الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications

Présenté par :

Samira Mounia Zahzouh

THEME

CALCUL FRACTIONNAIRE CONFORMABLE DE ROSHDI KHALIL

Soutenance publique devant le jury composé de :

Ahcene Boukehila	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
Mohammed Bassoudi	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examinateur
Nawel Abdesselam	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur
Omar Choucha	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Invité

Année Universitaire : 2024-2025

Remerciements

Toutes les louanges reviennent à Allah en premier, pour la guidance, la force, la puissance de l'esprit et la patience qui m'ont permis d'accomplir ce travail.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude sincère et infinie à ma directrice Dr. Nawel ABDESSELAM, pour son temps précieux, ses suggestions pertinentes et ses conseils précieux. Sans son soutien et ses encouragements, ce travail n'aurait pas été possible.

Mes sincères remerciements au président du jury, Dr Ahcene BOUKEHILA, pour avoir accepté de faire le rapport sur ce mémoire.

Mes sincères remerciements au Dr Mohammed BASSOUDI pour avoir accepté de rapporter ce mémoire.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Omar CHOUCHA, pour sa contribution à ma formation.

Un remerciement particulier au Pr Mustapha BOUAKKAZ pour leurs précieux conseils et informations.

À mes honorables professeurs de département de mathématiques, que je suis fiére d'avoir eus comme enseignants, et que je remercie pour leurs efforts. A tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail. Enfin j'adresse mes remerciements à toute personne qui m'a aidée dans mon parcours académique, ne serait-ce qu'avec un mot aimable ou un encouragement.

Dédicace

Je dédie ce travail :

À celle qui s'est toujours sacrifiée pour moi, mon exemple éternel, ma source d'inspiration, ma vie et mon bonheur, celle qui ma soutenue et encouragée tout au long de mes études à toi, ma Maman.

À celui qui a toujours été la pour moi, qui ma porté, guidé et encouragé sans relâche, à toi, mon cher Papa.

À mon cher frère, et mes Sœurs Tout mon amour et mon respect, du fond du cœur.

À ma chére amie qui est comme une sœur pour moi, Sirine, et à son époux Taki, qui est comme un frère, que ce message soit le témoin de l'affection, de l'estime et du respect profonds que je vous porte. Je prie Dieu Tout-Puissant de vous protéger et de vous accorder réussite et bonheur.

À tous ceux qui j'aime et qui m'aiment.

MOUNIA SAMIRA ZAHZOUH

ملخص

في هذه المذكرة، تطرقنا إلى أعمال رشدي خليل ولاخرين المتعلقة بالتعريف الجديد للمشتقة الكسرية المطابقة، حيث قام المؤلفون بدراسة حل المعادلات التفاضلية الكسرية المطابقة استناداً إلى صيغة أبيل وصيغة رونسكيان. ولفهم هذه الأعمال بشكل أفضل، اعتمدنا على أكثر التعريفات شيوعا للمشتقات الكسرية الكلاسيكية، وهي:مشتقة غرونوالد–ليتنيكوف ، ومشتقة ريمان–ليوفيل ، ومشتقة كابوتو .

الكلمات المفتاحية: حساب الكسري، المعادلة الكسرية، حساب الكسري المطابق، رونسكيان، صيغة آبل.

Abstract

In this memoire, we presented the works of Roshdi Khalil and others concerning the new definition of conformable derivatives. The resolution of the corresponding conformable fractional differential equations was studied using Abel's formula and the Wronskian formula. To do so, we relied on the most commonly used fractional derivatives, namely those of Grünwald–Letnikov, Riemann–Liouville, and Caputo.

Keywords : Fractional calculus, fractional equation, conformable fractional calculus, Wronskian, Abel formula.

Résumé

Dans ce mémoire, on a présenté les travaux de Roshdi Khalil et les autres concernant la nouvelle definition de conformable. Les auteurs ont été étudie la résolution des équation différentielles fractionnaire conformable correspondantes en utilisant la formule d'abel et la formule de Wronskien.Pour comprendre ces travaux, on a besoin de connaitre les définitions des dérivées fractionnaires classiques les plus utilisées celles de Grünwald-Letnikov, de Riemann–Liouville et de Caputo.

Mots clés : Calcul fractionnaire, équation fractionnaire, calcul fractionnaire conformable, Wronskian, formule d'Abel.

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nomber rèels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues.
$C^n([a,b])$	L'espace des fonctions continument différentiables sur $[a,b]$.
$\Re(\alpha)$	Partie réelle de α.
Γ	Fonction Gamma.
β	Fonction Bêta.
RL	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.
E_α	Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.
$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$	Dérivé fractionnaire conformable d'ordre α.
$I^{(\alpha)}$	Intégrale fractionnaire conformable d'ordre α.
$E_{\alpha,\beta}$	Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
${}_aD_t^\alpha$	Dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville$(\alpha \in C(\Re(\alpha) \leq 0))$.
${}_a^GD_t^\alpha$	Dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov $(\alpha \in C(\Re(\alpha) \leq 0)$.
${}_a^CD_t^\alpha f$	Dérivées fractionnaire au sens de Caputo $(\alpha \in C(\Re(\alpha) \leq 0))$.
(I_a)	Intégrales fractionnaire de Riemann- Liouville.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche des mathématiques qui étudie les dérivées et les intégrales d'ordre fractionnaire (réel ou complexe). Ce domaine a une longue histoire, et ces origines remontent au XVII^{e} siècle, lorsque Newton et Leibniz ont été proposé les bases du calcul différentiel et intégral.
Leibniz a été introduit le célèbre symbole $\frac{d^n y}{dx^n} = d^n y$ pour désigner la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f, et dans une lettre adressée à Guillaume de l'Hôpital datée du 30 septembre 1695, il pose implicitement l'hypothèse que $n \in \mathbb{N}$, L'Hôpital lui a alors demandé : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? . Leibniz a répondu" Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles"[5]. Plusieurs grands mathématiciens ont été contribué au développement de ce domaine comme Euler (1738), Laplace (1812), Liouville (1832 ; 1837) et Caputo (1967), ainsi que Grùnwal (1867) et Letnikov (1868).
Ces dernières décennies, le calcul fractionnaire a trouvé des applications dans plusieurs domaines tels que physiques, mécanique, chimie, médecine, finances, biologie voir ([2, 3, 4, 8]).

Les dérivées fractionnaires les plus connues sont la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo qui sont définies pour $n-1 \leq \alpha < n$ par les formules suivantes respectivement :

$$_{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx. \qquad _{C}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx.$$

Mais il faut signale qui'il existe plusieurs définitions dans le calcul fractionnaire. Sans rentre de donner toutes les dérivées fractionnaires puisque il existe multidéfinitions.

En 2014, les auteurs [5] ont été introduit une nouvelle définition simple appelée " dérivée fractionnaire conformable ". Cette dermiére est basée sur la limite et conserve plusieurs propriétés similaires à celles de la dérivée usuelle. De plus, la dérivée fractionnaire conformable est utilisée pour résoudre et simplifier certaines équation différentielles fractionnaires conformables.
Notre objectif pour les dérivées fractionnaires a commencé lorsque l'auteur S. Momani a été

montré comment résoudre une équation différentielle fractionnaire du type

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} + y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Gamma(2.5)} x^{\frac{3}{2}}; \quad y(0) = 0$$

où $y^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ représente la dérivée fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ de y. La solution exacte de cette équation a été trés difficile d'obtenir à l'aide des définitions classiques, les auteurs ont été utilisé la nouvelle définition de la dérivée fractionnaire, pour facilité et simplifier certains calculs .

Le reste de notre travail va developper plusieurs points qui sera organise comme suit :

Dans le chapitre 1, nous rapplons quelques notions utilisable, l'espace fonctionelle et les fonction specifique, ainsi que les notions des intégrales et dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

Dans le chapitre 2, nous introduisons la définition de la dérivée fractionnaire conformable, ainsi que quelques propriétés associées et l'intégrale fractionnaire conformable.

Dans la 3éme chapitre, nous présentons des applications sur les équations différentielles fractionnaires conformables, en utilisant de nouveaux outils analytiques tels que le wronskien fractionnaire et une formule d'Abel.

On termine le travail par une conclusion.

Chapitre 1

Rapples et notions

DAns ce chapitre, nous rappelons quelques élémentaires et notions de base du calcul fractionnaire, notamment les fonctions spécifiques utilisées pour l'intégration fractionnaire. Nous commençons par présenter quelques exemples d'applications de cette théorie du calcul fractionnaire dans certains domaines scientifiques.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette partie, nous donnons quelques notions préliminaire et résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle et pour d'autre détail on peut consulter [3], qui constitue un outil essentiel pour le calcul fractionnaire.

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables et fonctions définies par des intégrales

1.1.2 fonctions définies par des intégrales

Espaces des fonctions intégrables

Nous introduisons les espaces des fonction intégrables, qui jouent un rôle fondamental en analyse fonctionnelle et la théorie de l'intégration.

1.1.3 Espace $L^P(\Omega)$

Définition 1.1.1 [8] *Soit un intervalle $\Omega = (a, b)$ borné ou non borné de $\mathbb{R}$.*

1. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des classes de fonctions réelles mesurables f sur Ω, vérifiant*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

De plus $L^P(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. *Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque par tout sur Ω, c'est-à-dire*

$$L_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; f \quad \textit{est mesurable et} \ \exists \ M \geq 0; \ \ |f(x)| \leq M \quad \textit{p.p sur} \ \Omega\},$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout sur Ω, de plus est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \ \textit{p.p sur} \ \Omega\}.$$

On va passer d'étudier l'espace L^1 qui fait une reférence à l'espace fonctionnel utilisé en mathématique, qui est composé de toutes les fonctions intégrables au sens de lebesgue sur un certain ensemble mesurable.

