الجمـــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشـــعبيـــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعالـــي و الـبـحـث الـعلـمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامعــة عمّـــار ثـليـــجــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــة الـعـلـــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par:
Benzian Ahmed

THEME

Explosion en temps fini de solution d'un problème viscoélastique avec source non-linéaire

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. A. Belacel	*M.C.(B)*	*Président*
Mr. R.Abita	*M.C.(B)*	*Examinateur*
M. N.Abdesselam	*M.A.(A)*	*Examinateur*
M. Y. Boukhatem	*M.C.(A)*	*Encadreur*

Année Universitaire 2016/2017

Dédicaces

Je dédie ce mémoire
A mon père mon professeur de toujours,
et ma très chére mère Pour leurs soutien et encouragements.
A Mon encadrente Madame.
A mes proches et toute ma famille. A mes amies et tous les gens qui m'aiment.
A tous ceux qui sont proches de mon cœur et dont je n'ai pas cité le nom.
Au bonheur des plus chers.

ملخص

في هذَا العمل نعتبر مسأَلة حدودية قطعية شبه خطية . سنعمل علَى برهنة أَن حل هذه المسأَلة موجود و سينفجر أَو بعبَارة ريَاضية سيُؤُول الَى المَالَانهَاية عند زمن منته .

Résumé

Dans ce travail, on considère un problème hyperbolique viscoelastique pour un opérateur fortement elliptique avec une source non linéaire de type polynomiale. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, on démontre l'existence locale et l'unicité d'une solution du problème considéré. Ensuite, on prouve que la solution explose en temps fini pour énergie initiale positive et assez petite.

Mots clés : Existence locale, Explosion en temps fini, Problème hyperbolique viscoelastique, Source non linéaire .

Abstract

In this work, we consider a viscoelastic hyperbolic problem for a strongly elliptic operator with polynomial source term. Under certain assumptions on the initial data, we prove the local existence and uniqueness of the solution. Then, we show that the local solution blow up in finite time for small positive initial energy.

Keywords : Blow-up in finite time, Local existence, Viscoelastic hyperbolic problem, No linear source .

Table des matières

Notations

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, les notations qu'on a utilisé dans ce mémoire sont les suivantes :

$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
Γ	La frontiére de Ω.
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues.
E'	Le dual topologique de E.
$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables á support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω.
$D'(0,T;E)$	L'espace des distributions des fonction $u : [0,T] \to E$.
$(.,.)$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$L^p(0,T;E)$	L'espace des fonctions $t \to f(t)$ de $]0,T[\to E$ qui sont mesurables a valeur dans E.
$W^{1,p}(\Omega)$	L'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
$W^{-1,q}(\Omega)$	Le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	La convergence faible $*$.
p.p.	Presque partout.
$\Vert.\Vert_p$	La norme associée á l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
$\Vert.\Vert_{H_0^1(\Omega)}$	La norme associée á l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.
u'	La dérivée première de u par rapport aux temps notée aussi $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.
u''	La dérivée seconde de u par rapport aux temps notée aussi $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème hyperbolique viscoelastique pour un opérateur fortement elliptique avec une source non linéaires de type polynomiale. Plus précisément, on considère le problème suivant

$$u_{tt} + Au - \int_0^t g(t-s)Au(x,s)ds = |u|^{p-2}u, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in (0,T),$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^n$, $p > 2$ et g est une fonction à préciser ultérieurement. A est un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 défini par

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

où les fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\overline{\Omega}), \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$ sont symétriques et il existe une constante $a_0 > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$$

pour tout $x \in \Omega$ et $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.
Avec des conditions aux limites sur $\partial\Omega$

$$u = 0, \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \times (0,T),$$

et des conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad \text{dans} \qquad \Omega,$$

où les fonctions $u_0,\ u_1 : \Omega \longrightarrow R$ sont des données.
Le terme intégrale $\int_0^t g(t-s)Au(x,s)ds$ représente un amortissement naturel fournis par des matériaux viscoélastiques pour garder une certaines mémoires.
Une étude analogue a été donné par Berrimi et Messaoudi dans [2] dans le cas ou

$A = -\Delta$. Ils ont montrer l'existence locale et l'unicité de la solution et ils ont montré la décroissance exponentielle et polynomiale sous certaines conditions sur la fonction noyau g. D'autres études dans [3, 9, 12], ils ont montrer l'existence locale et l'explosion en temps fini pour des problèmes d'ondes viscoélastiques.

Ce travail est composé de trois chapitre. Le premier chapitre est destiné à rappeler quelques outils mathématiques qui seront utiles par la suite. Nous commençons par des brefs définitions sur la topologie faible et la topologie faible $*$ et quelques résultats pour les espaces réflexifs et séparables. Puis, nous donnons quelques définitions et quelques propriétés élémentaire sur les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev et les espaces associés au problème d'évolution et on termine par quelques compléments nécessaires et les différents lemmes de Gronwall.

Le seconde chapitre sera consacré à l'existence et l'unicité locale de la solution du problème considéré. La preuve est basée sur certaines hypothèses sur les données initiales, sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe (voir [6]). Nous commençons par démontré que le problème considéré est équivalent à un problème variationnel qu'on précisera. Puis, nous montrons que le problème suivant

$$u_{tt} + Au - \int_0^t g(t-s)Au(x,s)ds = f, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in (0,T),$$

admet une solution unique régulière. A la fin, nous énonçons deux propositions importantes qui assurent l'existence locale et l'unicité de la solution du problème considéré.

Dans le dernier chapitre, on montre que la solution locale explose en temps fini ou l'énergie initiale est assez petite et positive. L'outil principal utilisé repose sur une construction d'une fonctionnelle L qui est une perturbation de la fonctionnelle d'énergie associé au problème considéré et on montre que L satisfait une inégalité différentielle de la forme

$$L'(t) \geq L^r(t), r > 0.$$

Ceci, bien sûr, Conduira à une explosion dans un temps fini à condition que $L(0) > 0$.

Chapitre 1

Rappels sur des outils mathématiques

Le premier chapitre est destiné à rappeler quelques outils mathématiques qui seront utiles par la suite. Nous commençons par des brefs définitions sur la topologie faible et la topologie faible $*$ et quelques résultats pour les espaces réflexifs et séparables. Puis, nous donnons quelques définitions et quelques propriétés élémentaire sur les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev et les espaces associés au problème d'évolution et on termine par quelques compléments nécessaires et les différents lemmes de Gronwall.
Les principaux ouvrages utilisés dans ce chapitre sont :[1, 4, 7, 8].

1.1 Topologie faible

1.1.1 Définition et propriétés élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_f \in E'$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. *la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_f \in E'$.*

Théorème 1.1.1. *Soit (x_n) une suite de E. On a :*

i) $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall f \in E'$.

ii) Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.

iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|_E$ est bornée et $\|x\|_E \leq limInf\|x_n\|_E$.

iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Théorème 1.1.2. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

1.1.2 Ensembles convexes et opérateurs linéaires

Théorème 1.1.3. *Soit C un sous ensemble non vide convexe de E, alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.*

Théorème 1.1.4. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire et continu de E dans F. Alors T est continu de E faible $\sigma(E, E')$ dans F faible $\sigma(F, F')$.*
Et réciproquement.

1.1.3 La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique (muni de la norme dual $\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle|$), et soit E'' son bidual muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|.$$

On a une injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suit :
Soit $x \in E$ fixé, l'application $f \longmapsto \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitué une forme linéaire continue sur E' i.e un élément de E'' noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad , \forall x \in E \ , \ \forall f \in E'.$$

J est une isométrie i.e $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, En effet,

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

Définition 1.1.2. *La topologie faible $*$ désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.*
Comme $E \subset E''$, la topologie $\sigma(E', E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Autrement dit la topologie $\sigma(E', E)$ possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie $\sigma(E', E'')$.

Théorème 1.1.5. *Soit (f_n) une suite de E'. On a*
i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \ \forall x \in E$.
ii) Si $f_n \to f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$,
si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$.
iii) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$,alors $\|f_n\|_{E'}$ est bornée et $\|f\|_{E'} \leq limInf \|f_n\|_{E'}$.
iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$, et si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.1.1. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $\sigma(E', E)$ (ou même si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$ et si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ on ne peut pas conclure que $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Remarque 1.1. *Lorsque E est de dimension finie les trois topologie forte, $\sigma(E', E'')$ et $\sigma(E', E)$ coïncident.*

Théorème 1.1.6. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$.*

1.1.4 Espaces réflexifs

Définition 1.1.3. *Soit E un espace de Banach, et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si on identifier implicitement E et E'',(E=E''.*

Proposition 1.1.2. ***(Kakutani)*** *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si :*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\},$$

est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.1.3. *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Proposition 1.1.4. *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

1.1.5 Espaces séparable

Définition 1.1.4. *On dit qu'un espace métrique est séparable, s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Théorème 1.1.7. *Soit E un espace métrique séparable, et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Théorème 1.1.8. *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors E est séparable.*

Proposition 1.1.5. *Soit E un espace de Banach.*
Alors (E réflexif et séparable) $\Leftrightarrow$ (E' réflexif et séparable).

