

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : analyse fonctionnelle et applications.

PAR :
Halloub Djihane

Thème

Certains problème d'évolution dans un espaces de Lebesgue et Sobolev à exposants variables

Devant le jury composé de :

Membre	Grade & Etablissement	Qualité
Dr. Rahmoune Abedeazize	Dr. Univ. A.T. Laghouat	Président du Jury
Dr. Rahmoune Abita	Dr. Univ. A.T. Laghoua	Encadreur
Dr. Fares Yazid	Dr. Univ. A.T. Laghouat	Examineur

Année Universitaire : 2023-2024

Résumé

Ce mémoire, propose une contribution à l'étude de l'existence, l'unicité et l'explosion en temps fini(Blow-up) pour deux problèmes : parabolique et hyperbolique amorti non linéaire à exposants variables pour des solutions faible.

Mots - clés : Parabolique, hyperbolique, existence ; unicité ; explosion en temps fini(Blow-up) ; exposants variable.

**

Dédicaces

EDédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord : mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements. et vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie. Et je le dédie :

tous les membres de ma famille, mes soeurs , mes frère tous mes profeseur et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

Remerciements

Tout d'abord je remercie **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la puissance et la volonté pour achever ce travail.

JE remercie vivement monsieur **Dr. Saadaoui Mouhamzd**, ait accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.

JE tiens également à remercier **Dr. ABDELAZIZE Rahmoune** pour avoir accepté d'examiner ce travail.

JE tiens à remercier mon encadreur **Dr. ABITA Rahmoune** pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui m'ont guidé durant la réalisation de ce mémoire.

Halloub Djihane

Table des matières	1
Introduction	1
1 Espaces Des Fonctions	4
1.1 Introduction	4
1.2 Préliminaires	4
1.3 Espaces de Lebesgue à Exposants Variables	7
1.3.1 Définition et propriétés de base	7
1.3.2 Norme équivalente et complétude de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$	14
1.3.3 Ensembles denses dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$	18
1.4 Espaces de Sobolev à exposants variables	20
2 Explosion et bornitude des solutions pour une classe d'équations pseudo-paraboliques semi-linéaires avec terme viscoélastique $p(\cdot)$-Laplacien	21
2.1 Introduction	21
2.2 Préliminaires	22
2.3 Explosion en temps fini et bornitude du temps d'explosion	23
2.3.1 Premier résultat d'explosion	25
2.3.2 Deuxième Résultat d'explosion	32
3 Équations Dondes non-linéaires Avec Amortissement : Existence et explosion en temps fini	42
3.1 Introduction	42
3.2 Existence de solutions faibles	44
3.3 Explosion en temp fini(Blow-up)	54
4 Résultats de non-existence globale et d'explosion pour une équation d'évolution quasi-linéaire	59

4.1	Introduction	59
4.1.1	Hypothèses mathématiques	61
4.1.2	Existence et Unicité	61
4.1.2.1	Exploser pour une énergie initiale positive	62
4.1.3	Exploser pour une énergie initiale négative	66
	Bibliographie	69

Notre objectif dans ce mémoire est l'existence, l'unicité et l'explosion en temps fini pour des problèmes hyperboliques amortie non linéaire avec des exposants variables.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré à une brève exposition de la théorie des espaces de fonctions qui fournissent un cadre analytique pour l'étude des EDPs à exposants variable de non-linéarité. Ce sont les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, qui peuvent être considérés comme des cas particuliers des espaces d'Orlicz, ou des espaces semi-modulaires.

Dans le second chapitre, nous intéressant à l'existence et l'unicité de solutions faibles, l'explosion en temp fini(the Blow-up) sous certains conditions sur les données pour un équation d'onde semi-linéaire avec un terme source logarithmique non linéaire sous condition aux limites de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = |u|^{p(\cdot)-2} u \ln |u|, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

Dans (2.1), Ω soit un domaine bornée dans $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ avec une frontière lisse $\partial\Omega$, pour tous $m(\cdot), p(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions mesurables satisfaisant pour la fonction q

$$\begin{cases} 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty, \quad n \leq 2, \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$q_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x)$$

et la condition de continuité log-Hölder :

$$\begin{aligned} |q(x) - q(y)| &\leq -\frac{A}{\log|x-y|}, \quad \text{pou p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x - y| < \delta \\ A &> 0, \quad 0 < \delta < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Dans le deuxième chapitre, nous concentrons sur une classe d'existence, d'unicité et d'explosion en un temps fini T de la solution d'un modèle d'équation d'onde logarithmique impliquant des exposant variable et des termes sources non linéaires sous des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = |u|^{p(\cdot)-2} u \ln |u|$$

Nous avons appliqué la méthode de Faedo-Galerkin combinée au théorème du point fixe de Banach pour déterminer l'existence et l'unicité d'une solution locale dans le temps locale. Sous l'hypothèse de conditions appropriées, différentes techniques des inégalités sont utilisées pour obtenir les explosions en un temps fini T de la solution. Ce type d'équation est lié à la dynamique des fluides, aux fluides électrorhéologiques, à la théorie de la mécanique quantique, à la physique nucléaire, à l'optique et à la géophysique.

Dans le dernier chapitre, un résultats de non-existence globale et d'explosion pour une équation d'évolution quasi-linéaire et l'explosion pour des solution faible avec une énergie initiale négative à été analysée pour un problème aux limites initiales suivant :

$$\begin{cases} a(x, t) u_t - \Delta_{m(\cdot)} u = f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

où

$$\Delta_{m(\cdot)} u = \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u \right)$$

appelé l'opérateur $m(\cdot)$ -Laplacien, où Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière lisse $\Gamma = \partial\Omega$.

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une brève exposition de la théorie des espaces de fonctions qui fournissent un cadre analytique pour l'étude des EDPs à non-linéarité variable. Ce sont les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, qui peuvent être considérés comme des cas particuliers des espaces d'Orlicz [8], ou des espaces semi-modulaires [5–7].

La théorie de tels espaces est très intéressante en soi, ce sujet difficile s'est développé très rapidement au cours des dernières décennies.

Une discussion détaillée de la théorie des espaces de Lebesgue et de Sobolev avec des exposants variables dépasse le cadre de la monographie, pour cette raison, nous nous limitons à décrire un ensemble minimal de propriétés nécessaires dans la suite de la procédure. Notre présentation suit les documents [3, 4, 9].

Un aperçu approfondi et approfondi de la théorie des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable, ainsi que la discussion de la bibliographie disponible sur cette question, se trouvent dans les monographies [1, 2].

1.2 Préliminaires

Avant de définir les espaces avec des exposants variables, introduisons plusieurs notations et rappelons quelques faits bien connus les plus utilisés tout au long du texte. Sauf au indication spéciale, Ω représente toujours un domaine borné de \mathbb{R}^n à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitzienne, où C^1 par morceaux .

Notons que

$$Q = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$$

est utilisé pour un cylindre générique en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ avec la base Ω et une hauteur finie arbitraire $T < \infty$. La limite latérale de Q est notée $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$. Si la valeur de T est importante pour la procédure, nous utilisons les notations Q_T et Γ_T . Pour par souci de concision, pour les points du cylindre $Q = \Omega \times (0, T)$ on utilise souvent la notation $z = (x, t)$. étant donné une fonction $\phi(x, t) \in C^0(\overline{Q})$, par convention on désigne

$$\begin{aligned} \phi^+(t) &= \sup_{\Omega} \phi(x, t), & \phi^-(t) &= \inf_{\Omega} \phi(x, t), \\ \phi^+ &= \sup_Q \phi(x, t), & \phi^- &= \inf_Q \phi(x, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

L'espace de Banach $L^p(\Omega)$ à constante $p \in (1, \infty)$ est l'ensemble des fonctions mesurables à norme finie

$$\|u\|_{q,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par $L^\infty(\Omega)$ on désigne l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid u \text{ est mesurable, } |u| \leq M \text{ p.p. } \Omega \right\}.$$

La norme de $L^\infty(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \inf \{ M > 0 : |u| \leq M \text{ a.e. en } \Omega \}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit intérieur

$$(u, v)_{2,\Omega} = \int_{\Omega} uv dx.$$

$W^{k,q}(\Omega)$, $k \geq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, est l'espace de k fois des fonctions faiblement différentiables à norme bornée

$$\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

où α est le multi-indices, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec un entier $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

L'espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions lisses à support compact en Ω) dans la norme de $W^{k,p}(\Omega)$. Une norme équivalente de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p,\Omega}.$$

Dans le cas $p = 2$ on note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$. Le produit interne dans l'espace de Hilbert $H_0^k(\Omega)$, $k \geq 1$, est défini par

$$(u, v)_{H_0^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{2,\Omega}.$$

On désigne par $L^p(0, T; L^q(\Omega))$, $p, q \geq 1$, l'espace des fonctions mesurables avec la norme bornée

$$\|u\|_{L^p(0, T; L^q(\Omega))} = \left(\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{p, \Omega}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dans le cas $p = q$, nous écrivons $\|u\|_{L^p(0, T; L^p(\Omega))} = \|u\|_{p, Q}$. La notation $L^q(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))$ représente l'espace des fonctions mesurables, faiblement différentiables en x et bornées dans la norme

$$\|u\|_{L^q(0, T; W_0^{1, p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|\nabla u(\cdot, t)\|_{p, \Omega}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour chaque $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $p' = \frac{p}{p-1}$, l'inégalité de Hölder satisfaisant :

$$\int_{\Omega} |f| |g| dx \leq \|f\|_{p, \Omega} \|g\|_{p', \Omega}.$$

Pour tous les nombres réels non négatifs x, y et chaque $p \in (1, \infty)$, l'inégalité de Young satisfaisant :

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{p'} y^{p'}, \quad p' = \frac{p}{1-p}.$$

Nous utiliserons souvent cette inégalité sous la forme suivante :

pour tout $\varepsilon > 0$, $p \in (1, \infty)$ et réel non négatif x, y

$$xy = \left((\varepsilon p)^{\frac{1}{p}} x (\varepsilon p)^{-\frac{1}{p}} y \right) \leq \varepsilon x^p + \frac{(p-1)\varepsilon^{-\frac{1}{p-1}}}{p^{p'}} y^{p'}.$$

L'inégalité de Gronwall. Soit une fonction non négative $v(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ satisfaisant l'inégalité différentielle

$$v'(t) \leq a(t)v(t) + f(t) \quad \text{a.e in } (0, T), \quad v(0) = v_0,$$

avec $a(t)$ donné, $f(t) \in L^1(0, T)$. Alors pour $a, t \in (0, T)$

$$v(t) \leq v_0 \exp \left(\int_0^t a(\tau) d\tau \right) + \int_0^t f(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^t a(s) ds \right) d\tau.$$

Une fonction $f(z, r) : Q \times R \mapsto R$ est appelée *fonction carathéodre* si $f(z, r)$ est mesurable en Q pour tout $r \in R$ et continue par rapport à r pour a.e. $z \in Q$.

1.3 Espaces de Lebesgue à Exposants Variables

1.3.1 Définition et propriétés de base

Soit

$$\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ un domaine ouvert borné} \\ \text{avec la limite Lipschitz-continue } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

et

$$p : \Omega \mapsto (1, \infty) \text{ soit une fonction mesurable.} \quad (1.3)$$

Sur l'ensemble de toutes les fonctions $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on définit la fonctionnelle

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

et présenter l'ensemble

$$L^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega : A_{p(\cdot)}(f) < \infty \right\},$$

qui est un espace linéaire. Il est facile de vérifier que

1. $A_{p(\cdot)}(f) \geq 0$ pour chaque f ,
2. $A_{p(\cdot)}(f) = 0 \iff f = 0$,
3. $A_{p(\cdot)}(f) = A_{p(\cdot)}(-f)$ pour chaque f ,
4. $A_{p(\cdot)}(f)$ est convexe.

Chaque fonctionnelle qui satisfait aux propriétés (1) à (4) est appelée modulaire convexe.

Le modulaire $A_{p(\cdot)}(f)$ possède aussi les propriétés

(5) si $|f(x)| \geq |g(x)|$ pour p.p. $x \in \Omega$ et si $A_{p(\cdot)}(f) < \infty$, alors $A_{p(\cdot)}(f) \leq A_{p(\cdot)}(g)$, l'inégalité est stricte si $|f| \leq |g|$,

(6) si $0 < A_{p(\cdot)}(f) < \infty$, alors la fonction $\lambda \mapsto A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ est continue et décroissante sur l'intervalle $[1, \infty)$

La propriété (5) est évidente. Pour prouver la propriété (6), on remarque que pour a.e. $x \in \Omega$ $|f(x)/\lambda|^{p(x)}$ est monotone décroissant en fonction de $\lambda > 1$, et que $A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ est monotone en vertu de (5). Soit $0 < A_{p(\cdot)}(f/\lambda) < \infty$ et $\lambda_k \searrow \lambda$. Alors $|f(x)/\lambda_k| \nearrow |f(x)/\lambda|$ et la continuité de $A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ découle du théorème de convergence monotone. Introduisons le fonctionnel

$$\|f\|_{p(\cdot), \Omega} \equiv \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : A_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}. \quad (1.4)$$

Chaque fois que cela ne cause pas de confusion, nous utilisons la sténographie $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} = \|f\|_p$.

Proposition 1.1. Si $0 < \|f\|_p < \infty$ alors $A_p(f/\|f\|_p) \leq 1$.

Démonstration. Prend une suite $\{\gamma_k\}$ telle que $\gamma_k \searrow \|f\|_p$. En vertu de la définition de $\|f\|_p$, la propriété (6) et le lemme de Fatou

$$A_p(f/\|f\|_p) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} A_p(f/\gamma_k) \leq 1.$$

Corollaire 1.1. Si $0 < \|f\|_p \leq 1$, alors $A_p(f) \leq 1$.

Démonstration.

$$A_p(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\|f\|_p^{p(x)}} dx = A_p(f/\|f\|_p) \leq 1.$$

Proposition 1.2 (Norme de Luxembourg de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$). La fonctionnelle

$$\|\cdot\|_{p(\cdot),(\Omega)} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \mapsto [0, \infty)$$

définit une norme de l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous devons vérifier que

1. $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} \geq 0$ pour chaque $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$;
2. $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = 0 \Rightarrow f = 0$ pour la norme en Ω ;
3. $\forall (\mu) \in \mathbb{R}, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \|\mu f\|_{p(\cdot),\Omega} = |\mu| \|f\|_{p(\cdot),\Omega}$;
4. $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \|f + g\|_{p(\cdot),\Omega} \leq \|f\|_{p(\cdot),\Omega} + \|g\|_{p(\cdot),\Omega}$.

(1) La première propriété est évidente.

(2) Notons

$$\mathcal{P} = \left\{ \lambda > 0 : A_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1 \right\}.$$

Il est clair que pour $f = 0$, nous avons $\mathcal{P}(0) = (0, \infty)$. Si $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} \neq 0$, il résulte de la propriété (6) du modulaire $A_{p(\cdot)}(\cdot)$ et de la Proposition 1.1 que $\mathcal{P}(f) = [\lambda, \infty)$ avec $\lambda = \|f\|_p$. Par (2.3)

$$\|f\|_p = \inf \mathcal{P}(f),$$

c'est pourquoi pour $f = 0$, nous avons $\|f\|_p = \inf \mathcal{P}(0) = 0$. Supposons, par contradiction, qu'il existe $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tel que $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = 0$, mais $f \neq 0$ sur un ensemble de mesure non nulle en Ω . Cela signifie que

$$\int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx \geq \varepsilon > 0$$

pour certains $\varepsilon > 0$. Puisque $\inf \mathcal{P}(f) = 0$, il existe une suite $\{\lambda_k\} \subset \mathcal{P}(f) \cap (0, 1)$ telle que $\lambda_k \rightarrow 0$ et $A_{p(\cdot)}(f/\lambda_k) \leq 1$, ce qui est impossible car

$$1 \geq A_{p(\cdot)}(f/\lambda_k) = \int_{\Omega} |f/\lambda_k|^{p(x)} dx \geq \frac{1}{\lambda_k} \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_k} \rightarrow \infty \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

(3) La troisième propriété est évidente.

5. Présentons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \left\{ f \in L^{p(x)}(\Omega) : A_p(f) \leq 1 \right\}$$

et remarquez que $\mathcal{P}(f) = \{\lambda > 0 : f/\lambda \in \mathcal{M}\}$. Puisque $A_p(\cdot)$ est convexe, l'ensemble \mathcal{M} est également convexe. Pour chaque $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$ et un $\varepsilon > 0$ arbitraire

$$\frac{f}{\varepsilon + \|f\|_p}, \frac{g}{\varepsilon + \|g\|_p} \in \mathcal{M},$$

d'où

$$\frac{\theta f}{\varepsilon + \|f\|_p} + \frac{(1-\theta)g}{\varepsilon + \|g\|_p} \in \mathcal{M} \quad \forall \theta \in (0, 1)$$

en raison de la convexité de \mathcal{M} . Choisissons θ de la manière spéciale :

$$\frac{\theta}{\varepsilon + \|f\|_p} = \frac{(1-\theta)}{\varepsilon + \|g\|_p} \Leftrightarrow \frac{\theta f}{\varepsilon + \|f\|_p} + \frac{(1-\theta)g}{\varepsilon + \|g\|_p} = \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p + 2\varepsilon} \in \mathcal{M}.$$

Il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$

$$\|f\|_p + \|g\|_p + 2\varepsilon \in \mathcal{P}(f+g),$$

C'est,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p + 2\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, l'assertion suit.

Il résulte de la proposition 1.2 que l'ensemble $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ équipé de la norme de Luxembourg $\|\cdot\|_{p(\cdot), \Omega}$ est un espace linéaire normé. Dans le cas particulier $p = \text{const}$ le modulaire $A_{p(\cdot)}$ génère l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ avec la norme $\|f\|_{p, \Omega} = A_p^{\frac{1}{p}}(f)$, qui est l'espace de Lebesgue classique $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{p, \Omega})$.

L'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un cas particulier des espaces d'Orlicz-Musielak $L^M(\Omega)$. $L^M(\Omega)$ est constitué de toutes les fonctions f sur Ω telles que

$$\int_{\Omega} M(x, \lambda f(x)) dx < \infty \text{ pour certains } \lambda > 0,$$

où $M : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ est une fonction mesurable non négative, semi-continue inférieure, convexe, m.à.m. pour a.e. $x \in \Omega$, et satisfaisant la condition $\lim_{u \rightarrow 0} M(x, u) = M(x, 0) = 0$. Pour les espaces de Lebesgue-Orlicz $L^{p(\cdot)}(\Omega) = L^M(\Omega)$ avec $M(x, u) = |u|^{p(x)}$.