1.1.4 Espace L^1

Pour un ensemble mesurable Ω donnée $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale de la valeur absolue de f sur Ω est finie.

En d'autres termes, si $f \in L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega |f(x)| \, dx < \infty.$$

Après avoir introduit les espaces des fonctions intégrables, on va passer à les fonctions définies par des intégrales.

Fonctions définies par des intégrales

Certaines fonctions sont définies par des intégrales. nous analysons leurs propriétés et leur dérivation.

1. Soit $\Psi(x) = \int_a^x f(t)dt$, la fonction f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, a est un nombre fixé de dommaine D. La fonction Ψ est continue et dérivable si f est continue.
2. Soit $\Psi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$, cette fonction est définie sur tout domaine D. Elle est continue, dérivable et intégrable sur D,
   $*$ La dérivée de Ψ est donnée par la formulle :
   $$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x, t)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$
   $*$ L'íntégrale est également définie par le théoréme de Fubini.

   Théorème 1.1.1 *(Fubini) soit $f \in L^1([a, b][c, d])$ une fonction mesurable. Alors*
   $$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)dt\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)dx\right) dt$$
3. La fonction $\psi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t)dt$,
   cette fonction est définie sur un domaine D. On suppose que $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ dérivables sur D.
   La dérivée de ψ définit comme suit :
   $$\frac{d}{dx}\psi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt + f(x, \beta(x))\grave{\beta}(x) - f(x, \alpha(x))\grave{\alpha}(x)$$

1.1.5 Espaces Des Fonctions Continues

Définition 1.1.2 [3] *On désigne par $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues dans Ω c'est à dire :*

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, f \ \text{continue} \} .$$

L'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega)$ est un espace vectoriel normé par :

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Théorème 1.1.2 (Complétude) *L'espace $\mathcal{C}(\Omega; \|.\|_{\mathcal{C}})$ est un espace de Banach .*

1.1.6 L'espace $\mathcal{C}^n(\Omega)$

Définition 1.1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\mathcal{C}^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f telles que $f^{(n)}$ existe et continue sur Ω .*

Théorème 1.1.3 (Complétude) *L'espace $\mathcal{C}^n(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}.$$

Passons maintenant à la définition de la continuité uniforme, qui représente une notion plus forte que la continuité.

1.1.7 Continuité uniforme et bornée

Définition 1.1.4 [16] *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}$, on dit que f est uniformément continue sur Ω si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \Omega, \text{ si } \|x - y\| < \delta, \text{ alors } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Définition 1.1.5 [16] *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue et bornée sur Ω, si elle est uniformément continue sur Ω et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$\forall x \in \Omega, |f(x)| \leq M.$$

Remarque 1.1.1 *Toute fonction uniformément continue et bornée est uniformément continue, mais la réciproque n'est pas toujours vrai en général.*

Maintenant nous passons aux fonctions spécifiques.

1.2 Fonctions spécifiques

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application.

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire qui généralise le factoriel n !

Définition 1.2.1 [13] *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)$ est définie par l'intégrale suivante :*
Si $\Re(\alpha) > 0$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.1}$$

Avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_{+\infty}) = +\infty$, $\Gamma(\alpha)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < \alpha \leq 1$.

Remarque 1.2.1 *La fonction Gamma peut être définie aussi par la limite*

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n! n^\alpha}{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}, \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Après avoir définir la fonction Gamma, nous passons à ses propriétés de base.

Quelques propriétés de la fonction Gamma [9, 13]

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante :

1.
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \;\; \Re(\alpha) > 0. \tag{1.2}$$

Démonstration pour démontrer cette proposition, nous allons utiliser l'intégration par parties

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(\alpha+1)-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt \\
&= [-t^\alpha e^{-t}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha+1} dt \\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

□

2. La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel, car

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

.

En effet : $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) &&= 1! \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) &&= 2.1! = 21 \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) &&= 3.2! = 321 \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) &&= n(n-1)! = n!.
\end{aligned}$$

□

On va maintenant découvrir la fonction Bêta.

1.2.2 Fonction Bêta

La fonction Bêta, qui joue un rôle essentiel dans les applications mathématiques qui et liée à la fonction Gamma par une relation mathématique. Elle est définie comme suit :

Définition 1.2.2 [13] *La fonction Bêta d'Euler notée $B(x,y)$ est définie par l'intégrale suivant :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \Re(x) > 0, \Re(y) > 0). \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.1 *la fonction Bêta est raccorder avec la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.4}$$

Quelques propriétés de la fonction Bêta [9, 13]

1. La fonction Bêta est symétrique : $B(x,y) = B(y,x)$.

   En effet, on a :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

Posons t=1-μ. Alors :

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 (1-\mu)^{x-1}(1-1+\mu)^{y-1}d\mu \\ &= \int_0^1 \mu^{y-1}(1-\mu)^{x-1}d\mu \\ &= B(y,x). \end{aligned}$$

□

2. $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\theta d\theta$.
   En effet, on a :
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$
   Posons $t = \sin^2\theta$, il vient que
$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\sin^{2(x-1)}\theta\cos^{2(y-1)}\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t^{2x-1}\theta\cos t^{2y-1}\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\theta d\theta. \end{aligned}$$

□

Après avoir étudi la fonction Bêta, on va passer à la fonction Mittag-Leffler.

1.2.3 Fonction Mittag-Leffter

Cette derniére est une généralisation de la fonction exponentielle qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, cette fonction utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Définition 1.2.3 [13] *La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1903, et désignée par la fonction suivante :*

$$E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)}. \tag{1.5}$$

Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953-1954 et elle définie par un développement en série comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad (\Re(\alpha)>0, \Re(\beta)>0), \quad x\in\mathbb{C}.$$

Cas particulier

A partir de la relation (1.5), on trouve les relations suivantes :

1. $\alpha = \beta = 1$, on obtient
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$
2. pour $\alpha = 1, \beta = 2$, on obtient
$$E_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1}{t}$$
3. pour $\alpha = 1, \beta = 3$, on obtient
$$E_{1,3}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} = \frac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

   et en général
$$E_{1,p}(t) = \frac{1}{t^{p-1}}\left\{e^t - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{t^k}{k!}\right\}$$

Les cosinus et les sinus hyperboliques sont aussi des cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler (1.5)
$$E_{2,1}\left(t^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t).$$
$$E_{2,2}\left(t^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(t)}{t}.$$

1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Le but de cette partie est d'introduire les trois plus importantes approches du calcul fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov, et au sens de Riemann-Liouville, et au sens de Caputo, elles sont les plus utilisées ainsi que la relation entre ces deux approches de Riemann-Liouville et au sens de Caputo .

1.3.1 Dérivée et intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette dérivée est de généralisation la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Soit f la fonction continue sur $[a, b]$, la dérivée première de la fonction f au point t est définie par :

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

Par dérivation successive de la fonction f, on obtient une généralisation de la formule à l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh),$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

La formule représente la dérivée d'ordre entier n, si n est positif et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul.

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)\ldots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}.$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh), \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Les formules définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α, et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f, où f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Si f est de classe C^n, des intégrations par parties et nous permit d'écrire :

$${}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{(-1)}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

La formule est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t), (k = 1, 2, \dots, m)$ sont continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante, $m - 1 < \alpha < m$.

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville

1. **Intégrale d'ordre arbitraire.**
   Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. Une primitive de f est donnée par l'expression
   $$\left(I_a^1 f\right)(x) = \int_a^t f(t)dt.$$
   Pour une primitive seconde, on aura
   $$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds.$$
   En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire
   $$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt.$$
   En itérant, on arrive à :
   $$\left(I_a^n f\right)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Définition 1.3.1 [7, 13] *Soient $\Omega = [a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie continue sur $[a, b]$. On appelle intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville de f la fonction :*

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \qquad (1.6)$$

où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction Gamma, et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$.
On note I_{a+}^{α} par I_a^{α} l'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville.

Proposition 1.3.1 *Si f est intégrable (i.e.$f \in L^1([a, b])$) et $I_a^{\alpha} f$ existe, alors $I_a^{\alpha} f \in L^1([a, b])$.*

Démonstration En introduisant la définition et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)|\,dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t)|dtdx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f(t)|\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}dxdt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f(t)|\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}dxdt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^\alpha dt \\
&\leq \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(t)|dt.
\end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a,b])$, la dernière quantité est finie, ce qui établit le résultat désiré. □

Exemple 1.3.1 *L'intégrale de $f(t) = t^\beta$ au sens de Riemann-Liouville. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 1$, alors on a :*

$$I_\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau. \tag{1.7}$$

En effectuant le changement de variable $\tau = ts$, où $s = 0$ quand $\tau = 0$ et $s = 1$ quand $\tau = t$, et $d\tau = t\,ds$, alors (1.7) devient :

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-ts)^{\alpha-1} f(ts)tds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [t(1-s)]^{\alpha-1} t^\beta s^\beta ds \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{(\beta+1)-1} ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.3) puis la relation (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Donc, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par :

$$I_\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \tag{1.8}$$

En particulier, la relation (1.8) *montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante C est donnée par :*

$$I_\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha.$$

Proposition 1.3.2 [2] *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on a :*

$$I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(x)\right) = I_a^\beta \left(I_a^\alpha f(x)\right) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \tag{1.9}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

Démonstration Supposons d'abord que $f \in L^1([a,b])$, on a :

$$\begin{aligned}\left[I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left(I_a^\beta f\right)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left[\int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt\right] ds.\end{aligned}$$

En vertu de la proposition (1.3.1), les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a,b]$. Le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$\left[I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds\right] dt.$$

En effectuant le changement de variable $s = t + (x-t)y \quad (0 \leq y \leq 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left[I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \\ &= \left[I_a^{\alpha+\beta} f\right](x).\end{aligned}$$

□

Maintenant, on va parler sur les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville.

