + \frac{\tau_0\gamma\varepsilon_4}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx - N \int_0^1 \int_0^1 b(x) \psi_t h(\psi_t) dx \\
 &\quad + \left(N_2 \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\mu}{2\varepsilon_2} \right) + \rho_1 - N\mu \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(N_1\varepsilon_1 + \frac{N_2}{2\varepsilon_2} \right) \int_0^1 b(x) h^2(\psi_t) dx \\
 &\quad + N_1 (\rho_2 g_0 - \varepsilon_1 (\rho_2^2 + g_0)) \int_0^1 b(x) \psi_t^2 dx \\
 &\quad + \left\{ N_1 \varepsilon_1' (2\bar{b}^2 + 1 + 2K^2) - N_2 \left(\bar{b} - 2c\varepsilon_2 - \frac{\delta\gamma\varepsilon_2}{2k} \right) + \frac{K}{2\varepsilon_3} \right\} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad + \left(2N_1 \varepsilon_1' K^2 + \frac{K\varepsilon_3}{2} - K \right) \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \left(-\rho_3 k + \frac{\varepsilon_4 \rho_3 \delta c}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx \\
 &\quad + \left\{ cN_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + cN_1 \left(\varepsilon_1' + \frac{1}{\varepsilon_1'} \right) + \frac{N_2 c}{\varepsilon_2} \right\} g \circ \psi_x + \left(\frac{N}{2} - \frac{cN_1}{\varepsilon_1} \right) g' \circ \psi_x \\
 &\quad + \left\{ N_1 \left(c\varepsilon_1 + \frac{g_0}{\varepsilon_1} \right) + N_2 \left(\frac{\gamma\tau_0}{2k\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2k\varepsilon_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\tau_0 k + \frac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_4} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_4} \right) - \delta N \right\} \int_0^1 q^2 dx
 \end{aligned}$$

pour tout $t \geq t_0$. nous sélectionnons nos constantes avec soin. soient $\varepsilon_3 < 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_4 assez petite, telles que

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &\leq \min \left\{ \left(\frac{\rho_2 g_0}{2} \right) / (\rho_2^2 + g_0), \frac{1}{4K} \right\}, \\
 \varepsilon_2 &\leq \left(\frac{\bar{b}}{2} \right) / \left(2c + \frac{\delta\gamma}{2k} \right)
 \end{aligned}$$

et

$$\varepsilon_4 \leq \frac{k}{\delta c}.$$

Puis, N_2 assez grand de telle sorte que :

$$N_2 \geq \frac{2K\bar{b}}{\varepsilon_3}.$$

Maintenant, d'après LEMME (2.3.2), et N_1 assez grand

$$\frac{N_1 \rho_2 g_0}{2} > \left(N_2 \left(\rho_2 + \frac{\gamma \tau_0 \varepsilon_2}{2K} + \frac{\rho_1 \varepsilon_2}{2} \right) + \frac{\tau_0 \gamma \varepsilon_4}{2} \right) \frac{2}{d}$$

alors, en choisissant ε'_1 assez petit, tel que

$$\varepsilon'_1 \leq \min \left\{ \frac{1}{4N_1 K}, \left(\frac{N_2 \bar{b}}{4} \right) / N_1 (2\bar{b}^2 + 1 + 2K^2) \right\}. \quad (3.47)$$

Finalement, en choisissant N assez petit tel que, il existe des constantes positives η, η_1 , et η_2 donc, pour $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} &\leq -\eta \left\{ \int_0^1 (\alpha(x) + b(x)) \psi_t^2 dx + \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 q^2 dx \right\} - \eta_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \eta_2 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ &\quad + cg \circ \psi_x + c \int_0^1 b(x) (\psi_t^2 + h^2(\psi_t)) dx. \end{aligned}$$

On procède comme dans [27], on trouve $\eta_3 > 0$ tel que, pour $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} &\leq -\eta_3 \left\{ \int_0^1 (\alpha(x) + b(x)) \psi_t^2 dx + \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 q^2 dx \right\} \\ &\quad + cg \circ \psi_x + c \int_0^1 b(x) (\psi_t^2 + h^2(\psi_t)) dx. \end{aligned} \quad (3.48)$$

On outre, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 tels que

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.49)$$

D'après les estimations (3.12), (3.17), (3.32), (3.41), (3.44), (3.46) et les inégalités de Young et de Poincaré, on trouve

$$|\mathcal{F}(t) - NE(t)| \leq CE(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, on choisit N assez grand pour que $\beta_1 = N - C > 0$ et (3.48), (3.49) reste vrai. Maintenant, on va estimer le dernière terme du membre droite de (3.48), considérons une partition de l'intervalle (0,1) :

$$\Omega^+ = \left\{ x \in (0, 1) : |\psi_t| > \varepsilon' \right\} \text{ et } \Omega^- = \left\{ x \in (0, 1) : |\psi_t| \leq \varepsilon' \right\} \quad (3.50)$$

avec ε défini dans (H2). En utilisant hypothèse (H2), on a $|\psi_t| \leq c_1^{-1} \psi_t h(\psi_t)$ sur Ω^+ , on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} b(x)(\psi_t^2 + h^2(\psi_t))dx &\leq c \int_{\Omega^+} b(x)\psi_t h(\psi_t)dx \\ &\leq c \int_0^1 b(x)\psi_t h(\psi_t)dx \\ &\leq -cE'(t). \end{aligned} \quad (3.51)$$

On distingue deux cas :

Cas 1 : H est linéaire sur $[0, \varepsilon']$. Par conséquent, il existe deux constantes positives c'_1 et c'_2 tels que $c'_1 |s| \leq |h(s)| \leq c'_2 |s|$, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, par conséquent l'inégalité (3.51) est vérifiée. Maintenant, d'après (3.48) et (3.51), on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{F}(t) + cE(t)) &\leq -cE(t) + cg \circ \psi_x \\ &= -cH_2(E(t)) + cg \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

où la fonction H_2 définie dans (3.11)