Dénotons

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} p(x), \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} p(x).$$

Proposition 1.3. *Si $p^+ < \infty$, alors pour tout f avec $0 < \|f\|_{p(\cdot), \Omega} < \infty$*

$$A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}) = 1.$$

Démonstration. En vertu de la Proposition 1.1, il suffit de vérifier que l'inégalité $A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}) < 1$ est impossible. Pour chaque $0 < \lambda \leq \|f\|_{p(\cdot), \Omega}$

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}(f/\lambda) &= \int_{\Omega} \frac{|f|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{p(\cdot), \Omega}} \right)^{p(x)} \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot), \Omega}}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \left(\frac{\|f\|_{p(\cdot), \Omega}}{\lambda} \right)^{p^+} A_p(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}). \end{aligned}$$

Si $A_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot), \Omega}) < 1$, on peut choisir $\lambda < \|f\|_{p(\cdot), \Omega}$ tel que $A_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1$, ce qui contredit la définition de la norme $\|f\|_{p(\cdot), \Omega}$.

Corollaire 1.2. *Pour $p^+ < \infty$ propriétés (2) et (4) de le modulaire $A_{p(\cdot)}(f)$ avec la proposition donnent :*

$$\text{si } \|f\|_{p(\cdot), \Omega}, \text{ alors } A_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot), \Omega}.$$

Supposons maintenant que

$$\forall p.p.x \in \Omega \quad p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty). \quad (1.5)$$

La relation entre la norme de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et le modulaire $A^{p(\cdot)}(\cdot)$ est donnée dans l'assertion suivante.

Lemme 1.1. *Que les conditions (1.3) et (1.5) soient remplies. Alors pour chaque $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

$$\min \left\{ \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^-}, \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^+} \right\} \leq A_{p(\cdot)}(f) \leq \max \left\{ \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^-}, \|f\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^+} \right\}. \quad (1.6)$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\mu = \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \neq 0$ et considérons la fonction $h(x) = f(x)/\mu$.

D'après la proposition 1.3 $h \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $\|h\|_{p(\cdot), \Omega} = 1$. D'autre part,

$$1 = \|h\|_{p(\cdot), \Omega} \leq A_{p(\cdot)}(h) \leq \begin{cases} \mu^{-p^+} A_{p(\cdot)}(f) & \text{si } \mu \leq 1, \\ \mu^{-p^-} A_{p(\cdot)}(f) & \text{si } \mu > 1, \end{cases}$$

d'où $A_{p(\cdot)}(f) \geq \min \{ \mu^{p^+}, \mu^{p^-} \}$. Plus,

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \mu^{p(x)} |h|^{p(x)} dx \leq \begin{cases} \mu^{p^-} & \text{si } \mu \leq 1, \\ \mu^{p^+} & \text{si } \mu > 1, \end{cases}$$

ce qui donne $A_{p(\cdot)}(f) \geq \min \{ \mu^{p^+}, \mu^{p^-} \}$. Si $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} = 0$, alors $f = 0$ a.e. en Ω et $A_{p(\cdot), \Omega} = 0$ par la propriété (2) du modulaire.

Corollaire 1.3. *L'assertion précédente peut être représentée sous la forme équivalente : si les conditions (1.3) et (1.5) sont remplies, alors pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

$$\min \left\{ A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}(f), A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}(f) \right\} \geq \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \geq \max \left\{ A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}(f), A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}(f) \right\}. \quad (1.7)$$

Si l'exposant p est constant, alors $p^+ = p^-$, ce qui convertit (1.6) et (2.9) en égalité $A_p(f) = \|f\|_{p, \Omega}^p$.

Corollaire 1.4. *Il résulte de (1.6) et (2.9) que si les conditions (1.3) et (1.5) sont remplies, alors pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$*

- (i) $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} = 1 \iff A_{p(\cdot)}(f) = 1$
- (ii) $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} < 1 \iff A_{p(\cdot)}(f) < 1$
- (iii) $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} > 1 \iff A_{p(\cdot)}(f) > 1$.

Lemme 1.2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $p(x)$ vérifiant (1.3) et (1.5). Puis*

$$\|f_n - f\|_{p(\cdot), \Omega} \rightarrow 0 \quad \text{si et seulement si} \quad A_{p(\cdot)}(f_n - f) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration. L'assertion est un sous-produit du Lemme 2.1.

Lemme 1.3. *Soient les fonctions $p(x)$ et $q(x)$ vérifiant les conditions (1.3) et (1.5). Si $p(x) \geq q(x)$ e.a. dans Ω , alors $L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{q(\cdot)}(\Omega)$.*

Démonstration. En vertu du lemme 2.1, il suffit de vérifier que la condition $A_{p(\cdot)}(u) < \infty$ donne $A_{q(\cdot)}(u) < \infty$. Par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}(u) &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{q(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} + \frac{p(x) - q(x)}{p(x)} \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(1 + |u|^{p(x)} \right) dx = |\Omega| + A_{q(\cdot)}(u). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Corollaire 1.5. *Sous les conditions du Lemme 1.3 la norme de l'opérateur plongeant $L^{p(x)}(\Omega) \mapsto L^{q(x)}(\Omega)$ ne dépasse pas $1 + |\Omega|$. Il suffit de remarquer que par vertu de (2.13)*

$$\sup_{A_{p(\cdot),\Omega}(u)=1} \frac{A_{q(\cdot),\Omega}(u)}{A_{p(\cdot),\Omega}(u)} = \sup_{A_{p(\cdot),\Omega}(u)=1} A_{p(\cdot),\Omega}(u) \leq 1 + |\Omega|.$$

Lemme 1.4 (L'inégalité de Hölder). *Soient les conditions (1.3) et (1.5) remplies. Pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ avec $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ ce qui suit inégalité Hölder :*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega}. \quad (1.9)$$

Démonstration. Notons $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \lambda$, $\|g\|_{p'(\cdot),\Omega} = \mu$ et supposons que $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$. Par l'inégalité de Young, pour p.p. $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)| &= \lambda\mu \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right| \left| \frac{g(x)}{\mu} \right| \\ &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p(x)} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} \left| \frac{g(x)}{\mu} \right|^{p'(x)} \right) \\ &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p^-} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} + \frac{1}{(p^-)'} \left| \frac{g(x)}{\mu} \right|^{p'(x)} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Par la proposition 1.3

$$A_{p(\cdot)}(f/\lambda) = 1, \quad A_{p'(\cdot)}(g/\mu) = 1, \quad (1.11)$$

En intégrant (2.21) sur Ω et en appliquant (1.11) on obtient (1.9) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx &\leq \lambda\mu \left(\frac{1}{p^-} A_{p(\cdot)}(f/\lambda) + \frac{1}{(p^-)'} A_{p'(\cdot)}(g/\mu) \right) \\ &= \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \|g\|_{p'(\cdot),\Omega}. \end{aligned}$$

Soit $\lambda\mu = 0$. Supposons par souci de précision, que $\lambda = 0$. Alors $f = 0$ a.e. en Ω et la conclusion est la suivante :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx = 0.$$

Lemme 1.5. *Soit Ω satisfait la condition (1.2), $p(x)$ satisfait les conditions (1.3) et (1.5) et $q = \text{const} \leq 1$. Si $q \geq p(x)$ a.e. en Ω , alors*

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq C \|f\|_{p(\cdot),\Omega} \quad \text{avec la constante } C = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{q,\Omega} = \lambda < \infty$. On peut supposer que $\lambda > 0$, sinon l'inégalité requise est évidente. Posons $g(x) = f(x)/\lambda$. D'après le lemme 1.3 $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $\|g\|_{p(\cdot),\Omega} = A_{p(\cdot)}(g) = 1$. D'après la proposition 1.3

$$\frac{1}{\lambda} \|f\|_{q,\Omega} = \|g\|_{q,\Omega} \leq A_{\frac{1}{q}}(g). \quad (1.12)$$

En appliquant l'inégalité de Young et le corollaire 1.5 (i), nous trouvons que

$$\begin{aligned} A_q(g) &= \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^q dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{p(x) - q}{p(x)} + \frac{q}{p(x)} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \right) dx \\ &\leq |\Omega| + A_{p(\cdot)}(g) = 1 + |\Omega|. \end{aligned}$$

En introduisant cette inégalité dans (1.12) on arrive à l'inégalité

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}} \lambda = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p(\cdot),\Omega}.$$

Lemme 1.6. Soit les exposants $p(x)$, $q(x)$ satisfont les conditions (1.3) et (1.5) et $p(x) \leq q(x)$ p.p. en Ω . Alors le plongement $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ est continu. La norme de l'opérateur de plongement ne dépend que de $|\Omega|$, p^{\pm} et q^{\pm} :

$$\|f\|_{q(\cdot),\Omega} \leq C \|f\|_{p(\cdot),\Omega}, \quad C = C(|\Omega|, p^{\pm}, q^{\pm}).$$

Démonstration. Preuve Le plongement $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ découle du Lemme 1.3. Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \lambda > 0$. Notons

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : p(x) = q(x)\}, \quad \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2,$$

et considérons la fonction $h = f/\lambda$. D'après la proposition 1.3 $A_{p(\cdot)}(h) = 1$ et

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}(h) &= \int_{\Omega_1} |h|^{q(x)} dx + \int_{\Omega_2} |h|^{q(x)} dx \\ &= \int_{\Omega_1} \left(|h|^{p(x)} \right)^{\frac{q(x)}{p(x)}} dx + \int_{\Omega_2} |h|^{p(x)} dx \\ &\leq 2 \|1\|_{\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-q(\cdot)},\Omega_1} \left\| |h|^{q(x)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)},\Omega_1} + \int_{\Omega_2} |h|^{p(x)} dx \\ &\leq 2 \max \left\{ |\Omega|^{1-\frac{q^+}{q^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{q^+}} \right\} \max \left\{ A_{\frac{q^-}{p(\cdot)}}(|h|^{q(x)}), A_{\frac{q^+}{p(\cdot)}}(|h|^{q(x)}) \right\} + A_{p(\cdot)}(h) \\ &= 2 \max \left\{ |\Omega|^{1-\frac{q^+}{q^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{q^+}} \right\} \max \left\{ A_{\frac{q^-}{p(\cdot)}}(h), A_{\frac{q^+}{p(\cdot)}}(h) \right\} + A_{p(\cdot)}(h) \\ &= 2 \max \left\{ |\Omega|^{1-\frac{q^+}{q^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{q^+}} \right\} + 1 \end{aligned}$$

D'autre part, par (2.9)

$$\frac{1}{\lambda} \|f\|_{q(\cdot), \Omega} = \|h\|_{q(\cdot), \Omega} \leq \max \left\{ A_{q(\cdot)}^{\frac{1}{q(\cdot)}}(h), A_{q(\cdot)}^{\frac{1}{q(\cdot)}}(h) \right\}.$$

1.3.2 Norme équivalente et complétude de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

étant donné $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, on définit la fonctionnelle

$$|f|_{p(\cdot), \Omega} = \sup_{A_{p'(\cdot)}(g) \leq 1} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad p'(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1}. \quad (1.13)$$

Proposition 1.4 (La norme d'Orlicz de $L^{p(\cdot)}(\Omega)$). *La fonctionnelle*

$$|\cdot|_{p(\cdot), \Omega} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$$

définit une norme de $L^{p(x)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous devons vérifier que

1. $|f|_{p(\cdot), \Omega} \geq 0$ pour chaque $f \in L^{p(x)}(\Omega)$;
2. $|f|_{p(\cdot), \Omega} = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p. en Ω ;
3. $\forall (\mu) \in \mathbb{R}, f \in L^{p(x)}(\Omega) |\mu f|_{p(\cdot), \Omega} = |\mu| |f|_{p(\cdot), \Omega}$;
4. $f, g \in L^{p(x)}(\Omega) |f + g|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega} + |g|_{p(\cdot), \Omega}$.

(1) Nous raisonnons par contradiction. Supposons que $|f|_p < 0$. Soit $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ une fonction arbitraire telle que $A_{p'(\cdot)}(-g) \leq 1$. D'après (1.13)

$$0 > |f|_{p(\cdot), \Omega} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Puisque $A_{p'(\cdot)}(g) = A_{p'(\cdot)}(-g)$, on a aussi

$$0 > |f|_{p(\cdot), \Omega} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)(-g(x))dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx > 0.$$

ce qui est impossible.

(2) Pour $f = 0$ p.p. en Ω l'égalité $|f|_p = 0$ découle de la définition de $|f|_{p(\cdot), \Omega}$. Supposons que $|f|_{p(\cdot), \Omega} = 0$ mais $f \neq 0$ a.e. en Ω , soit $A_{p(\cdot)}(f) \neq 0$. Introduisons la fonction

$$g(x) = |f(x)|^{p(x)-1} \text{signe } f(x) \in L^{p'(x)}(\Omega).$$

Nous avons

$$0 = |f|_{p(\cdot), \Omega} \geq \int_{\Omega} f(x)g(x)dx = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}dx = A_{p(\cdot)}(f) \neq 0,$$

ce qui est impossible.

(3)-(4) cette propriété est un sous-produit immédiat des propriétés de la suprême.

Proposition 1.5. Si $|f|_{p(\cdot),\Omega} < \infty$ et $A_{p'(\cdot)}(g) < \infty$, alors

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \begin{cases} |f|_{p(\cdot),\Omega} & \text{si } A_{p'(\cdot)}(g) \leq 1, \\ |f|_{p(\cdot),\Omega} A_{p'(\cdot)}(g) & \text{autrement.} \end{cases}$$

Démonstration. Le premier cas est un sous-produit immédiat de (1.13). Soit $A_{p'(\cdot)}(g) > 1$. En vertu de la convexité du modulaire $A_{p'(\cdot)}(\cdot)$

$$A_{p'(\cdot)}\left((A_{p'(\cdot)}(g))^{-1}g\right) \leq (A_{p'(\cdot)}(g))^{-1}A_{p'(\cdot)}(g) = 1,$$

d'où

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| = A_{p'(\cdot)}(g) \left| \int_{\Omega} f(x)g(x)/A_{p'(\cdot)}(g)dx \right| \leq A_{p'(\cdot)}(g)|f|_{p(\cdot),\Omega}.$$

Proposition 1.6. Soit $p(x)$ satisfait (1.3) et (1.5). Si $A_{p(\cdot)}(f) < \infty$ et $|f|_{p(\cdot),\Omega} \leq 1$, alors $A_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1$.

Démonstration. On argumente par contradiction : supposons que $A_{p(\cdot)}(f) > 1$. Par la propriété (6) du modulaire (continuité de $A_{p(\cdot)}(f/\lambda)$ par rapport à λ) il existe $\lambda > 1$ tel que $A_{p(\cdot)}(f/\lambda) = 1$. Posons

$$g(x) = |f(x)/\lambda|^{p(x)-1} \text{sing } f(x), \quad x \in \Omega.$$

Puis

$$A_{p'(\cdot)}(g) = \int_{\Omega} \left(|f(x)/\lambda|^{p(x)-1} \right)^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx = \int_{\Omega} |f/\lambda|^p dx = 1,$$

d'où

$$|f|_{p(\cdot),\Omega} \geq \int_{\Omega} f(x)g(x)dx = \lambda \int_{\Omega} |f/\lambda|^{p(x)} dx = \lambda > 1,$$

une contradiction.

Proposition 1.7. Soit $p(x)$ satisfait (1.3) et (1.5). Si $|f|_{p(\cdot),\Omega} \leq 1$, alors $A_{p(\cdot)}(f) \leq |f|_{p(\cdot),\Omega}$.

Démonstration. Supposons d'abord que $A_{p(\cdot)}(f) \leq \infty$. Présenter la fonction

$$g(x) = |f(x)|^{p(x)-1} \text{sing } f(x), \quad x \in \Omega.$$

Puis

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq |f|_{p(\cdot),\Omega}.$$

Pour éviter l'hypothèse $A_{p(\cdot)}(f) < \infty$ on considère la suite de troncatures

$$f_k(x) = \min\{k, |f(x)|\} \chi_{G_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

où $\{G_k\}$ est une suite d'ensembles $G_k \subset G_{k+1} \subset \Omega$ tels que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ et χ_{G_k} est la fonction caractéristique de G_k . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A_p(f_k) < \infty$ et

$$|f_k|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega} \leq 1.$$

L'assertion découle maintenant du théorème de convergence monotone de Lebesgue.

Théorème 1.6 (équivalence entre les normes de Luxembourg et d'Orlicz). *Soit les conditions (1.3) et (1.5) soient remplies. Alors*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f : |f|_{p(\cdot), \Omega} < \infty\}$$

et il existe des constantes C_* , C^* telles que

$$C_* \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega} \leq C^* \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \quad \forall f \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. D'après le corollaire 1.5, l'inégalité $A_{p'(\cdot)}(g) \leq 1$ implique $\|g\|_{p'(\cdot), \Omega} \leq 1$, et par l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^+} \right) \|f\|_{p(\cdot), \Omega} \|g\|_{p(\cdot), \Omega} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot), \Omega}.$$

Supposons maintenant que $0 < |f|_{p(\cdot), \Omega} < \infty$. Par

$$\left| \frac{f}{|f|_{p(\cdot), \Omega}} \right|_{p(\cdot), \Omega} = \sup_{A_{p(\cdot)}(g) \leq 1} \int_{\Omega} \frac{f(x)g(x)}{|f|_{p(\cdot), \Omega}} dx = \frac{|f|_{p(\cdot), \Omega}}{|f|_{p(\cdot), \Omega}} = 1,$$

il résulte de la proposition 1.7 que $A_p(f/|f|_{p(\cdot), \Omega}) \leq 1$. D'après le corollaire 1.5

$$\|f\|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega},$$

d'où $\|f\|_{p(\cdot), \Omega} \leq |f|_{p(\cdot), \Omega}$ par la définition de la norme de Luxembourg.