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouville

Définition 1.3.2 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f définie sur $[a,b]$ par :*

$$D_{a+}^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha} f\right)(x) \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \tag{1.11}$$

Où $n = [\alpha] + 1$, $x \in [a, b]$.

On note D^{α}_{a+} *par* D^{α}_{a} *dérivée fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville.*

Remarque 1.3.1 *Pour* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *:*

$$D^n_a f(x) = f^{(n)}(x), \tag{1.12}$$

où $f^{(n)}$ *désigne la dérivée usuelle d'ordre* n *de* f*.*

Si $0 < \alpha < 1$*, alors :*

$$D^{\alpha}_a f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt. \tag{1.13}$$

Appliquons maintenant cette définition sur la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$ *pour illustrer son effet :*

Exemple 1.3.2 *Soit* $f(x) = (x-a)^{\beta}$*,* $x \in [a, b]$*, avec* $\beta > -1$*. Par définition :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_a f(x) &= D^n I^{n-\alpha} f(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\left(I^{n-\alpha}(x-a)^{\beta}\right)\right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(x-a)^{n-(\alpha-\beta)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Cas particulier $\beta = 0$

$$D^{\alpha}_a 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

La derivee fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(t) = C$ *n'est pas nulle.*

Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 1.3.3 1. *Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de R-L existent, pour* c_1 *et* $c_2 \in \mathbb{R}$*, alors :* $D^{\alpha}_a(c_1 f + c_2 g)$ *existe, et on a :*

$$D^{\alpha}_a(c_1 f + c_2 g)(x) = c_1 D^{\alpha}_a f(x) + c_2 D^{\alpha}_a g(x).$$

2. En général

$$D^{\alpha}(D^{\beta} f(t)) \neq D^{\alpha+\beta} f(t).$$

Démonstration Par définition de la dérivée fractionnaire au sens de R-L, on a :

1.

$$\begin{aligned}
D_a^{\alpha}(c_1 f + c_2 g)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(c_1 f + c_2 g)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(c_1 f(t) + c_2 g(t))dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} c_1 f(t)dt + \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} c_2 g(t)dt\right] \\
&= c_1 \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\
&+ c_2 \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt \\
&= c_1 D_a^{\alpha} f(x) + c_2 D_a^{\alpha} g(x).
\end{aligned}$$

2. On a :

$$D^{\alpha}(D^{\beta} f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\beta+k} f(0)\, t^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)},$$

et

$$D^{\beta}(D^{\alpha} f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{\alpha+k} f(0)\, t^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)}.$$

Par suite, les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\alpha = \beta$ et $D^{\beta+k} f(0) = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$, et $D^{\alpha+k} f(0) = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$.

$\square$

Proposition 1.3.4 *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n-1 < \alpha < n$, et $m-1 < \beta < m$ tels que $n, m \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

1. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a,b])$ l'égalité :*

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x), \tag{1.15}$$

est presque partout sur $[a,b]$.

2. *S'il existe une fonction $\varphi \in L^1([a,b])$ telle que $f = I_a^{\alpha}\varphi$, alors :*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = f(x) \tag{1.16}$$

presque pour tout $x \in [a,b]$.

3. *Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $D_a^{\alpha} f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existent, alors :*
$$D_a^k(D_a^{\alpha} f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x). \tag{1.17}$$

Démonstration voir [13]

1.3.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Malgré l'importance du rôle joué par la dérivation fractionnaire selon Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo constitue une alternative à celle de Riemann-Liouville, en particulier dans les applications physiques et ingénierique, telles que les modéles liés à la visco-élasticité et autres, qui nécessitent les conditions initiales .

Définition 1.3.3 [13] *Soit $\alpha > 0$ et $f \in C^n([a,b])$. On appelle dérivée de f au sens de Caputo à gauche la fonction définie par :*
$$^cD_{a+}^{\alpha} f(x) = {}^cD_a^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt. \tag{1.18}$$
Avec $n \in \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.
Cette définition, nous permet d'introduire la remarque suivante, qui précise une propriété importante de la derivée fractionnaire.

Remarque 1.3.2 *Selon la définition, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]n-1, n[$ est obtenue en appliquant de $I_a^{n-\alpha}$suivi d'une dérivation classique d'ordre n, c'est-à-dire $\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha}\right)$.*
Alors que la dérivée fractionnaire de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations, c'est-à-dire, $\left(I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\right)$.

Théorème 1.3.1 *Pour $n-1 \leq \alpha \leq n$, si $f(x) \in \mathcal{C}^n([a,b])$ la dérivée $({}^cD_{a^+}^{\alpha} f)(x)$ existe presque partout sur $[a,b]$.*

1. *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $({}^cD_{a^+}^{\alpha} f)(x)$ et $({}^cD_{b^-}^{\alpha} f)(x)$ sont représentés par*
$$({}^cD_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = (I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f)(x) \tag{1.19}$$
et
$$({}^cD_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = (-1)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} D^n f)(x) \tag{1.20}$$
respectivement, où $D = \frac{d}{dx}$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$

2. *Pour $\alpha = n$, où $n \in \mathbb{N}$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{c}D^{n}_{a+}f(x)$ est donnée par :*

$$ {}^{c}D^{n}_{a+}f(x) = f^{(n)}(x). $$

Démonstration voir [13]

Maintenant, on va étudier quelques propriétés fondamentales de la dérivation fractionnaire au sens de caputo.

Quelques propriétés de dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Propriétés 1.3.1 *[4]*

1.
$$ \begin{aligned} {}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t}f &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt\right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}f(x). \end{aligned} $$

2.
$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}f(t) = {}^{R}_{a}D^{\alpha}_{t}\left(f(t) - f(a)\right). $$

3. *Si f est continue sur $[a,b]$, alors*
$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}I^{\alpha}_{a}f(t) = f(t). $$

4. *Si $f \in C^{n}[a,b]$, alors*
$$ I^{\alpha}_{a}D^{\alpha}_{t}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k}(a)}{k!}(x-a)^{k}. $$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

Aprés avoir introduit les définitions des dérivées fractionnaires, maintrnant on va éxaminer le lien entre les approches de Riemann-Liouville et de caputo.

1.3.5 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théoréme suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville

Théorème 1.3.2 *[10] Soit $\Re(\alpha) > 0$ avec $n-1 < \Re(\alpha) < n$ $(n \in \mathbb{N})$, et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^cD^\alpha f(t)$ et $D^\alpha f(t)$ existent. Alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right). \tag{1.21} $$

On à passer le corollaire suivant qui permet d'établir une propriété essentielle.

Corollaire 1.3.1 *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si ${}^cD_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existent, on suppose que $D^k f(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, alors :*

$$ {}^cD_a^\alpha f = D_a^\alpha f. $$

Dans la suite, nous allons comparer les dérivés fractionnaires de Riemann-liouville et de caputo afin de mieux comprendre leurs différences et leur propriétés respectives.

1.3.6 Comparaison avec l'opérateur de Riemann-Liouville

Dans cette section, on va donner une comparaison entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

Lemme 1.3.1 *Soit $f(x)$ une fonction telle que les deux opérateurs $D_{a^+}^\alpha f(x)$, $D_{b^-}^\alpha f(x)$, ${}^cD_{a^+}^\alpha f(x)$ et ${}^cD_{b^-}^\alpha f(x)$ existent, avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, alors on a :*

$$ D_{a^+}^\alpha f(x) \neq {}^cD_{a^+}^\alpha f(x), $$

et

$$ D_{b^-}^\alpha f(x) \neq {}^cD_{b^-}^\alpha f(x). $$

Remarque 1.3.3 *La dérivée de Riemann-Liouville ne satisfait pas $D_a^\alpha(1) = 0$ (contrairement à $D_a^\alpha(1) = 0$ pour la dérivée de Caputo), si α n'est pas un nombre naturel.*

Aprés avoir définir la dérivée de Caputo, on présentons quelques propriétés fondamentales des dérivées fractionnaire.

Propriétés des dérivées fractionnaires [8]

1. **Linéarité** Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$, telles que ${}^cD_a^\alpha f_1$ et ${}^cD_a^\alpha f_2$ existent presque partout. Soient c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, ${}^cD_a^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe presque partout sur $[a, b]$, et on a :

$$ {}^cD_a^\alpha(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 {}^cD_a^\alpha f_1(x) + c_2 {}^cD_a^\alpha f_2(x). \tag{1.22} $$

Démonstration voir [13]

Passons maintenant à la régle de Leibniz, qui est une règle fondamentale et une technique utilisée pour dériver le produit de fonction.

2. **Règle de Leibniz** :

La règle de Leibniz permet de calculer la derivés n-iéme du produit de deux fonctions $f(t), g(t)$. On a pour tout entier n :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k(t) g^{(n-k)}(t).$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le coefficient binomial.

La formule générale donné par :

$$D^p(f(t) \cdot g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^k(t) g^{p-k}(t) + R_p^n(t)$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!}\Gamma(-p) \int_a^x (x-t)^{-p-1} g(t) dt \int_a^x f^{n+1}(\xi)(x-\xi) d\xi.$$

Avec $\lim\limits_{n \to +\infty} R_p^n(t) = 0$ si f et g sont continues sur $[a, b]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^k(t) D^{p-k} g(t).$$

D^p désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

Cette règle est une généralisation de la régle usuelle de dérivation d'un produit :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

1.4 Équations différentielles ordinaires

1.4.1 Équations différentielles ordinaires du premier ordre

Définition 1.4.1 *On appelle une équation différentielle linéaire une équation de la forme*

$$y' + a(t)y = b(t), \tag{1.23}$$

où $a(t)$, $b(t)$ sont des fonctions continues sur I.