Théorème 1.1.9. *Soit E un espace de Banach séparable. Alors $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.*
Réciproquement, si $B_{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$, alors E est séparable.

Théorème 1.1.10. *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors B_E est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Théorème 1.1.11. *Soit E un espace de Banach séparable, et soit (f_n) une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

Théorème 1.1.12. ***(Eberlein-Šmulian)*** *Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$.Alors E est réflexif.*

1.2 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.
L'application :

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ intégrable\} \longmapsto \mathbb{R}_+$$

$$f \longmapsto \|f\| = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

est une semi-norme.
On va définir une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

$$\forall f, g :\in \mathcal{F} \qquad f\Re g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega : \qquad f(x) = g(x)\ p.p\ .$$

Définition 1.2.1. *L'ensemble quotient $\mathcal{F}/\Re$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$, s'appelle l'espace de Lebesgue et sera noté par L^1.*

1.2.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces L^p

Définition 1.2.2. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ si f est mesurable et $|f|^p \in L^1(\Omega)$.*

Théorème 1.2.1. *L'application*

$$f \longleftrightarrow \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

est une norme sur L^p.

Définition 1.2.3. *On dit que f est essentiellement bornée sur Ω s'il existe une constante C positive telle que $|f(x)| \leq C$ p.p.*
La plus petite de ces constantes est appelée le sup essentiel de f.
On la note par $ess.\sup|f(x)|$.

Définition 1.2.4. *On appelle espace de Lebesgue de puissance d'ordre ∞ l'espace, noté $L^\infty(\Omega)$, des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant :*

$$ess.\sup|f(x)| < +\infty$$

Théorème 1.2.2. *L'application de $L^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par*

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = ess.\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

est une norme.

Notation 1.2.1. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Théorème 1.2.3. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

$\Big($*qui s'écrit* $\int_\Omega u(x)v(x)dx$ *pour les fonctions réelles*$\Big)$.

Proposition 1.2.1. ***(Inégalité de Young)*** *Soient $1 < p < \infty$ et $a, b \geq 0$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration. La fonction log est concave. Donc $\forall a, b > 0$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} = \log(ab).$$

D'où

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Remarque 1.2. *Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy Schwarz.*

Théorème 1.2.4. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et,*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Démonstration. 1. Si $p = 1$ et si $p = \infty$ la conclusion est évidente.
2. Si $1 < p < \infty$: d'après **l'inégalité de Young**, on a :

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que :

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{1}{p}\|f(x)\|_p^p + \frac{1}{q}\|g(x)\|_q^q.$$

On remplace f par λf $(\lambda > 0)$ il vient :

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q. \tag{1.1}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_p^{-1}\|g\|_q^{q/p}$, de manière à minimiser le membre à droite dans (1.1), on obtient alors

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

$\square$

Théorème 1.2.5. ***(Fischer-Riesz)*** *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
Et si $1 < p < \infty$ alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach séparable.

Proposition 1.2.2. *Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) de (f_n) telle que :*

i. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.

ii. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in$ *et p.p sur* Ω, *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Proposition 1.2.3.

1. $L^\infty = (L^1)'$.
2. $L^1 \subset (L^\infty)'$.
3. *La boule unité fermée B_{L^∞} est compacte pour la topologie faible $* \ \sigma(L^\infty, L^1)$.*
4. *Si (f_n) une suite bornée dans L^∞ on peut en extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible $* \ \sigma(L^\infty, L^1)$.*

Théorème 1.2.6. ***(Théorème de Reisz)*** *Soit T une forme linéaire et continue sur $L^p(\Omega)$. Alors il existe une unique fonction $g \in L^{p'}(\Omega)$ telle que*

$$T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \quad , \forall f \in L^p(\Omega).$$

1.3 Les espaces de Sobolev

1.3.1 Définitions et premières propriétés

On pose

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, 2, ..., n \right\},$$

la dérivation est à comprendre au sens des distribution. En autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions $v_1, v_2, ..., v_n$ dans $L^2(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega v_i \varphi \, dx \quad , \forall \varphi \in D(\Omega) \ , \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v).$$

La norme associée est

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2.$$

Théorème 1.3.1. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

De la même façon, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$, où m est un entier strictement positif par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \right\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\ D^\alpha u(x)\ |^2 \, dx \right)^{1/2},$$

(où $D^\alpha u$ est comprise au sens des distributions).
De façon plus générale, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, on peut définir les espaces de Sobolev. Ces espaces sont construits sur l'espace de Banach L^p.

Définition 1.3.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ comme suit*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \}.$$

Théorème 1.3.2. *L'application*

$$u \mapsto \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} & , \quad si\ 1 \leq p < \infty; \\ \sup\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty & , \quad si\ p = \infty. \end{cases}$$

est une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$.

Si $p = 2$ on a : $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Théorème 1.3.3. *L'application définie par :*

$$H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u,v) \mapsto (u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

est un produit scalaire sur $H^m(\Omega)$.

Théorème 1.3.4. *$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire est un espace de Hilbert.*

Définition 1.3.2. *On dit que Ω de $\mathbb{R}^n$ est de frontière régulière de classe C^k s'il existe un nombre fini d'ouverts $(w_i)_{0\leq i\leq q}$ tels que $\overline{w_0} \subset \Omega$, $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{i=0}^{q}$, $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{q}$, et pour chaque $i \in \{1, ..., q\}$ il existe une application bijective ϕ_i de classe C^k de w_i dans l'ensemble*
$Q = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^\kappa,\ |\ y'\ |< 1,\ |\ y_n\ |< 1\}$, et telle que
$\phi_i(w_i \cap \Omega) = Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n,\ y_n > 0\}$,
$\phi_i(w_i \cap \partial\Omega) = Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n,\ y_n = 0\}$.

Définition 1.3.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. On note $\tau(a)$ la normale extérieure à Ω en $a \in \Gamma = \partial\Omega$ défini par*

$$\tau(a) = \frac{\nabla h(a)}{|\nabla h(a)|}.$$

Théorème 1.3.5. *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière, alors la norme de $W^{m,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Théorème 1.3.6 (**Rellich-Kondrachov**). *On suppose Ω borné de classe C^1. On a*
Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;
Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$;
Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,
avec injection compact.

Remarque 1.3. *Le théorème de Rellich est à peu près optimal au sens suivant :*
(i) Si Ω n'est pas borné, l'injection $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ n'est pas compacte en générale.
(ii) l'injection $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ n'est jamais compacte même si Ω est borné et régulier.

1.3.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.3.4. *Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

On note : $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}$ est un espace de Banach séparable, il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.7. *$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*
Autrement dit on peut utiliser indifféremment $C_c^\infty(\Omega)$ au lieu de $C_c^1(\Omega)$ dans la définition de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.3.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u = 0$ sur la frontière de Ω.*

Proposition 1.3.2. *On peut définir $W_0^{m,p}$ pour $m > 1$, par :*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u = Du = ... = D^{m-1}u = 0 \quad , \quad sur\ \partial\Omega\}$$

1.3.3 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Notation : On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.
On identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual.
On a le schéma suivant

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.
Si Ω est borné on a

$$W_0^{1,p} \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega), \quad Si \ \frac{2n}{n-2} \leq p < \infty,$$

avec injections continues et denses.

Théorème 1.3.8. *Soit $F \in W^{-1,q}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, ..., f_n \in L^q(\Omega)$ telles que*

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f_0(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec $\|F\| = \max\limits_{0\leq i\leq n} \|f_i\|_q$.

1.4 Espaces fonctionnels

Ce paragraphe est destiné à rappeler, au fur et à mesure des besoins, les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de *Banach* réel.