Cas 2 : $H'(0) = 0$ et $H''(0) > 0$ sur $[0, \varepsilon']$. Soit H^* est le dual de H au sens de Young, alors on a

$$H^*(s) = s(H')^{-1}(s) - H\left[(H')^{-1}(s)\right], \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} b(x)(\psi_t^2 + h^2(\psi_t))dx &\leq c \int_{\Omega^-} b(x)H^{-1}(\psi_t h(\psi_t))dx \\ &\leq c \int_{\Omega^-} H^{-1}(b(x)\psi_t h(\psi_t))dx \\ &\leq cH^{-1}\left(\int_{\Omega^-} b(x)\psi_t h(\psi_t)dx\right) \\ &\leq cH^{-1}(-cE'(t)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Donc, d'après (3.48), (3.51) et (3.53)

$$\mathcal{F}'(t) \leq -cE(t) + cH^{-1}(-cE'(t)) - cE'(t) + cg \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0$$

d'après l'inégalité de Young

$$H^*(s) \leq s(H')(s), E'(t) \leq 0, H'' \geq 0,$$

on procède comme dans [18], on obtient

$$H'(\varepsilon_0 E(t))(\mathcal{F}'(t) + cE'(t) + c_0 E'(t)) \leq -cH_2(E(t)) + cg \circ \psi_x \quad (3.54)$$

avec ε_0 est une constante positive petit et c_0 est une constante positive grand. Maintenant, on définit la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} \mathcal{F}(t) + cE(t) & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \varepsilon'] \\ H'(\varepsilon_0 E(t))(\mathcal{F}(t) + cE(t)) + c_0 E(t) & \text{si } H'(0) = 0 \text{ et } H'' > 0 \text{ sur } (0, \varepsilon'] . \end{cases}$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

On peut facilement voir que

$$\mathcal{L} \sim E.$$

D'autre part, en utilisant (3.52) et (3.54), on déduit

$$\mathcal{L}'(t) \leq -cH_2(E(t)) + cg \circ \psi_x$$

pour tout $t \geq t_0$. D'après (3.12) et (H4), on obtient

$$\begin{aligned} (\xi(t)\mathcal{L}(t))' &= \xi'(t)\mathcal{L}(t) + \xi(t)\mathcal{L}'(t) \\ &\leq -c\xi(t)H_2(E(t)) - cE'(t). \end{aligned}$$

Puis, soit $\mathcal{K}(t) = \varepsilon(\xi(t)\mathcal{L}(t) + cE(t))$, où $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et $\bar{\varepsilon}$ est sont des constantes positives qui satisfont

$$\xi(t)\mathcal{L}(t) + cE(t) \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}}E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

On peut aussi prouver que

$$\mathcal{K} \sim E$$

pour tout $t \geq t_0$,

$$\mathcal{K}'(t) \leq -c\varepsilon\xi(t)H_2(\mathcal{K}(t)).$$

Intégrons la dernière inégalité sur (t_0, t)

$$\mathcal{K}(t) \leq H_1^{-1} \left(c\varepsilon \int_0^t \xi(s)ds + H_1(\mathcal{K}(t_0)) - c\varepsilon \int_0^{t_0} \xi(s)ds \right), \quad \forall t \geq t_0,$$

où $H_1(t) = \int_t^1 (\frac{1}{H_2(s)})ds$. Quand $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_1(t) = \infty$ et

$$0 \leq \mathcal{K}(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}E(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}E(0).$$

On choisit ε assez petit pour que

$$H_1(F(t_0)) - c\varepsilon \int_0^{t_0} \xi(s)ds \geq 0.$$

Par conséquent, $\mathcal{K}(t) \leq H_1^{-1} (c\varepsilon \int_0^t \xi(s)ds)$, pour tout $t > t_0$. Finalement, il existe deux constantes positives c' et c'' telles que

$$\mathcal{K}(t) \leq c''H_1^{-1} \left(c' \int_0^t \xi(s)ds \right), \quad \forall t \geq 0,$$

avec K est bornée. □

3.4 La stabilité de système avec un terme de retard de distribution

Dans cette section, d'après [16] nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.4) établie plus tôt par Faedo-Galerkin method. c désigne une

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

constante positive.

Comme dans [33], On prenant le changement du variable suivant :

$$z(x, \rho, s, t) = \varphi_t(x, t - \rho s), \text{ dans } (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty).$$

Alors on obtient

$$\begin{cases} sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0, \\ z(x, 0, s, t) = \varphi_t(x, t), \end{cases}$$

Par conséquent, ce qui conduit à réécrire le problème (3.4) – (3.5) comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - K(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + K(\varphi_x + \psi) + \int_0^t g(t-s)(a(x)\psi_x(s))_x ds + \mu_3(t)b(x)f(\psi_t) + \gamma \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + kq_x + \gamma \psi_{tx} = 0, \\ \rho_4 q_t + \delta q + k\theta_x = 0, \\ sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0, \end{cases} \quad (3.55)$$

où $(x, \rho, s, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty)$, avec les conditions initiales et les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) &= \varphi_0(x), \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_t(x), \theta(\cdot, 0) = \theta_0(x) && \text{dans } (0, 1), \\ \psi(\cdot, 0) &= \psi_0(x), \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(x), q(\cdot, 0) = q_0(x) && \text{dans } (0, 1), \\ \varphi(0, t) &= \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0 && \text{dans } (0, \infty), \\ z(x, \rho, s, 0) &= f_0(x, \rho s) && \text{dans } (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \tau_2). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Pour $\varepsilon_0 > 0$ on définit les fonctions J et K

$$J(t) := \begin{cases} t & \text{si } h'' = 0 \text{ sur } [0, L], \\ th'(\varepsilon_0 t) & \text{si } h'(0) = 0 \text{ et } h'' > 0 \text{ sur } (0, L]. \end{cases} \quad (3.57)$$