Solution d'équations différentielles homogènes :

Une équation différentielle homogène est une équation de la forme

$$y' + a(t)y = 0,$$

où $a\,(t)$ est continue sur I. On a

$$\begin{aligned} y' = -a(t)y &\Longrightarrow \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\Longrightarrow \ln|y| = -\int a(t)dt + c_1 \\ &\Longrightarrow y\,(t) = ce^{-\int a(t)dt}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d'où la solution d'équation différentielle homogène est donnée par :

$$y_h\,(t) = ce^{-\int a(t)dt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Solution d'équations différentielles particulière

Méthode de la variation de la constante : On a $y_h = kf$ où $f(t) = e^{-\int a(t)dt} = F$.

La méthode consiste à faire trouvé la constante c de la solution d'équation différentielle homogène $y_h\,(t) = ce^{-\int a(t)dt}$, c'est à dire la constante c devient la fonction à trouver $c(t)$ avec $y_P\,(t) = c\,(t)\,e^{-\int a(t)dt}$, on remplaçant dans (1.23) .

Alors

$$y_p' = c'(t)e^{-\int a(t)dt} - c(t)a(t)e^{-\int a(t)dt},$$

donc

$$\begin{aligned} c'(t)e^{-\int a(t)dt} - c(t)a(t)e^{-\int a(t)dt} + a(t)c(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t) &\Longrightarrow c'(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t) \\ &\Longrightarrow c'(t) = b(t)e^{\int a(t)dt}. \end{aligned}$$

On retrouve $c(t)$ et

$$y_p\,(t) = c\,(t)\,e^{-\int a(t)dt}.$$

La solution générale de l'équation (1.23) est

$$y\,(t) = y_h\,(t) + y_p\,(t) = ce^{-\int a(t)dt} + c\,(t)\,e^{-\int a(t)dt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1.4.2 Équations différentielles ordinaires du deuxième ordre

L'équations différentielles ordinaires du deuxième ordre écrit sous la forme

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \tag{1.24}$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des fonctions connues et $t \in I \longmapsto \mathbb{R}$.

Équation homogène à coefficients constantes

Une équation différentielle linéaire de seconde ordre à coefficient constantes est du type

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{1.25}$$

Équation caractéristique est

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{1.26}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ab$, discriminant de l'équation caractéristique (1.26).
La solution homogène de l'équation (1.25) est

1. Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solution r_1 et r_2 réelles.

   La solution générale s'écrit

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double r réelle.

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{rt} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet une racine complexe $r_1$et r_2.

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Équation particulière à coefficients constantes

- Si le second membre est de la forme $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ alors on peut chercher une solution sous la forme : $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$

- Si le second membre est de la forme $f(t) = e^{\lambda t} P_n(t)$ avec P_n polynôme de degré n :

— **1er cas** : si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ (i.e. $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$), on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y(t) = e^{\lambda x} Q_n(t)$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

— **2ème cas** : si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b \neq 0$ (i.e. si $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$ avec $r_1 \neq r_2$), on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y(t) = e^{\lambda t} t Q_n(t)$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

— **3ème cas** : si $\lambda = r_1 = r_2$ (racine double), on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y(t) = e^{\lambda t} t^2 Q_n(t)$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

Dans cette section, on va présenter la forme du formule de Wronskian pour les équations différentielles fractionnaires, de plus la formule d'Able.

1.5 Concepts d'Abel et Wronskien dans les équations différentielles

Définition 1.5.1 *Le Wronskien de deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire est défini comme suit. Considérons l'équation différentielle*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Le Wronskien des solutions y_1 et y_2 est donné par le déterminant :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Théorème 1.5.1 ***(Le théoréme d'Abel)*** *établit une relation fondamentale pour le Wronskien des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, alors la formule d'Abel permet de trouver la deuxième solution y_2 en fonction de la première.*
Solution y_1 :

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire Conformable de Roshdi Khalil

Dans cette partie, on présentons la définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire conformable qui a développé de cette nouvelle définition fractionnaire simple et intéressant.

2.1 Dérivée fractionnaire conformable

Définition 2.1.1 [1, 6] *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction, la dérivée fractionnaire conformable d'ordre α est définie par :*

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \qquad \forall t > 0, \alpha \in]0,1]. \tag{2.1}$$

Si T_α existe, f est dite $\alpha-$différentiable.

(1) Pour $\alpha \in]0,1]$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, la dérivée fractionnaire conformable à gauche d'ordre α est donnée par :

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{2.2}$$

Si T_α existe sur $]a, +\infty[$, alors $T_\alpha f(a) = \lim\limits_{t\to a^+} T_\alpha(f)(t)$.

(2) Pour $\alpha \in]0,1]$ et $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$, la dérivée fractionnaire conformable à droite d'ordre α est donnée par :

$$T_\alpha f(t) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Si $T_\alpha f(t)$ existe sur $]-\infty, b[$, alors $T_\alpha f(b) = \lim\limits_{t\to b^-} T_\alpha(f)(t)$.

La dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α en $t = 0$ est définie par :

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0} T_\alpha(f)(t).$$

Aprés avoir définir la dérivée fractionnaire conforme, on présentons un théoréme fondamental qui établit la relation entre cette dérivée et les valeurs de la fonction.

Théorème 2.1.1 [6] *Soient* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$*,* $\alpha \in]0, 1]$*. Si* f *est* $\alpha-$*différentiable en* $t > 0$*, alors on a :*

$$f^{(\alpha)}(t) = T_\alpha f(t) = t^{(1-\alpha)} f'(t).$$

Démostration on a :

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}} t^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

on pose $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, il vient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} t^{1-\alpha} = f'(t) t^{1-\alpha}.$$

Par conséquent

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{(1-\alpha)} f'(t).$$

Théorème 2.1.2 [7] *Soit* $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *sont* $\alpha-$*différentiables en* $t > 0$ *et* $0 < \alpha \leq 1$*, on a les propriétés suivantes :*

1. *Si* f *est* $\alpha-$*différentiable en* t_0 *et* $\alpha \in]0, 1]$*, alors* f *est continue en* t_0*.*
2. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha f + bT_\alpha g, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
3. $T_\alpha t^k = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n)} t^{k-\alpha} & \text{si } k \in \mathbb{N} \text{ et } k > \alpha, \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{N} \text{ et } k < \alpha. \end{cases}$
4. $T_\alpha(c) = 0$ *où* c *est une fonction constante.*
5. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha g + gT_\alpha f.$
6. $T_\alpha f(t) \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gT_\alpha f - fT_\alpha g}{g^2}.$
7. *Si* f *est* n *fois différentiable sur* $]a, +\infty[$ *alors on a :*

$$T_\alpha(f)(t) = (t-a)^{(n+1-\alpha)} f^{(n+1)}(t), \ n < \alpha \leq n+1.$$

8. *Soit* $h(t) = (f \circ g)(t)$ *telle que* f *et* g *sont des fonctions* $\alpha-$*différentiables, alors*

$$T_\alpha(h)(t) = T_\alpha f(g(t)) \cdot T_\alpha g(t) g^{(\alpha-1)}(t).$$

Démonstration

1. Nous avons $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \dfrac{(f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0))\varepsilon}{\varepsilon}$,
   par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$,
   $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \dfrac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon$,
   posons $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, alors

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = f^{(\alpha)}(t_0).0,$$

   donc f est continue en t_0.

2. La preuve de cette propriété découle directement du définition (2.1). En effet, on a :

$$\begin{aligned}
T_\alpha (af + bg)(t) &= t^{(1-\alpha)}(af + bg)'(t), \\
&= t^{(1-\alpha)}(af'(t) + bg'(t)), \\
&= at^{(1-\alpha)}f'(t) + bt^{(1-\alpha)}g'(t), \\
&= aT_\alpha f(t) + bT_\alpha g(t), \\
&= (T_\alpha f + bT_\alpha g)(t),
\end{aligned}$$

   or $T_\alpha (af + bg) = aT_\alpha f + bT_\alpha g$, donc T_α est linéaire.

3.

$$\begin{aligned}
T_\alpha t^k &= t^{1-\alpha}(t^k)', \\
&= t^{1-\alpha}kt^{k-1} = kt^{k-\alpha}, \\
&= k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)t^{k-n} \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)1}{(k-n)(k-n-1)\cdots 1}t^{k-n}, \\
&= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n)}t^{k-n}, \\
&= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n)}t^{k-\alpha} & si\ k \in \mathbb{N}\ et\ k > \alpha, \\ 0 & si\ k \in \mathbb{N}\ et\ k < \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

4. $T_\alpha(c) = t^{(1-\alpha)}(c)' = t^{(1-\alpha)} \cdot 0 = 0.$

5. D'après la définition (2.1), on a

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon},\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{\varepsilon}\\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)g(t)}{\varepsilon},\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t))}{\varepsilon}.g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right]\\
&+ f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon},\\
&= f^{(\alpha)}(t)\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+f(t)g^{(\alpha)},\\
&= T_\alpha f(t)g(t)+f(t)T_\alpha g(t).
\end{aligned}$$

Puisque g est continue en t, alors $\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})=g(t)$.