Définition 1.4.1. *Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $D(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X.*

Définition 1.4.2. *Une fonction $f : [0, T] \to X$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f en t_0, telle que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h} \left(f\left(t_0 + h\right) - f\left(t_0\right)\right) - \frac{df}{dt}\left(t_0\right) \right\|_X = 0.$$

Définition 1.4.3. *Une fonction $f : [0, T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions (f_n), $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $D(0, T; X)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_X \, ds = 0.$$

Théorème 1.4.1. ***(Bochner)*** *Une fonction $f : [0, T] \to X$ mesurable est intégrable si et seulement si $t \to ||f(t)||_X : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, dans ce cas*

$$\left\| \int_0^T f(s)\, ds \right\|_X \leq \int_0^T \|f(s)\|_X \, ds.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0,T) \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(X)$. On sait que $L^p(0,T;X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ 1 \leq p < \infty, \\
\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} &= \inf \left\{ C > 0 / \ \|f(t)\|_X \leq C; \quad p.p.\ t \in (0,T) \right\} \ si\ p = \infty.
\end{aligned}$$

Naturellement, on a :

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q) \quad où \quad Q = \Omega \times]0,T[.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Théorème 1.4.2. *1. $L^p(0,T;X)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach.*

2. Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

3. $L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X)$ avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

4. Si X est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned}
L^p(0,T;X)' &= L^q(0,T;X) \quad si\ 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\
L^1(0,T;X)' &\subset L^\infty(0,T;X),
\end{aligned}$$

où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^q(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

5. D'après le théorème de Danford-Pettis l'espace

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \ \left(resp\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \right)$$

est le dual de

$$L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)) \ \left(resp\ de\ L^1(0,T;L^2(\Omega)\,.) \right).$$

Et $H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)$ muni de la structure de dual fort de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.4.4. *Soit $u,\ w \in L^1(0,T;X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si*

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)\, u(t)\, dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)\, w(t)\, dt \ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 < p < \infty$. L'espace L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonctions $u : [0,T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;X)$ et $u' \in L^p(0,T;X)$. L'espace $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\|u\|_{\ L^p(0,T;X)} + \|u'\|_{\ L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.4.5. *Une fonction $f : [0,T] \to X$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0,T]$, tels que $\sum\limits_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum\limits_j \|f(b_j) - f(a_j)\| \leq \varepsilon$.*

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème 1.4.3. *Soit $1 \leq p \leq \infty, X$ un espace de Banach réflexive et soit $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in W^{1,p}(0,T;X)$.*
2. *u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0,T;X)$.*
3. *Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;X)$, telles que*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Il découle de la démonstration du théorème précédent que, si X est un espace réflexive, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0,T)$ et $u' = \frac{du}{dt}$. Par ailleurs $W^{1,p}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0,T] \to X$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0,T;X)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0,T] \to X$.
Etant donnés un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0,T;X) = \left\{u \in W^{k-1,p}(0,T;X);\ u' \in W^{k-1,p}(0,T;X)\right\}.$$

L'espace $W^{k,p}(0,T;X)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \sum_{\alpha=1}^{k} \left\|u^{(\alpha)}\right\|_{L^p(0,T;X)} .$$

On dénote aussi par $C(0,T;X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X avec la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X ,$$

1.5 Compléments divers

Théorème 1.5.1. *Si* $f \in L^p(0,T;X)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, *alors* f *est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,T)$ *continue de* $[0,T] \to X$.

Théorème 1.5.2 (Formule de Green). *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de frontière* Γ, C^1 *par morceaux. Alors, si* u *et* v *sont des fonctions de* $H^1(\Omega)$, *alors on a la formule de Green suivante :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma uv\tau_i d\Gamma \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

où τ_i *est la normale unité extérieure à* Γ.

Un résultat essentiel pour les application du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Lemme 1.5.1 (Inégalité de Poincaré). *On suppose que* Ω *est un ouvert borné. Alors il existe une constante* C *(dépendant de* Ω *et* p*) telle que :*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) , \quad 1 \leq p < \infty.$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_p$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induite la norme $\|\nabla u\|_2$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Soit H un espace de Hilbert réel

Définition 1.5.1. *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme. On dit que :*
(i) a est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à u et v , $(\forall u, v \in H)$.
(ii) a est continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

(iii) a est elliptique ou coercive (ou encore définie positif) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in H \quad a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2.$$

Lemme 1.5.2. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et elliptique sur H. alors il existe un isomorphisme $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

$$a(u,v) = (Au, v)_H \quad \forall u, v \in H.$$

1.5.1 Lemmes de Gronwall

Dans ce paragraphe, on donne quelques lemmes de Gronwall qui nous aide à démontrer l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Lemme 1.5.3. *Soient $f, g \in C(0,T;\mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^T f(s)ds + \int_0^T g(s)\Psi(s)ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^T f(s)ds\right) \exp\left(\int_0^T g(s)ds\right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

Pour le cas particulier $f = 0$, ce Lemme devient :

Corollaire 1.5.1. *Soit $g \in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^T g(s)\Psi(s)ds, \qquad \forall t \in [0,T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^T g(s)ds\right), \qquad \forall t \in [0,T].$$

Lemme 1.5.4. *Soient $f, g \in C(0, T; \mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T;($ est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int\limits_0^T f(s)\Psi(s)ds + \int_0^T g(s)\Psi(s)ds \qquad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$|\Psi(t)| \leq \left(a + \int_0^T f(s)ds\right) \exp\left(\int_0^T g(s)ds\right), \qquad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $f = 0$, ce Lemme devient :

Corollaire 1.5.2. *Soit $g \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :*

$$\frac{1}{2}\Psi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^T g(s)\Psi^2(s)ds, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$|\Psi(t)| \leq a \exp\left(\int_0^T g(s)ds\right), \qquad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème hyperbolique viscoelastique pour l'opérateur fortement elliptique avec une source non linéaire de type polynomiale. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible. La preuve est basée sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité et le théorème du point fixe (la technique est de Georgiev et Todorov [6])

2.1 Position du problème et formulation variationnelle

2.1.1 Position du problème

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de point générique $x = \{x_1, ..., x_n\}$. Soit Γ la frontière de Ω. On supposera toujours que Γ est "assez régulière".
On désigne par Q le cylindre de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$:

$$Q = \Omega \times]0, T[, \; T \text{ fini},$$

et par Σ la frontière latérale de Q :

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction u par rapport à x (parfois par rapport à t).

L'objet de ce chapitre est de chercher $u : Q \to \mathbb{R}$ solution du problème de Dirichlet suivant :

$$(P) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au - \displaystyle\int_0^t g(t-s)Au(s)ds = \mid u \mid^{p-2} u, & dans \quad Q = \Omega \times]0, T[, \\ u = 0, & sur \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & dans \quad \Omega. \end{cases}$$

A fin d'étudier le problème (P) et de formuler le théorème d'existence et d'unicité on aura besoin des hypothèses suivantes :
(H_1) A est un opérateur elliptique d'ordre deux définit par :

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, ..., n \;,$$

$$\exists\ \alpha > 0,\ telle\ que\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + ... + \xi_n^2),$$

pour tout $x \in \Omega$ et $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.
(H_2) La fonction noyau $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est de classe C^1 , bornée et vérifie

$$g(0) > 0,\ 1 - \int_0^{+\infty} g(s)ds = l > 0,$$

en plus il existe une constante positive ξ telle que pour tout $t \geq 0$, on a

$$-\xi g(t) \leq g'(t) \leq 0$$

On le note par V l'espace :

$$V = H_0^1(\Omega)$$

L'inégalité de Poincaré est valable dans V c.à.d

$$\forall u(t) \in V, \quad \|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p, \quad \text{où} \begin{cases} 2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2} & si\, n \leq 3, \\ 2 \geq p \leq +\infty & si\, n = 1, 2. \end{cases}$$

2.1.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, on démontre que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) que problème (P) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$(P_V) : \begin{cases} (u''(t), v(t)) + a(u(t), v(t)) - \left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, v(t)\right) = (\mid u \mid^{p-2} u, v(t)), \\ \qquad \forall v \in V, \\ \qquad où \\ a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \end{cases}$$

Lemme 2.1.1. *L'application $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive.*

Démonstration. (i) **Bilinéarité** :
Soient $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
a(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2,v) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial\left(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2\right)}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\Big(\lambda_1\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\lambda_2\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \lambda_1\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\lambda_2\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \lambda_1 a(u_1,v)+\lambda_2 a(u_2,v).
\end{aligned}$$

de la même façon on vérifier que :

$$a(u,\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2)=\lambda_1 a(u,v_1)+\lambda_2 a(u,v_2).$$

(ii) **Continuité** :

$\forall u,v\in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}|a_{ij}(x)|\ \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx \\
&\leq \sup_x|a_{ij}(x)|\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|dx.
\end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on trouve :
Donc

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \sup_x\ |a_{ij}(x)|\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \alpha_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

puisque $a_{ij}\in L^{\infty}(\Omega)$, alors $\alpha_1=\sup_x|a_{ij}(x)|<\infty$.