Lemme 1.7. *Si $p(x)$ satisfait (1.3) et (1.5), l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{f_k\}$ une suite de Cauchy de fonctions $f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g(x)| dx < \varepsilon \quad \forall m, n \geq k_0 \quad (1.14)$$

et tout g avec $A_{p(\cdot)}(g) \leq 1$. Décomposons Ω en sous-ensembles deux à deux disjoints G_k avec $|G_k| < \infty$ et définir les fonctions

$$g_k = \frac{\mathcal{X}G_k}{1 + |G_k|}, \quad k \in \mathbb{N},$$

Pour qui

$$A_{p(\cdot)}(g_k) = \int_{\Omega} \frac{\mathcal{X}G_k dx}{(1 + |G_k|)^{p(x)}} \leq \frac{|G_k|}{1 + |G_k|} \leq 1.$$

En remplaçant $g = g_k$ dans (2.19) on obtient l'inégalité

$$\int_{G_k} \frac{|f_m - f_n|}{1 + |G_k|} \leq \int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g_k(x)| dx < \varepsilon,$$

d'où

$$\int_{G_k} |f_m(x) - f_n(x)| dx < \varepsilon(1 + |G_k|).$$

Il s'ensuit que $\{f_k\}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(G_k)$ pour tout k . Extrayons de f_k les sous-séquences $\{f_k^{(j)}\}$ et trouvons les fonctions $f^{(j)} \in L^1(G_j)$ telles que

$$\begin{aligned} \{f_k^{(1)}\} &\subset \{f_k\} : f_k^{(1)} \rightarrow f^{(1)} \text{ p.p. en } G_1, f^{(1)} \in L^1(G_1), \\ \{f_k^{(2)}\} &\subset \{f_k^{(1)}\} : f_k^{(2)} \rightarrow f^{(2)} \text{ p.p. en } G_2, f^{(2)} \in L^1(G_2), \\ &\dots \\ \{f_k^{(m)}\} &\subset \{f_k^{(m-1)}\} : f_k^{(m)} \rightarrow f^{(m)} \text{ p.p. en } G_m, f^{(m)} \in L^1(G_m), \end{aligned}$$

Considérons la suite diagonale $\{f_m^{(m)}\}$. Puisqu'il s'agit d'une sous-suite de chaque $\{f_m^{(j)}\}$, alors

$$f_m^{(m)}(x) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x) \mathcal{X}G_k := f(x) \text{ pour p.p. } x \in \Omega.$$

En vertu de (2.19)

$$\int_{\Omega} |f_m^{(m)} - f_n| |g(x)| dx \leq \varepsilon$$

pour tout $m, n \leq n_0$ et g tel que $A_{p(\cdot)}(g) \leq 1$. En appliquant le Lemme de Fatou on passe à la limite et conclure que

$$\int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| |g(x)| dx \leq \sup_{m \in \mathbb{N}, m \leq n_0} \int_{\Omega} |f_m^{(m)}(x) - f_n(x)| |g(x)| dx \leq \varepsilon$$

pour tout $n \leq n_0$ et tout g tel que $A_{p(\cdot)}(g) \leq 1$. Par conséquent, $\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$.

Corollaire 1.7. *Si les conditions (1.3) et (1.5) sont remplies, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Lemme 1.8. Si $p(x)$ vérifie (1.3) et (1.5), alors $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est réflexif et séparable.

Démonstration. D'après le lemme 1.7 l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est un sous-espace complet et fermé de $L^{p^-}(\Omega)$. Pour $p^- > 1$ l'espace $L^{p^-}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif et séparable. Il s'ensuit que $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est également réflexif et séparable (voir, par exemple, Chap. 1]).

Soit $p(x)$ satisfaisant (1.3) et (1.5). D'après le corollaire 1.5 $A_p(f) \leq 1$ si et seulement si $\|f\|_p \leq 1$. Il résulte du théorème 1.1 que pour tout $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ l'application $L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$G(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad f \in L^{p(x)}(\Omega), \quad (1.15)$$

est une fonctionnelle linéaire continue sur $L^{p(x)}(\Omega)$ de norme vérifiant les inégalités $C_* \|g\|_{p'} \leq \|G\| \leq C^* \|g\|_{p'}$.

Lemme 1.9. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \in L^\infty(\Omega)$,

(ii) pour toute fonctionnelle linéaire continue G sur $L^{p(x)}(\Omega)$ il existe un unique fonction $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ tel que (1.15) soit vérifié.

La preuve peut être trouvée dans [?] ou [?, Part I, Sect. 2.7].

Corollaire 1.8. L'espace dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ est $L^{p'(x)}(\Omega)$ si et seulement si $p \in L^\infty(\Omega)$.

1.3.3 Ensembles denses dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$

Lemme 1.10. Si $p(x)$ vérifie (1.3) et (1.5), l'ensemble des fonctions mesurables et bornées en Ω est dense en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. Etant donné $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, considérons la suite de fonctions $f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ défini par les formules

$$f_k = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq k, \\ k \operatorname{signe} f(x) & \text{si } |f(x)| > k. \end{cases}$$

Depuis $|f_k| \leq |f|$ et $f_k \rightarrow f$ a.e. en Ω , par la convergence dominée par Lebesgue théorème $A_{p(\cdot)}(f_k - f) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, et l'assertion découle du lemme 1.2.

Théorème 1.9. Soit $p(x)$ satisfait (1.3) et (1.5). Alors l'ensemble $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. D'après le lemme 1.10 pour tout $\varepsilon > 0$ fixé il existe un fonction $g \in L^\infty(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)$ tel que

$$\|f - g\|_{p(\cdot), \Omega} < \varepsilon. \quad (1.16)$$

D'après le théorème de Luzin il existe une fonction $h(x) \in C(\Omega)$ et un ouvert U tel que ce

$$|U| \leq \min \left\{ 1, \left(\frac{\varepsilon}{2\|g\|_\infty} \right)^{p^+} \right\},$$

$g(x) = h(x)$ partout dans Ω/U et $\sup |h(x)| = \sup |g(x)| \leq \|g\|_\infty$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A_{p(\cdot)}((g - h)/\varepsilon) &= \int_{\Omega} \frac{|g - h|^{p(x)}}{\varepsilon^{p(x)}} dx \leq \int_U \frac{|f - h|^{p(x)}}{\varepsilon^{p(x)}} dx \\ &\leq \int_U \left(\frac{|g| + |h|}{\varepsilon} \right)^{p(x)} dx \\ &\leq \int_U \left(\frac{2\|g\|_\infty}{\varepsilon} \right)^{p^+} dx \\ &\leq |U| \max \left\{ 1, \left(\frac{2\|g\|_\infty}{\varepsilon} \right)^{p^+} \right\} \leq 1. \end{aligned}$$

pour chaque $\varepsilon > 1$

$$\frac{1}{\varepsilon^{p^-}} \int_{\Omega} |g(x) - h(x)|^{p(x)} dx \leq A_{p(\cdot)}((g - h)/\varepsilon) \leq 1 \Rightarrow A_{p(\cdot)}(g - h) \leq \varepsilon^{p^-}$$

et par le corollaire 1.5

$$\|g - h\|_{p(\cdot), \Omega} \leq \max \left\{ A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}(g - h), A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}(g - h) \right\} \leq \max \left\{ \varepsilon, \varepsilon^{\frac{p^-}{p^+}} \right\} = \varepsilon^{\frac{p^-}{p^+}}.$$

En rapportant cette inégalité à (1.16), on trouve que

$$\|f - h\|_{p(\cdot), \Omega} \leq \varepsilon + \varepsilon^{\frac{p^-}{p^+}}.$$

Corollaire 1.10. *Sous les conditions du Lemme 1.10 l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense en $L^{p(\cdot)}(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'ensemble des fonctions simples, les fonctions simples sont denses dans $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Corollaire 1.11. *Sous les conditions du lemme 1.10 l'espace $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ est séparable : l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable et dense dans $C_0^\infty(\Omega)$.*

1.4 Espaces de Sobolev à exposants variables

Soit le domaine Ω satisfait (1.2) et l'exposant $p(x)$ satisfait (1.3) et (1.5). le Espace de Banach $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ est défini par

$$\begin{aligned} W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) &= \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(\Omega), u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \\ \|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} &= \|u\|_{p(\cdot),\Omega} + \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Lemme 1.11 (L'inégalité de Poincaré). *Soient Ω et $p(x)$ vérifiant les conditions (1.2) et (1.3) et (1.5). Si $p(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, alors il existe une constante finie $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$*

$$\|u\|_{p(\cdot),\Omega} \leq C \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}. \quad (1.18)$$

Démonstration. Il suffit de prouver (1.18) pour un ensemble $B \cap \Omega$, où B est une boule de rayon suffisamment petit tel que

$$\max_{B \cap \Omega} p(x) \leq \frac{n+1}{n} \min_{B \cap \Omega} p(x). \quad (1.19)$$

Le choix de B dépend du module de continuité de $p(x)$ dans Ω . Dénoter

$$p^+ = \max_{B \cap \Omega} p(x), \quad p^- = \min_{B \cap \Omega} p(x).$$

D'après le théorème d'injection de Sobolev, la chaîne de plongements suivante est vérifiée :

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{1,p(\cdot)}(\Omega)(B \cap \Omega) \subset W^{1,p^-}(B \cap \Omega) \subset W^{p^+}(B \cap \Omega) \subset W^{p(\cdot)}(\Omega)(B \cap \Omega).$$

Puisque $p(x)$ est uniformément continue sur Ω , le domaine Ω peut être couvert par un nombre fini de balles satisfaisant (2.66), d'où (1.18).

Une conséquence immédiate de l'inégalité (1.18) est la possibilité de définir un norme équivalent de l'espace $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ par la relation

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}. \quad (1.20)$$

Notons $C_{\log}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $p(x)$ qui vérifient les conditions (1.3) et (1.5) et sont continues en Ω avec le module de continuité logarithmique .

CHAPITRE 2

EXPLOSION ET BORNITUDE DES SOLUTIONS POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS PSEUDO-PARABOLIQUES SEMI-LINÉAIRES AVEC TERME VISCOÉLASTIQUE $P(\cdot)$ -LAPLACIEN

2.1 Introduction

Dans un domaine borné soumis aux conditions aux limites de Dirichlet, cet article discute du phénomène d'explosion en temps fini des solutions pour une classe particulière d'équations d'évolution qui affectent le terme viscoélastique pseudo $p(\cdot)$ laplacien. L'équation est donnée par :

$$u_t - \Delta u - \int_0^t g(t-s) \Delta_{p(x)} u(x, s) ds = |u|^{q(x)-2} u.$$

Nos résultats montrent que, quelles que soient l'énergie initiale et les valeurs initiales importantes, les solutions classiques de cette équation explosent en temps fini dans deux cas. Sous réserve de certaines conditions sur p , q , g et des données initiales u_0 , nous avons établi un nouveau critère d'explosion et fourni des limites inférieure et supérieure sur les solutions si une explosion se produit.

L'équation pseudo-parabolique sous la forme de

$$u_t(t) - k \Delta u_t(t) - \Delta u(t) = f(u), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

est couramment utilisé pour décrire divers phénomènes physiques et biologiques, tels que la propagation d'ondes longues dispersives non linéaires [30], l'agrégation de population [33], la conduction thermique à deux températures [31] et processus non stationnaires dans les semi-conducteurs [32], dynamique des fluides, fluides électrorhéologiques, théorie de la mécanique quantique [, 27–29].

Une classe d'équations pseudo-paraboliques avec des termes viscoélastiques $p(\cdot)$ -Laplaciens soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sont écrites sous la forme d'équations intégral-différentielles partielles par

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - \int_0^t g(t-s) \Delta_{p(x)} u(x, s) ds = |u|^{q(x)-2} u, & x \in \Omega, t \geq 0 \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\Delta_{p(x)} u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$, $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ sont deux fonctions mesurables, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est un domaine borné, $\Gamma = \partial\Omega$ est Lipschitz continue, $u_0 \geq 0$, avec $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction C^1 bornée. La fonction $q(\cdot)$ est une fonction continue sur Ω . Ce modèle particulier implique des équations paraboliques non linéaires concernant le gradient de la solution et présentant différents degrés de non-linéarité. Le cas le plus courant est l'équation d'évolution p -Laplace, où l'exposant p dépend du champ électromagnétique externe. Pour plus d'informations, veuillez vous référer à des sources telles que [?, 34], ainsi qu'à leurs références respectives. Le modèle viscoélastique est devenu de plus en plus populaire ces dernières années pour analyser la dynamique des structures viscoélastiques. Il existe un problème courant connu sous le nom de problème (2.1), qui apparaît dans divers modèles mathématiques utilisés en ingénierie et en physique.

2.2 Préliminaires

Soit $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ une fonction mesurable. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles mesurables u sur Ω telles que

$$\int_{\Omega} |\lambda u(x)|^{p(x)} dx < \infty \text{ pour certains } \lambda > 0.$$

L'espace à exposant variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ équipé de la norme de type Luxemburg

$$\|u\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

est un espace Banach. Tout au long de l'article, nous utilisons $\|\cdot\|_q$ pour indiquer la norme L^q pour $1 \leq q \leq +\infty$.

Ensuite, nous définirons l'espace de Sobolev à exposant variable $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ de la manière suivante

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : \nabla u \text{ existe et } |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \right\}.$$

Cet espace est un espace de Banach, défini par sa norme. Cet espace est un espace de Banach, défini par sa norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{p(\cdot),\Omega} + \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}.$$

De plus, nous avons établi que $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ est la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. On sait que pour les éléments de $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ l'inégalité de Poincaré est vraie,

$$\|u\|_{p(\cdot),\Omega} \leq C(n, \Omega) \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}, \quad (2.2)$$

et une norme équivalente de $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ peut être définie par

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p(\cdot),\Omega}.$$

Pour énoncer et prouver notre résultat principal, nous devons établir les hypothèses suivantes.

(H1) Les fonctions d'exposant mesurables $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ fournies répondent aux exigences suivantes

$$2 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n}{n-2} \text{ pur } n \geq 3,$$

où pour une fonction mesurable donnée φ sur $\bar{\Omega}$;

$$\varphi_2 = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \varphi(x), \quad \varphi_1 = \text{ess inf}_{x \in \Omega} \varphi(x),$$

en supposant sauf que $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ vérifient la condition de continuité log-Hölder :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M(|x - y|), \quad (2.3)$$

où $M(r)$ satisfait

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} M(r) \ln \left(\frac{1}{r} \right) = c < \infty.$$

(H2) Le noyau mémoire $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction C^1 satisfaisant

$$g(t) \geq 0, \quad g'(t) \leq 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s) ds = \kappa > 0, \quad (2.4)$$

(H3)

$$1 - \int_0^\infty g(s) ds = \kappa \in \left[\frac{1}{(q_1 - 1)^2}, 1 \right]. \quad (2.5)$$

2.3 Explosion en temps fini et bornitude du temps d'explosion

Dans cette section, nous prouverons que l'explosion des solutions au problème (2.1) avec une énergie positive arbitraire et des données initiales appropriées, nous obtenons en outre de nouvelles limites pour l'explosion. temps de disponibilité si les exposants variables et les données initiales satisfont à certaines conditions.

Comme il est bien connu que les équations dégénérées n'ont pas de solutions classiques, nous donnons une définition précise de la solution faible.

Définition 2.1. Une fonction $u(x, t) \in L^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap L^{p(\cdot)}(0, T; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$, $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ est appelé solution faible du problème (2.1), si et si seulement si l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^T u_t \varphi dt \, dx + \int_{\Omega} \int_0^T \nabla \varphi \cdot \left(\nabla u - \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s)|^{p(\cdot)-2} \nabla u(s) ds \right) dt dx \\ = \int_{\Omega} \int_0^T |u|^{q(\cdot)-2} u \varphi dt dx, \end{aligned}$$

est valable pour tout $\varphi \in L^2(Q) \cap L^{p(\cdot)}(0, T; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$.

La preuve du premier résultat principal repose largement sur la signification de ces deux lemmes :

Lemme 2.1. Supposons qu'une fonction $\theta(t)$ positive, deux fois différentiable, satisfasse l'inégalité

$$\theta''(t)\theta(t) - (1 + \beta)\theta'(t)^2 \geq 0, \quad t > 0,$$

où $\beta > 0$ est une constante. Si $\theta(0) > 0$ et $\theta'(0) > 0$, alors il existe $0 < T_1 < \frac{\theta(0)}{\beta\theta'(0)}$ tel que $\theta(t)$ tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow T_1$.

Dans ce qui suit, nous préparons quelques lemmes nécessaires à la preuve des principaux résultats.

Lemme 2.2 (Sobolev-Poincaré inequality). Si $q(\cdot)$ satisfait (H1). Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, alors le plongement suivant

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

sont continus, et on obtient

$$\|u\|_{q(\cdot)} \leq B \|\nabla u\|_2,$$

où la constante optimale du plongement de Sobolev est notée B , et la norme de $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ est représentée par $\|\cdot\|_{q(\cdot)}$. La propriété suivante est associée

$$\min \left(\|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right) \leq \varrho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{q(x)} dx \leq \max \left(\|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right), \quad (2.6)$$

pour tout $u \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$.

Notre résultat principal est présenté ici.

Nous affirmons l'existence locale d'une solution pour (2.1), même sans preuve. Ceci peut être obtenu grâce aux méthodes de Faedo-Galerkin, en combinaison avec le théorème du point fixe dans les espaces de Banach.

Théorème 2.1. En supposant que (H1) et (H2) soient valides. Le problème (2.1) a une solution locale, notée u , qui satisfait $u(x, t) \in L^\infty(\Omega \times (0, T_0)) \cap L^{p(\cdot)}(0, T_0; W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))$ et $u_t \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$ pour $T_0 > 0$.

2.3.1 Premier résultat d'explosion

L'une des principales techniques permettant de prouver l'explosion de solutions consiste à calculer la fonction énergétique et à utiliser l'argument de la concavité.

Soient

$$M_1 = \left(1 - \frac{2 \left(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds \right)}{q_1 \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right)} \right), \quad M_2 = \frac{\left(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds \right)}{1 - \int_0^t g(s) ds}, \quad (2.7)$$

pour tout τ positif tel que

$$\tau \in \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \int_0^t g(s) ds} + \int_0^t g(s) ds - 1 \right), \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) (q_1 - 2) \right].$$

Théorème 2.2. *Considérons les hypothèses du théorème 2.1. Si $E(u_0) > 0$ pour tout u_0 donné tel que*

$$\int_{\Omega} |u_0|^2 dx \geq \frac{1}{M_1} (2M_2 E(0) + M_1 |\Omega|),$$

avec

$$0 < E(0) < \frac{|\Omega|}{4(p_1 + 1)}. \quad (2.8)$$

Si $p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ satisfont (2.3) et (H1) – (H2) sont vérifiés, alors la solution $u(x, t)$ peut exister pour un fini quantité de temps. Cependant, s'il existe un $T_1 \leq T_{\max}$ tel que $\lim_{t \rightarrow T_1} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds = +\infty$,

cela signifie que la solution u explose en temps fini en $L^2(\Omega)$ -norme. M_1 et M_2 sont donnés dans (2.7).

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, l'énergie correspondante au problème (2.1) $E : W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{q(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, est considéré par*

$$E(t) := E(u(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t), \quad (2.9)$$

$E(t)$ est décroissant, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx \\ &\leq -\int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

où

$$(g \circ \nabla u)(t) = \int_0^t g(t-s) \left\| \nabla u(t) - |\nabla u(s)|^{p(x)-2} \nabla u(s) \right\|_2^2 ds.$$

Démonstration. Pour une solution u au problème (2.1), en multipliant l'équation (2.1)₍₂₎ par u_t , en intégrant le résultat sur Ω , et en utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \right) - \int_0^t g(t-s) \|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u(x, s) \nabla u_t(t) ds \\ = -\int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Un calcul direct du dernier terme sur le côté gauche de (3.6) peut être visualisé comme suit

$$\begin{aligned} - \int_0^t g(t-s) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u(x,s) \nabla u_t(t) ds &= \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

En mettant (2.12) dans (3.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u(t)|^{q(x)} dx + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) \right) \\ = -\frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx \end{aligned}$$

En intégrant l'identifiant ci-dessus sur $(0, t)$, on obtient

$$\begin{aligned} E(t) - E(0) &\leq -\frac{1}{2} \int_0^t g(s) \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t (g' \circ \nabla u)(s) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^2 dx ds \leq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

La démonstration du théorème 2.2 repose sur la signification du lemme suivant 2.4.