6.

$$\begin{aligned}
T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= t^{(1-\alpha)}\left(\frac{f}{g}\right)'(t),\\
&= t^{(1-\alpha)}\frac{f'g(t)-f(t)g'(t)}{g^2},\\
&= \frac{g(t)f^{(\alpha)}(t)-f(t)g^{(\alpha)}(t)}{g^2}.
\end{aligned}$$

7. D'aprés la définition (2.1.2) :

$$T_\alpha f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(n)}(t+\varepsilon(t-a)^{([\alpha]-1)})-f^{(n)}(t)}{\varepsilon}.$$

On pose :
$h=\epsilon(t-\alpha)^{1-\alpha+n}\Rightarrow \epsilon=\frac{h}{(t-\alpha)^{1-\alpha+n}}$,
on remplace dans la définition :

$$\begin{aligned}
T_\alpha f(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(t+h)-f^{(n)}(t)}{h}\cdot(t-\alpha)^{1-\alpha+n}\\
&= f^{(n+1)}(t)(t-\alpha)^{1-\alpha+n},
\end{aligned}$$

donc : $T_\alpha f(t)=(t-\alpha)^{1-\alpha+n}\cdot f^{(n+1)}(t)$.

8. Supposons que $f,g\in\,]a,+\infty[\to\mathbb{R}$ ont deux dérivées fractionnaires conformables à gauche d'ordre α avec $\alpha\in\,]0,1]$, soit $h(t)=f(g(t))$ i.e $h=f\circ g$ alors h a une dérivée

fractionnaire conformable à gauche pour tout t avec $t \neq a$ et $g(t) \neq 0$. En effet :

$$\begin{aligned}
T_\alpha^{(\alpha)}(h)(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h(t+\varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}) - h(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(g(t+\varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}) - f(g(t))}{\varepsilon}, \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(g(t+\varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}) - f(g(t))}{g(t+\varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}) - g(t)} \cdot \frac{g(t+\varepsilon(t-\alpha)^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \right), \\
&= T_\alpha^{(\alpha)}(f)(g(t)) \cdot T_\alpha^{(\alpha)} g(t) \cdot g(t)^{(\alpha-1)}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.1.3 *Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction, alors les propriétés sont équivalentes :*

a) f est différentiable.

b) f est $\alpha-$différentiable.

Démostration *a)* $\Rightarrow$ *b)* Soit f une fonction différentiable au sens classique, c-à-d

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad \text{existe.}$$

Posons $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, il vient

$$\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{t^{1-\alpha}}\right) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} t^{1-\alpha},$$

par passage à la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} f'(t),$$

$$f^{(\alpha)}(t) = T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

Par conséquence f est $\alpha-$différentiable.

b) $\Rightarrow$ *a)*

Inversement, si f est α différentiable, alors $f'(t) = \frac{T_\alpha f(t)}{t^{1-\alpha}} = \frac{f^\alpha(t)}{t^{1-\alpha}}$.

Donc f est $\alpha-$ différentiable. □

D'après le cas le plus important, $\alpha \in \,]0, 1]$, mais R.Khalil [6] à introduit la derivée fractionnaire dans le cas $\alpha \in \,]n, n+1]$ avec n entiére naturale est donnée comme suite :

Définition 2.1.2 *Soient $\alpha \in \,]n, n+1]$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction $n-$différentiable en $t > 0$. La dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α est définie par :*

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t+\varepsilon(t-a)^{([\alpha]-1)}) - f^{([\alpha]-1)}(t)}{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Où $[\alpha]$: est la partie entière de α.

A partir de cette définition, on peut déduire une propriété importante concernant les dérivées d'ordre non entier comme suit.

Remarque 2.1.1 *En conséquence de la définition (2.1.2), on peut facilement montrer que :*

$$T_\alpha f(t) = t^{([\alpha]-\alpha)} f^{[\alpha]}(t).$$

Où, $\alpha \in]n, n+1]$ et f est $(n+1)-$ différentiable en $t > 0$.

Passons maintenant à la proposition des propriétés fondamentales.

Proposition 2.1.1 [7]

1. *Si $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1]$ et f est $\alpha-$différentiable, alors*

$$T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t).$$

2. *Si $\alpha \in]n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$T_\alpha f(t) = t^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

Démostration

1. Cas $\alpha \in]0, 1]$, d'après théorème (2.1.1), on sait que :

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{(1-\alpha)} f'(t),$$

2. Cas $\alpha \in]n, n+1]$, d'aprés la définition généralisée, on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(n-1)}(t + \varepsilon t^{n-\alpha}) - f^{(n-1)}(t)}{\varepsilon}, \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(n-1)}(t + \varepsilon t^{n-\alpha}) - f^{(n-1)}(t)}{\varepsilon} t^{n-\alpha}, \\ &= t^{n-\alpha} f^n(t). \end{aligned}$$

car $[\alpha] = n$.

□

Remarque 2.1.2 *Les définitions de la dérivée fractionnaire selon Riemann-Liouville et Caputo ne permettent pas d'étudier l'analyse des fonctions α-différentiables. Cependant, la dérivée fractionnaire conforme nous permettons de prouver des théorémes d'analyse comme le théoréme de Rolle et le théoréme de la valeur moyenne.*

2.2 Quelques théorèmes sur la dérivée conformable

Dans la suite, on présentons quelques théorèmes qui sont très importants pour la dérivée conformable d'ordre $0 < \alpha \leq 1$.

Théorème 2.2.1 (Théorème de Rolle pour la dérivée conformable) [1] [6]

Soit α et $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée vérifiant les conditions suivantes :

1. *f est continue sur $[a,b]$.*
2. *f est α-différentiable sur $]a,b[$, pour un certain $\alpha \in]0,1[$.*
3. *$f(a) = f(b)$.*
   Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Démostration Puisque f est continue sur $[a,b]$, et différentiable pour certains $\alpha \in (0,1)$, alors f est différentiable sur $]a,b[$, selon le théorème (2.2.1), il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{df}{dt} = f'(c) = 0$. Maintenant, en utilisant le théorème (2.1.1)

$$T_\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t),$$

on obtient que

$$T_\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t) = 0.$$

□

Passons maintenant à le théoréme de la valeur moyenne pour la dérivée fractionnaire conforme, qui constitue une généralisation du théoréme classique.

Théorème 2.2.2 (Théorème de la valeur moyenne) [1] *Soit $0 < \alpha \leq 1$, $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée telle que :*

1. *f est continue dans l'intervalle $[a,b]$.*
2. *f est $\alpha-$différentiable pour $\alpha \in]0,1[$.*

Alors il existe une constante $c \in]a,b[$, tel que :

$$T_c^{(\alpha)} f(t) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}}. \tag{2.5}$$

Démostration considérons la fonction :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}}\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}\right),$$

alors la fonction g satisfait la condition du Théorème de Rolle, ainsi il existe une constante $c \in]a,b[$, tel que $T^\alpha g(c) = 0$.
Où

$$T^\alpha g(c) = T^\alpha f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}} \cdot T^\alpha \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha} \right),$$

mais, on sait que $T^\alpha \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = 1$, donc :

$$T^\alpha g(c) = T^\alpha f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{b^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}} = 0,$$

d'où le résultat. □

Corollaire 2.2.1 *Soient f, g deux fonction définies sur un intervelle $]a, +\infty[$, avec $a > 0$ supposons sont tout les deux α-differentiable pour un $\alpha \in]0,1]$ si pour tout $t \in]a,b]$, on a $T^\alpha f(t) = T^\alpha g(t)$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(t) = g(t) + c.$$

Avec la même procédure, on peut utiliser le théorème de la valeur moyenne pour prouver la proposition suivante.

Proposition 2.2.1 [1] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction α-différentiable pour $\alpha \in]0,1[$.*

1. *Si $T^\alpha f(t)$ est bornée sur $[a,b]$, où $a > 0$. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$ et par conséquence, f est bornée.*
2. *Si $T^\alpha f(t)$ est bornée sur $[a,b]$ et continue au point a. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$, et donc f est bornée.*

Nous présentons ci-dessous la dérivée fractionnaire conformable de certaines fonctions

2.2.1 Dérivée fractionnaire conformable de certaines fonctions

Soit $t > 0$, on a les dérivées fractionnaires conformable de certains fonctions suivantes :

1. $(t^p)^{(\alpha)} = t^{(1-\alpha)}(t^p)' = t^{(1-\alpha)}p(t^{p-1}) = pt^{p-\alpha}, \quad \forall p \in \mathbb{R}.$
2. $(\lambda)^{(\alpha)} = t^{(1-\alpha)}(\lambda)' = t^{(1-\alpha)} \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
3. $(e^{pt})^\alpha = t^{(1-\alpha)}(e^{pt})' = t^{(1-\alpha)}pe^{pt}, \quad \forall p \in \mathbb{R}.$
4. $(e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha})^\alpha = t^{(1-\alpha)}pt^{(\alpha)-1}(e^{\frac{p}{\alpha}}t^\alpha) = pe^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}t^\alpha, \quad \forall p \in \mathbb{R}.$
5. $(\sin(bt))^{(\alpha)} = t^{(1-\alpha)}(\sin(bt))' = t^{(1-\alpha)}b\cos(bt), \quad \forall b \in \mathbb{R}.$

6. $(\cos(bt))^{(\alpha)} = t^{(1-\alpha)}(\cos(bt))' = -t^{(1-\alpha)} b \sin(bt), \quad \forall b \in \mathbb{R}.$
7. $y^{\alpha} + y = 0,\ 0 < \alpha < 1$
   l'équation caractéristique est : $\alpha r + 1 = 0$, donc la solution est donnée par :
$$y(x) = e^{-\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}}.$$

2.3 Intégration fractionnaire conformable

En matiere d'integration, la classe de fonctions la plus importante pour définir l'intégrale est l'espace des fonctions continues. Ainsi, en utilisant le théorème de Weierstrass, il suffit de definir l'integrale fractionnaire sur les polynômes. Pour ceci, Soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit :

$$J_{\alpha}(t^p) = \frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{R}, \text{ et } \alpha \neq -p.$$

Si $f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$, alors on :

$$J_{\alpha}(f) = \sum_{k=0}^{n} b_k J_{\alpha}(t^k) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}.$$

Si $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, où la série est uniformément convergente, alors :

$$J_{\alpha}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}.$$

Clairement, J_{α} est linéaire sur son domaine. De plus, si $\alpha = 1$, alors J_{α} est l'intégrale usuelle.
On présentons ici la définition de l'intégrale fractionnaire conformable, qui généralise l'intégration classique.