(iii) **Coercivité** :

D'après (2.1.1) pour $\xi_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, on trouve :

$$a(u,u)\geq\alpha\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2dx=\alpha\|\nabla u\|_2^2$$

et d'après l'inégalité de Poincaré :

$$a(u,u)\geq\alpha\|\nabla u\|_2^2\geq\alpha\|\ u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

□

Théorème 2.1.1. *D'après* (H_1) *et la continuité de la forme* $a(.,.)$*, on a :*

$$\alpha \| \ u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq a(u,u) \leq \alpha_1 \| \ u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \tag{2.2}$$

Lemme 2.1.2. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *, le problème* (P) *est équivalent au problème variationnel* (P_V)*.*

Démonstration. .
(i) Soit u une solution du problème (P), et soit $v \in V$.
En multipliant la première équation par v (au terme du produit scalaire), on obtient :

$$(u'', v) + (Au, v) - \Big(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, v\Big) = (| \ u \ |^{p-2} \ u, v), \tag{2.3}$$

Alors

$$(Au, v) = \int_\Omega Au \ vdx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)vdx.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_\Omega Au \ vdx = -\sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}vv_i d\Gamma + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

et puisque $v \in H^1_0(\Omega)$, donc $v = 0$ sur Γ. On obtient, alors

$$(Au, v) = \int_\Omega Au \ vdx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx. \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4) on trouve :

$$(u'', v) + a(u, v) - \Big(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, v\Big) = (| \ u \ |^{p-2} \ u, v), \tag{2.5}$$

(ii) L'implication inverse.
Soit $u \in V$ une solution du problème (P_V), on a :

$$(u'', v) + a(u, v) - \Big(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, v\Big) = (| \ u \ |^{p-2} \ u, v), \tag{2.6}$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

on applique la formule de Green et puisque $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(u'', v) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} v v_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx$$

$$- \left(\int_0^t g(t-s) Au(s) ds, v \right) = (| u |^{p-2} u, v).$$

Pour $v = \varphi \in D(\Omega)$:

$$(u'', \varphi) - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \varphi dx - \left(\int_0^t g(t-s) Au(s) ds, \varphi \right) = (| u |^{p-2} u, \varphi)$$

d'ou :

$$(u'', \varphi) + (Au, \varphi) - \left(\int_0^t g(t-s) Au(s) ds, \varphi \right) = (| u |^{p-2} u, \varphi),$$

donc :

$$u'' + Au - \int_0^t g(t-s) Au(s) ds = | u |^{p-2} u \quad dans \ D'(\Omega),$$

et par conséquent :

$$u'' + Au - \int_0^t g(t-s) Au(s) ds = | u |^{p-2} u \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

$\square$

Nous introduisons la notation suivante

$$(g \diamond u)(t) = \int_0^t g(t-s) a(u(t) - u(s), u(t) - u(s)) ds \tag{2.7}$$

Lemme 2.1.3. *soit u solution du problème (P),on a :*

$$1) \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) A \nabla u(s) \nabla u'(t) dx ds =$$
$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \diamond u)(t) + \frac{1}{2} (g' \diamond u)(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[a(u(t), u(t)) \textstyle\int_0^t g(s) ds \right] - \frac{1}{2} g(t) a(u(t), u(t)), \tag{2.8}$$

$$2) \ (g \diamond u)(t) - \int_0^t (g' \diamond u)(t) + \int_0^t g(s) a(u(s), u(s)) ds \geq 0. \tag{2.9}$$

Démonstration.

1)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g\diamond u)(t) = & \int_0^t g'(t-s)a(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds \\
& + \int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds \\
= & \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds \\
& + \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds \\
& + \left(\frac{d}{dt}a(u(t),u(t))\right)\int_0^t g(s)ds - 2\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A\nabla u(s)\nabla u'(t)dxds \\
= & \frac{d}{dt}(g'\diamond u)(t) - 2\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A\nabla u(s)\nabla u'(t)dxds \\
& + \frac{d}{dt}\left(a(u(t),u(t))\int_0^t g(s)ds\right) - g(t)a(u(t),u(t)).
\end{aligned}
$$

Cette dernière identité implique

$$
\begin{aligned}
1)\ & \int_\Omega\int_0^t g(t-s)A\nabla u(s)\nabla u'(t)dxds = \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\diamond u)(t) + \frac{1}{2}(g'\diamond u)(t) + \frac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left[a(u(t),u(t))\textstyle\int_0^t g(s)ds\right] - \frac{1}{2}g(t)a(u(t),u(t)),
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Et pour la deuxième assertion il suffit d'utiliser (H_2) $\square$

2.2 Existence et unicité

Pour démontrer l'existence locale de la solution du problème considéré, il très outil de commencer par étudier le problème suivant, en fixant le deuxième membre de la première équation, suivant :

$$(P1) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au - \displaystyle\int_0^t g(t-s)Au(s)ds = f, & dans \quad \Omega\times]0,T[, \\ u = 0, & sur \quad \Gamma\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & dans \quad \Omega. \end{cases}$$

où T>0 et f est une fonction donné sur $\Omega\times]0,T[$. Le problème variationnel associé au problème $(P1)$ est le suivant :

$$(P_{V1}) : \begin{cases} (u''(t), v(t)) + a(u(t), v(t)) - \left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, v(t)\right) = (f(t), v(t)), \\ \qquad \forall v \in V, \\ \qquad où \\ \qquad a(u,v) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \end{cases}$$

Théorème 2.2.1. *Supposons que (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Soit $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe $T > 0$ tel que le problème $(P1)$ possède une solution unique*
u satisfait :

$$\begin{aligned} u \in & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \; et \; Au \in L^2(\Omega) \\ u_t \in & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \\ u_{tt} \in & L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

2.2.1 Unicité

Soient u_1, u_2 deux solutions du problème $(P1)$ au sens du théorème (2.2.1). On pose $\vartheta = u_1 - u_2$, alors ϑ satisfait le système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + A\vartheta - \displaystyle\int_0^t g(t-s)A\vartheta(s)ds = 0, & dans \quad \Omega\times]0,T[, \\ \vartheta = 0, & sur \quad \Gamma\times]0,T[, \\ \vartheta(x,0) = 0, \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}(x,0) = 0, & dans \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Multiplions la première equation du (2.11) par ϑ' et par intégration par partie on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left[\| \vartheta'(t) \|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) a(\vartheta(t), \vartheta(t))\right] = -g(t)a(\vartheta(t), \vartheta(t)) + (g' \diamond \vartheta)(t) \tag{2.12}$$

Intégrant l'équation ci-dessus de 0 à t et utilisant le lemme de Gronwall on obtient

$$0 \leq \| \vartheta'(t) \|_2^2 + a_0 l \| \nabla\vartheta(t) \|_2^2 \leq 0, \tag{2.13}$$

Ensuite (2.13) donne $\vartheta = 0$.

2.2.2 Existence

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment l'existence d'une solution faible sera obtenue en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin et la méthode de compacité.

La méthode de Faedo-Galerkin consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

(i) On construit des solutions "approchées" ;

(ii) on établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori ;

(iii) on passe à la limite, grace à des propriétés de compacité .

i)Solutions approchées.

L'espace V est séparable, il existe une suite $w_1, w_2, ..., w_m$, ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in V, \qquad \forall i; \\ \forall m,\ w_1, w_2, ..., w_m \quad \text{sont linéairement indépendants;} \\ V_m = \langle \{w_1, w_2, ..., w_m\} \rangle \end{cases} \tag{2.14}$$

En particulier :

$$\forall u_0 \in V \cap H^2(\Omega) \Rightarrow \exists (u_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}, u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{km} w_k \to u_0 \text{ lorsque } m \to +\infty \tag{2.15}$$

$$\forall u_1 \in V \Rightarrow \exists (u_{1m})_{m\in\mathbb{N}^*}, u_{1m} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{km} w_k \to u_1 \text{ lorsque } m \to +\infty \tag{2.16}$$

On cherche alors $u(x,t)=\sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i(x)$ solution approchées du problème (P_m) suivant :

$$(P_m)\begin{cases} (u''(t),w_k)+a(u(t),w_k)-\left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds,w_k\right)=(f(t),w_k),\ k=1,...,m \\ u_m(0)=u_{0m},\ u'_m(0)=u'_{0m} \end{cases} \tag{2.17}$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du deuxième ordre. On considère les fonctions suivantes :

$$g_m=(g_{1m}(t),..........,g_{mm}(t)) \tag{2.18}$$

$$f_m=((f,w_1),.........(f,w_2)) \tag{2.19}$$

$$C_m=\left(\left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds,w_1\right),........,\left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds,w_m\right)\right) \tag{2.20}$$

et les matrices

$$B_m=((w_i,w_j))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} \ .A_m=(a(w_i,w_j))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} \tag{2.21}$$

Les vecteurs $w_1,w_2,....,w_m$ sont linéairement indépendants (i.e $det(w_k,w_j)\neq 0$), la matrice B_m est inversible alors g_m est solution de :

$$(P'_m)\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(g_m(t))+B^{-1}A_m(g_m(t))+B^{-1}C_m=B^{-1}(f_m)) \\ g_m(0)=(\alpha_{im})_{1\le i\le m}=g_{0m}, \\ g'_m(0)=(\beta_{im})_{1\le i\le m}=g_{1m}. \end{cases} \tag{2.22}$$

D'après le théorème de Carathéodory, il existe une solution unique locale du (P_m) dans l'intervalle $[0,t_m]$, t_m dépend de m.
L'étape qui suit montre que $t_m=T$ pour tout $m\in\mathbb{N}^*$.

ii)Estimations a priori.