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, la solution du problème (2.1) satisfait les inégalités suivante*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx &\geq e^{2M_1 t} \left[G(0) - 2 \frac{M_2}{M_1} E(0) - |\Omega| \right] + 2 \frac{M_2}{M_1} E(0) + |\Omega| \\ &= e^{2M_1 t} G(0) + \left(2 \frac{M_2}{M_1} E(0) + |\Omega| \right) (1 - e^{2M_1 t}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

et

$$\int_{\Omega} uu_t dx \geq M_1 e^{2M_1 t} \left[\|u_0\|_2^2 - 2 \frac{M_2}{M_1} E(0) - |\Omega| \right] + M_2 \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 ds, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

où M_1 et M_2 comme dans (2.7).

Démonstration. Définir

$$G(t) = \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx.$$

En intégrant par parties et en utilisant l'équation. (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} G'(t) &= -2 \|\nabla u(t)\|_2^2 + 2 \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \nabla u(t) (|\nabla u(s)|^{p(x)-2} \nabla u(s) - \nabla u(t)) dx ds \\ &\quad + 2 \int_0^t g(s) ds \|\nabla u(t)\|_2^2 + 2 \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En appliquant les inégalités de Young et Hölder, le deuxième terme du membre de droite de (2.16) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \nabla u(t) (|\nabla u(s)|^{p(x)-2} \nabla u(s) - \nabla u(t)) dx ds \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t g(t-s) (|\nabla u(s)|^{p(x)-2} \nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \right| \\
&\leq \tau \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\tau} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) (|\nabla u(s)|^{p(x)-2} \nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right)^2 dx \\
&\leq \tau \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&+ \frac{1}{4\tau} \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) ds \right) \left(\int_0^t g(t-s) \left| |\nabla u(s)|^{p(x)-2} \nabla u(s) - \nabla u(t) \right|^2 ds \right) dx \\
&= \tau \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\tau} (g \circ \nabla u)(t) \int_0^t g(s) ds,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

pour tout $\tau > 0$. En utilisant (2.16) et (2.17), nous concluons

$$G'(t) \geq 2 \left(-1 - \tau + \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2\tau} \int_0^t g(s) ds (g \circ \nabla u)(t) + 2 \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx. \tag{2.18}$$

puisque $q_1 > 2$, il est clair de vérifier que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx &= \int_{\{x \in \Omega: |u| \leq 1\}} |u|^{q(x)} dx + \int_{\{x \in \Omega: |u| \geq 1\}} |u|^{q(x)} dx \\
&\geq \int_{\{x \in \Omega: |u| \geq 1\}} |u|^2 dx \geq \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\{x \in \Omega: |u| \leq 1\}} |u|^2 dx \\
&\geq \int_{\Omega} |u|^2 dx - |\Omega|,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

qui se connectent avec (2.18) donne

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} G(t) \\
&\geq 2 \left(-1 - \tau + \int_0^t g(s) ds \right) \frac{2E(t) - (g \circ \nabla u)(t) + \frac{2}{q_2} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx}{1 - \int_0^t g(s) ds} \\
&+ 2 \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx - \frac{1}{2\tau} \int_0^t g(s) ds (g \circ \nabla u)(t) \geq -4 \frac{(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds)}{1 - \int_0^t g(s) ds} E(t) \\
&+ 2 \left[\frac{(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds)}{1 - \int_0^t g(s) ds} - \frac{1}{4\tau} \int_0^t g(s) ds \right] (g \circ \nabla u)(t) \\
&+ 2 \left(1 - \frac{2(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds)}{q_1(1 - \int_0^t g(s) ds)} \right) \int_{\Omega} |u|^2 dx \\
&+ 2 \left(\frac{2(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds)}{q_1(1 - \int_0^t g(s) ds)} - 1 \right) |\Omega|.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

L'inégalité (2.20) confirme que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t) &\geq 2M_1 \left(G(t) - 2\frac{M_2}{M_1}E(t) - |\Omega| \right) \\ &\geq 2M_1 \left(G(t) - 2\frac{M_2}{M_1}E(0) - |\Omega| \right) + 2M_2 \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (2.21)$$

parce que $\int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 ds$ est positif, nous avons

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq 2M_1 \left(G(t) - 2\frac{M_2}{M_1}E(0) - |\Omega| \right)$$

En résolvant une équation différentielle ordinaire non homogène, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} G(t) &\geq e^{2M_1 t} \left[G(0) - 2\frac{M_2}{M_1}E(0) - |\Omega| \right] + 2\frac{M_2}{M_1}E(0) + |\Omega| \\ &= e^{2M_1 t} G(0) + \left(2\frac{M_2}{M_1}E(0) + |\Omega| \right) (1 - e^{2M_1 t}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

En remplaçant (3.9) par (2.21), il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq 2M_1 e^{2M_1 t} \left[G(0) - 2\frac{M_2}{M_1}E(0) - |\Omega| \right] + 2M_2 \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 ds.$$

Voici la preuve du premier résultat principal :

Nous soulignons que la principale méthode employée dans cette preuve est basée sur la technique de concavité développée par Levin

Proof of Theorem 2.2. Nous supposons d'abord que u existe au sens classique sur $\Omega \times [0, \infty)$ c'est-à-dire $T_{\max} = +\infty$ (L'intervalle d'existence de u est bornée, ou u est défini dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$), puis montrez que cela conduit à une contradiction. Nous sélectionnons un $\varphi(t)$ de la forme suivante pour $0 < t < \infty$,

$$\varphi(t) = \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2 d\tau$$

alors

$$\varphi'(t) = \|u\|_2^2, \quad (2.23)$$

on distingue deux cas :

1. **Case.1** $E(u(t)) \geq 0$, pour tout $t > 0$. Grâce à (3.11), nous pouvons choisir β en tant que

$$1 < \beta < \frac{|\Omega|}{4E(0)(p_1 + 1)}. \quad (2.24)$$

En ajoutant $4(p_1 + 1)\beta E(t) - 4(p_1 + 1)\beta E(0)$, et en faisant de nous (3.13), (3.12), et (2.19) cela donne

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\geq e^{2M_1 t} \left[\varphi'(0) - 2\frac{M_2}{M_1} E(0) - |\Omega| \right] + \left(2\frac{M_2}{M_1} + 4(p_1 + 1)\beta \right) E(t) \\ &\quad - 4(p_1 + 1)\beta E(0) + |\Omega| \\ &\geq e^{2M_1 t} \left[\varphi'(0) - 2\frac{M_2}{M_1} E(0) - |\Omega| \right] - 4(p_1 + 1)\beta E(0) + |\Omega| \\ &\quad + 4(p_1 + 1)\beta \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 ds, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Soit ψ une fonction auxiliaire définie comme

$$\psi(t) = \varphi^2(t) + \varepsilon^{-1} \varphi'(0) \varphi(t) + \gamma,$$

où $\varepsilon > 0$, est pris suffisamment petit pour que

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\left[\varphi'(0) - 2\frac{M_2}{M_1} E(0) - |\Omega| \right] + |\Omega| - 4(p_1 + 1)\beta E(0)}{(p_1 + 1)\beta \varphi(0)},$$

et $\gamma > 0$ suffisamment grand (si nécessaire), pour que

$$4\varepsilon^2 \gamma > \varphi^2(0). \quad (2.26)$$

Donc

$$\psi'(t) = \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi'(0) \right) \varphi'(t); \quad (2.27)$$

$$\psi''(t) = \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi'(0) \right) \varphi''(t) + 2(\varphi'(t))^2. \quad (2.28)$$

À partir de (2.27), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\psi'(t))^2 &= \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi'(0) \right)^2 (\varphi'(t))^2 \\ &= \left(4\varphi^2(t) + \varepsilon^{-2} (\varphi'(0))^2 + 4\varepsilon^{-1} \varphi(t) \varphi'(0) \right) (\varphi'(t))^2 \\ &= \left(4\varphi^2(t) + 4\varepsilon^{-1} \varphi(t) \varphi'(0) + 4\gamma - \delta \right) (\varphi'(t))^2 \\ &= (4\psi(t) - \delta) (\varphi'(t))^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

où $\delta = 4\gamma - \varepsilon^{-2} (\varphi'(0))^2 > 0$, alors

$$(\psi'(t))^2 + \delta (\varphi'(t))^2 = 4\psi(t) (\varphi'(t))^2. \quad (2.30)$$

En notant que

$$\int_0^t (u_t(\cdot, s), u) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{ds} \|u\|_2^2 \right) ds = \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2.$$

Donc,

$$\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} u_t(\cdot, s) u(s) \, dx ds.$$

Utiliser les inégalités de Hölder et Young donne

$$\begin{aligned} (\varphi'(t))^2 &= \|u(t)\|_2^4 = \left(\|u_0\|_2^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} u_t(\cdot, s) u(s) \, dx ds \right)^2 \\ &\leq \left(\|u_0\|_2^2 + 2 \left(\int_0^t \|u\|_2^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\leq \|u_0\|_2^4 + 2 \|u_0\|_2^2 \left(\int_0^t \|u\|_2^2 \, ds + \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds \right) \\ &\quad + 4 \left(\int_0^t \|u\|_2^2 \, ds \right) \left(\int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds \right) \\ &= \|u_0\|_2^4 + 2\varepsilon^{-1} \|u_0\|_2^2 \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds + 2\varepsilon \|u_0\|_2^2 \varphi(t) \\ &\quad + 4\varphi(t) \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds. \end{aligned} \tag{2.31}$$

De (2.28) et (2.30), on obtient

$$\begin{aligned} 2\psi''(t) \psi(t) &= 2 \left(2\phi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi(0) \right) \varphi''(t) \psi(t) + 4 (\varphi'(t))^2 \psi(t) \\ &= 2 \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi(0) \right) \varphi''(t) \psi(t) + (\psi'(t))^2 + \delta (\varphi'(t))^2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Maintenant, à partir de (2.32), (2.29), (2.25) et (2.31), les estimations suivantes assuré

$$\begin{aligned} &2\psi''(t) \psi(t) - (1 + \beta) (\psi'(t))^2 \\ &= 2 \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi(0) \right) \varphi''(t) \psi(t) + \delta (\varphi'(t))^2 - \beta (\psi'(t))^2 \\ &= 2 \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi(0) \right) \varphi''(t) \psi(t) + \delta (\varphi'(t))^2 - \beta (4\psi(t) - \delta) (\varphi'(t))^2 \\ &= 2 \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi(0) \right) \varphi''(t) \psi(t) - 4\beta \psi(t) (\varphi'(t))^2 + \delta (1 + \beta) (\varphi'(t))^2 \\ &\geq 2\psi(t) \left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1} \varphi(0) \right) \left(2M_1 e^{2M_1 t} \left[\|u_0\|_2^2 - 2 \frac{M_2}{M_1} E(0) - |\Omega| \right] \right. \\ &\quad \left. + 2M_2 \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds \right) \\ &\quad - 4\beta \psi(t) \left(\|u_0\|_2^4 + 2\varepsilon^{-1} \|u_0\|_2^2 \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_{2, \Omega_2}^2 \, ds + 2\varepsilon \|u_0\|_2^2 \varphi(t) \right. \\ &\quad \left. + 4\varphi(t) \int_0^t \|u_t(\cdot, s)\|_2^2 \, ds \right). \end{aligned}$$

En rappelant les valeurs de β et ε et en tenant compte du fait que $e^{M_0 t} > 1$, $p_1 + 1 > 2$,

$\psi > 0$, il en résulte

$$\begin{aligned} & 2\psi''(t)\psi(t) - (1+\beta)(\psi'(t))^2 \\ & \geq 4\beta\psi(t)\left(2\varphi(t) + \varepsilon^{-1}\varphi(0)\right)\left((p_1+1)\int_0^t\|u_t(\cdot,s)\|_2^2 ds + (p_1+1)\varepsilon\varphi(0)\right) \\ & - 4\beta\psi(t)\left(\|u_0\|_2^4 + 2\varepsilon^{-1}\|u_0\|_2^2\int_0^t\|u_t(\cdot,s)\|_2^2 ds + 2\varepsilon\|u_0\|_2^2\varphi(t)\right. \\ & \quad \left.+ 4\varphi(t)\int_0^t\|u_t(\cdot,s)\|_2^2 ds\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, dans ce cas, nous montrons que T ne peut pas être infini et qu'il n'y a donc pas toujours de solution faible. Du Lemme 2.1, il s'ensuit qu'il existe un $0 < t_1 < +\infty$ tel que $\psi(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow t_1$, où

$$0 < t_1 < \frac{2\psi(0)}{(\beta-1)\psi'(0)} = \frac{2\gamma\varepsilon}{(\beta-1)\|u_0\|_2^4} < +\infty.$$

Puisque ψ est continu par rapport à φ , nous concluons qu'il existe un $T_1 \leq t_1$ tel que $\lim_{t \rightarrow T_1} \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds = +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T_1} \sup \|u(t)\|_2^2 = +\infty$. Par conséquent, $u(x, t)$ s'interrompt à un instant fini T_1 , c'est-à-dire que $u(x, t)$ n'existe pas pour toujours, c'est-à-dire que $u(x, t)$ explose à un instant T_1 , ce qui conduira à le résultat de non-existence énoncé dans le théorème, alors φ explose au temps T_1 dans $L^2(\Omega)$ - norme, ce qui contredit. Par conséquent, pour que les données satisfassent à (3.11), toute solution possède un temps d'explosion fini.

2. **Cas 2.** Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $E(u(t_0)) < 0$, ($u(t_0) \neq 0$). Nous définissons $v(x, t) = u(x, t + t_0)$, alors $E(v(0)) = E(u(t_0)) < 0$. Du fait que $E(t)$ est décroissante en t , on peut avoir

$$E(v(t)) \leq E(v(0)) \leq 0. \quad (2.33)$$

Définissez $G(t) = \int_{\Omega} v^2(x, t) dx$, alors nous avons comme dans (2.20)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t) & \geq -4 \frac{\left(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds\right)}{1 - \int_0^t g(s) ds} E(t) \\ & + 2 \left(1 - \frac{2}{q_1} \frac{\left(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds\right)}{1 - \int_0^t g(s) ds}\right) \int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx \\ & \geq 2 \left(1 - \frac{2}{q_1} \frac{\left(1 + \tau - \int_0^t g(s) ds\right)}{1 - \int_0^t g(s) ds}\right) \int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx. \end{aligned} \quad (2.34)$$

De (3.33), il s'ensuit que

$$G'(t) \geq 2M_1 \int_{\Omega} |v|^{q(x)} dx. \quad (2.35)$$

Pour $q(\cdot)$ satisfaire (H2), le plongement suivant

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

prise. Par conséquent, à partir de $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, on obtient que

$$\|v\|_2 \leq C_e \|v\|_{q(x)}. \quad (2.36)$$

Utilisation (3.36), (3.35), et (2.35) de (3.33), nous pouvons obtenir

$$G'(t) \geq 2M_1 \min \left\{ \left(\frac{1}{C_e} \right)^{q_1} \|v\|_2^{q_1}, \left(\frac{1}{C_e} \right)^{q_2} \|v\|_2^{q_2} \right\} \geq C_5 \min \left\{ G^{\frac{q_1}{2}}(t), G^{\frac{q_2}{2}}(t) \right\}, \quad (2.37)$$

où C_e est une meilleure constante d'intégration et

$$C_5 = 2M_1 \min \left\{ \left(\frac{1}{C_e} \right)^{q_1}, \left(\frac{1}{C_e} \right)^{q_2} \right\}.$$

Par $G'(t) > 0$, donc $G(t) \geq G(0)$. Nous pouvons conclure que

$$\left[\frac{G(t)}{G(0)} \right]^{\frac{q_2}{2}} \geq \left[\frac{G(t)}{G(0)} \right]^{\frac{q_1}{2}},$$

c'est

$$[G(t)]^{\frac{q_2}{2}} \geq G(0)^{\frac{q_2 - q_1}{2}} [G(t)]^{\frac{q_1}{2}}. \quad (2.38)$$

En utilisant (2.37) et (3.38), nous avons

$$G'(t) \geq C_5 \min \left\{ G^{\frac{q_1}{2}}(t), G(0)^{\frac{q_2 - q_1}{2}} [G(t)]^{\frac{q_1}{2}} \right\} \geq C_6 G^{\frac{q_1}{2}}(t) \quad (2.39)$$

où $C_6 = C_5 \min \left\{ 1, G(0)^{\frac{q_2 - q_1}{2}} \right\}$. Utilisant (2.39) et l'inégalité de Gronwall, on peut en déduire le résultat suivant

$$G^{\frac{q_1 - 2}{2}}(t) \geq \frac{1}{G^{\frac{2 - q_1}{2}}(0) - \frac{q_1 - 2}{2} C_6 t}.$$

L'inégalité ci-dessus implique que $G(t)$ explose à un temps fini $T^* \leq \frac{2G^{\frac{2 - q_1}{2}}(0)}{(q_1 - 2)C_6}$, qui est une contraction.

2.3.2 Deuxième Résultat d'explosion

Dans cette sous-section, nous aborderons le problème (2.1) en établissant un critère d'explosion et en obtenant des limites pour le temps d'explosion des solutions faibles grâce à l'utilisation de techniques d'inégalité différentielle.

Pour notre résultat, nous devons considérer les fonctions auxiliaires suivantes.

$$\alpha(t) = \left[\kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.40)$$

et pour ε (un petit nombre positif) et N (une constante positive précise) à sélectionner plus tard ;

$$A(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \varepsilon N E_1 t, \quad t \in [0, T), \quad (2.41)$$

et

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} |u|^{q_2} dx + (q_2 + 1) E(t) + (q_2 + 1) \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \quad (2.42)$$

Soient $B, \alpha_1, \alpha_0, c_*$ et E_1 des constantes auxiliaires positives satisfaisant

$$\begin{aligned} c_* &= \max((2B)^{q_1}, (2B)^{q_2}), \quad B = \sqrt{\kappa c_*^{\frac{-1}{q_2}}} B_1, \quad \alpha_1 = \left(\frac{q_1}{q_2} B_1^{-q_2} \right)^{\frac{1}{q_2-2}} \\ \alpha(0) &= \alpha_0 = \kappa^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_0\|_2, \quad E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) \alpha_1^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Le deuxième résultat d'explosion est le suivant.