Définition 2.3.1 [6]

1. *Soient $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0, 1]$, alors l'intégrale fractionnaire conformable à gauche d'ordre α est définie par :*
$$I_a^{(\alpha)} f(t) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx. \tag{2.6}$$
2. *Soient $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $\alpha \in]0, 1]$, alors l'intégrale fractionnaire conformable à droit d'ordre α est définie par :*
$${}_bI^{(\alpha)} f(t) = \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx. \tag{2.7}$$

Le théorème suivant donne l'intégrale conformable des fonctions puissances et polynômiales.

Théorème 2.3.1 [7] *Soit* $t > 0$ *et* $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0,1[$.

- *Si* $f(t) = t^p$, *alors :*

$$I^\alpha f(t) = \frac{t^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha+p+1)} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -p.$$

- *Si* $f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$, *alors :*

$$I^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k I^\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

- *Si* $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ *est une série uniformément convergente, alors :*

$$I^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k I^\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Démostration

- Soit $f(t) = t^p$ pour $t > 0$ tel que $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0,1]$, alors :

$$I^\alpha(f(t)) = \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \int_0^t \frac{s^p}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

par changement de variable $s = ut$, oú $u \in]0,1]$. Alors on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha(f(t)) &= \int_0^1 \frac{t^p u^p}{t^{1-\alpha}(1-u)^{1-\alpha}} \cdot t du \\ &= t^{p+\alpha} \int_0^1 u^p (1-u)^{\alpha-1} du, \end{aligned}$$

l'intégrale obtenue est une forme connue de l'intégrale Bêta :

$$\int_0^1 u^p (1-u)^{\alpha-1} du = \frac{1}{p+\alpha}.$$

Ainsi, $I^\alpha(f(t)) = \dfrac{t^{\alpha+p}}{\alpha+p}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -p$.

- Soit $f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$, on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha(f(t)) &= \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{n} b_k s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k I_\alpha(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}. \end{aligned}$$

- Soit $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ une série uniformément convergente. Alors :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(f(t)) &= \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k I^{\alpha}(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}. \end{aligned}$$

□

Maintenant, on présentons une proposition importante, qui joue un role essentiel dans son analyse.

Proposition 2.3.1 [7] *Soit* $0 < a < b$ *on suppose que* $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{R})$, *alors*

$$\left| I_a^{(\alpha)} f(b) \right| \leq I_a^{(\alpha)} |f(b)|. \tag{2.8}$$

Démostration Soit $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{R})$, alors

$$\left| I_a^{(\alpha)} f(b) \right| = \left| \int_a^b f(t)(t-a)^{\alpha-1} dt \right| \leq \int_a^b \left| f(t)(t-a)^{\alpha-1} \right| dt = \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} |f(t)| dt.$$

d'où le résultat. □

On va passe à le lemme suivant qui donne des propriétés essentielles.

Lemme 2.3.1 [6] *Soient* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction donnée et* $\alpha \in]0, 1]$, *pour tout* $t > a$, *on a :*

1. *Si* f *est continue, alors* $T_\alpha^{(\alpha)} I_a^{(\alpha)} f(t) = f(t)$.
2. *Si* f *est différentiable, alors* $I_a^{(\alpha)} T_\alpha^{(\alpha)} f(t) = f(t) - f(a)$.

Démostration

1. Si f est continue, alors $I_a^{(\alpha)} f(t)$ est $\alpha-$différentiable, donc, on applique le théorème (2.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(\alpha)} I_a^{(\alpha)}(f)(t) &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_a^{(\alpha)} f(t), \\ &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx, \\ &= (t-a)^{1-\alpha} (t-a)^{\alpha-1} f(t) = f(t). \end{aligned}$$

2. Si f est $\alpha-$différentiable alors, nous obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)}T_\alpha^{(\alpha)}f(t) &= \int_a^t (x-a)^{\alpha-1}D_a^{(\alpha)}f(x)dx, \\ &= \int_a^t (x-a)^{1-\alpha}(x-a)^{\alpha-1}f^{'}(x)dx, \\ &= \int_a^t f^{'}(x)dx = f(t)-f(a). \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant résoudre des équations différentielles fractionnaires en utilisant la nouvelle définition de Roshdi khalil et les autres.

2.4 Application

Exemple 2.4.1

$$\begin{cases} y^{(\frac{1}{2})}+y = x^2+2x^{\frac{3}{2}}, \\ y(0)=0. \end{cases} \tag{2.9}$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y^{(\frac{1}{2})}+y=0, \tag{2.10}$$

on supposons que la solution est de la forme $y_h = e^{r\sqrt{x}}$
On va calculer la dérivée fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ *de* $y_h = e^{r\sqrt{x}}$, *utilisons la régle de la chaîne :*

$$y' = \frac{r}{2\sqrt{x}}e^{r\sqrt{x}},$$

d'aprés la dérivée fractionnaire conformable, on a :

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2}}f(e^{r\sqrt{x}}) &= x^{\frac{1}{2}}\frac{r}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{r\sqrt{x}} \\ &= \frac{r}{2}e^{r\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation (2.10)

$$\begin{aligned} y^{(\frac{1}{2})}+y=0 &\Rightarrow \frac{r}{2}e^{r\sqrt{x}}+e^{r\sqrt{x}}=0 \\ &\Rightarrow e^{r\sqrt{x}}\left(\frac{r}{2}+1\right)=0, \end{aligned}$$

comme $e^{r\sqrt{x}}=0$, *on a :*

$$\frac{r}{2}+1=0 \Rightarrow r=-2,$$

Donc, la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}},$$

ainsi, la solution générale est :

$$y_h = Ae^{-2\sqrt{x}}.$$

On cherche une solution particulière, nous supposons une solution de la forme $y_p = x^2$. *D'aprés la dérivée fractionnaire conformable, on a :*

$$T_{\frac{1}{2}}(x^2) = 2x^{\frac{3}{2}},$$

ainsi :

$$y^{(\frac{1}{2})} + y = 2x^{\frac{3}{2}} + x^2,$$

donc $y_p = x^2$. *La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :*

$$y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2\sqrt{x}} + x^2,$$

en utilisant la condition initiale $y(0) = 0$, *on obtient :*

$$y(0) = Ae^0 + 0 = A \Rightarrow A = 0.$$

La solution finale de l'équation est : $y(x) = x^2$.

Exemple 2.4.2 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$y^{\alpha} + y = 0, \qquad avec \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.11}$$

On cherchons une solution sous la forme exponentielle : $y(x) = e^{rx^{\alpha}}$, *on va calculer la dérivée fractionnaire d'ordre* α *de* $y(x) = e^{rx^{\alpha}}$, *on utilisons la régle de la chaîne :*

$$y\prime(x) = r\alpha x^{\alpha-1}e^{rx^{\alpha}},$$

d'aprés la dérivée fractionnaire conformable, on a :

$$\begin{aligned} T_{\alpha}f(e^{rx^{\alpha}}) &= x^{1-\alpha}\left(r\alpha x^{\alpha-1}e^{rx^{\alpha}}\right) \\ &= r\alpha e^{rx^{\alpha}}, \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation (2.11)

$$\begin{aligned} r\alpha x^{\alpha-1}e^{rx^{\alpha}} + e^{rx^{\alpha}} &= 0 \Rightarrow e^{rx^{\alpha}}(1 + r\alpha) = 0 \\ e^{rx^{\alpha}} &= 0 \Rightarrow 1 + r\alpha = 0 \\ &\Rightarrow r = -\frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

donc, la solution générale de l'équation homogène est :

$$y(x) = e^{-\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}}.$$

Exemple 2.4.3 *Soit l'équation différentielle fractionnaire conformable suivante :*

$$\begin{cases} y^{(\frac{1}{2})}(x) + \sqrt{x}y(x) = xe^{-x}, & x \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

D'aprés la dérivée fractionnaire conformable, on a :

$$T_{\frac{1}{2}}(y)(x) = \sqrt{x}\frac{dy}{dx},$$

on substituons dans l'équation (2.12)

$$\begin{aligned} \sqrt{x}y^{(\frac{1}{2})}(x) + \sqrt{x}y(x) &= xe^{-x} \\ y^{(\frac{1}{2})}(x) + y(x) &= \sqrt{x}e^{-x} \end{aligned}$$

on utilise un facteur d'integration de la forme :

$$\mu(x) = e^{I^{\frac{1}{2}}(p(x))},$$

on calcule de $I^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$ *d'aprés la définition d'intégrale conformable :*

$$I^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})(t) = \int_0^t \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx = t,$$

donc $I^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) = x$*, on multiplie l'equation* (2.12) *par* e^x*, on trouve :*

$$\begin{aligned} y^{(\frac{1}{2})}(x) + \sqrt{x}y(x) &= xe^{-x} \\ (e^x y)^{\frac{1}{2}} &= x \end{aligned}$$

par intégration, on a :

$$e^x y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}e^{-x} + ce^{-x},$$

la condition initiale implique que $c = 1$*. Donc,*

$$y(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}e^{-x} + e^{-x}.$$

Exemple 2.4.4 *Considérons l'équation defférentielle fractionnaire suivante :*

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y\sqrt{x}}{2x + 3y}, \tag{2.13}$$

on supposons que y est une fonction defférentiable.D'aprés le théoreme (2.1.1), on a :

$$y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\frac{dy}{dx},$$

en remplaçant cette expression dans cette l'équation (2.13), on obtient :

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{3}{2}} + y\sqrt{x}}{2x + 3y},$$

En divisant par $\sqrt{x}$ donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{2x + 3y}.$$

Il s'agit d'une équation différentiel homogéne du premier ordre qui facile à résoudre.