Estimation I

On multiple l'équation (2.17) par $g'_{km}(t)$ et on somme sur k on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel u'_m(t)\parallel_2^2+a\left(u_m(t),u'_m(t)\right)-\left(\int_0^t g(t-s)Au_m(s)ds,u'_m(t)\right) \\ =(f(t),u'_m(t)) \tag{2.23}$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a(\vartheta(t),\vartheta(t)) &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}a_{ij}(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial\vartheta'}{\partial x_j}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}dx \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}\frac{\partial\vartheta'}{\partial x_i}dx, \\
&= 2a(u(t),u'(t))
\end{aligned}$$

D'ou

$$a(\vartheta(t),\vartheta'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(\vartheta(t),\vartheta(t)). \tag{2.24}$$

Remplaçons (2.8) et (2.24) dans (2.23)on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\parallel u'_m(t)\parallel_2^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a\left(u_m(t),u_m(t)\right)-\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\diamond u_m)(t)+\frac{1}{2}(g'\diamond u_m)(t)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[a(u_m(t),u_m(t))\int_0^t g(s)ds\right]-\frac{1}{2}g(t)a(u_m(t),u_m(t))\right)\\
&=(f(t),u'_m(t))
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Par intégration de 0 à t, en utilisant l'inégalité $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ il résulte :

$$\begin{aligned}
&\parallel u'_m(t)\parallel_2^2-\parallel u'_m(0)\parallel_2^2+(1-l)a(u_m(t),u_m(t))-a(u_m(0),u_m(0))\leq\\
&\leq\int_0^t\parallel f(s)\parallel_2^2 ds+\int_0^t\parallel u'_m(s)\parallel_2^2 ds
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En utilisant la coercivité de a(.,.), (2.26) devient :

$$\parallel u'_m(t)\parallel_2^2+\alpha\parallel\nabla u_m(t)\parallel^2\leq C_1+\int_0^t\parallel u'_m(s)\parallel_2^2 ds+\gamma\int_0^t\parallel\nabla u_m(s)\parallel^2 ds, \tag{2.27}$$

avec

$$C_1=\parallel u'_m(0)\parallel_2^2+a(u_m(0),u_m(0))+\int_0^t\parallel f(s)\parallel_2^2 ds,$$

d'après (2.15), (2.16)et puisque $f\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ alors C_1 est une constante positive on conclut que

$$\beta\left(\| u'_m(t) \|_2^2 + \| \nabla u_m(t) \|^2\right) \leq C + \lambda\left(\int_0^t \| u'_m(s) \|_2^2 + \| \nabla u_m(s) \|^2 \, ds\right) \quad (2.28)$$

où $\beta = \min(1, \alpha)$ et $\lambda = \max(1, \gamma)$.
On applique le lemme de Gronwall aux fonctions
$f(t) = \| u'_m(t) \|_2^2 + \| \nabla u_m(t) \|^2$ et $g(t) = \frac{\lambda}{\beta}$, on obtient :

$$\| u'_m(t) \|_2^2 + \| \nabla u_m(t) \|_2^2 \leq C e^{\frac{\lambda}{\beta} T}, \quad (2.29)$$

avec T indépendante de m.

Estimation II

Dérivons (2.17) en t et multiplions par g''_{km}, on obtient, après sommation en k

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u''_m(t) \|_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_j} ds\right) \frac{\partial u''_m(t)}{\partial x_i} dx \\ &+ a(u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Puisque

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_j} ds\right) = g(0)\frac{\partial u_m(0)}{\partial x_j} + \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u'_m(s)}{\partial x_j} ds, \quad (2.31)$$

alors, le dernier terme du premier membre dans l'équation (2.30) donne

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_j}ds\right)\frac{\partial u''_m(t)}{\partial x_i}dx=\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\int_0^t g(t)a_{ij}\frac{\partial u_m(0)}{\partial x_j}ds\frac{\partial u''_m(t)}{\partial x_i}dx\\
&\quad+\int_0^t g(t-s)a(u'_m(t),u''_m(t))ds\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\left[\frac{d}{dt}\left(g(t)\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\right)-g'(t)\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial u_m(0)}{\partial x_j}dx+\\
&\quad+\int_0^t g(t-s)a(u'_m(t),u''_m(t))ds\\
&=\int_\Omega A\nabla u_{0m}\left(\frac{d}{dt}\left(g(t)\nabla u'_m(t)\right)-g'(t)\nabla u'_m(t)\right)dx+\\
&\quad+\int_\Omega\int_0^t g(t-s)A\nabla u'_m(s)\nabla u''_m(t)dxds,
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

intégrons (2.30) de 0 à t et utilisons (2.24) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\parallel u''_m(t)\parallel_2^2-\parallel u''_m(0)\parallel_2^2+\frac{1}{2}a(u'_m(t),u'_m(t))-a(u'_m(0),u'_m(0))-\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}\left(\int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_j}ds\right)\frac{\partial u''_m(t)}{\partial x_i}dx\\
&=(f'(t),u''_m(t)).
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Remplaçons (2.32) dans (2.33), utilisant, (2.8) et $|ab|\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, il résulte :

$$
\begin{aligned}
&\parallel u''_m(t)\parallel_2^2+\alpha\parallel\nabla u''_m(t)\parallel_2^2-2\int_\Omega g(t)A\nabla u_{0m}\nabla u'_m(t)dx\\
&-2\int_0^t\int_\Omega g'(s)A\nabla u_{0m}\nabla u'_m(s)dxds\leq\\
&\leq C_2+\parallel u''_m(0)\parallel_2^2+2\int_0^t\parallel f'(s)\parallel_2^2ds+2\int_0^t\parallel u''_m(s)\parallel_2^2ds
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

avec

$$
C_2=a(u'_m(0),u'_m(0))=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u'_m(0)}{\partial x_j}\frac{\partial u'_m(0)}{\partial x_i}dx
$$

est une constante positive d'après (2.15). Maintenant, majorant $\| u''_m(0) \|_2^2$: posons $t = 0$ dans (2.17) on trouve :

$$(u''_m(0), w_k) = (f(0) + Au_{0m}, w_k) \qquad 1 \leq k \leq m, w_k \tag{2.35}$$

en multipliant par g''_{km} et sommant en k :

$$(u''_m(0), u''_m(0)) = (f(0) + Au_{0m}, u''_m(0)) \tag{2.36}$$

L'opérateur A est continu, alors $Au_{0m} \leq$ constante,
et comme $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, on déduit que $f(0) \in L^2(\Omega)$.
d'ou

$$\| u''_m(0) \|_2^2 \leq C_3, \tag{2.37}$$

avec C_3 est une constante positive,
par conséquent (2.34) devient

$$\begin{aligned} &\| u''_m(t) \|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \| \nabla u''_m(t) \|_2^2 - 2\int_\Omega g(t) A \nabla u_{0m} \nabla u'_m(t) dx \\ &- 2\int_0^t \int_\Omega g'(s) A \nabla u_{0m} \nabla u'_m(z) dx ds \leq \\ &\leq C_4 + 2\int_0^t \| f'(s) \|_2^2 \, ds + 2\int_0^t \| u''_m(t) \|_2^2 \, ds, \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec $C_4 = C_2 + C_3$.