$$K(t) = \int_t^1 \frac{1}{J(s)} ds. \quad (3.58)$$

On commence d'abord par énoncer les notation suivantes

$$\begin{aligned} (\phi * \psi)(t) &:= \int_0^t \phi(t - \tau)\psi(\tau) d\tau, \\ (\phi \diamond \psi)(t) &:= \int_0^t \phi(t - \tau)(\psi(t) - \psi(\tau))^2 dx d\tau, \\ (g \triangle v)(t) &:= \int_0^1 \alpha(x) \int_0^t g(s)(v(t) - v(s)) ds dx, && \forall v \in L^2(0, 1), \\ (g \circ v)(t) &:= \int_0^1 a(x) \int_0^t g(t - s)(v(t) - v(s))^2 ds dx, && \forall v \in L^2(0, 1). \end{aligned}$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Lemme 3.4.1. [14] *Il existe une constante c telle que*

$$(g \Delta v)^2 \leq cg \circ v_x, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Maintenant, on introduit la fonctionnelle d'énergie

$$\begin{aligned} E(t) = E(t, \varphi, \psi, \theta, q, z) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \left(\beta - a(x) \int_0^t g(s) ds \right) \psi_x^2 \right\} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \{ K(\varphi_x + \psi)^2 + \rho_3 \theta^2 + \rho_4 q^2 \} dx + \frac{1}{2} (g \circ \psi_x) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx, \end{aligned} \quad (3.59)$$

on notant $E(0) = E(0, \varphi_0, \psi_0, \theta_0, q_0, f_0)$.

Dans cette section, en utilisant la théorie de semigroupe, nous démontrons l'existence locale de la solution. En posant $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T$, où $u = \varphi_t$ et $v = \psi_t$,

On introduit l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathcal{H} := [H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)]^2 \times [L^2(0, 1)]^2 \times L^2((0, 1) \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)).$$

Proposition 3.4.1. *Soit $\Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0, f_0)^T \in \mathcal{H}$ donnée et supposons que (H5)-(H7) sont vérifiées. Alors, le problème (3.55) – (3.56) admet une solution faible unique satisfait*

$$\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, z)^T \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

Dans cette section, on considère le système (3.55) – (3.56) et on montre la stabilité de l'énergie associée à la solution.

Lemme 3.4.2. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ la solution du problème (3.55) – (3.56), alors, la fonctionnelle d'énergie E est décroissante et satisfaite, pour tout $t > 0$ et $\eta_0 > 0$,*

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\delta \int_0^1 q^2 dx - \frac{1}{2} g(t) \int_0^1 a(x) \psi_x^2 dx - \int_0^1 b(x) \psi_t f(\psi_t) dx \\ &+ \frac{1}{2} (g' \circ \psi_x) - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \int_0^1 \varphi_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx \\ &\leq -\delta \int_0^1 q^2 dx - \mu_3(t) \int_0^1 b(x) \psi_t f(\psi_t) dx + \frac{1}{2} (g' \circ \psi_x) - \eta_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \leq 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

Démonstration. En multipliant les équations (3.55)₁, (3.55)₂, (3.55)₃, (3.55)₄, (3.55)₅ par $\varphi_t, \psi_t, \theta, q$ et $|\mu_2(s)| z$ respectivement, et en intégrant sur $(0, 1)$, d'après la formule d'intégration par parties, LEMME(3.4.1) et à l'aide des inégalités de Young, Poincaré et de Cauchy-Schwartz, on trouve (3.60) \square

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Lemme 3.4.3. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ une solution du problème (3.55)-(3.56). Alors la fonctionnelle*

$$F_1(t) := -\rho_2 \int_0^1 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ + \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx,$$

vérifie l'estimation

$$F_1'(t) \leq - \left(\rho_2 \int_0^t g(s) ds - \varepsilon_1 \left(\rho_2^2 + \int_0^t g(s) ds \right) \right) \int_0^1 \alpha(x) \psi_t^2 dx \\ + \varepsilon_1' K^2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \varepsilon_1 \int_0^1 b(x) f^2(\psi_t) dx \\ + \varepsilon_1' (2\beta^2 + 1) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(c \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^1 g(s) ds \right) \int_0^1 q^2 dx \quad (3.61) \\ + c \left(\varepsilon_1' + \frac{1}{\varepsilon_1'} \right) g \circ \psi_x + c \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) g \circ \psi_x - \frac{c}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x,$$

pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_1' > 0$.

Démonstration. Pour la simplification, on écrit

$$F_1(t) := I_1(t) + I_2(t).$$

Où

$$I_1(t) = -\rho_2 \int_0^1 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx, \\ I_2(t) = \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx.$$

En différentiant la fonctionnelle I_1 par rapport au temps :

$$I_1'(t) = - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_{tt} \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \quad (3.62) \\ - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t^2 \int_0^t \int_0^t g(s) ds dx.$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

En utilisant (3.55)₂, on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_{tt} \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
= & \int_0^1 \beta \alpha(x) \psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds dx \\
& + \int_0^t K \alpha(x) (\varphi_x + \psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& - \int_0^1 \alpha(x) a(x) \left(\int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right) dx \\
& + \mu_3 \int_0^1 b(x) f(\psi_t) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
& + \int_0^1 \alpha(x) \gamma \theta_x \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
& + \int_0^1 \alpha'(x) \left(\beta \psi_x - a(x) \int_0^t g(s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Puis, en utilisant le LEMME (3.4.1), nous trouvons pour tout $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \rho_2 \alpha(x) \psi_t \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
\leq & \varepsilon_1 \rho_2^2 \int_0^1 \alpha(x) \psi_t^2 dx - \frac{c}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

En suite,

$$\begin{aligned}
I_2'(t) & = \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q_t \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& + \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& + \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \psi_t \int_0^t g(s) ds.
\end{aligned}$$

Utilisant (3.55)₄, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_2'(t) & = -\frac{\gamma \delta}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& - \int_0^1 \alpha(x) \gamma \theta_x \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\
& + \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\
& + \frac{\gamma \rho_4}{k} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_0^1 \alpha(x) q \psi_t dx.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