Chapitre 3

Applications des Équations Différentielles Fractionnaire Conformable

DAns ce chapiter, on discutons et présentons la forme du Wronskien pour les équations différentielles linéaires fractionnaires conformables à coefficients variables. De plus, on prouvons qu'il existe une formule d'Abel pour les équations différentielles fractionnaires à coefficients variables.

3.1 Équation Différentielle Fractionnaire Conforme

Définition 3.1.1 [5] *Pour* $0 < \alpha \leq 1$, *soit* $D^\alpha y$ *la dérivée fractionnaire conformable de* y *sous la forme générale :*

$$D^\alpha D^\alpha y + P(x) D^\alpha y + Q(x) y = 0. \tag{3.1}$$

Cette équation constitue une extension fractionnaire des équations différentielles classiques et joue un rôle dans la modélisation de systèmes dynamiques complexes.

Maintenant, nous établit la formule du Wronskien fractionnaire associée à ces équations.

3.2 Formule Wronskien Fractionnaire conformable

Dans cette section, on discutons du Wronskien fractionnaire est une extension du Wronskien classique aux équations différentielles fractionnaires conformesde deux fonctions.

Comme dans [11], on posons

$$I^{\alpha}(f) = \int \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\,dx.$$

Il faut remarquer (voir [6]) que

$$D^{\alpha} I^{\alpha}(f) = f.$$

Définition 3.2.1 *Pour deux fonctions y_1 et y_2 satisfaisant (3.1) et $0 < \alpha \leq 1$, on définit*

$$W_{\alpha}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ D^{\alpha} y_1 & D^{\alpha} y_2 = \end{vmatrix} = y_1 D^{\alpha} y_2 - y_2 D^{\alpha} y_1$$

Maintenant, on passons d'étudier l'indépendance fractionnaire de Wronskien.

Remarque 3.2.1 *Pour vérifier les fonctions sont linéirement indépendantes, on peut utiliser le déterminant de Wronskien, la régle suivante doneé un critére simple*

- *Si $W_{\alpha}[y_1, y_2] \neq 0$, alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.*
- *Si $W_{\alpha}[y_1, y_2] = 0$, alors y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.*

Aprés avoir établir le critére d'indépendance linéaire, passons au théoréme suivant.

Théorème 3.2.1 *Soient y_1 et y_2 deux solution d'une équation différentielle fractionnaire. Le Wronskien fractionnaire associé à ces solutions est donné par :*

$$D_{\alpha}(W_{\alpha}[y_1, y_2]) = -P(x) W_{\alpha}[y_1, y_2].$$

Sa solution est :

$$W_{\alpha}[y_1, y_2] = e^{-I_{\alpha}(P)},$$

où $I_{\alpha}(P) = \int P(x) x^{1-\alpha}\,dx$ est l'intégrale fractionnaire de $P(x)$.

Démostration On appliquons l'opérateur différentiel fractionnaire D^{α} sur $W_{\alpha}[y_1, y_2]$

$$D_{\alpha}(W_{\alpha}[y_1, y_2]) = D^{\alpha}(y_1 D^{\alpha} y_2 - y_2 D^{\alpha} y_1),$$

En utilisant la régle de Leibniz pour la dérivation fractionnaires :

$$D^{\alpha} y_1 D^{\alpha} y_2 + y_1 D^{\alpha} D^{\alpha} y_2 - D^{\alpha} y_2 D^{\alpha} y_1 - y_2 D^{\alpha} D^{\alpha} y_1,$$

Or, y_1 et y_2 satisfont l'équation différentielle fractionnaire donnée (3.1) :

$$D_{\alpha} D_{\alpha} y_1 = -P(x) D_{\alpha} y_1 - Q(x) y_1,$$

$$D_{\alpha} D_{\alpha} y_2 = -P(x) D_{\alpha} y_2 - Q(x) y_2.$$

En remplaçant ces expressions dans notre équation initiale :

$$\begin{aligned}
D_\alpha(W_\alpha[y_1, y_2] &= y_1\left(-p(x)D^\alpha y_2 - Q(x)y_2 + y_2(p(x)D^\alpha y_1 + Q(x)y_1\right) \\
&= -y_1 p(x)D^\alpha y_2 - y_1y_2Q(x) + y_2p(x)D^\alpha y_1 + y_1y_2Q(x) \\
&= p(x)\left(y_2D^\alpha y_1 - y_1D^\alpha y_2\right) \\
&= -P(x)(y_1D^\alpha y_2 - y_2D^\alpha y_1) \\
D_\alpha(W_\alpha[y_1, y_2]) &= -P(x)W_\alpha[y_1, y_2],
\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\frac{D_\alpha(W_\alpha[y_1, y_2]}{W_\alpha[y_1, y_2]} = -P(x),$$

en intégrant des deux côtés en utilisant l'intégrale fractionnaire :

$$W_\alpha[y_1, y_2] = I^\alpha(-P(x)) \tag{3.2}$$

où

$$I_\alpha(P) = \int P(x)x^{1-\alpha}.$$

□

Passons maintenant à l'étude de la formule d'Abel pour les équations différentielles fractionnaires de la manière suivante.

3.3 Formule d'Abel Fractionnaire

La formule d'Abel classique permet d'exprimer une seconde solution d'une équation différentielle linéaire lorsqu'une première solution est connue.

Définition 3.3.1 [5] *Considérons l'équation différentielle fractionnaire :*

$$D^\alpha y + a(x)y = b(x), \tag{3.3}$$

où $0 < \alpha \leq 1$*. Multiplions l'équation* (3.3) *par* $e^{I(a)}$ *pour obtenir :*

$$e^{I_\alpha(a)}D^\alpha y + e^{I_\alpha(a)}a(x)y - e^{I_\alpha(a)}b(x) = 0$$

$$D^\alpha(e^{I_\alpha(a)}y) = e^{I_\alpha(a)}b(x),$$

en considérant la dérivée fractionnaire conforme, il existe une propriété importante de dérivation :

$$D^\alpha(fg) = fD^\alpha g + gD^\alpha f,$$

on choisiss

$$f(x) = e^{I^\alpha}$$

$$g(x) = y(x),$$

en appliquant la propriété de dérivation :

$$D^\alpha \left(e^{I_\alpha(a)} y\right) = e^{I_\alpha(a)} D^\alpha y + y D^\alpha (e^{I_\alpha(a)}), \tag{3.4}$$

on calcule $D^\alpha(e^{I_\alpha(a)})$ *on utilisons la régle de dérivation classique*

$$D^\alpha(e^{I_\alpha(a)}) = e^{I_\alpha(a)} . D^\alpha(I(a)),$$

supposons que :

$$D^\alpha(I(a)) = a(x),$$

on obtenons :

$$D^\alpha(e^{I_\alpha^\alpha}) = e^{I_\alpha^\alpha} . a(x), \tag{3.5}$$

on utilise l'équation (3.4) *et d'aprés* (3.5) *en remplaçons dans l'équation* (3.4)

$$D^\alpha(e^{I_\alpha^\alpha}) y = e^{I_\alpha^\alpha} D^\alpha y + y . e^{I_\alpha^\alpha} a(x),$$

donc, nous obtenons

$$D^\alpha \left(e^{I_\alpha(a)} y\right) = e^{I_\alpha(a)} b(x). \tag{3.6}$$

Notre objectif est de trouver une solution pour y *résoudre cette équation* (3.6)*, nous utilisons l'opérateur d'intégration fractionnaire* I^α*, qui est l'opération inverse de la dérivée fractionnaire* D^α*.*
En appliquant I^α *des deux cotés de l'équation :*

$$I^\alpha D^\alpha \left(e^{I_\alpha(a)} y\right) = I^\alpha e^{I_\alpha(a)} b(x),$$

puisque $I^\alpha D^\alpha$ *est l'identité, nous avons*

$$e^{I_\alpha(a)} y = I^\alpha (e^{I_\alpha(a)} b(x)),$$

en divisant par $e^{I(a)}$*, nous obtenons :*

$$y = e^{-I_\alpha(a)} I^\alpha \left(e^{I(a)} b(x)\right). \tag{3.7}$$

Aprés avoir déterminé une premiére solution mais cette solution n'est pas unique, notre prochaine étape consiste à chercher une deuxiéme. Pour cela, nous allons exploiter une propriété clé des équations différentielles fractionnaire.
Pour ce faire, nous avons à partir de (3.3) le détrminant de wronskien fractionnaire, défini par :

$$W_\alpha[y_1, y_2] = I^\alpha(-P(x)),$$

ce qui nous donne l'équation

$$y_1 D^\alpha y_2 - y_2 D^\alpha y_1 = I^\alpha(-P(x)),$$

nous divisons par y_1 dans l'équation

$$D^\alpha y_2 - y_2 \frac{D^\alpha y_1}{y_1} = \frac{I^\alpha(-P(x))}{y_1}. \tag{3.8}$$

C'est une équation différentielle linéaire de la forme (3.4) et (3.8)
avec

$$a(x) = -\frac{D^\alpha y_1}{y_1}$$
$$b(x) = -\frac{I^\alpha(-P(x))}{y_1},$$

d'aprés le calcul du facteur intégrant sachant que :

$$I^\alpha a(x) = I^\alpha(-\frac{D^\alpha y_1}{y_1}),$$

et nous savons que :

$$I^\alpha\left(-\frac{D^\alpha y_1}{y_1}\right) = -lny_1,$$
$$e^{I^\alpha a(x)} = e^{-lny_1}$$
$$= \frac{1}{y_1},$$

on multiple l'équation (3.8) par $\frac{1}{y_1}$

$$\frac{1}{y_1} D^\alpha y_2 - \frac{y_1}{y_2}\frac{D^\alpha y_1}{y_1} = -\frac{I^\alpha(-P(x))}{y_1^2},$$

remarquons que le coté gauche est une dérivée fractionnaire d'une seul terme :

$$D^\alpha\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = -\frac{I^\alpha(-P(x))}{y_1^2},$$

en intégrant d'aprés (3.7), nous obtenons :

$$y_2 = y_1 I^\alpha\left(\frac{e^{-I^\alpha(P)}}{y_1^2}\right). \tag{3.9}$$

Aprés avoir présenté les aspects théoriques, on passons maintenant à quelques applications pratiques.