Les inégalités de Young et Hölder, nous permettent de majorer le troisième et le dernier termes du premier membre de l'inégalité (2.38) comme suit

$$\begin{aligned} &\int_\Omega g(t) A \nabla u_{0m} \nabla u'_m(t) dx = \sum_{i,j=1}^n g(t) \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} dx \\ &\leq \| g \|_\infty \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{1}{2\mu} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_j} \right|^2 dx + 2\mu \int_\Omega \left| a_{ij}(x) \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right] \\ &\leq \| g \|_\infty \frac{n}{2\mu} \| \nabla u_{0m} \|_2^2 + 2\mu \| g \|_\infty \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \| a_{ij} \|_\infty^2 \right) \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &\leq \| g \|_\infty \frac{n}{2\mu} \| \nabla u_{0m} \|_2^2 + 2\mu \| g \|_\infty a_1 \| \nabla u'_m(t) \|_2^2 \end{aligned}$$

pour $\mu > 0$, l'hypothèse $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ nous affirme que $a_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \| a_{ij} \|_\infty^2 \right)$

est une constante positive et

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega g'(s) A \nabla u_{0m} \nabla u'_m(s) dx ds \leq \\
\leq &\sum_{i,j=1}^{n} \left[\int_\Omega \left| \frac{\partial u_{0m}}{\partial x_j} \right|^2 dx + \int_\Omega \left| \int_0^t \xi_1 g(s) a_{ij}(x) \frac{\partial u'_m(s)}{\partial x_i} ds \right|^2 dx \right] \\
\leq &n \parallel \nabla u_{0m} \parallel_2^2 + a_1 \xi_1^2 \left(\int_0^t g(s) ds \right)^2 \int_0^t \parallel \nabla u'_m(s) \parallel_2^2 ds \\
\leq &n \parallel \nabla u_{0m} \parallel_2^2 + a_1 \xi_1^2 (1-l)^2 \int_0^t \parallel \nabla u'_m(s) \parallel_2^2 ds.
\end{aligned}$$

Remplaçant ces deux dernières inégalités dans (2.34) et utilisant (2.24) on conclut

$$\begin{aligned}
&\parallel u''_m(t) \parallel_2^2 + \left[-2\mu a_1 \parallel g \parallel_\infty + a_0 \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \right] \parallel \nabla u'_k(t) \parallel \leq \\
&\leq C + \int_0^t \parallel u''_m(s) \parallel_2^2 + a_1 \xi_1^2 (1-l)^2 \parallel \nabla u'_m(s) \parallel_2^2 ds
\end{aligned}$$

pour ($\mu < (a_0 l)/2a_1 \parallel g \parallel_\infty$),et on appliquant l'inégalité de Gronwall aux fonctions $f(t) = | u''_m(t) |_2^2 + \parallel \nabla u_m(t) \parallel^2$ et $g(t) = \frac{\lambda}{\beta}$,on obtient :

$$\parallel u''_m(t) \parallel_2^2 + \parallel \nabla u'_m(t) \parallel_2^2 \leq C_5 \tag{2.39}$$

où
$\beta = \min(1, -2\mu a_1 \parallel g \parallel_\infty + a_0 l)$ et $\lambda = \max(1, a_1 \xi_1^2 (1-l)^2)$.

Passage à la limite

A partir de (2.29) et (2.39), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ (u'_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ (u''_m) \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.40}$$

On déduit de (2.40) qu'on peut extraire des sous-suites convergentes $(u_l), (u'_l)$ et (u''_l) de $(u_m), (u'_m) et (u''_m)$ respectivement et telles que, lorsque $l \to +\infty$, on a

$$u_l \to u \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible}(*), \tag{2.41}$$
$$u'_l \to u' \text{ dans } L^\infty\ (0,T;V) \text{ faible}(*), \tag{2.42}$$
$$u''_l \to u'' \text{ dans } L^\infty\ (0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible}(*), \tag{2.43}$$

Par ailleurs, il résulte, en particulier, de (2.40) que

$$\begin{cases} (u_m) \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V), \\ (u'_m) \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V), \\ (u''_m) \text{ est bornée dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.44}$$

D'après le théorème de Rellich-Kondrachoff (Lions-Magenès[11])

$$\text{l'injection de } \; H^1(Q) \; \text{ dans } \; L^2(Q) \; \text{ est compacte.}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_l \to u \;\; \text{dans} \;\; L^2(Q) \;\; \text{fort et presque partout dans Q,} \\ u'_l \to u' \;\; \text{dans} \;\; L^2(Q) \;\; \text{fort et presque partout dans Q.} \end{aligned}$$

Pour $q \in \mathbb{N}^*$ fixe quelconque et $\forall l > q$, on a

$$(u''_l(t), w_q) + a(u_l(t), w_q) - \left(\int_0^t g(t-s)Au_l(s)ds, w_q\right) = (f(t), w_q) \tag{2.45}$$

De la convergence faible, on déduit que

$$(u''_l(t), w_q) \to (u''(t), w_q) \;\text{ dans }\; L^\infty(0,T;V) \;\text{ faible}(*), \tag{2.46}$$

$$a(u_l(t), w_q) \to a(u(t), w_q) \;\text{ dans }\; L^\infty\;(0,T;V) \;\text{ faible}(*), \tag{2.47}$$

$$\left(\int_0^t g(t-s)Au_l(s)ds, w_q\right) \to \left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, w_q\right) \;\text{ dans }\; L^\infty\;(0,T;V) \;\text{ faible}(*). \tag{2.48}$$

Et par conséquent par passage à la limite de (2.45) il devient

$$(u''(t), w_q) + a(u(t), w_q) - \left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, w_q\right) = (f(t), w_q) \tag{2.49}$$

comme $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$

$$(u''(t), w) + a(u(t), w) - \left(\int_0^t g(t-s)Au(s)ds, w\right) = (f(t), w) \tag{2.50}$$

Pour $v \in C(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$ donné, nous considérons le problème suivant :

$$(P_2) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au - \displaystyle\int_0^t g(t-s)Au(s)ds = \mid v \mid^{p-2} v, & \textit{dans} \quad Q = \Omega \times]0,T[, \\ v = 0, & \textit{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,T[, \\ v(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Relativement à ce problème on a :

Proposition 2.2.1. *Soit* $2 \leq p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$ *et sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Si* $(u_0, u_1) \in \mathbb{V} \times L^2(\Omega)$, *alors il existe* $T > 0$ *et une unique solution* (u) *du problème* (P_2) *telle que*

$$u \in C(0, T; \mathbb{V}), \quad u_t \in C(0, T; L^2(\Omega)).$$

Théorème 2.2.2. *Soit* $2 \leq p \leq \dfrac{2n-2}{n-2}$ *et sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Si* $(u_0, u_1) \in \mathbb{V} \times L^2(\Omega)$, *alors il existe* $T > 0$ *et une unique solution* (u) *du problème* (P) *telle que*

$$u \in C(0, T; \mathbb{V}), \quad u_t \in C(0, T; L^2(\Omega)).$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème du point fixe.

Remarque 2.1. *La preuve de la proposition (2.2.1) et le théorème (2.2.2)se trouve dans [5]*

Chapitre 3

Explosion de la solution en temps fini.

Nous donnons dans ce chapitre une conditions suffisante d'explosion de la solution pour une énergie initial assez petite.

3.1 Résultat préliminaire

On définit la fonctionnelle d'énergie E associé au problème (P) par

$$E(t) = \frac{1}{2} \parallel u_t \parallel_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) a(u(t), u(t)) + \frac{1}{2}(g \diamond u)(t) - \frac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p; \quad (3.1)$$

avec $u \in H_0^1(\Omega)$.
On note par $E(0) = \frac{1}{2} \parallel u_1 \parallel_2^2 + \frac{1}{2}a(u_0, u_0) - \frac{1}{p} \parallel u_0 \parallel_p^p$ l'énergie initiale du problème (P).

Proposition 3.1.1. *Soit u solution du problème (P). La fonctionnelle d'énergie E est strictement décroissante, de plus on a pour tout $t > 0$:*

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}(g' \diamond u)(t) - \frac{1}{2}g(t)a\left(u(t), u(t)\right) < 0. \quad (3.2)$$

Démonstration. On dérive chaque terme dans la formule (3.1)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \parallel u_t \parallel_2^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx\right] = \int_\Omega u_t u_{tt} dx. \quad (3.3)$$

Remplaçons v par u_t dans la formulation variatinnelle on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t u_{tt} dx = &- \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u\prime}{\partial x_i}dx + \\ &\int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u\prime}{\partial x_i}dxds + \int_\Omega \mid u \mid^{p-1}\mid u_t \mid dx.\end{aligned} \quad (3.4)$$

On remplacons (2.24) dans (3.4) on trouve :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t u_{tt} dx = &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u(t), u(t)) + \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u\prime}{\partial x_i}dxds + \\ &+ \int_\Omega \mid u \mid^{p-1}\mid u_t \mid dx.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Dérivons le deuxième terme :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds)a(u(t),u(t)\right)\right] = -\frac{1}{2}g(t)a(u(t),u(t))$$
$$-\frac{1}{2}a(u(t),u(t))\int_0^t g(s)ds. \tag{3.6}$$

Dérivons le troisième terme :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(g\diamond u)(t)\right] = \frac{1}{2}(g'\diamond u)(t) + \frac{1}{2}a(u(t),u(t))\int_0^t g(s)ds -$$
$$\int_0^t\int_\Omega g(t-s)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u\prime}{\partial x_i}dxds. \tag{3.7}$$