Théorème 2.3. *En supposant que $g, p(\cdot)$ et $q(\cdot)$ satisfont aux conditions (H1) – (H3) avec $q_1 > 2$. Alors la solution locale du problème (2.1) sous des conditions aux limites satisfaisant $E(0) < E_1, \kappa^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_0\| > \alpha_1$ explose dans temps fini T^* , qui fournissent les estimations suivantes*

$$\int_{\varphi(0)}^{+\infty} \frac{dz}{c \left(z^\delta + z^{\frac{\delta q_1}{q_2}} + z + z^{\frac{q_1}{q_2}} + 1 \right)} \leq T^* \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha^{\frac{\delta_1}{\delta_2}} A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)},$$

où

$$0 < \alpha \leq \frac{q_1 - 2}{2q_1}, \quad (2.44)$$

$c, \delta, \delta_1,$ et δ_2 sont définis dans (2.75) (2.73), (2.64) et (2.68), respectivement.

Le résultat souhaité dépend fortement du lemme suivant 2.5.

Lemme 2.5. *Soit $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par*

$$h(t) := h(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{B_1^{q_2}}{q_1} \alpha^{q_2}, \quad (2.45)$$

alors h a les propriétés suivantes :

(i) h est croissant pour $0 < \alpha \leq \alpha_1$ et décroissant pour $\alpha \geq \alpha_1$,

(ii) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h(\alpha) = -\infty$ et $h(\alpha_1) = E_1$,

iii $E(t) \geq h(\alpha(t))$,

où $\alpha(t)$ est donné dans (2.40), α_1 et E_1 sont donnés dans (4.12).

Démonstration. $h(\alpha)$ est continue et différentiable en $[0, +\infty)$,

$$h'(\alpha) = \alpha \left(1 - B_1^{q_2} \alpha^{q_2-2}(t) \right) \begin{cases} > 0, & \alpha \in (0, \alpha_1) \\ < 0, & \alpha \in (\alpha_1, +\infty), \end{cases}$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned} h(\alpha) &\text{ est strictement en croissante dans } (0, \alpha_1), \\ h(\alpha) &\text{ est strictement en décroissante dans } (\alpha_1, +\infty). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ensuite (i) suit. Puisque $q_2 - 2 > 0$, on a $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h(\alpha) = -\infty$. Un calcul simple donne $h(\alpha_1) = E_1$. Alors (ii) est valable. Par le lemme 2.2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(\cdot)|^{q(x)} dx &\leq \max \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \\ &\leq c_* \max \left(\left(\int_{\{\|\nabla u\|_2 \geq 1\}} |\nabla u(t)|^2 dx \right)^{q_1}, \left(\int_{\{\|\nabla u\|_2 \geq 1\}} |\nabla u(t)|^2 dx \right)^{q_2} \right) \\ &= c_* \left(\int_{\{\|\nabla u\|_2 \geq 1\}} |\nabla u(t)|^2 dx \right)^{q_2} \leq c_* \left(\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right)^{q_2}. \end{aligned}$$

En utilisant (H1), (2.9) et le lemme 2.2, nous avons

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{q_1} B^{q_2} c_* \left(\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right)^{q_2} \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right] - \frac{B_1^{q_2}}{q_1} \left[\kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right]^{\frac{q_2}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2(t) - \frac{B_1^{q_2}}{q_1} \alpha^{q_2}(t) = h(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Alors (iii) est vrai.

Lemme 2.6. *En supposant que les conditions du théorème 2.3 soient remplies, il existe une constante positive $\alpha_2 > \alpha_1$ telle que*

$$\alpha(t) \geq \alpha_2 > \alpha_1, \quad t \geq 0; \quad (2.47)$$

$$\rho(u) \geq B_1^{q_2} \alpha_2^{q_2}, \quad (2.48)$$

où α_1, B_1 et E_1 sont donnés dans (4.12).

Démonstration. Puisque $E(0) < E_1$ et $h(\alpha)$ est une fonction continue, il existe α'_2 et α_2 avec $\alpha'_2 < \alpha_1 < \alpha_2$ tel que $h(\alpha'_2) = h(\alpha_2) = E(0)$ qui se joignent à Lemme 2.5 donne

$$h(\alpha_0) \leq E(0) = h(\alpha_2). \quad (2.49)$$

Du Lemme 2.5(i), on déduit que

$$\alpha_0 \geq \alpha_2, \quad (2.50)$$

donc (4.15) est valable pour $t = 0$.

Maintenant on prouve (4.15), on procède par contradiction et suppose qu'il existe $t^* > 0$ tel que $\alpha(t^*) < \alpha_2$, alors on distingue deux cas,

Cas 1. Si $\alpha'_2 < \alpha(t^*) < \alpha_2$, on sait grâce au Lemme 2.5 et (2.46) que

$$h(\alpha(t^*)) > E(0) \geq E(t^*),$$

ce qui contredit le Lemme 2.5(iii).

Cas 2. Si $\alpha(t^*) \leq \alpha'_2$, alors $\alpha(t^*) \leq \alpha'_2 < \alpha_2$. Définissant $\lambda(t) = \alpha(t) - \frac{\alpha_2 + \alpha'_2}{2}$, alors $\lambda(t)$ est une fonction continue, $\lambda(t^*) < 0$ et en appliquant (2.50) $\lambda(0) > 0$. Donc, il existe $t_0 \in (0, t^*)$ tel que $\lambda(t_0) = 0$, ça veut dire $\alpha(t_0) = \frac{\alpha_2 + \alpha'_2}{2}$, ce qui signifie

$$h(\alpha(t_0)) > E(0) \geq E(t_0).$$

Cela contredit le lemme 2.5(iii), d'où (4.15) suit.

Par (2.9), nous avons

$$\frac{1}{2} \left[\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right] \leq E(t) + \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx,$$

Qui donnent

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx &\geq \frac{1}{2} \left[\left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right] - E(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \left[\kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right] - E(0) \\ &\geq \frac{1}{2} \alpha_2^2 - h(\alpha_2) = \frac{B_1^{q_2}}{q_1} \alpha_2^{q_2}, \end{aligned}$$

alors la deuxième inégalité dans (4.16) est vraie.

Possans

$$H(t) = E_1 - E(t) \text{ pour } t \geq 0. \quad (2.51)$$

Le lemme suivant est valable

Lemme 2.7. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, si $0 \leq E(0) < E_1$, la fonctionnelle $H(t)$ définie dans (3.26) satisfait à ce qui suit estimations :*

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u(t)|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{q_1} \varrho(u), \quad t \geq 0. \quad (2.52)$$

Démonstration. Le lemme 2.2 garantit que $H(t)$ est non décroissant en t . Ainsi

$$H(t) \geq H(0) = E_1 - E(0) > 0, \quad t \geq 0. \quad (2.53)$$

Par (4.12) et le Lemme 2.6, nous avons

$$\begin{aligned} &E_1 - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) \right] \\ &\leq E_1 - \left[\frac{1}{2} \left(\kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right) \right] \\ &= E_1 - \frac{1}{2} \alpha^2(t) = -\frac{1}{p_2} \alpha_1^2 < 0, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T)$, qui donne

$$\begin{aligned} H(t) &= E_1 - \left[\frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) \right] \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u(t)|^{q(x)} dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u(t)|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{q_1} \varrho(u). \end{aligned} \quad (2.54)$$

(2.52) découle de (4.20) et (3.37).

Lemme 2.8. *Supposons que les conditions du théorème 2.3 soient vérifiées, alors il existe une constante positive C telle que*

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq C \varrho(u). \quad (2.55)$$

pour tout $t \in [0, T)$.

Démonstration. Par le lemme 2.6 et $\alpha_2 > \alpha_1$, on a

$$\varrho(u) \geq B_1 \alpha_2^{q_2} > B_1 \alpha_1^{q_2-2} \alpha_1^2 = \frac{q_1}{q_2} B_1^{1-q_2} \alpha_1^2,$$

qui, combiné avec (4.12) implique

$$E_1 \leq B_1^{1-q_2} \frac{q_2}{q_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) \varrho(u). \quad (2.56)$$

en combinant (3.26), (2.56) et la définition de $H(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa \|\nabla u(t)\|_2^2 &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &= E(t) - \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u(t)|^{q(x)} dx \\ &\leq B_1^{1-q_2} \frac{q_2}{q_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) \varrho(u) - H(t) - \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{p_1} \varrho(u) \\ &= \left(B_1^{1-q_2} \frac{q_2}{q_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) + \frac{1}{q_1} \right) \varrho(u) - H(t) - \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) \\ &\leq \left(B_1^{1-q_2} \frac{q_2}{q_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} \right) + \frac{1}{q_1} \right) \varrho(u). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Alors le résultat souhaité, avec $C = \frac{\left(B_1^{1-q_2} \frac{q_2}{q_1} \left(1 - \frac{2}{q_2} \right) + \frac{2}{q_1} \right)}{\kappa}$.

La preuve du théorème 2.3 est présentée ci-dessous, basée sur les lemmes présentés ci-dessus

Proof of Theorem 2.3 . Case 1. Si $0 \leq E(0) < E_1$, puis en différenciant (2.41), on obtient

$$A'(t) = (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + 2\varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx + NE_1.$$

En intégrant par parties sur Ω , en rappelant Eq (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^t g(t-s) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u(x,s) \nabla u(t) ds &= \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right). \end{aligned}$$

En mettant (3.7) dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} A'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) - 2\varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \nabla u(t) \Delta_{p(x)} u(s) dx ds \\ &\quad + \varepsilon \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx + \varepsilon NE_1 \\ &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \nabla u(t) (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u(x,s) - \nabla u(t)) dx ds \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx ds + \varepsilon \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx + \varepsilon NE_1. \end{aligned} \tag{2.58}$$

En employant l'inégalité des Young, nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \nabla u(t) (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u(x,s) - \nabla u(t)) dx ds \right| \\ &\leq \tau \int_0^t g(t-s) \|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u(x,s) - \nabla u(t)\|_2^2 ds + \frac{1}{4\tau} \int_0^t g(s) ds \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &= \tau (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{4\tau} \int_0^t g(s) ds \|\nabla u(t)\|_2^2 \text{ for any } \tau > 0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

En remplaçant (3.40) dans (3.39) puis en appliquant (2.9), nous peut choisir $\tau > 0$ tel que $0 < \tau < \frac{q_1}{2}$, on peut en déduire

$$\begin{aligned} A'(t) &\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\quad + \int_0^t g(s) ds \|\nabla u(t)\|_2^2 - \tau \varepsilon (g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad - \frac{1}{4\tau} \varepsilon \int_0^t g(s) ds \|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon p_1 (H(t) - E_1) + \frac{q_1}{2} \varepsilon (g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + \frac{q_1}{2} \varepsilon \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - \tau \right) (g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + \varepsilon (N - p_1) E_1 + \varepsilon p_1 H(t) \\ &\quad + \varepsilon \left[\left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{q_1}{2} - 1 + \frac{1}{4\tau} \right) \int_0^{\infty} g(s) ds \right] \|\nabla u(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.60}$$

En combinant (3.27) et (3.41), on obtien

$$\begin{aligned} A'(t) &\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + a_1 \varepsilon (g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + a_2 \varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon (N - q_1) E_1 + \varepsilon q_1 H(t), \end{aligned} \tag{2.61}$$

où

$$a_1 = \left(\frac{q_1}{2} - \tau\right) > 0, \quad a_2 = \left(\frac{q_1}{2} - 1\right) - \left(\frac{q_1}{2} - 1 + \frac{1}{4\tau}\right) \int_0^\infty g(s) ds > 0.$$

évidemment

$$H(t) \geq E_1 - \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{q_2} \varrho(u), \quad (2.62)$$

Utiliser (2.62) dans (3.31) et réécrire q_1 sous la forme $q_1 = q_1 - 2a_3 + 2a_3$, avec $0 < a_3 < \min\left(a_1, a_2, \frac{q_1}{2}\right)$ produire

$$\begin{aligned} A'(t) &\geq (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &+ \varepsilon (a_1 - a_3) (g \circ \nabla u)(t) + \varepsilon (a_2 - a_3) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &+ \varepsilon (N - (q_1 - 2a_3)) E_1 + \varepsilon (q_1 - 2a_3) H(t) + \varepsilon \frac{2}{q_2} a_3 \varrho(u). \end{aligned}$$

A ce point, nous choisissons N suffisamment grand pour que

$$N - (q_1 - 2a_3) > 0.$$

Après avoir déterminé une valeur fixe pour N , nous sélectionnons un ε suffisamment petit pour remplir les conditions nécessaires

$$A(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_\Omega |u_0|^2 dx > 0, \quad \text{puisque } H(0) > 0. \quad (2.63)$$

Alors il existe une constante δ_1 satisfaisant

$$0 < \delta_1 \leq \min \left\{ \frac{q_1}{2} + 1 - a_3, a_1 - a_3, \frac{2}{q_2} a_3, q_1 - 2a_3 \right\}, \quad (2.64)$$

et

$$A'(t) \geq \delta_1 \varepsilon \left[\|u_t\|_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) + \|\nabla u(t)\|_2^2 + H(t) + \varrho(u) \right], \quad (2.65)$$

qui, en combinant avec donne

$$A(t) \geq A(0) > 0, \quad \forall t \in [0, T).$$

En choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{T} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{q_2}$, en rappelant le Lemme 2.6 et alors, on a

$$|\varepsilon N E_1 T|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{p_2} N E_1 \leq \frac{N E_1}{B_1 \alpha_1^{p_2}} \varrho(u). \quad (2.66)$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Young, et en gardant le plongement $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, on peut observer que

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega |u|^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \|u\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq (1 + |\Omega|)^{\frac{q_1-2}{q_1(1-\alpha)}} \|u\|_{q(x)}^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq c_4 \left(\|u\|_2^2 + \|u\|_{q(x)}^{\frac{2}{1-2\alpha}} \right) \\ &\leq c_4 \|\nabla u\|_2^2 + c_4 \max \left\{ \left(\int_\Omega |u|^{q(x)} dx \right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)q_1}}, \left(\int_\Omega |u|^{q(x)} dx \right)^{\frac{2}{(1-2\alpha)q_2}} \right\} \\ &\leq (c_4 C + c_5) \int_\Omega |u|^{q(x)} dx, \end{aligned} \quad (2.67)$$

où

$$\begin{aligned} c_4 &= (1 + |\Omega|)^{\frac{q_1-2}{q_1(1-\alpha)}} \\ c_5 &= c_4 \max \left\{ (q_1 H(0))^{\frac{2}{(1-2\alpha)q_1}-1}, (q_1 H(0))^{\frac{2}{(1-2\alpha)q_2}-1} \right\}, \\ &C \text{ comme dans (2.55)}. \end{aligned}$$

Soit δ_2 une constante positive telle

$$\delta_2 = 2^{1/(1-\alpha)+1} \max \left(1, \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}, c_4 C, c_5 + \frac{NE_1}{B_1 \alpha_1^{p_2}} \right). \quad (2.68)$$

En utilisant (2.41), (2.66), (2.67), et L'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &\leq 2^{1/(1-\alpha)+1} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} \left| \int_{\Omega} |u|^2 dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} (NE_1 T)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \\ &\leq \delta_2 [H(t) + \varrho(u)]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nous rejoignons (2.66) et (2.67) avec (2.65), ça résulte

$$A'(t) \geq \frac{\delta_1}{\delta_2} A^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \text{ pour tout } t \geq 0, \quad (2.70)$$

Après avoir intégré (3.40) sur l'intervalle $(0, t)$, on peut en déduire

$$A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\delta_1}{\delta_2} t}. \quad (2.71)$$

Par conséquent, $A(t)$ explose en un temps fini \hat{T} ,

$$\hat{T} \leq \frac{1-\alpha}{\alpha \frac{\delta_1}{\delta_2} A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}.$$

Puisque $A(0) > 0$, (2.71) montre que $\lim_{t \rightarrow T^*} A(t) = \infty$, où $T^* = \frac{1-\alpha}{\alpha \frac{\delta_1}{\delta_2} A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}$. Ceci termine la preuve.

Cas 2. Si $E(0) < 0$, on peut utiliser le Lemme 2.8 en fixant $H(t) = -E(t)$ pour obtenir un résultat similaire au Lemme 2.8. Avant cela, nous avons $0 < -E(0) = H(0) \leq H(t)$ et $H(t) \leq \frac{1}{q_1} \varrho(u)$. En prenant $N = 0$ dans (2.41) et en utilisant la même approche que dans le **Cas 1**, nous pouvons atteindre le résultat souhaité.

Nous devons encore déterminer une limite supérieure du temps d'explosion, nous pouvons la calculer comme suit :

Démonstration. En utilisant (2.9), (2.10) et le Lemme 2.2, la dérivée de (2.42) donne

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= q_2 \int_{\Omega} |u|^{q_2-2} u u_t dx + (q_2 + 1) E'(t) + \frac{q_2 + 1}{q_1} \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u u_t dx \\
&\leq q_2 \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx + q_2 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + (q_2 + 1) E'(t) \\
&\quad + (q_2 + 1)^2 \int_{\Omega} |u|^{2q(x)-2} + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\
&\leq q_2 \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx + (q_2 + 1)^2 \left(\int_{\Omega} |u|^{2q_1-2} dx + \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx \right) \\
&\leq q_2 \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx + (q_2 + 1)^2 \left(\frac{2q_1 - 2}{2q_2 - 2} \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx + \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx + \frac{q_2 - q_1}{q_2 - 1} \right) \\
&= \left(q_2 + \frac{q_1 + q_2 - 2}{q_2 - 1} (q_2 + 1)^2 \right) \int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx + (q_2 + 1)^2 \frac{q_2 - q_1}{q_2 - 1}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Pour estimer le terme du membre de droite de l'inégalité ci-dessus, nous devons analyser les trois scénarios suivants :

Cas 1. $n < 3$. L'intégration des inégalités nous a amenés à

$$\int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx \leq \hat{B}^{2q_2-2} \|\nabla u\|_2^{2(q_2-1)} \leq \hat{B}^{2q_2-2} \left(\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u|^{q_2} dx \right)^{q_2-1}.$$

Cas.2. $2 < q_2 < \frac{2n}{n-1}$, $n \geq 3$. En utilisant les inégalités de Hölder et en intégrant les inégalités, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx &= \int_{\Omega} |u|^{2q_2-4} u^2 dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{n(q_2-2)} dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \\
&\leq |\Omega|^{\frac{2}{n} - \frac{2(q_2-2)}{q_2}} \|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \left(\int_{\Omega} |u|^{q_2} dx \right)^{\frac{2(q_2-2)}{q_2}} \\
&\leq B_1^2 |\Omega|^{\frac{2}{n} - \frac{2(q_2-2)}{q_2}} \|\nabla u\|_2^2 \left(\int_{\Omega} |u|^{q_2} dx \right)^{\frac{2(q_2-2)}{q_2}} \\
&\leq B_1^2 |\Omega|^{\frac{2}{n} - \frac{2(q_2-2)}{q_2}} \left(\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u|^{q_2} dx \right)^{\frac{3q_2-4}{q_2}}.
\end{aligned}$$

Cas.3. $\frac{2n}{n-1} \leq q_2 < \frac{2n-2}{n-2}$, $n \geq 3$. Grâce à la simulation de **Cas 2**, nous avons obtenu les résultats suivants

$$\int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx = \int_{\Omega} |u|^{2q_2-4} u^2 dx \leq B^2 |\Omega|^{\frac{2}{n} - \frac{2(q_2-2)}{p_2}} \left(\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} |u|^{q_2} dx \right)^{\frac{3q_2-4}{q_2}}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\int_{\Omega} |u|^{2q_2-2} dx \leq c^* \left(\int_{\Omega} |u|^{q_2} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\delta} \tag{2.73}$$

où $\delta > 1$ est égale $q_2 - 1, \frac{3q_2-4}{q_2}$ pour les cas mentionnés ci-dessus.