3.4 Application à une équation différentielle

Dans cette section, nous présentons quelques applications de la nouvelle définition de la dérivation fractionnaire développée par Roshdi Khalil et Abu Hammad. Nous montrons comment ce concept peut être utilisé dans l'étude des équations différentielles.

Exemple 3.4.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}y+\sqrt{x}D^{\frac{1}{2}}y=0. \tag{3.10}$$

Oú $D^{\frac{1}{2}}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$, selon la définition de Roshdi khalil.
On récriture l'équation, on utilise la propriété suivante :

$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}y=D^{1}y=\frac{dy}{dx},$$

l'équation devient alors :

$$D^{1}y+\sqrt{x}D^{\frac{1}{2}}y=0, \tag{3.11}$$

on va vérifier $y_1(x)=1$ est une solution. On va calculez la dérivée ordinaire.
La fonction $y(x)=1$ est une constante, donc sa dérivée normale est : $\frac{dy}{dx}=0$, on calcule la dérivée fractionnaire de l'ordre $\frac{1}{2}$ en utilisant la définition de Roshdi Khalil.

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \\ &= D^{\frac{1}{2}}(1)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-1}{\varepsilon} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation (3.11) et cela devient :

$$D^{1}y+\sqrt{x}D^{\frac{1}{2}}y=0+\sqrt{x}.0=0.$$

Donc la solution $y_1=1$ satisfait bien l'equation différentielle.
Pour trouver y_2, on appliquons la formule d'abel fractionnaire :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{-I_{\frac{1}{2}}(P)}}{y_1^2}\right) \\ &= 1 I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{I_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})}}{1^2}\right) \\ &= I_{\frac{1}{2}}\left(e^{I_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})}\right), \end{aligned}$$

On a l'intégrale conformable $I_\alpha f(t) = \int_0^x \frac{f(x)}{x^{\alpha-1}}dx$, *alors :*

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) &= \int_0^x \frac{\sqrt{x}}{x^{1-\frac{1}{2}}}dx \\ &= \int_0^x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \\ &= x, \end{aligned}$$

alors

$$y_2 = I_{\frac{1}{2}}\left(e^{-x}\right).$$

On va vérifier :

$$\begin{aligned} y_2 &= I_{\frac{1}{2}}\left(e^{-x}\right) \\ D^{\frac{1}{2}}y_2 &= e^{-x} \\ D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}y_2 &= -\sqrt{x}e^{-x} \\ D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}y + \sqrt{x}D^{\frac{1}{2}}y &= -\sqrt{x}e^{-x} + \sqrt{x}e^{-x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

y_2 *satisfait l'équation.*

Exemple 3.4.2 *Considérons l'équation différentielle*

$$D^{1/2}D^{1/2}y + \frac{1}{2}\tan\sqrt{x}D^{1/2}y = 0. \tag{3.12}$$

on peut vérifier que $y_1 = 1$ *est une solution de l'équation, on utilisoms la définition de la dérivés conformable, si la fonction* f *est dérivable, alors la dérivée conformable est donnée par :*

$$D^\alpha(f)(x) = x^{1-\alpha}f'(x)$$

On a :

$$y_1(x) = 1 \Rightarrow y_1'(x) = 0,$$

donc :

$$D^{1/2}(y_1)(x) = x^{1-\frac{1}{2}}.y_1'(x) = x^{\frac{1}{2}}.0 = 0,$$

et ensuite :

$$D^{1/2}\left(D^{1/2}(y_1)\right)(x) = D^{\frac{1}{2}} = 0,$$

on remplace dans l'équation (3.12), et cela devient :

$$D^{1/2}D^{1/2}y + \frac{1}{2}\tan\sqrt{x}D^{1/2}y = 0 + \frac{1}{2}\tan(\sqrt{x}).0 = 0.$$

Donc la solution $y_1 = 1$ satisfait bien l'équation différentielle.

Pour trouver y_2, on appliquons la formule d'Abel fractionnaire :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 I_{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-I_{\frac{1}{2}}(P)}}{y_1^2} \right) \\ &= I_{\frac{1}{2}} \left(e^{-I_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\tan(\sqrt{x}))} \right) \end{aligned}$$

on calcule $I_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\tan(\sqrt{x}))$, en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire conformable d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$I_\alpha f(t) = \int_0^x \frac{f(x)}{x^{\alpha-1}} dx,$$

alors :

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\tan(\sqrt{x}) \right) &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\tan(\sqrt{t})}{x^{1-\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\tan\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt, \end{aligned}$$

par changement de variable

$$u = \sqrt{t} \Rightarrow t = u^2 \Rightarrow dt = 2udu$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0 \quad et \quad t = x \Rightarrow u = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\tan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\tan(u)}{u} 2udu \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x}} 2\tan(u)du \\ &= \int_0^{\sqrt{x}} \tan(u)du, \end{aligned}$$

par intégration

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x}} \tan(u) &= (-\ln|\cos u| + c) \\ &= -\ln|\cos u| \Big|_0^{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

alors

$$e^{-I_{\frac{1}{2}}(p)} = e^{\ln|\cos\sqrt{x}|} = \cos\sqrt{x},$$

donc

$$y_2 = I_{\frac{1}{2}} \left(\cos\sqrt{x} \right).$$

On va vérifier que :

$$D^{\frac{1}{2}}y_2 = \cos\sqrt{x}$$
$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}y_2 = -\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}y_2 = \sqrt{x}\left(\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{x}$$

Substitution dans l'équation (3.12)

$$D^{1/2}D^{1/2}y + \frac{1}{2}\tan\sqrt{x}D^{1/2}y = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\tan\sqrt{x}.\cos\sqrt{x}$$
$$\tan\sqrt{x}.\cos\sqrt{x} = \sin\sqrt{x}$$
$$D^{1/2}D^{1/2}y + \frac{1}{2}\tan\sqrt{x}D^{1/2}y = -\frac{1}{2}\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sin\sqrt{x} = 0.$$

y_2 *satisfait l'équation.*

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté les travaux de Roshdi Khalil [6] concernant la nouvelle définition de la dérivée fractionnaire. Cette derniére rassemble la dérivée ordinaire et divisé quelques propriétés comme la linéarité et règle de chaîne, ce qui la rend plus facile à utiliser dans certaines applications. Cependant, cette définition a été critiquée par des quelques chercheurs qui estiment que la véritable dérivée fractionnaire doit être différente de la dérivée ordinaire. Parmi eux, Riemann a fourni une définition basée sur des intégrales non ordinaires, qui offre une plus grande flexibilité dans diverses applications. D'autre part, Caputo, a également fourni une définition basée sur la théorie de l'intégration, qui est adaptée à la résolution des équations différentielles. Par ailleurs, le chercheur Tarasov [15] a souligné que toute définition conservant la règle de Leibniz dans sa forme classique ne devrait pas être considérée comme une dérivée fractionnaire, dans la mesure où elle ne se distingue pas fondamentalement de la dérivée classique.

En raison des nombreuses définitions des dérivées et intégrales fractionnaires, les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo ont conduit à des généralisations telles que les dérivées Ψ qui permettent d'étendre la classe des dérivées fractionnaires. Sur la base de ces définitions, Hilfer, puis Sousa et Oliveira [14], ont introduit une nouvelle dérivée fractionnaire appelée Ψ-Hilfer.

Malgré ces développements, mais les chercheurs n'arrive pas à une définition unifiée et universelle de la dérivée fractionnaire. Alors, on concclut que le probléme reste jusqu'à maintenant ouvert... ?.

Bibliographie

[1] T. Abdeljaad, of computational and Applied Mathematics, 2015, 279, 57-66.

[2] B. Benaoumeur, Contributions dans les echelles de temps, PhD thesis, 2017.

[3] H. Brezis, Théorie et applications, journal Masson, Paris, 1983.

[4] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations, journal Lecture notes in mathematics, 2010, 2004.

[5] R. Khalil, M .Abu-Hammad, Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations, International Journal of Differential Equations and Applications, 2014, 13, 177–183.

[6] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, Journal of computational and applied mathematics , 2014, 264, 65–70.

[7] R. Lahcene, M. Horani, R. Khalil, Inhomogeneous conformable abstract Cauchy problem, Open Mathematics, 2021, 19, 690–705.

[8] A. Khalouta, Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques : extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire, 2019.

[9] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, San Diego, 2006, 204.

[10] T. Menacer, N. Hamri, Synchronisation des systèmesdynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Université Frères Mentouri-Constantine, 2014.

[11] K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, 1993.

[12] K. B. Oldham, J. Spanier, Fractional differential equations in electrochemistry, journal Advances in Engineering software, Elsevier, 2010, 41, 9–12.

[13] I. Podlubny, Fractional differential equations an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, elsevier, 1998, 198.

[14] J. V. C. Sousa, E. C. D Oliveira, On the-Hilfer fractional derivative, commun, Non linear Sci. Numer. Simula, 2018, 60, 72–91.

[15] V. Tarasov, No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18, 2945–2948.

[16] C. Winsløw, la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle, Perspectives en didactique des mathématiques, 2008.