De même (3.64), nous estimons le première terme du membre droite de (3.63)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \beta \alpha(x) \psi_x \int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds dx \\ & \leq \varepsilon'_1 \beta^2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon'_1} g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.66)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & \int_0^t K \alpha(x) (\varphi_x + \psi) \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ & \leq \varepsilon'_1 K^2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{c}{\varepsilon'_1} g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.67)$$

On procède comme dans [14], nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \alpha(x) a(x) \left(\int_0^t g(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi_x(t) - \psi_x(s)) ds \right) dx \\ & \leq \varepsilon'_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\varepsilon'_1 + \frac{1}{\varepsilon'_1} \right) g \circ \psi_x, \end{aligned} \quad (3.68)$$

et

$$\begin{aligned} & \mu_3(t) \int_0^1 b(x) f(\psi_t) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\ & \leq \varepsilon_1 c \int_0^1 b(x) f^2(\psi_t) dx + c \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \alpha'(x) \left(\beta \psi_x - a(x) \int_0^t g(s) \psi_x(s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds \right) dx \\ & \leq \varepsilon'_1 \beta^2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c \left(\varepsilon'_1 + \frac{1}{\varepsilon'_1} \right) g \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Comme dans (3.64), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g'(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ & \leq \varepsilon_1 \int_0^1 q^2 dx - \frac{c}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x. \end{aligned} \quad (3.71)$$

En suite, on va estimer le première terme du membre droite de (3.65)

$$\begin{aligned} & - \frac{\gamma \delta}{k} \int_0^1 \alpha(x) q \int_0^t g(t-s)(\psi(t) - \psi(s)) ds dx \\ & \leq \left(\frac{\gamma \delta}{k} \right)^2 \varepsilon_1 \int_0^1 q^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_1} g \circ \psi_x, \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

et

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma\rho_4}{k} \left(\int_0^t g(s)ds \right) \int_0^1 \alpha(x)q\psi_t dx \\ & \leq \left(\int_0^t g(s)ds \right) \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^1 q^2 dx + \left(\int_0^t g(s)ds \right) c\varepsilon_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.73)$$

En combinant les estimations (3.62) – (3.73), d'où le résultat. \square

Comme dans [15], avec w la solution de

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(1) = 0. \quad (3.74)$$

Lemme 3.4.4. *La solution de (3.74) satisfait*

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx, \quad (3.75)$$

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx. \quad (3.76)$$

Lemme 3.4.5. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ une solution du problème (3.55) – (3.56). Alors la fonctionnelle*

$$F_2(t) := \rho_2 \int_0^1 \psi_t \psi dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w dx - \frac{\gamma\rho_4}{k} \int_0^1 \psi q dx. \quad (3.77)$$

vérifie

$$\begin{aligned} F_2'(t) & \leq - \left(\beta + \frac{c\varepsilon_2\mu_1}{2} - \frac{\delta\gamma\varepsilon_2}{2k} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + \left(\rho_2 + \frac{\gamma\rho_4\varepsilon_2}{2k} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_2} g \circ \psi_x \\ & + \left(\frac{\gamma\rho_4}{2k\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2k\gamma\varepsilon_2} \right) \int_0^1 q^2 dx + \frac{c}{2\varepsilon_2} \int_0^1 b(x)f^2(\psi_t) dx \\ & + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx, \end{aligned} \quad (3.78)$$

pour tout $\varepsilon_2 > 0$

Démonstration. En dérivant F_2 , on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) & = \underbrace{\int_0^1 (\rho_2\psi_{tt}\psi + \rho_2\psi_t^2) dx}_{:=J_1} + \underbrace{\int_0^1 (\rho_1\varphi_{tt}w + \rho_1\varphi_t w_t) dx}_{:=J_2} \\ & - \underbrace{\frac{\gamma\rho_4}{k} \int_0^1 (\psi_t q + \psi q_t) dx}_{:=J_3}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Maintenant ; en utilisant (3.55)₁ et (3.55)₄, on trouve :

$$\begin{aligned}
J_2 + J_3 &= -K \int_0^1 \varphi \psi_x dx + K \int_0^1 w_x^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_t dx \\
&\quad - \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\delta \gamma}{k} \int_0^1 \psi q dx + \gamma \int_0^1 \psi \theta_x dx \\
&\quad - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t w dx - \int_0^1 w \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Utilisant (3.55)₂, nous aurons

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\beta \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi_x \int_0^t g(t-s) a(x) \psi_x(s) ds dx \\
&\quad - K \int_0^1 \psi^2 dx - K \int_0^1 \varphi_x \psi dx - \mu_3(t) \int_0^1 b(x) \psi f(\psi_t) dx - \int_0^1 \gamma \psi \theta_x dx.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

D'après (3.80), (3.81) et en utilisant le LEMME (3.4.4) , on obtient

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &\leq -\mu_1 \int_0^1 \varphi_t w dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_t dx - \frac{\gamma \rho_4}{k} \int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\delta \gamma}{k} \int_0^1 \psi q dx \\
&\quad - \beta \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \mu_3(t) \int_0^1 b(x) \psi f(\psi_t) dx \\
&\quad + \int_0^1 a(x) \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx - \int_0^1 w \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité suivante

$$|ab| \leq \frac{v}{2} a^2 + \frac{1}{2v} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, v > 0,$$

et par conséquent, pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &\leq -\beta \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \varphi_t^2 + \varepsilon_2 w^2 \right) + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \varphi_t^2 + \varepsilon_2 w_t^2 \right) dx \\
&\quad + \frac{\gamma \rho_4}{2k} \int_0^1 \left(\varepsilon_2 \psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} q^2 \right) dx + \frac{\delta \gamma}{2k} \int_0^1 \left(\varepsilon_2 \psi^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} q^2 \right) dx \\
&\quad - \int_0^1 w \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \mu_3(t) \int_0^1 b(x) \psi f(\psi_t) dx \\
&\quad + \int_0^1 a(x) \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Maintenant, on va estimer les trois derniers termes de (3.82). d'après les inégalités de Young, Couchy-Schwartz et de Poincaré, on trouve

$$|\mu_3(t) \int_0^1 b(x) \psi f(\psi_t) dx| \leq \varepsilon_2 c \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{2\varepsilon_2} \int_0^1 b(x) f^2(\psi_t) dx. \tag{3.83}$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

$$\left| \int_0^1 a(x) \psi_x \int_0^t g(t-s) \psi_x(s) ds dx \right| \leq \varepsilon_2 c \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_2} g \circ \psi_x, \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 w \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx \\ & \leq \frac{c \varepsilon_2 \mu_1}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & \quad + \frac{1}{2 \varepsilon_2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Alors, en remplaçant (3.83) et (3.85) dans (3.82) et utilisant (3.76), ce qui est l'inégalité recherchée. \square