En utilisant (2.42) et la définition $E(t)$, nous pouvons voir que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{2}{\kappa} E(0) + \frac{2}{\kappa} \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq \frac{2}{\kappa} E(0) + \frac{2}{\kappa} \frac{c_6}{q_1} \left(\varphi(t) + \varphi^{\frac{q_1}{q_2}}(t) \right) \quad (2.74)$$

où $c_6 = (1 + |\Omega|)^{\frac{q_2 - q_1}{q_1}}$. Joindre (2.72)-(2.74), en tenant compte du fait que $E(t) + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \geq 0$, ce qui signifie $\varphi(t) \geq \int_{\Omega} |u|^{q_2} dx$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\leq c^* \left(q_2 + \frac{q_1 + q_2 - 2}{q_2 - 1} (q_2 + 1)^2 \right) \left(\int_{\Omega} |u|^{q_2} dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\delta} + (q_2 + 1)^2 \frac{q_2 - q_1}{q_2 - 1} \\ &\leq c^* \left(q_2 + \frac{q_1 + q_2 - 2}{q_2 - 1} (q_2 + 1)^2 \right) \left(\frac{2}{\kappa} E(0) + \left(1 + \frac{2c_6}{\kappa q_1} \right) \varphi(t) + \frac{2}{\kappa} \frac{c_6}{q_1} \varphi^{\frac{q_1}{q_2}}(t) \right)^{\delta} \\ &\quad + (q_2 + 1)^2 \frac{q_2 - q_1}{q_2 - 1} \\ &\leq c \left(\varphi^{\delta}(t) + \varphi^{\frac{q_1}{q_2} \delta}(t) + \varphi(t) + \varphi^{\frac{q_1}{q_2}}(t) + 1 \right), \end{aligned}$$

où

$$c = 2^{\delta-1} \max \left(\begin{array}{l} \left(c^* \left(q_2 + \frac{q_1 + q_2 - 2}{q_2 - 1} (q_2 + 1)^2 \right) \frac{2}{\kappa} E(0) \right)^{\delta}, \\ \left(c^* \left(q_2 + \frac{q_1 + q_2 - 2}{q_2 - 1} (q_2 + 1)^2 \right) \left(1 + \frac{2c_6}{\kappa q_1} \right) \right)^{\delta}, \left(\frac{2c_6}{\kappa q_1} \right)^{\delta}, \\ (q_2 + 1)^2 \frac{q_2 - q_1}{q_2 - 1}. \end{array} \right). \quad (2.75)$$

Par la définition de T^* ;

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \int_{\Omega} |u|^{q_2} dx = +\infty,$$

on obtient que

$$\int_{\varphi(0)}^{+\infty} \frac{dz}{c \left(z^{\delta} + z^{\delta \frac{q_1}{q_2}} + z + z^{\frac{q_1}{q_2}} + 1 \right)} \leq T^*.$$

La preuve est complète.

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS D'ONDES NON-LINÉAIRES AVEC AMORTISSEMENT : EXISTENCE ET EXPLOSION EN TEMPS FINI

3.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Nous considérons le problème aux limites initiale suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au_t |u_t|^{k(\cdot)-2} = bu|u|^{p(\cdot)-2}, \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où $a, b \geq 0$ sont des constantes et les exposants $k(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont des fonctions mesurables données sur Ω satisfaisant

$$2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3.2)$$

avec

$$q_1 := \text{ess inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 := \text{ess sup}_{x \in \Omega} q(x)$$

et la condition de continuité log-Hölder :

$$|q(x) - q(y)| \leq -\frac{M}{\log |x - y|}, \quad \text{pour p.p. } x, y \in \Omega, \text{ avec } |x - y| < \delta, \quad (3.3)$$

$$M > 0, \quad 0 < \delta < 1$$

Dans le cas où k, p sont des constantes, l'existence locale, globale et le comportement asymptotique ont été considérés par de nombreux auteurs. Par exemple, en l'absence du terme

d'amortissement $au_t|u_t|^{k-2}$, le terme source $bu|u|^{p-2}$ provoque une explosion en temps fini des solutions avec une initiale négative énergie (voir [26]). Pour $b = 0$, il est bien connu que le terme d'amortissement $au_t|u_t|^{k-2}$ assure l'existence globale de données initiales arbitraires (voir [18]). L'interaction entre l'amortissement et les termes sources d'abord a été considérée par Levine (voir [15]). Il a discuté du cas où $m = 2$ et a établi l'explosion en temps fini pour les solutions d'énergie initiale négative. Georgiev et Todorova [16] ont généralisé le résultat de Levine à la situation où $m > 2$ en introduisant une technique différente. Levine et al. [17] ont étendu les travaux précédents à des domaines non bornée. Ils ont prouvé que toute solution avec une énergie initiale négative explose en un temps fini. si $p > m$. Messaoudi [10] a prouvé que toute solution à énergie initiale négative explose en un temps fini si $p > m$. Ces dernières années, une grande attention a été accordée à l'étude des modèles mathématiques non linéaires d'équations hyperboliques, paraboliques et elliptiques avec des exposants variables de non-linéarité. Par exemple, la modélisation de phénomènes physiques tels que les écoulements de fluides électro-rhéologiques ou de fluides à viscosité dépendante de la température, viscoélasticité non linéaire. procédés de filtration à travers un support poreux et traitement d'image.

Par exemple, Antontsev [14] a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = \operatorname{div} (a(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + \alpha\Delta u_t + b(x)|u|^{\sigma(x)-2}u + f(x, t), & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et prouvé l'existence et l'explosion de solutions faibles à énergie initiale négative dans des conditions appropriées sur les fonctions a, b, f, p, σ . Pour le cas $\sigma(x) = r(x)$, ils ont obtenu le même résultat d'explosion, mais aucune preuve n'a été présentée. Rahmoune in [13], considère un problème aux limites parabolique généralisé semi-linéaire suivant gouvernée par des équations aux dérivées partielles qui décrivent l'évolution des matériaux viscoélastiques avec de type des exposant variable non-linéarités sous la condition de type Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u = |u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega, t > 0 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Ensuite, le résultat de l'explosion pour une certaine solution avec une énergie initiale positive est établi. L'estimation de la limite supérieure du temps de blow-up pour les solutions de blow-up sera obtenue. Rahmoune in [12], a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} (|\nabla u|^{m(x)-2}\nabla u) = |u|^{p(x)-2}u + f, & x \in \Omega, t > 0 \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

dans un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^n avec une frontière lisse $\partial\Omega = \Gamma$, dans des conditions appropriées sur m et p et pour $f = 0$, ils ont montré que toute solution avec une donnée initiale non triviale explose en un temps fini, il donne un nouveaux résultats sur le temps d'explosion T , il sera estimé superieurement par \hat{T} l'orsque la donnée énergétique est positive.

Notre but dans ce travail est de prouver un théorème d'existence locale et de trouver des conditions suffisantes sur m , p et les données initiales pour lesquelles l'explosion a lieu.

Lemme 3.1. ([11]) Si $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ est une fonction mesurable et

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3.4)$$

Alors l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{P(\cdot)}(\Omega)$ est continue et compacte.

Lemme 3.2. ([11]) Si $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ est une fonction mesurable avec $p_2 < \infty$, alors $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{P(\cdot)}(\Omega)$.

Lemme 3.3 (Holder's Inequality). ([11]) Soit $p, q, s \geq 1$ des fonctions mesurables définies sur Ω telles que

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)}, \quad \text{pour } y \in \Omega$$

Si $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ alors $fg \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{q(\cdot)}.$$

Lemme 3.4 (Unit Ball Property). ([11]) Soit p une fonction mesurable sur Ω . Alors $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ si et seulement si $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$.

Lemme 3.5. ([11]) Si p est une fonction mesurable sur Ω satisfaisant (2.1), alors pour p.p. $x \in \Omega$, nous avons

$$\min \left(\|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right) \leq \varrho_{p(\cdot)}(u) \leq \max \left(\|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right).$$

pour toute $u \in L^{P(\cdot)}(\Omega)$.

3.2 Existence de solutions faibles

Dans cette section, nous prouvons l'existence de solutions faibles de notre problème. Tout d'abord, nous considérons le problème aux limite initiale suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au_t |u_t|^{k(\cdot)-2} = f(x, t), \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (P)$$

où $a > 0$ est une constante, $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$, $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, l'exposant $m(\cdot)$ est une fonction mesurable donnée satisfaisant (3.1) et (3.2), et Ω est un domaine borné en \mathbb{R}^n à frontière lisse (régulière) $\partial\Omega$.

Théorème 3.1. Dans les conditions ci-dessus, le problème (P) a une solution locale unique

$$u \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right), \quad u_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)),$$

$$u_{tt} \in L^2 \left((0, T), H^{-1}(\Omega) \right).$$

Démonstration. Unicité : Supposons que (P) a deux solutions u et v . Alors, $w = u - v$ satisfait

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + a u_t |u_t|^{m(\cdot)-2} - a v_t |v_t|^{m(\cdot)-2} = 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ w(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Multiplier par u_t et intégrer sur Ω , pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} w_t^2 + \int_{\Omega} |\Delta w|^2 \right] + a \int_{\Omega} \left(u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2} \right) (u_t - v_t) dx = 0$$

Intégrez sur $(0, t)$, pour obtenir

$$\int_{\Omega} \left(w_t^2 + |\Delta w|^2 \right) + 2a \int_0^t \int_{\Omega} \left(u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2} \right) (u_t - v_t) dx ds = 0$$

En utilisant l'inégalité

$$\left(|a|^{m(x)-2} a - |b|^{m(x)-2} b \right) \cdot (a - b) \geq 0$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$ et p.p. $x \in \Omega$, on a

$$\int_{\Omega} \left(w_t^2 + |\Delta w|^2 \right) = 0$$

ce qui implique que $w = c = 0$, puisque $w = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent, l'unicité.

Existence. Soit $\{(v_j)_{j=1}^\infty\}$ une base orthonormée pour $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, avec

$$-\Delta v_j = \lambda_j v_j \quad \text{dans } \Omega, \quad v_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et définir le sous-espace $V_k = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, de dimension finie

Par normalisation, nous avons $\|v_j\|_2 = 1$. Nous recherchons des fonctions

$$u^k(x, t) = \sum_{j=1}^k a_j(t) v_j$$

qui satisfont les problèmes approximatifs suivants

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}^k(x, t) v_j(x) dx + \int_{\Omega} \Delta u^k(x, t) \Delta v_j(x) dx \\ & + a \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^{m(x)-2} u_t^k(x, t) v_j(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v_j(x) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$u^k(x, 0) = u_0^k, \quad u_t^k(x, 0) = u_1^k \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

où $u_0^k = \sum_{i=1}^k (u_0, v_i) v_i$, $u_1^k = \sum_{i=1}^k (u_1, v_i) v_i$ sont deux suites dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, respectivement, de telle sorte que $u_0^k \rightarrow u_0$ in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $u_1^k \rightarrow u_1$ dans $L^2(\Omega)$.

Ceci génère le système de k équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} a_j''(t) + \lambda_j a_j(t) = g_j(t) + G_j(a_1'(t), \dots, a_k'(t)) \\ a_j(0) = (u_0, v_j), \quad \alpha_j'(0) = (u_1, v_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (3.6)$$

où

$$g_j(t) = \int_{\Omega} f(x, t) v_j(x) dx$$

et

$$G_j(a_1'(t), \dots, a_k'(t)) = -a \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^k \alpha_i'(t) v_i(x) \right|^{m(x)-2} \sum_{i=1}^k \alpha_i'(t) v_i(x) v_j(x) dx$$

Ce système peut être résolu par la théorie standard de ODE. Par conséquent, nous obtenons des fonctions

$$a_j : [0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 < t_k < T$$

Ensuite, nous devons montrer que $t_k = T$, $\forall x \geq 1$. Nous multiplions (3.5) par $a_j'(t)$ et somme sur j pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \left(|u_t^k(x, t)|^2 dx + |\Delta u^k(x, t)|^2 \right) dx \right] + a \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^{m(x)} dx = \int_{\Omega} f(x, t) u_t^k(x, t) dx$$

L'intégration sur $(0, t)$ donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_t^k(x, t)|^2 dx + |\Delta u^k(x, t)|^2 \right) dx + a \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|u_1^k|^2 + |\Delta u_0^k|^2 \right) dx + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u_t^k(x, s) dx ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1^2 + |\Delta u_0|^2) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |u_t^k|^2 dx ds + c_{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} f^2 dx ds \\ & \leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx, \quad \forall t \in [0, t_k] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |\Delta u^k(x, t)|^2 dx + a \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \\ & \leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{4}$, on arrive à

$$\sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |u_t^k(x, t)|^2 dx + \sup_{(0, t_k)} \int_{\Omega} |\Delta u^k(x, t)|^2 dx + a \int_0^{t_k} \int_{\Omega} |u_t^k(x, s)|^{m(x)} dx ds \leq C$$

Ainsi, la solution peut être étendue à $[0, T]$ et, de plus, on a $\{(u^k)\}$ est une suite bornée dans $L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, (u_t^k) est une suite bornée dans $L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$. On peut donc extraire une sous suite $\{(u_t^\ell)\}$ telle que

$$u_t^\ell \rightarrow u \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

$$u_t^\ell \rightarrow u_t \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \text{ et faiblement dans } L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)).$$

Nous pouvons conclure par le Lemme du Lions [?] que $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ de sorte que $u(x, 0)$ a une signification, puisque (u_t^ℓ) est borné dans $L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$ alors $|u_t^\ell|^{m(x)-2} u_t^\ell$ est borné dans $L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T))$, par conséquent,

$$|u_t^\ell|^{m(\cdot)-2} u_t^\ell \rightarrow \psi \text{ faiblement dans } L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega \times (0, T))$$

Nous devons montrer que $\psi = |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t$, in (3.5), nous utilisons u^ℓ au lieu de u^k et intégrer sur $(0, t)$ pour obtenir

$$\int_\Omega u_t^\ell v_j - \int_\Omega u_1^\ell v_j + \int_0^t \int_\Omega \Delta u^\ell \cdot \Delta v_j + a \int_0^t \int_\Omega |u_t^\ell|^{m(x)-2} u_t^\ell v_j = \int_0^t \int_\Omega f v_j, \forall j < \ell$$

Quand ℓ passe à $+\infty$, on vérifie facilement que

$$\int_\Omega u_t v_j - \int_\Omega u_1 v_j + \int_0^t \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v_j + a \int_0^t \int_\Omega \psi v_j = \int_0^t \int_\Omega f v_j, \forall j \geq 1$$

par conséquent.

$$\int_\Omega u_t v - \int_\Omega u_1 v + \int_0^t \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v + a \int_0^t \int_\Omega \psi v = \int_0^t \int_\Omega f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Tous les termes définissent des fonctions continues absolues, nous obtenons donc, pour p.p $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u_t v + \int_\Omega (\Delta u \cdot \Delta v + a \psi v) = \int_\Omega f v, \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (3.8)$$

Ceci implique que

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \psi = f, \text{ dans } D'(\Omega \times (0, T)) \quad (3.9)$$

Pour simplifier, soit $A(v) = |v|^{m(x)-2} v$ et définissons

$$X^\ell = \int_0^T \int_\Omega (A(u_t^\ell) - A(v)) (u_t^\ell - v) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(\cdot)}((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

Donc, en utilisant (2.13) et en remplaçant u^k par u^ℓ , on obtient

$$\begin{aligned} X^\ell &= \int_0^T \int_\Omega f u_t^\ell + \frac{1}{2} \int_\Omega (|u_1^\ell|^2 + |\Delta u_0^\ell|^2) - \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t^\ell(x, T)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u^\ell(x, T)|^2 - \int_0^T \int_\Omega A(u_t^\ell) v - \int_0^T \int_\Omega A(v) (u_t^\ell - v) \end{aligned}$$

En prenant $\ell \rightarrow \infty$, on obtient

$$0 \leq \limsup_t X^\ell \leq \int_0^T \int_\Omega f u_t + \frac{1}{2} \int_\Omega (u_1^2 + |\Delta u_0|^2) - \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t(x, T)|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u(x, T)|^2 - \int_0^t \int_\Omega \psi v - \int_0^T \int_\Omega A(v) (u_t - v) \quad (3.10)$$

En remplaçant v par u_t par dans (3.8) et en intégrant sur $(0, T)$, on arrive à

$$\int_0^T \int_\Omega f u_t = \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t(x, T)|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega u_1^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta u(x, T)|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 + \int_0^T \int_\Omega \psi u_t \quad (3.11)$$

Ajout (3.10) and (3.11), implique

$$0 \leq \limsup_\ell X^\ell \leq \int_0^T \int_\Omega \psi u_t - \int_0^T \int_\Omega \psi v - \int_0^T \int_\Omega A(v) (u_t - v)$$

C'est,

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(v)) (u_t - v) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(\cdot)}((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

Par conséquent

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(v)) (u_t - v) dt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

par densité de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ in $L^{m(\cdot)}(\Omega)$ (Lemme 3.2).