Dérivons le dernier terme :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{p}\parallel u \parallel_p^p\right] = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \mid u\mid^p dx\right] = \int_\Omega \mid u \mid^{p-1}\mid u_t \mid dx. \tag{3.8}$$

Et pour obtenir le résultat désiré on va sommer les équations (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8) et on trouve :

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}(g'\diamond u)(t) - \frac{1}{2}g(t)a\left(u(t),u(t)\right) < 0. \tag{3.9}$$

□

On définit la fonctionnelle γ par :

$$\gamma(t) = \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)a(u(t),u(t)) + (g\diamond u)(t). \tag{3.10}$$

Lemme 3.1.1. *la fonctionnelle d'énergie vérifie l'inégalité suivante :*

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\gamma(t) - \frac{1}{p}\frac{C^p}{(a_0 l)^{\frac{p}{2}}}(\gamma(t))^{\frac{p}{2}}. \tag{3.11}$$

Démonstration. D'après la définition de la fonctionnelle d'énergie E, on a :

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds)a(u(t),u(t)\right) + \frac{1}{2}(g\diamond u)(t) - \frac{1}{p}\parallel u \parallel_p^p \tag{3.12}$$

$$\geq \frac{1}{2}\gamma(t) - \frac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p . \tag{3.13}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré on trouve :

$$\parallel u \parallel_p^p \leq C^p \parallel \nabla u \parallel_2^p . \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) , \quad 1 \leq p < \infty.$$

Donc

$$-\frac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p \geq -\frac{C^p}{p} \parallel \nabla u \parallel_2^p . \tag{3.14}$$

Et

$$1 - \int_0^t g(s)ds \geq 1 - \int_0^\infty g(s)ds = l. \tag{3.15}$$

De la coercivité de $a(.,.)$, (3.10) et (3.1) on obtient :

$$a_0 l \parallel \nabla u \parallel_2^2 \leq \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) a(u(t), u(t)) \leq \gamma(t). \tag{3.16}$$

Par conséquent

$$(\parallel \nabla u \parallel_2^2)^{\frac{p}{2}} \leq \left(\frac{1}{a_0 l}\gamma(t)\right)^{\frac{p}{2}} . \tag{3.17}$$

D'ou

$$\parallel \nabla u \parallel_2^p \leq \frac{(\gamma(t))^{\frac{p}{2}}}{(a_0 l)^{\frac{p}{2}}} \tag{3.18}$$

De (3.14) et (3.18) on obtient :

$$-\frac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p \geq \frac{-1}{p} \frac{C^p}{(a_0 l)^{\frac{p}{2}}} (\gamma(t))^{\frac{p}{2}}. \tag{3.19}$$

Remplaçons (3.19) dans (3.12) on obtient le résultat désiré .

□

On définit la fonction G par :

$$G(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{C^2}{a_0 l}\right)^{\frac{p}{2}} \lambda^p. \tag{3.20}$$

Par dérivation, on obtient

$$G'(\lambda) = \lambda - \left(\frac{C^2}{a_0 l}\right)^{\frac{p}{2}} \lambda^{p-1}. \tag{3.21}$$

$$G'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_0 = \left(\frac{C^2}{a_0 l}\right)^{\frac{-p}{2(p-2)}} . \tag{3.22}$$

- G est strictement croissante sur $[0, \lambda_0[$.
- G est strictement décroissante sur $]\lambda_0, \infty[$. et $G(\lambda) \to -\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$
- G admet une seule valeur maximum $G(\lambda_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\lambda_0^2 = E_0$ en λ_0.

Lemme 3.1.2. *Supposons que les données initiales :*

$$E(0) < E_0, \qquad \| \nabla u_0 \| > \lambda_0.$$

Alors, il existe une constante $\lambda_1 > \lambda_0$ telle que

$$(\gamma(t))^{\frac{1}{2}} > \lambda_1 \quad et \qquad \| u(t) \|_p > C_* \lambda_1, \qquad \forall t \in]0, T[,$$

avec $C_* = p^{-\frac{1}{p}} \left(\dfrac{1}{a_0 l}\right)^{\frac{1}{2}} C.$

Démonstration. comme $E(0) < E_0$ donc il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $G(\lambda_1) = E(0)$. On choisit $\lambda_2 = \| \nabla u_0 \|_2$. Par (3.11) et (3.18) nous obtenons $G(\lambda_2) \leq E(0) = G(\lambda_1)$. Ce qui implique que $\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Montrons que maintenant $(\gamma(t))^{\frac{1}{2}} > \lambda_1$.
supposons le contraire c.à.d $(\gamma(t))^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1$.
Par continuité de la fonction γ on peut choisir t_0 tel que $(\gamma(t_0))^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1$, mais on a d'après (3.11) que :

$$E(t_0) \geq G((\gamma(t_0))^{\frac{1}{2}}) \geq G(\lambda_1) = E(0).$$

Contradiction car la fonctionnelle d'énergie est décroissante.
Montrons que $\| u(t) \|_p > C_* \lambda_1$, on a $E(t) \geq \frac{1}{2}\gamma(t) - \frac{1}{p} \| u(t) \|_p^p$, c' est équivalent à dire

$$\frac{1}{p} \| u(t) \|_p^p \geq \frac{1}{2}\lambda_1^2 - E(0) = \frac{1}{2}\lambda_1^2 - G(\lambda_1).$$

Donc

$$\frac{1}{p} \| u(t) \|_p^p \geq \frac{1}{p} \left(\frac{C^2}{a_0 l}\right)^{\frac{p}{2}} \lambda_1^p.$$

Finalement on conclut que

$$\| u(t) \|_p \geq C_* \lambda_1.$$

□

On définit la fonctionnelle H par

$$H(t) = E_0 - E(t). \tag{3.23}$$

Lemme 3.1.3. *Soit u solution du problème (P) .Alors pour tout $t \in [0, T[$,on a*

$$\| u(t) \|_p^s \leq C \left(a(u(t), u(t)) + \| u(t) \|_p^p \right), \tag{3.24}$$

pour tout $2 \leq s \leq p$ et C est une constante positive.

Démonstration. Si $\| u \|_p \leq 1$ alors, on déduit de l'inégalité de Poincaré et la coercivité de $a(.,.)$ que :

$$\| u \|_p^s \leq \| u \|_p^2 \leq \lambda^2 \| \nabla u \|_2^2 \leq C \left(a(u(t), u(t)) + \| u \|_p^p \right). \tag{3.25}$$

Si $\| u \|_p > 1$, alors $\| u \|_p^s \leq \| u \|_p^p$. se qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.1.1. *Soit u solution du problème (P), alors pour tout $t \in [0, T[$,on a*

$$\| u \|_p^s \leq C \left(H(t) + a(u(t), u(t)) + \| u_t \|_2^2 + (g \diamond u)(t) \right), \tag{3.26}$$

pour tout $2 \leq s \leq p$ et C est une constante positive.

3.2 Explosion en temps fini

Lemme 3.2.1. *la fonctionnelle H est croissante et on a :*

$$0 < H(0) < H(t) \leq \frac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p, \qquad \forall t \in [0, T[.$$

Démonstration. on a pour tout $t > 0$

$$\frac{d}{dt}H(t) = -\frac{d}{dt}E(t) > 0,$$

alors H est croissante, de plus $0 < H(0) \leq H(t)$.
D'après (3.13) on a

$$E_0 - E(t) \leq \frac{-1}{2}\gamma(t) + \frac{1}{p} \parallel u(t) \parallel_p^p + E_0, \tag{3.27}$$

utilisant le lemme (3.1.2) on obtient :

$$E_0 - E(t) \leq \frac{-1}{2}\lambda_0^2 + \frac{1}{p}\lambda_0^2 + \frac{1}{p} \parallel u(t) \parallel_p^p + E_0,$$

et puisque $E_0 = \frac{1}{2}\lambda_0^2 - \frac{1}{p}\lambda_0^2$ on obtient :

$$H(t) \leq \frac{1}{p} \parallel u(t) \parallel_p^p. \tag{3.28}$$

□

On définit la fonction auxiliaire L suivante,pour ϵ assez petit à choisir ultérieurement :

$$L(t) = H^{(1-\sigma)}(t) + \epsilon \int_\Omega u u_t dx; \tag{3.29}$$

où $\quad 0 < \sigma < \dfrac{p-2}{2p}$.

Remarque 3.1. *La fonction L est une petite perturbation de l'énergie.*

Lemme 3.2.2. *Soit u solution du problème (P),la fonction L est croissante et on a :*

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \epsilon k \left[\parallel u_t \parallel_2^2 + H(t) + a(u(t), u(t)) + (g \diamond u)(t)\right], \tag{3.30}$$

où k est une constante positive.