Lemme 3.4.6. Soit $(\varphi, \psi, \psi, \theta, q, z)$ une solution du (3.55) – (3.56). Alors la fonctionnelle

$$F_3(t) := \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(-\varphi + \int_0^x \psi(y) dy \right) dx. \quad (3.86)$$

Satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned} F_3'(t) & \leq -\frac{K}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3}\right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & \quad + \frac{\mu_1}{K} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx, \end{aligned} \quad (3.87)$$

pour tout $\varepsilon_3 > 0$.

Démonstration. En dérivant $F_3(t)$, utilisant (3.55)₁ et en intégrant sur $(0, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} F_3'(t) & = \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t(y) dy \right) dx - \int_0^1 \left(\varphi + \int_0^x \psi(y) dy \right) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx \\ & \quad - K \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \mu_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\varphi + \int_0^x \psi(y) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (3.88)$$

En appliquant les inégalité de Young, Poincaré et de Cauchy-Schwartz, et le fait que

$$-\mu_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\varphi + \int_0^x \psi(y) dy \right) dx \leq \frac{K}{4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + c \int_0^1 \varphi_t^2 dx,$$

d'où l'estimatuin (3.87). \square

Lemme 3.4.7. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ une solution du problème (3.55) – (3.56). Alors la fonctionnelle

$$F_4(t) := -\rho_3 \rho_4 \int_0^1 q \left(\int_0^x \theta(y) dy \right) dx. \quad (3.89)$$

Satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} F_4'(t) & \leq \left(-\rho_3 k + \frac{\varepsilon_4 \rho_3 \delta c}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_4 \rho_4 \gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ & \quad + \left(\rho_4 k + \frac{\rho_3 \delta}{2 \varepsilon_4} + \frac{\rho_4 \gamma}{2 \varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx, \end{aligned} \quad (3.90)$$

por tout $\varepsilon_4 > 0$.

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle (3.89) et utilisant (3.55)₃, (3.55)₄, d'après la formule d'intégration par parties et à l'aide de inégalité de Young, on obtient (3.90) \square

Lemme 3.4.8. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, z)$ une solution du problème (3.55) – (3.56). Alors, pour $\eta_1 > 0$, la fonctionnelle*

$$F_5(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \exp^{-s\rho} |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx. \quad (3.91)$$

Satisfait

$$\begin{aligned} F_5'(t) \leq & -\eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\ & -\eta_1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \mu_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Démonstration. En différentiant (3.91) et utilisant (3.55)₅, le fait que $z(x, 0, s, t) = \varphi_t$ et $e^{-s} \leq e^{-s\rho} \leq 1$ on trouve pour tout $\rho \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F_5'(t) \leq & \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & - \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s} |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx. \end{aligned}$$

Lorsque $s \mapsto -e^{-s}$ est une fonction croissante, on a $-e^{-s} \leq -e^{-\tau_2}$ pour tout $s \in [\tau_1, \tau_2]$. Finalement, prenons $\eta_1 = -e^{-\tau_2}$ et réécrire (3.6), on obtient (3.92). \square

Maintenant, on introduit la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + N_1 F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) + F_4(t) + N_2 F_5(t) \quad (3.93)$$

où N_1, N_2 et N sont des constantes strictement positives à déterminer plus tard.

Lemme 3.4.9. *Pour $N > 0$ assez grand, il existe $\beta_1, \beta_2 > 0$ tels que*

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t). \quad (3.94)$$

Autrement dit, les fonctions E et \mathcal{L} sont équivalentes.

Maintenant, on est prêt à citer et de prouver le résultat principal de cette section.

Théorème 3.4.1. *Soit $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0, f_0)^T \in \mathcal{H}$. Supposons que les hypothèses (H5)(H9) sont satisfaites, alors, il existe $c_1, c_2 > 0$ telles que la solution faible du problème (3.55)-(3.56) satisfait :*

$$E(t) \leq c_1 K^{-1} \left(c_2 \int_0^t (\mu_3 \eta)(s) ds \right), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.95)$$

avec $\eta = 1$ si $a = 0$.

la fonction K définie dans (3.58).

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Démonstration. En combinant (3.60), (3.61), (3.78), (3.87) et (3.90), en utilisant (3.8) et lorsque g est positive, $g(0) > 0$ alors pour tout $t_0 > 0$

$$\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{t_0} g(s)ds = g_0 > 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