Soit $v = \lambda w + u_t, w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$. Alors, on obtient

$$-\lambda \int_0^T \int_\Omega (\psi - A(\lambda w + u_t)) w \geq 0, \quad \forall \lambda \neq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Pour $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(\lambda w + u_t)) w \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Comme $\lambda \rightarrow 0$ et en utilisant la continuité de A par rapport à λ , on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(u_t)) w \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

De même manière pour $\lambda < 0$, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(u_t)) w \geq 0, \quad \forall w \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

Ceci implique que $\psi = A(u_t)$. Ainsi (3.8) devient

$$\int_\Omega (u_{tt}v + \Delta u \cdot \Delta v + a |u_t|^{m(x)-2} u_t v) dx = \int_\Omega f v, \forall v \in L^{m(\cdot)}((0, T) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$

qui donne

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a |u_t|^{m(x)-2} u_t = f, \text{ dans } D'(\Omega \times (0, T))$$

Pour gérer les conditions initiales, nous notons que

$$\begin{aligned} u^\ell - u \text{ faible } * & \text{ dans } L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right) \\ u_t^\ell - u_t \text{ faible } * & \text{ dans } L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ainsi, en utilisant le lemme des Lions [?], nous obtenons

$$u^\ell \rightarrow u \text{ dans } C([0, T], L^2(\Omega)) \quad (3.13)$$

Par conséquent, $u^\ell(x, 0)$ a un sens et $u^\ell(x, 0) \rightarrow u(x, 0)$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous avons aussi

$$u^\ell(x, 0) = u_0^\ell(x) \rightarrow u_0(x) \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Ainsi

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.14)$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(0, T)$, en remplaçant (u^k) par (u^ℓ) , on obtient de (3.5) et pour tout $j \leq \ell$ que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_t^\ell(x, t) v_j(x) \phi'(t) dx dt \\ & = - \int_0^T \int_\Omega \Delta u^\ell(x, t) \Delta v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & - a \int_0^T \int_\Omega |u_t^\ell(x, t)|^{m(x)-2} u_t^\ell(x, t) v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v_j(x) \phi(t) dx dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

quand $\ell \rightarrow +\infty$, on obtain que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_t(x, t) v_j(x) \phi'(t) dx dt \\ & = - \int_0^T \int_\Omega \Delta u(x, t) \Delta v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & - a \int_0^T \int_\Omega |u_t(x, t)|^{m(x)-2} u_t(x, t) v_j(x) \phi(t) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega f(x, t) v_j(x) \phi(t) dx dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour tout $j \geq 1$. Cela implique

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u_t(x, t) v(x) \phi'(t) dx dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega \left[\Delta^2 u - a |u_t(x, t)|^{m(x)-2} u_t(x, t) + f(x, t) \right] v(x) \phi(t) dx dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Cela signifie $u_{tt} \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega))$ et u résoudre l'équation

$$u_{tt} + \Delta^2 u + a |u_t|^{m(\cdot)-2} u_t = f \quad (3.18)$$

Donc, $u_t \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}([0, T], H^{-1}(\Omega))$. par conséquent.

$$u_t \in C([0, T], H^{-1}(\Omega)) \quad (3.19)$$

Alors, $u_t^\ell(x, 0)$ a un ense (voir [26]). Il s'ensuit que

$$u_t^\ell(x, 0) \rightarrow u_t(x, 0) \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)$$

Mais

$$u_t^\ell(x, 0) = u_1^\ell(x) \rightarrow u_1(x) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (3.20)$$

Donc

$$u_t(x, 0) = u_1(x)$$

Cela mettre fin à la preuve du théorème 3.1.

Lemme 3.6. Pour $x \in \Omega$ et $p(\cdot)$ satisfaisante

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < +\infty$$

la fonction $g(s) = b|s|^{p(x)-2}$ est différentiable et $|g'(s)| = |b||p(x) - 1||s|^{p(x)-2}$.

Théorème 3.2. Supposons que $m(\cdot)$ Satisfait(3.1), (3.2) et $p(\cdot)$ satisfait (3.2) et

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3.21)$$

Supposons en outre que

$$(u_0, u_1) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times L^2(\Omega) \quad (3.22)$$

Alors le problème (P) a une solution locale unique

$$\begin{aligned} u \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)), \\ u_{tt} \in L^2((0, T), H^{-1}(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Démonstration. Soit $v \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. Alors

$$\|g(v)\|_2^2 = |b|^2 \int_\Omega |v|^{2p(x)-1} dx \leq |b|^2 \left[\int_\Omega |v|^{2(p_2-1)} dx + \int_\Omega |v|^{2(p_1-1)} dx \right] < +\infty$$

puisque

$$2(p_1 - 1) \leq 2(p_2 - 1) \leq \frac{2n}{n-2}$$

Donc, dans ce cas,

$$g(v) \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \subset L^2(\Omega \times (0, T))$$

Par conséquent, pour chaque $v \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, il existe un unique

$$u \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T))$$

satisfaire le problème non linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + au_t |u_t(x, t)|^{m(x)-2} = g(v), & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (\mathbf{L})$$

Nous définissons une application $G : X_T \rightarrow X_T$ par $G(v) = u$, où

$$X_T = \left\{ w \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) / w_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \right\}$$

X_T est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|w\|_{X_T} = \|w\|_{L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|w_t\|_{L^\infty((0, T), L^2(\Omega))}$$

Multipliez l'équation de **(L)** par u_t et intégrez sur $\Omega \times (0, t)$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_1^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 \\ &+ b \int_0^t \int_{\Omega} |v|^{(x)-2} v u_t dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v^{p(x)-2} v u_t dx \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^{2p(x)-2} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{4}{\varepsilon} \left[\int_{\Omega} |v|^{2p_2-2} dx + \int_{\Omega} |v|^{2p_1-2} dx \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{c_e}{\varepsilon} \left[\|\nabla v\|_2^{2p_1-2} + \|\nabla v\|_2^{2p_2-2} \right] \end{aligned}$$

Donc (3.24) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx &\leq \lambda_0 + \frac{|b|\varepsilon T}{4} \sup_{(0, t)} \int_{\Omega} u_t^2 dt \\ &+ \frac{|b|c_e}{\varepsilon} \left[\int_0^T \|\nabla v\|_2^{2p_2-2} dt + \int_0^T \|\nabla v\|_2^{2p_1-2} dt \right] \end{aligned}$$

d'où nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sup_{(0, T)} \int_{\Omega} u_t^2 + \frac{1}{2} \sup_{(0, T)} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 &\leq 2\lambda_0 \\ + \frac{|b|\varepsilon T}{2} \sup_{(0, T)} \int_{\Omega} u_t^2 + Tc_e &\left[\|v\|_{X_T}^{2p_2-2} + \|v\|_{X_T}^{2p_1-2} \right] \end{aligned}$$

où $\lambda_0 = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|_2^2$ et c_e est la constante d'injection.

En choisissant ε tel que $\frac{|b|\varepsilon}{2} = \frac{1}{4}$, on obtient

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq \lambda + T\beta \left[\|v\|_{X_T}^{2p_2-2} + \|v\|_{X_T}^{2p_1-2} \right]$$

Supposons que $\|v\|_{X_T} \leq M$, pour certains M large. Alors

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq \lambda + T\beta M^{2p_2-2} \leq M^2$$

si $M^2 > \lambda$ et $T \leq T_0 < \frac{M^2 - \lambda}{\beta M^{2p_2-2}}$. Nous concluons que $G : B \rightarrow B$, où

$$B = \left\{ w \in L^\infty \left((0, T), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \right), w_t \in L^\infty \left((0, T), L^2(\Omega) \right) \text{ tel que } \|w\|_{X_{T_0}} \leq M \right\}$$

Ensuite, nous montrons cela, pour T_0 (encore plus petit). G est une contraction.

Pour cela, soit $u_1 = G(v_1)$ et $u_2 = G(v_2)$ et posons $u = u_1 - u_2$ alors u satisfait

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + a \left[|u_{1t}|^{m(\cdot)-2} - |u_{2t}|^{m(\cdot)-2} \right] \\ \quad = b \left[|v_1|^{p(x)-2} v_1 - |v_2|^{p(x)-2} v_2 \right], \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ \quad u(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \quad u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (3.25)$$

La multiplication par u_t et l'intégration sur $\Omega \times (0, t)$ donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} \left[|u_{1t}|^{m(x)-2} u_{1t} - |u_{2t}|^{m(x)-2} u_{2t} \right] (u_{1t} - u_{2t}) dx ds \\ = b \int_0^t \int_{\Omega} (g(v_1) - g(v_2)) u_t dx ds \end{aligned}$$

d'où nous avons

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \leq b \int_0^t \int_{\Omega} (g(v_1) - g(v_2)) u_t dx ds \quad (3.26)$$

Maintenant, nous évaluons

$$I = \int_{\Omega} |g(v_1) - g(v_2)| |u_t| = \int_{\Omega} |g'(\xi)| |v| |u_t|$$

où

$$v = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2, 0 \leq \alpha \leq 1$$

L'inégalité de Young implique

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} |g'(\xi)|^2 |v|^2 \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + \frac{2a^2 (p_2 - 1)^2}{\delta} \int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2|^{2(p(x)-2)} |v|^2 \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + c_{\delta} \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \left[\left(\int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2|^{n(p_2-2)} \right)^{\frac{2}{n}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} |\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2|^{n(p_1-2)} \right)^{\frac{2}{n}} \right] \end{aligned}$$

En rappelant (3.21), on arrive à

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx \\ + c_{\delta} c_e \|\Delta v\|_2^2 &\left[\|\Delta v_1\|_2^{2(p_2-2)} + \|\Delta v_1\|_2^{2(p_1-2)} + \|\Delta v_2\|_2^{2(p_2-2)} + \|\Delta v_2\|_2^{2(p_1-2)} \right] \\ &\leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u_t^2 dx + 4c_{\delta} c_e M^{2(p_2-2)} \|\Delta v\|_2^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.26) prend la forme

$$\frac{1}{2} \|u\|_{X_T}^2 \leq \frac{\delta}{2} T_0 b \|u\|_{X_T}^2 + C_{\delta} M^{2(p_2-2)} T_0 b \|v\|_{X_T}^2$$

En choisissant δ assez petit, on arrive à

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq 4C_{\delta} M^{2(p_2-2)} T_0 b \|v\|_{X_T}^2 = \gamma T_0 \|v\|_{X_T}^2$$

En prenant T_0 assez petit, nous obtenons $\|u\|_{X_T}^2 \leq d \|v\|_{X_T}^2$, for $0 < d < 1$

Donc G est une contraction. Le théorème point fixe de Banach implique l'existence d'un unique $u \in B$ satisfaisant $G(u) = u$. Ainsi, u est une solution locale de (P).

Unicité. Supposons que nous ayons deux solutions u et v . Alors $w = u - v$ satisfait

$$w_{tt} + \Delta^2 w + a \left[u_t |u_t|^{m(\cdot)-2} - v_t |v_t|^{m(\cdot)-2} \right] = b \left[|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v \right],$$

Multiplier par w_t et intégrer sur $\Omega \times (0, t)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} \left(u_t |u_t|^{m(x)-2} - v_t |v_t|^{m(x)-2} \right) (u_t - v_t) dx \\ = b \int_0^t \int_{\Omega} \left(|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v \right) w_t dx ds \end{aligned}$$

Cela implique

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx \leq b \int_0^t \int_{\Omega} \left(|u|^{p(x)-2} u - |v|^{p(x)-2} v \right) w_t dx$$

En répétant les mêmes estimations que ci-dessus, nous arrivons à

$$\int_{\Omega} \left(w_t^2 + |\Delta w|^2 \right) dx \leq c \int_0^t \int_{\Omega} \left(w_t^2(x, s) + |\Delta w(x, s)|^2 \right) dx ds$$

L'inégalité de Gronwall donne

$$\int_{\Omega} \left(w_t^2 + |\Delta w|^2 \right) dx = 0$$

Donc, $w \equiv 0$. Cela montre l'unicité. La preuve du théorème 3.2 est terminée.

3.3 Explosion en temp fini(Blow-up)

Dans cette section, nous montrons que la solution (3.23) explose en temps fini si

$$2 \leq m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq \frac{2n}{n-2} \quad (3.27)$$

détient et $E(0) < 0$, où

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx - b \int_{\Omega} \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \quad (3.28)$$

Nous écrivons aussi $\varrho(u)$ au lieu de $\varrho_{p(\cdot)}(u)$ pour simplifier.

Lemme 3.7. *Supposons que les conditions du Lemme 3.1 soient satisfaites. Alors il existe un $C > 1$ positif, dépendant uniquement de Ω tel que*

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C \left(\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right) \quad (3.29)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Démonstration. Preuve. Si $\varrho(u) > 1$, alors $e^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq \varrho(u) \leq C[\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u)]$, où $C > 1$.

Si $\varrho(u) \leq 1$ alors, d'après le lemme 3.4, $\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Alors, les lemmes 3.1 et 3.5 impliquent

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq \varrho^{\frac{2}{p_1}}(u) \leq \max \left(\|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right)^{\frac{2}{p_1}} = \|u\|_{p(\cdot)}^2 \leq C \|\nabla u\|_2^2$$

Par conséquent (3.29) suit.

Comme cas particulier, nous avons

Corollaire 3.3. *Soit les hypothèses du Lemme 3.7 tenir. Ensuite nous avoir*

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p(\cdot)}^{p_1} \right) \quad (3.30)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Nous fixons

$$H(t) = -E(t)$$

et l'utilisation, tout au long de ce document C pour désigner une constante positive générique en fonction de Ω uniquement. Comme un conséquence de (3.28) et (3.29) on a

Corollaire 3.4. *Soit les hypothèses du Lemme 3.7 tenir. Ensuite nous avons*

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C(H(t) + \|u\|_2^2 + \varrho(u)), \quad (3.31)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Comme cas particulier, nous avons

Corollaire 3.5. *Soit les hypothèses du Lemme 3.7 alors nous avons*

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C \left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_1}^{p_1} \right)$$

pour toute $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p_1$.

Lemme 3.8. *Soit les hypothèses du lemme 3.7 et soit u la solution de (P). Puis.*

$$\varrho(u) \geq C \|u\|_{p_1}^{p_1}. \quad (3.32)$$

Démonstration.

$$\varrho(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_+} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_-} |u|^{q(x)} dx$$

où

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega / |u(x, t)| \geq 1\} \text{ and } \Omega_- = \{x \in \Omega / |u(x, t)| < 1\}$$

donc on obtient

$$\varrho(u) \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} + \int_{\Omega_-} |u|^n \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} + c_1 \left(\int_{\Omega_-} |u|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}}$$

Cela implique que $c_2(\varrho(u))^{\frac{p_1}{p_2}} \geq \int_{\Omega_-} |u|^{p_1}$ and $\varrho(u) \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1}$ et donc

$$c_2(\varrho(u))^{\frac{p_1}{p_2}} + \varrho(u) \geq \|u\|_{p_1}^{p_1} \quad (3.33)$$

puisque

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p_1} \varrho(u)$$

alors (3.33) conduit à

$$\varrho(u) \left[1 + c_2 \left(\frac{p_1}{b} H(0) \right)^{\frac{p_1}{2} - 1} \right] \geq \|u\|_{p_1}^{p_1}$$

Ainsi, (3.32) suit.

Lemme 3.9. *Supposons que (3.27) soit vérifiée et soit u la solution de (P) Alors.*

$$\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq c \left((\varrho(u))^{\frac{m_1}{p_1}} + (\varrho(u))^{\frac{m_2}{p_2}} \right) \quad (3.34)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx &\leq \int_{\Omega_-} |u|^{m_1} dx + \int_{\Omega_+} |u|^{m_2} dx \\ &\leq C \left[\left(\int_{\Omega_-} |u|^{p_1} dx \right)^{m_1/p_1} + \left(\int_{\Omega_+} |u|^{p_1} dx \right)^{m_2/p_1} \right] \leq C \left(\|u\|_{p_1}^{m_1} + \|u\|_{p_1}^{m_2} \right) \\ &\leq C \left((\varrho(u))^{\frac{m_1}{p_1}} + (\varrho(u))^{\frac{m_2}{p_2}} \right) \end{aligned}$$

par Lemme 3.8.

Notre résultat explosé se lit comme suit :

Théorème 3.6. *Soit les conditions du théorème 3.2 remplies. Supposons que (3.27) soit vérifié et*

$$E(0) < 0 \quad (3.35)$$

Alors la solution du problème (P) qui appartenant à la class (3.23) explose en temps fini.

Démonstration. Nous multiplions (P) par u_t , et intégrons sur Ω pour obtenir

$$E'(t) = -a \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^{m(x)} dx \quad (3.36)$$

pour presque tout t dans $[0, T)$ puisque $E(t)$ est absolument continue (voir [16]) : d'où $H'(t) \geq 0$ et

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p_1} \varrho(u) \quad (3.37)$$

for every t in $[0, T)$, by virtue of (3.35). We then define

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \quad (3.38)$$

pour ε petit à choisir plus tard et

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{p_1 - 2}{2p_1}, \frac{p_1 - m_2}{p_1(m_2 - 1)} \right\} \quad (3.39)$$

En prenant la dérivée de (3.38) et en utilisant Eq. (P) on obtient

$$L'(t) = (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} [u_t^2 - |\Delta u|^2] + \varepsilon b \int_{\Omega} |u|^{p(x)} - a\varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m(x)-2} \quad (3.40)$$

Ajoutant $+\varepsilon(1 - \eta)p_1H(t) - \varepsilon(1 - \eta)p_1H(t)$, pour $0 < \eta < 1$, du côté droit de (3.40) pour arriver à

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon(1 - \eta)p_1H(t) + \varepsilon b \eta \int_{\Omega} |u|^{p(x)} \\ &+ \varepsilon \left(\frac{(1 - \eta)p_1}{2} + 1 \right) \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \left(\frac{(1 - \eta)p_1}{2} - 1 \right) \|\Delta u\|_2^2 - a\varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m(x)-2} dx \end{aligned} \quad (3.41)$$

pour η assez petit, on voit que

$$L'(t) \geq (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon\beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \varrho(u) \right] - a\varepsilon \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{m(x)-2} dx \quad (3.42)$$

où

$$\beta = \min \left\{ (1 - \eta)p_1, b\eta, \frac{(1 - \eta)p_1}{2} + 1, \frac{(1 - \eta)p_1}{2} - 1 \right\} > 0$$

en utilisant l'inégalité de Young nous estimons le dernier terme de (3.42) comme suit

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \delta^{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \frac{m_2 - 1}{m_2} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m_2-1}} |u_t|^{m(x)} dx, \quad \forall \delta > 0 \quad (3.43)$$

Donc en prenant δ pour que

$$\delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = kH^{-\alpha}(t)$$

pour une grande constante k à spécifier plus tard, et en remplaçant dans (3.43) on obtient

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} k^{1-m(x)} |u|^{m(x)} H^{\sigma(m(x)-1)}(t) dx + \frac{(m_2 - 1)k}{am_2} H^{-a}(t) H'(t) \quad (3.44)$$

La combinaison de (3.42) et (3.44) donne

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ & + \varepsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right] \\ & - \varepsilon \frac{k^{1-m_1 a}}{m_1} H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

En utilisant le lemme 3.9 et (3.37), on a

$$H^{\sigma(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq c \left(\varrho(u)^{\frac{m_1}{p_1} + a(m_2-1)} + \varrho(u)^{\frac{m_2}{p_1} + a(m_2-1)} \right) \quad (3.46)$$

On utilise alors le lemme 3.9 et (3.39) pour

$$s = m_2 + \alpha p_1 (m_2 - 1) \leq p_1 \text{ et } s = m_1 + \alpha p_1 (m_2 - 1) \leq p_1$$

pour trouvée de (3.46),

$$H^{\sigma(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq c \left(\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right) \quad (3.47)$$

La combinaison de (3.45) et (3.47) donne

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ & + \varepsilon \left(\beta - \frac{k^{1-m_1 a}}{m_1} c \right) \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

À ce point, on choisit k assez grand pour que

$$\gamma = \beta - \frac{ak^{1-m_1}}{m_1} C > 0$$

Une fois k fixé (d'où γ) on choisit ε assez petit pour que

$$(1 - \alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \geq 0 \text{ et } L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx > 0$$

Donc (3.48) prend la forme

$$L'(t) \geq \gamma \varepsilon \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + e^{(u)} \right] \geq \gamma \varepsilon \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_p}^{p_1} \right] \quad (3.49)$$

en vertu de (3.32), en conséquence nous avons

$$L(t) \geq L(0) > 0, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Nous voudrions ensuite montrer que

$$L'(t) \geq \Gamma L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (3.50)$$

où Γ est une constante positive dépendant de $\varepsilon\gamma$ et C (la constante du corollaire 3.4). Une fois que (3.50) est établie, on obtient de manière standard l'explosion en temps fini de $L(t)$. Pour prouver (3.50) notons d'abord que

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right| \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \leq C \|u\|_{p_1} \|u_t\|_2$$

ce qui implique

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|u\|_{p_1}^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Encore une fois, l'inégalité de Young donne

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{p_1}^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta(1-\alpha)} \right] \quad (3.51)$$

pour $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$. Nous prenons $\theta = 2(1-\alpha)$, pour obtenir $\mu/(1-\alpha) = 2/(1-2\alpha) \leq p_1$ par (3.39) fonc (3.51) fevient

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{p_1}^s + \|u_t\|_2^2 \right]$$

où $s = 2/(1-2\alpha) \leq p_1$. En utilisant le Corollaire 3.5 on obtient

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[H(t) + \|u\|_{p_1}^s + \|u_t\|_2^2 \right], \text{ potout } t \geq 0 \quad (3.52)$$

Enfin, en notant que

$$\begin{aligned} L^{1/1-\alpha}(t) &= \left[H^{(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{1/(1-\alpha)} \left[H(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t \right|^{1/(1-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

et en le combinant avec (3.49) et (3.52), l'inégalité (3.50) est établie. Une simple intégration de (3.50) sur $(0, t)$ donne alors

$$L^{\alpha/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Gamma t \alpha / (1-\alpha)} \quad (3.53)$$

Par conséquent (3.53) montre que $L(t)$ explose en temps fini

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Gamma \alpha [L(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

où Γ et α sont des constantes positives avec $\alpha < 1$ et L est donné par (3.38) ci-dessus. Ceci achève la preuve.