Démonstration. Dérivons L par rapport à t :

$$L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}H' + \epsilon \parallel u_t \parallel_2^2 + \epsilon \int_\Omega u u_{tt} dx. \tag{3.31}$$

Ajoutons et soustrayons $p\epsilon H(t)$ et replaçons $\epsilon \int_\Omega u u_{tt} dx$ par ça valeur on trouve :

$$\begin{aligned} L'(t) = \quad & (1-\sigma)H^{-\sigma}H' + \epsilon \parallel u_t \parallel_2^2 - \epsilon a(u(t),u(t)) + \epsilon \parallel u \parallel_p^p + p\epsilon H(t) - p\epsilon E_0 \\ & -\epsilon \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} dx ds + \frac{p\epsilon}{2} \parallel u_t \parallel_2^2 \\ & + \frac{p\epsilon}{2} \left(1 - \int_0^t g(s)ds) a(u(t),u(t)\right) + \frac{p\epsilon}{2}(g \diamond u)(t) - \epsilon \parallel u \parallel_p^p . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Et comme $0 < \sigma < \dfrac{p-2}{2p}$ alors

$$(1-\sigma)H^{-\sigma}H' - p\epsilon E_0 \geq 0, \tag{3.33}$$

avec ϵ est petit.
Majorant le terme $\displaystyle\int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} dx ds$.
Utilisons l'inégalité de Young, la coercivité de $a(.,.)$ et les hypothèses sur la fonction g :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} dx ds = \\ = & \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} dx ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} (\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}) dx ds \\ \leq & (1-l)a(u(t),u(t)) + \mu \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\int_0^t a_{ij}(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} ds \right)^2 dx + \\ & + \frac{1}{4\mu} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s) \left(\frac{\partial u(s)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(t)}{\partial x_i} \right) ds \right)^2 dx \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}&\leq (1-l)a(u(t),u(t)) + \frac{n}{4a_0\mu}(1-l)(g\diamond u)(t) + \\ &+ \frac{\mu}{a_0}\left(\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j}^{n} \parallel a_{ij} \parallel_{\infty}^{2}\right) a(u(t),u(t)) \qquad (3.35)\\ &\leq \left[(1-l) + \frac{\mu a_1}{a_0}\right] a(u(t),u(t)) + \frac{n}{4a_0\mu}(1-l)(g\diamond u)(t).\end{aligned}$$

Pour tout $\mu > 0$ et

$$a_1 = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j}^{n} \parallel a_{ij} \parallel_{\infty}^{2} .$$

De (3.33) et (3.35) il résulte :

$$L'(t) \geq \epsilon\left[(\frac{p}{2}+1) \parallel u_t \parallel_2^2 + pH(t) + \left[(1-l) + \frac{\mu a_1}{a_0}\right] a(u(t),u(t)) + \frac{n}{4a_0\mu}(1-l)(g\diamond u)(t)\right]. \qquad (3.36)$$

D'où la conclusion :

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \epsilon k[\parallel u_t \parallel_2^2 + H(t) + a(u(t),u(t)) + (g\diamond u)(t)], \qquad (3.37)$$

où k est le minimum de chacun des facteurs du terme à droite .

□

Lemme 3.2.3. *Soit u solution du problème (P) ; on a :*

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq \alpha\left[\parallel u_t \parallel_2^2 + H(t) + a(u(t),u(t)) + (g\diamond u)(t)\right], \qquad (3.38)$$

avec $0 < \sigma < \dfrac{p-2}{2p}$ *et α est une constante positive.*

Démonstration. Puisque L et H sont strictement positive alors ;

$$L(t) \leq H^{1-\sigma}(t) + \epsilon\left|\int_\Omega u u_t dx\right|. \qquad (3.39)$$

On pose $r = \dfrac{1}{1-\sigma}$ et exploitons l'inégalité suivante :

$$(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r), \qquad (3.40)$$

pour tout $a > 0, b > 0,$ *et* $r > 1$.

$$L^r(t) \leq C_1\left(H(t) + \left|\int_\Omega u u_t dx\right|^r\right), \qquad (3.41)$$

où $C_1 = 2^{r-1} \max\{1, \epsilon\}$.
Pour $p > 2$, en utilisant les inégalités de Hölder et Young, on obtient :

$$\left|\int_\Omega uu_t dx\right|^r \leq \| u \|_2^r \| u_t \|_2^r \leq C_2 \left(\| u \|_p^{\mu r} + \| u \|_2^{\theta r}\right). \tag{3.42}$$

où $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ et C_2 dépend de Ω, μ, θ. □

On prend $\theta = 2(1-\sigma)$,on obtient alors $\mu r = \frac{2}{1-2\sigma} \leq p \quad car\, 0 < \sigma < \frac{p-2}{2p}$. conséquent (3.42) devient :

$$\left|\int_\Omega uu_t dx\right|^r \leq C_2 \left(\| u \|_p^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \| u_t \|_2^2\right), \tag{3.43}$$

et par le lemme (3.1.3),(3.43) devient :

$$\left|\int_\Omega uu_t dx\right|^r \leq C_3 \left(a(u,u) + \| u \|_p^p + \| u_t \|_2^2\right), \tag{3.44}$$

Finalement on conclut par le corollaire(3.1.1)

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq \alpha \left[\| u_t \|_2^2 + H(t) + a(u(t), u(t)) + (g \diamond u)(t)\right], \tag{3.45}$$

où α est une constante positive.

Théorème 3.2.1. *Soit u la solution du notre problème étudié, alors cette solution s'explose en temps fini, c.à.d, il existe $T^* < \infty$ telle que*

$$\lim_{t \to T^*} \left[\| u_t \|_2^2 + H(t) + a(u(t), u(t)) + (g \diamond u)(t)\right] = +\infty \tag{3.46}$$

Démonstration. Par contradiction, nous supposons que la solution est globale en temps, alors pour chaque $T > 0$ fixé, il existe une constante C telle que pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\| u_t \|_2^2 + H(t) + a(u(t), u(t)) + (g \diamond u)(t) \leq C \tag{3.47}$$

Combinons (3.30) et (3.38) il résulte :

$$L'(t) \geq \frac{\epsilon K}{\alpha} L^{1-\sigma}(t) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.48}$$

En intégrant l'inégalité précédente de 0 à t, on obtient

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{1}{1-\sigma}}(0) - k\epsilon\sigma t/[\alpha(1-\sigma)]} \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{3.49}$$

Ainsi L s'éxplose en temps fini

$$T^* \leq \frac{\alpha(1-\sigma)}{k\epsilon\sigma L^{\frac{1}{1-\sigma}}(0)}. \tag{3.50}$$

Comme l'estimation (3.49) est Vérifiée sur $[\,0,T]$ pour $T>0$ fixé,alors on peut choisir T de sorte que $T^{*}<T$.

De plus, on obtient de (3.38) que :

$$\lim_{t\to T^{*}}\Big[\parallel u_t\parallel_2^2+H(t)+a(u(t),u(t))+(g\diamond u)(t)\Big]=+\infty, \tag{3.51}$$

ce qui est en contradiction avec (3.47). Ainsi, la solution du notre problème s'explose en temps fini. $\square$

conclusion

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un problème hyperbolique viscoelastique pour un opérateur fortement elliptique avec une source non linéaires de type polynomiale.
Nous avons démontré l'existence et l'unicité de solution de ce problème ; nous avons terminé par exhiber des conditions suffisantes garantissant l'explosion en temps fini de solution.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Berrimi, S. A. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Analysis TMA 64 (2006) 2314–331.

[3] Y. Boukhatem, Étude de quelques problèmes aux limites hyperboliques semi linéaires : Existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini des solutions. Thèse de doctorat, université de Sétif, 2014.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications.Masson, Paris, 1983.

[5] H.Chellaoua, Existence globale et comportement asymptotique de solution d'une équation d'onde viscoélastique. Mémoire de master,université de Laghouat, 2017.

[6] V. Georgiev and G. Todorov, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term,J. Differential Equations 109 (1994) 295–308.

[7] A. Kolmogorov, S. Fomine, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Mir, Moscou, 1973.

[8] Laurent Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris, 1970.

[9] G. Li, Y. Sun, W. J. Liu, Global existence and blow-up of solutions for a strongly damped Petrovsky system with nonlinear damping, Applicable Analysis 91 (3) (2012) 575–586.

[10] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod Paris (1969).

[11] J. L. Lions and E. Magenes,Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, 2,Dunod Paris (1968).

[12] W. J. Liu, General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source, Nonlinear Analysis 73 6 (2010) 1890–1904.