on arrive à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -N_1\rho_2g_0 - \varepsilon_1(\rho_2^2 + g_1) \int_0^1 (\alpha(x) + b(x))\psi_t^2 dx \\ & + \left\{ \rho_2 + \frac{\gamma\rho_4\varepsilon_2}{2k} + \frac{\rho_4\gamma\varepsilon_4 + \rho_1\varepsilon_2}{2} + \varepsilon_3 \right\} \int_0^1 \psi_t^2 dx - N\mu_3(t) \int_0^1 b(x)\psi_t f(\psi_t) dx \\ & + \left\{ \frac{\mu_1 + \rho_1}{2\varepsilon_2} + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) + N_2\mu_1 - N\eta_0 \right\} \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + \left\{ N_1c\varepsilon_1 + \frac{c}{2\varepsilon_2} \right\} \int_0^1 b(x)f^2(\psi_t) dx + N_1\rho_2g_0 - \varepsilon_1(\rho_2^2 + g_1) \int_0^1 b(x)\psi_t^2 dx \\ & + \left\{ N_1\varepsilon'_1(2\beta^2 + 1) - \left(\beta + \frac{c\varepsilon_2\mu_1}{2} + \frac{c\delta\gamma\varepsilon_2}{2k} \right) \right\} \int_0^1 \psi_x^2 dx \tag{3.96} \\ & + \left\{ cN_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + cN_1 \left(\varepsilon'_1 + \frac{1}{\varepsilon'_1} \right) + \frac{c}{\varepsilon_2} \right\} g \circ \psi_x + \left(\frac{N}{2} - \frac{cN_1}{\varepsilon_1} g' \circ \psi_x \right) \\ & + \left\{ N_1 \left(c\varepsilon_1 + \frac{g_1}{\varepsilon_1} \right) + \frac{\delta\gamma + \gamma\rho_4}{2k\varepsilon_2} + \frac{\rho_4\gamma + \rho_3\delta}{2\varepsilon_4} + \rho_4k - \delta N \right\} \int_0^1 q^2 dx \\ & + \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{\mu_1}{K} - N_2\eta_1 \right\} \left\{ \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \right. \\ & + \left\{ N_1\varepsilon'_1 K^2 - \frac{K}{2} \right\} \left\{ \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + \left\{ -\rho_3k + \frac{\varepsilon_4\rho_3\delta c}{2} \right\} \int_0^1 \theta^2 dx \right. \\ & \left. \left. - N_2\eta_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \right. \right. \end{aligned}$$

Pour tout $t \geq t_0$.

Maintenant, nous sélectionnons nos constantes très soigneusement. Prenant $\varepsilon_2 = 1$ et ε_1 et ε_4 assez petit pour que

$$\varepsilon_1 < \frac{\rho_2g_0}{\rho_2^2 + g_1}, \varepsilon_4 < \frac{2k}{\delta c}.$$

Après cela, nous prenons $\varepsilon_3 = (\tau_0\gamma\varepsilon_4 + \rho_1)/2$, en utilisant LEMME(2.3.2), nous choisissons N_1, N_2 assez grand pour que

$$N_1(\rho_2g_0 - \varepsilon_1(\rho_2^2 + g_1)) > \left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_4\gamma\varepsilon_4 + \frac{\gamma\rho_4}{2k} \right) \frac{2}{d}, N_2 > \frac{1}{2\eta_1} + \frac{\mu_1}{K\eta_1},$$

alors, nous sélectionnons ε'_1 petit tel que

$$\varepsilon'_1 < \min \left\{ \frac{1}{2N_1K}, \left(\beta + \frac{c\mu_1}{2} + \frac{c\gamma\delta}{2k} \right) / N_1(2\beta^2 + 1) \right\}.$$

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 + \rho_1}{2} + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) + N_2 \mu_1 - N \eta_0 < 0, \quad \frac{cN_1}{\varepsilon_1} - \frac{N}{2} < 0, \\ N_1 \left(c\varepsilon_1 + \frac{g_1}{\varepsilon_1} \right) + \frac{\delta\gamma + \gamma\rho_4}{2k} + \frac{\rho_4\gamma + \rho_3\delta}{2\varepsilon_4} + \rho_4 k - \delta N < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.96) prend la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -c \int_0^1 [\varphi_t^2 + (\alpha(x) + b(x))\psi_t^2 + \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \theta^2 + q^2] dx \\ & -c \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s |\mu_2(s)| z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx + cg \circ \psi_x \\ & +c \int_0^1 b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant LEMME(2.3.2) et il nous reste à estimer (3.59)

$$\mathcal{L}'(t) \leq -cE(t) + cg \circ \psi_x + c \int_0^1 b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t)) dx, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.97)$$

On définit l'ensemble suivant :

$$\Sigma_\psi = x \in (0, 1) : |\psi_t(x, t)| > \text{let} \Theta_\psi = (0, 1) \setminus \Sigma_\psi.$$

Maintenant, on va estimer le dernière terme du membre droite de (3.97)

$$\begin{aligned} \int_0^1 b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t)) dx &= \int_{\Sigma_\psi} b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t)) dx \\ &+ \int_{\Theta_\psi} b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t)) dx, \end{aligned}$$

en utilisant hypothèse (H6) et (3.60), on trouve

$$\begin{aligned} \mu_3(t) \int_{\Sigma_\psi} b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t)) dx &\leq (k_1^{-1} + k_2) \int_{\Sigma_\psi} \mu_3(t) b(x) \psi_t f(\psi_t) dx \\ &\leq (k_1^{-1} + k_2) \int_0^1 \mu_3(t) b(x) \psi_t f(\psi_t) dx \quad (3.98) \\ &\leq -cE'(t). \end{aligned}$$

Si $h'' = 0$ dans $[0, l]$: ce qui implique qu'il existe $k'_1, k'_2 > 0$ tels que $k'_1 s^2 \leq f(s) \leq k'_2 s^2$ pout tout $s \in \mathbb{R}_+$, et aussi (3.98) est verifie pour $|\psi_t(x, t)| \leq l$. D'après (3.97), (3.98) et le fait que $\mu'_3 \leq 0$, on trouve

$$(\mu_3(t)\mathcal{L}(t) + cE(t))' \leq -c\mu_3(t)J(E(t)) + cg \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.99)$$

avec J definie dans (3.57).