CHAPITRE 4

RÉSULTATS DE NON-EXISTENCE GLOBALE ET D'EXPLOSION POUR UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION QUASI-LINÉAIRE

4.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière lisse $\Gamma = \partial\Omega$. On considère le problème aux limites initiales suivant :

$$\begin{cases} a(x, t) u_t - \Delta_{m(\cdot)} u = f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\Delta_{m(\cdot)} u = \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u \right)$$

appelé l'opérateur $m(\cdot)$ -Laplacien. Cette opérateur peut être étendu à un opérateur monotone entre l'espace $W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$ et son dual

$$\begin{cases} -\Delta_{m(\cdot)} u : W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega) \rightarrow W^{-1,m'(\cdot)}(\Omega), \\ \langle -\Delta_{m(\cdot)} u, \phi(x) \rangle_{m(\cdot)} = \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)-2} \nabla u \nabla \phi(x) dx, \\ \text{où } 2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < \infty. \end{cases}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m(\cdot)}$ désigne le produit de dualité entre $W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$ et $W^{-1,m'(\cdot)}(\Omega)$, $\frac{1}{m(x)} + \frac{1}{m'(x)} = 1$.

$f(u)$ est un terme source général dépend de $p(\cdot)$, les coefficients $a(x, \cdot)$ et les exposants $p(\cdot)$ et $m(\cdot)$ sont donnés des fonctions mesurables sur $\bar{\Omega}$ telles que :

$$2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq m_*(x), \quad (4.2)$$

où

$$\psi_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \psi(x), \quad \psi_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \psi(x).$$

et

$$m_*(x) = \begin{cases} \frac{nm(x)}{(n-m(x))_2} & \text{if } n > m_2 \\ +\infty & \text{if } n \leq m_2 \end{cases}$$

Nous supposons également que $m(\cdot)$ satisfait la condition de continuité locale uniforme de Zhikov-Fan suivante :

$$|m(x) - m(y)| \leq \frac{M}{|\log|x - y||}, \text{ for all } x, y \text{ in } \Omega \text{ with } |x - y| < \frac{1}{2}, M > 0. \quad (4.3)$$

Un effort considérable a été consacré à l'étude du problème (4.1) dans le cas de variable constante lorsque $p(x) = p = \text{constant}$ et $m(x) = m = \text{constant}$. Le problème (4.1) avec l'opérateur m -Laplacien usuel $\Delta_m u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u)$, ($m = \text{constant} \geq 2$); ($m = 2$, $\Delta_m u = \Delta u$), a été largement étudiée concernant l'existence, la non-existence et la dynamique de temps long. Pour les résultats de la nature et dans le cas où $p(x) = p = \text{constant} \geq 2$ et $m(x) = m = \text{constant} > 2$, nous renvoyons le lecteur aux [19] relatifs à l'équation

$$a(x)u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0.$$

Lorsque $m(x) = m = 2$, $a(x, t) = 1$ et $f(u) = u^{p(x)}$, problème (4.1) devient le suivant

$$u_t - \Delta u = u^{p(x)}, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (4.4)$$

Le problème (4.4) découle de nombreux modèles mathématiques importants en ingénierie et en sciences physiques. Par exemple, la science nucléaire, les réactions chimiques, le transfert de chaleur, la dynamique des populations, les sciences biologiques, etc., et ont beaucoup retenu l'attention dans la recherche, voir [20] et les références qui s'y trouvent. Pour le problème (4.4), Hua Wang et al. [23] a établi un résultat d'explosion avec une énergie initiale positive sous certaines hypothèses appropriées sur les paramètres $p(\cdot)$ et u_0 . Dans [20], les auteurs ont prouvé qu'il existe des solutions non négatives avec un éclatement en temps fini si et seulement si $p_2 > 1$. Les auteurs dans [24] ont obtenu la solution du problème (4.1) explose en un temps fini lorsque l'énergie initiale est positive. Dans [22], les auteurs se basant exactement sur l'idée de celle de [25] ont dérivé les bornes inférieures pour le temps d'explosion si les solutions explosent. Ce travail est d'étendre les résultats établis dans les domaines bornés au problème général comme dans (4.1) dans le cas où les exposants $m(\cdot)$ et $p(\cdot)$ sont donnés des fonctions mesurables sur $\bar{\Omega}$ et vérifie (4.2), et $f(u)$ est un terme source plus généralisé. Nous notons que la présence des non-linéarités des exposants variables et du coefficient $a(x, t)$ dans ce problème rend l'analyse de l'article un peu plus difficile que celle des problèmes connexes. Le but du projet en cours est d'étudier le phénomène d'explosion des solutions du problème (4.1) dans le cadre des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables, nous établirons un résultat d'explosion et donner une estimation précise de la durée de vie T^* de la solution

dans ce cas. La méthode utilisée ici est la méthode de la concavité. Cependant, en raison de la présence des non-linéarités à exposant variable dans notre problème, notre argument est considérablement différent et il est plus abrégé.

4.1.1 Hypothèses mathématiques

Dans cette section, nous établissons l'éclatement pour certaines solutions à énergie positive. Énoncer et prouver notre résultat.

Soit la fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, avec la primitive

$$F(u) = \int_0^u f(\eta) d\eta. \quad (4.5)$$

satisfait

$$|f(s)| \leq C_0 |s|^{p(x)-1}, \quad p(x)F(s) \leq sf(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad C_0 > 0. \quad (4.6)$$

Un exemple simple et typique de ces fonctions est

$$f(s) = |s|^{p(x)-2} s.$$

Supposons que $a(x, t)$ est une fonction positive qui appartient à l'espace $W^{1,\infty}(0, \infty; L^\infty(\Omega))$ et que $a_t(x, t) \leq 0$ p.p pour $t \geq 0$.

Soient

$$B_1 = \max\left(1, B_0, \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right), \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{B_1^{p_1} C_0}\right)^{\frac{m_2}{p_1 - m_2}}, \quad \alpha_0 = \|\nabla u_0\|_{m(\cdot)}^{m_2}, \quad (4.7)$$

et

$$E_0 = \left(\frac{1}{B_1^{p_1} C_0}\right)^{\frac{m_2}{p_1 - m_2}} \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1}\right) = \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{p_1}\right) \alpha_1. \quad (4.8)$$

4.1.2 Existence et Unicité

Dans cette section, nous présentons notre principal résultat d'explosion. Nous partons d'un résultat d'existence locale pour le problème (4.1), qui peut être établi en combinant les arguments de [21], le théorème suivant, qui confirme l'existence de une solution locale est un résultat direct.

Théorème 4.1. *Pour tout $u_0 \in W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$, il existe un nombre $T_0 \in (0, T]$ tel que le problème (4.1) ayant une solution forte u sur $[0, T_0]$ satisfaisant :*

$$u \in C([0, T_0]; W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)) \cap C([0, T_0]; L^{p(\cdot)}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Lemme 4.4. Soit $u_0 \in W_0^{1,m(\cdot)}(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} u_0^2 dx > 0$, f satisfait (4.6) et $E(0) \leq 0$. Alors il existe un temps fini $T_{\max} < \infty$ tel que

$$\int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow T_{\max}.$$

Preuve du lemme ??. On définit alors

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x,t) |u(t)|^2 dx$$

En différenciant ϕ par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_{\Omega} a(x,t) uu_t dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_t(x,t) |u(t)|^2 dx \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^{m(x)} - uf(u)) dx \quad (\text{by (4.1)}) \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^{m(x)} - p(x)F(u)) dx \quad (\text{by (4.6)}) \\ &\geq - \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx + p_1 \int_{\Omega} F(u) dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx + p_1 \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\nabla u(x,t)|^{m(x)} dx - p_1 E(t) \quad (\text{by (4.9)}) \\ &\geq \left(\frac{p_1}{m_2} - 1\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx - p_1 E(0) \quad (\text{by (4.10)}) \\ &\geq \left(\frac{p_1}{m_2} - 1\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx = c_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^{m(x)} dx, \quad (c_0 > 0) \end{aligned}$$

On définit les ensembles

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid |\nabla u| \geq 1\} \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \{x \in \Omega \mid |\nabla u| < 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\geq c_0 \int_{\Omega_2} |\nabla u|^{m_1} dx + c_0 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^{m_2} dx \\ &\geq C_1 \left(\left(\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{m_1}{2}} + \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{m_2}{2}} \right), \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\|\nabla u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_q$, pour tout $q \geq 2$, à obtenir

$$\begin{cases} (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2}} \geq C_2 \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx; \\ (\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} \geq C_3 \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 dx. \end{cases}$$

Par addition, conduit à

$$\begin{aligned} (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2}} + (\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} &\geq C_4 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq C_5 \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq \frac{C_5}{\sup a(x,t)} \phi(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

ou alors

$$(\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} \left(1 + (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2} - \frac{2}{m_1}}\right) \geq C_6 \phi(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.23)$$

Par (4.22) et le fait que $\phi(t) \geq \phi(0) > 0$ ($\phi'(t) \geq 0$), on a, pour chaque $t > 0$, soit

$$\begin{cases} (\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} \geq \frac{C_6}{2} \phi(t) \geq \frac{C_6}{2} \phi(0); \\ \text{ou } (\phi'(t))^{\frac{2}{m_2}} \geq \frac{C_6}{2} \phi(t) \geq \frac{C_6}{2} \phi(0) \end{cases}$$

la sorcière donne, à son tour

$$\begin{cases} \phi'(t) \geq C_7 (\phi(0))^{\frac{m_2}{2}}; \\ \text{ou } \phi'(t) \geq C_8 (\phi(0))^{\frac{m_1}{2}}, \end{cases}$$

Par conséquent

$$\phi'(t) \geq \alpha = \min \left(C_7 (\phi(0))^{\frac{m_2}{2}}, C_8 (\phi(0))^{\frac{m_1}{2}} \right),$$

puisque $\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \leq 0$, (4.23) donne

$$(\phi'(t))^{\frac{2}{m_1}} (1 + \alpha)^{\frac{2}{m_2} - \frac{2}{m_1}} \geq C_4 \phi(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\phi'(t) \geq \beta \phi^{\frac{m_1}{2}}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

une intégration simple conduit alors à

$$(\phi(t))^{1 - \frac{m_1}{2}} \leq (\phi(0))^{1 - \frac{m_1}{2}} - \frac{m_1 - 2}{2} \beta t, \quad \forall t \geq 0.$$

ce qui implique que

$$\phi(t) \geq \frac{1}{\left((\phi(0))^{1 - \frac{m_1}{2}} - \frac{m_1 - 2}{2} \beta t \right)^{\frac{2}{m_1 - 2}}}$$

Cela montre que ϕ explose en un temps fini T_{\max} donné par l'estimation

$$T_{\max} \leq \frac{2(\phi(0))^{1 - \frac{m_1}{2}}}{(m_1 - 2)\beta}.$$

- [1] L. Diening and M. Růžicka. *Integral operators on the halfspace in generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$* , part II. *J. Math. Anal. Appl.*, 298 :572–588, 2004.
- [2] D. Edmunds, V. Kokilashvili, and A. Meskhi. *One-sided operators in $L^{p(x)}$ spaces*. *Math. Nachr.*, 281(11) :1525–1548, 2008.
- [3] T. Lukkari. *Elliptic equations with nonstandard growth involving measure data*. *Hiroshima Math. J.*, 38 :155–176, 2008.
- [4] L. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] P. Harjulehto and V. Latvala. *Fine topology of variable exponent energy superminimizers*. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 33 :491–510, 2008.
- [6] P. Hästö. *Counter-examples of regularity in variable exponent Sobolev spaces*. In *The p -harmonic equation and recent advances in analysis*, volume 370 of *Contemp. Math.*, pages 133–143. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [7] P. Hästö. *On the variable exponent Dirichlet energy integral*. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 5 :413–420, 2006.
- [8] P. Hästö. *The maximal operator in Lebesgue spaces with variable exponent approaching*. *Math. Nachr.*, 280 :74–82, 2007.
- [9] V. Bögelein and A. Zatorska-Goldstein. *Higher integrability of very weak solutions of systems of $p(x)$ -Laplacian type*. *J. Math. Anal. Appl.*, 336 :480–497, 2007.
- [10] S.A. Messaoudi. *Blow up in a nonlinearly damped wave equation*, *Math. Nachr.* 231 (1) (2001) 1–7.
- [11] L. Diening, P. Hästö, P. Harjulehto and M. Růžicka, *Lebesgue and sobolev spaces with variable exponents*. Springer-Verlag : Berlin, 2017.
- [12] A. Rahmoune. *Bounds for below-up time in a nonlinear generalized heat equation*, *Applicable Analysis* 2020, 1-9.

- [13] A. Rahmoune. *Upper bound estimate for the blow-up time of a class of integrodifferential equation of parabolic type involving variable source*, Comptes Rendus. Mathématique, Tome 358 (2020) no. 1 p. 23-32.4
- [14] S. Antontsev. *Wave equation with $p(x, t)$ -Laplacian and damping term : Existence and blow-up*, J. Difference Equ. Appl. 3 (4) (2011) 503–525.
- [15] E. Vitillaro. *Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation*, Arch. Ration. Mech. Anal. 149 (2) (1999) 155–182.
- [16] V. Georgiev, G. Todorova. *Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms*, J. Differential Equations 109 (2) (1994) 295–308.
- [17] H.A. Levine, J. Serrin. *Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation*, Arch. Ration. Mech. Anal. 137 (4) (1997) 341–361.
- [18] A. Haraux and E. Zuazua, *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. 150 (1988), 191–206.
- [19] Zhong, T., *The reaction-diffusion equation with lewis function and critical sobolev exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **272** (2002), no. 2, 480-495.
- [20] R.De Pablo A. Ferreira , M. Pérez-LLanos. *Critical exponents for a semilinear parabolic equation with variable reaction*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, 2012, **142** :1027–1042.
- [21] Abita, R.,and Benyattou, B., *Quasilinear parabolic equations with $p(x)$ -laplacian diusion terms and nonlocal boundary conditions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math **64** (2019), 101-116.
- [22] Baghaei, K., Ghaemi, M.B., Hesaaraki, M., *Lower bounds for the blow-up time in a semilinear parabolic problem involving a variable source*, Applied Mathematics Letters **27**, (2014), 49-52.
- [23] Hua, W., Yijun, H., *On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters **26** (2013), no. 10, 1008-1012.
- [24] Xiulan, W., Guo, B., Wenjie, G., *Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters **26** (2013), 539-543.
- [25] Aiguo, B., Xianfa, S., *Bounds for the blowup time of the solutions to quasi-linear parabolic problems*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), **65**, 2014
- [26] H.A. Levine. *Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations*, SIAM J. Math. Anal. 5 (1) (1974) 138–146.
- [27] Abita R. *Logarithmic Wave Equation Involving Variable-exponent Nonlinearities : well posedness and Blow-up*. WSEAS Transactions on Mathematics, vol. 21, pp. 825-837, 2022.
- [28] Abita R. *Blow-up phenomenon for a semi linear pseudo-parabolic equation involving variable source*. Applicable Analysis 2021.

- [29] Abu Zaytoon M.S, Hamdan M.H. Fluid Mechanics at the Interface between a Variable Viscosity Fluid Layer and a Variable Permeability Porous Medium, WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer, vol. 16, pp. 159-169, 2021.
- [30] Benjamin T.B, Bona, J.L, Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. R. Soc. Lond.Ser. A. Math. Phys. Sci. 272(1972), 47-78.
- [31] Aripov M, Mukimov A, Mirzayev B. To Asymptotic of the Solution of the Heat Conduction Problem with Double Nonlinearity with Absorption at a Critical Parameter. Mathematics and Statistics 7(5) : 205-217, 2019.
- [32] Korpusov M.O, Sveshnikov A.G. *Three-dimensional nonlinear evolutionary pseudoparabolic equations in mathematical physics.* Zh. Vych. Mat. Fiz. 43(12)(2003), 1835-1869.
- [33] Víctor P. *Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward-backward pseudoparabolic equation.* Trans. Am. Math. Soc. 356(7)(2004), 2739-2756.
- [34] Acerbi E, Mingione G, Seregin G.A. *Regularity results for parabolic systems related to a class of non Newtonian fluids,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 21(1) (2004) 25-60.