3.4. LA STABILITÉ DE SYSTÈME AVEC UN TERME DE RETARD DE DISTRIBUTION

Si $h'(0)$ et $h'' > 0$ sur $(0, l]$: Puisque h est convexe croissante, h^{-1} est concave croissante, donc, à l'aide de hypothèse (H6), l'inégalité inversée de Jensen pour la fonction concave, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu_3(t) \int_{\Theta_\psi} b(x)(\psi_t^2 + f^2(\psi_t))dx &\leq \mu_3(t) \int_{\Theta_\psi} b(x)h^{-1}(\psi_t f(\psi_t))dx \\
&\leq \mu_3(t) \int_{\Theta_\psi} h^{-1}(b(x)\psi_t f(\psi_t))dx \\
&\leq \mu_3(t) |\Theta_\psi| h^{-1} \left(\int_{\Theta_\psi} \frac{1}{|\Theta_\psi|} b(x)\psi_t f(\psi_t)dx \right) \\
&\leq c\mu_3(t)h^{-1} \left(\int_{\Theta_\psi} b(x)\psi_t f(\psi_t)dx \right) \\
&\leq c\mu_3(t)h^{-1} \left(\int_0^1 b(x)\psi_t f(\psi_t) \right) dx \\
&\leq c\mu_3(t)h^{-1}(-cE'(t)). \tag{3.100}
\end{aligned}$$

D'après (3.97), (3.98) et (3.100), on trouve

$$\mu_3(t)\mathcal{L}'(t) \leq -c\mu_3(t)E(t) + c\mu_3(t)h^{-1}(-cE'(t)) - cE'(t) + cg \circ \psi_x, \quad \forall t \geq t_0.$$

En utilisant l'inégalité de Young et le fait que

$$h^*(p) \leq p[h']^{-1}(p), \quad E' \leq 0, \quad h'' > 0 \quad \text{et} \quad \mu_3' \leq 0.$$

On obtient pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit et $c_0 > 0$ assez grand ,

$$\begin{aligned}
&[h'(\varepsilon_0 E(t))[\mu_3(t)\mathcal{L}(t) + cE(t) + c_0 E(t)]]' \\
&= \varepsilon_0 E'(t)h''(\varepsilon_0 E(t))[\mu_3(t)\mathcal{L}(t) + cE(t)] \\
&\quad + h'(\varepsilon_0 E(t))[\mu_3(t)\mathcal{L}'(t) + \mu_3'(t)\mathcal{L}(t) + cE'(t)] + c_0 E'(t) \\
&\leq -c\mu_3(t)h'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + c\mu_3(t)h'(\varepsilon_0 E(t))h^{-1}(-cE'(t)) \\
&\quad + c_0 E'(t) + ch'(\varepsilon_0 E(t))g \circ \psi_x \\
&\leq -c\mu_3(t)h'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + c\mu_3(t)h^*(h'(\varepsilon_0 E(t))) - cE'(t) \\
&\quad + c_0 E'(t) + ch'(\varepsilon_0 E(0))g \circ \psi_x \\
&\leq -c\mu_3(t)h'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + c\varepsilon_0 \mu_3(t)h'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + cg \circ \psi_x \\
&\leq -c\mu_3(t)h'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + cg \circ \psi_x = -c\mu_3(t)J(E(t)) + cg \circ \psi_x. \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Maintenant , on définit la fonctionnelle :

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} \mu_3(t)\mathcal{L}(t) + cE(t) & \text{si } h'' = 0 \text{ dans } [0, l] , \\ h'(\varepsilon_0 E(t))[\mu_3(t)\mathcal{L}(t) + cE(t)] + c_0 E(t) & \text{si } h'(0) = 0 \text{ et } h'' > 0 \text{ dans } (0, l]. \end{cases}$$

En utilisant (3.94), on obtient

$$\mathcal{F} \sim E,$$

et en exploitant (3.99) et (3.101), on conclut

$$\mathcal{F}'(t) \leq -c\mu_3(t)J(E(t)) + cg \circ \psi_x, \forall t \geq t_0.$$

D'après (3.60) et hypothèse (H8), on obtient

$$\begin{aligned} (\eta(t)\mathcal{F}(t))' &= \eta'(t)\mathcal{F}(t) + \eta(t)\mathcal{F}'(t) \\ &\leq -c\mu_3(t)\eta(t)J(E(t)) + c\eta(t)g \circ \psi_x \\ &\leq -c\mu_3(t)\eta(t)J(E(t)) + c(\eta g) \circ \psi_x \\ &\leq -c\mu_3(t)\eta(t)J(E(t)) - cg' \circ \psi_x \\ &\leq -c\mu_3(t)\eta(t)J(E(t)) - cE'(t). \end{aligned}$$

En suite

$$\mathcal{R}(t) = \varepsilon(\eta(t)\mathcal{F}(t) + cE(t)),$$

avec $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ et $\bar{\varepsilon}$ est une constante positive satisfait

$$\eta(t)\mathcal{F}(t) + cE(t) \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}}E(t), \quad \forall t \geq 0.$$

On a

$$\mathcal{R} \sim E, \tag{3.102}$$

et pour tout $t \geq t_0$

$$\mathcal{R}'(t) \leq -c\varepsilon\mu_3(t)\eta(t)J(\mathcal{R}(t)). \tag{3.103}$$

En choisissant $K' = -1/J$, on obtient d'après (3.103)

$$\mathcal{R}'(t)K'(\mathcal{R}(t)) \geq c\varepsilon\mu_3(t)\eta(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

En intégrant sur (t_0, t)

$$K(\mathcal{R}(t)) \geq K(\mathcal{R}(t_0)) + c\varepsilon \int_0^t \mu_3(s)\eta(s)ds - c\varepsilon \int_0^{t_0} \mu_3(s)\eta(s)ds,$$

d'autre part, quand $\lim_{t \rightarrow 0^+} K(t) = +\infty$ et

$$0 \leq \mathcal{R}(t_0) \geq \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}E(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}E(0),$$

on obtient pour ε assez petit

$$K(\mathcal{R}(t_0)) - c\varepsilon \int_0^{t_0} \mu_3(s)\eta(s)ds > 0.$$

Alors, grâce à la décroissance de k^{-1} , on déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) &\leq K^{-1} \left(K(\mathcal{R}(t_0)) + c\varepsilon \int_0^{t_0} \mu_3(s)\eta(s)ds \right) \\ &\leq K^{-1} \left(c\varepsilon \int_0^t (\mu_3\eta)(s)ds \right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente et (3.102) on trouve facilement (3.95). Ce qui termine la preuve . \square

Bibliographie

- [1] **F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Munoz Rivera, R. Racke**, Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *Journal of Differential Equations* 2003 ; **194**(1) :82-115.
- [2] **Arnold VI.** Mathematical Methods of Classical Mechanics. *Springer, New York*, (1989).
- [3] **D. Azé**, Elements d'analyse convexe et variationnelle, *ellipses*, Paris 1999.
- [4] **Bourbaki**, Intégration Act. Sc. Ind. Paris Hermann 1966.
- [5] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, *Masson*, Paris 1993.
- [6] **M. M. Cavalcanti, V. D. Cavalcanti, I. Lasiecka**. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction. *Journal of Differential Equations* 2007 ; **236** ;407-459.
- [7] **M. M. Cavalcanti, H. P. Oquendo**, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, *SIAM J. Control Optim*, 42(4),1310-1324, (2003).
- [8] **M. Chen, W. Liu, W. Zhou**, Existence and general stabilization of the Timoshenko system of thermo-viscoelasticity of type III with frictional damping and delay terms, *Advances in Nonlinear Analysis*, 7(4),547-570,(2016).
- [9] **R. Dautray, J. L. Lions**, Analyse mathématique et calcul numérique, *Masson*, Paris 1988,Tome 08, Tome 03.
- [10] **M. Eller, J. E. Lagnese, S. Nicaise**, Decay rates for solution of a Maxwell system with nonlinear boundary damping. *Computational and Applied Mathematics* 2002 ; **21** :135-165.
- [11] **H. D. Fernández Sare and R. Racke**, On the stability of damped Timoshenko systems-cattaneo versus Fourier's law, *Arch. Rational Mech. Anal*, 194(1) : 221-251,(2009).
- [12] **A. E. Green and P. M. Naghdi**, On undamped heat waves in an elastic solid, *J. Thermal Stresses.*, 15 : 253-264, (1992).
- [13] **A. Guesmia and S. A. Messaoudi**, On the control of solutions of a viscoelastic equation, *Appl. Math. Comput.*, 206(2) : 589-597, (2008).
- [14] **A. Guesmia, S. Messoudi**, General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32(16),2102-2122,(2009).
- [15] **J. Hao, F. Wang**, energy decay in a Timoshenko-type system for thermoelasticity of type III with distributed delay and past history, *Elect. J. Differ. Eqns.*, 2018, 1-27, (2018).

- [16] **M. Houasni, S. Zitouni and R. Amiar**, General decay for a viscoelastic damped Timoshenko system of second sound with distributed delay, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*
- [17] **R. Ikehata**, Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms, *Nonlinear Analysis*. Vol 27, no 10 (1996), 1165-1175.
- [18] **J. U. Kim, Y. Renardy**, Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM J. Control Optim* 1987 ; **25**(6) : 1417-1429.
- [19] **V. Komorink**, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. *Masson-John Wiley* : Paris, 1994.
- [20] **A. Kolmogorov, S. Fomine**, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, *Editions Mir. Moscou* 1974.
- [21] **I. Lasiecka, D. Toundykov** Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and a nonlinear source. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications* 2006 ; **64** :1757-1797.
- [22] **I. Lasiecka**, Mathematical Control Theory of Coupled PDE's. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol.75. *SIAM : philadelphia. PA*, 2002.
- [23] **I. Lasiecka, D. Tataru**, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. *Di. Inte. Equa.*, 1993 ; **6** : 507-533.
- [24] **J. L. Lions**, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires, *Dunod Gautier-Villars*, Paris 1969.
- [25] **W. J. Liu, E. Zuazua**, Decay rates for dissipative wave equations. *Ricerche di Matematica*, **XLVIII**, 61-75, (1999).
- [26] **S. Messaoudi, M. Mustafa**, A stability result in a memory-type Timoshenko system. *Dynamic. App.*, 18(3), 457-468, (2009).
- [27] **S. A. Messoudi and B. Said-Houari**, Energy decay in a Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III, *Adv. Differential Equations.*, 14(3-4) : 284-278, (2009).
- [28] **S. A. Messaoudi, M. Pokojovy and B. Said-Houari**, Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound-global existence and exponential stability, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32(5) : 505-534, (2009).
- [29] **J. E. Muñoz Rivera, M. Naso, E. vuk**, Asymptotic behavior of the energy for electromagnetic system with memory , *Math. Meth. Appl. Sci.*, 25(7) : 819-841, (2004).
- [30] **J. E. Muñoz Rivera, R. Racke**, Global stability for damped Timoshenko systems. *Discrete and continuous Dynamical Systems* 2003 ; **9**(6) : 1625-1639.
- [31] **J. E. Muñoz Rivera and R. Racke**, Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability, *J. Math. Anal. Appl.*, 276 : 248-278, (2002).
- [32] **J. E. Muñoz Rivera, R. Racke**, Timoshenko systems with indefinite damping. *J. Math. Anal. Appl.* 2008 ; **341** : 1068-1083.
- [33] **S. Nicaise, C. Pignotti**, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, *Diff.Int.Equas.*, 21(9-10), 935-958(2008)

- [34] **D. Ouchenane**, A stability result of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback, *G. Math. J.*, 21(4) : 475-489, (2014).
- [35] **D. Ouchenane, A. Rahmoune**, General decay result of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Application*
- [36] **T. N. Rabello**, Decaimento da energia de um sistema de equações hiperbolicas noa lineares num dominica nao cilindrico, Doctoral thesis Ita. *S. J. de compos*, Brasil 1990 .
- [37] **P. A. Raviart et J. M. Thomas**, Introduction à l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles, *Masson*, Paris 1983.
- [38] **C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and N. N. O. Castro**, Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings, *Appl. Math. Lett.*, 18(5) : 535-541, (2005).
- [39] **W. Rudin**, Real and Complex Analysis(2nd), McGraw-Hill, New York, (1974).
- [40] **M. L. Santos**, Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary. *Abstract and Applied Analysis* 2002 ;7(10) : 531-546.
- [41] **A. Soufyane, A. Wehbe**, Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping. *Electronic Journal of Differential Equations* 2003 ; 29 : 1-14.
- [42] **S. Timoshenko**, On the correction for the shear of the differential equation for transverse vibration of primatic bars. *Philisophical Magazine* 1921 ; 41 :74-746.