République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de L'Enseignement supérieur Et de la Recherche scientifique

Université Ammar Thélidji-Laghouat

Faculté des sciences

Département de Mathématique- informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de licence

Domaine : Mathématiques et informatiques

Filière : Mathématique

Spécialité: Mathématique

Thème

Théorèmes de Riesz et application dans l'espace de Hilbert

Présentée par :

-ARABA Dalila

-SIGA Sabrina Nesrine

Dirigé par :

Mr. BOUGOUTAIA Amar

Année universitaire : 2013 /2014.

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédicace :

Je dédie ce simple travail a mon père et ma mère

Pour leurs soutien et encouragements.

Mes sœurs

Mes frères

Tout Ma famille

Et Tout ce que j'aime

Et toute personne qui m'a encouragé de loin et de prés.

ARABA Dalila

Dédicace :

Je dédie mon travail à mon défunt frère Siga Raouf que Dieu l'accepte dans Son Royaume.

-Tout ce que j'aime.

- A ma mère pour sa grande gentillesse.

- A mon père ce grand biologiste de Terrain, pour son savoir.

- A ma sœur Sana pour son soutien moral.

- A mon frère Omar ainsi que sa femme pour leurs soutiens moraux.

- A mon oncle Madani, mathématicien pour ses directifs et ses connaissances en Mathématique.

- A mes tantes maternelles pour leurs soutiens.

- A ma cousine maternelle Aouali Alouane, cette dame de grande envergure, pour tous.

- A mon cousin maternel Ali Alouane pour son soutien.

- A mon cousin paternel Tahar Kassar pour son soutien.

- A ma tante maternelle Hadja ainsi que son mari Tahar

Faroudj pour leurs grandes gentillesses et dévouements de ma sécurité.

- A ma cousine maternelle Aicha pour son soutien.

les Amies Dalila Belhirane, Leila Boughar, Saida Belgouah, (Halima et Sakina et Amina) Boussen, Fatima, Hadja, Dalila Araba, Hamida, Maria, Imane, Mebareka, Khadija, pour ses

Gentillesses ; ainsi à toutes mes collègues.

Je dédie ce mémoire

Siga Sabrine Nesrine.

Remerciement

Je tiens à présenter mes reconnaissances et mes remerciements à mon encadrant : ***Mr Bougoutaia Amar*** pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Un remerciement particulier à :

Prof Mokhtari Abdelkader pour ces inestimables conseils.

Sommaire

Introduction :

Ce mémoire est consacré à l'étude des théorèmes de Riesz est ces application dans un espace de Hilbert.

Notre travail à été effectué selon le plan suivant :

Au première chapitre, on représenté rappel d'algèbre linéaire, et après est consacré à l'étude la définition d'un espace de Hilbert, on donné quelques théorèmes d'un espace de Hilbert.

Au deuxième chapitre, on donné quelques propriétés des opérateurs linéaires.

Au troisième chapitre, est consacré à l'étude les théorèmes de Riesz, En particulier les deux théorèmes de Riesz :

−Théorème de la projection orthogonale.

−Théorème de Riesz fischier.

On donne quelques applications des Théorème de Riesz.

CHAPITRE 1

Espace de Hilbert:

1.1 *Rappels*

Ce chapiter est constitué d'un rappel de quelques notations d'algéber linéaire en relation avec ce travail , aprés on définie l'espace de hilbert et ses propriétés.

1.1.1 *Produit Scalaire*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$, un produit scalaire sur E est un application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{k}$ tell que pour tout x,x',$y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a:

1- $\varphi(x,x) \geqslant 0$ *et* $\varphi(x,x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

2- $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

3- $\varphi(x+x',y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y)$.

4- $\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace ***préhilbertien*** .

1.1.2 *Espase Normé*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}, E$ est dit espace vectoriel normé , s'il est muni d'un norme ,c'est à dire d'un fonction $\| \, . \, \|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^{+}$, *tell que:*

1- $\parallel x \parallel = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2- $\parallel \lambda x \parallel = \mid \lambda \mid \parallel x \parallel, \forall x \in E, \forall \lambda \in \Bbbk.$

3-$\parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel, \forall x, y \in E.$

1.1.3 *Espace Complet*

Un espace vectoriel normé $(E, \parallel . \parallel)$ est dit complet, si tout suite de cauchy dans E est une suite convergente. un espace vectoriel normé complet est appelé espace de **Banach.**

1.1.4 *Espace Euclidien*

On appelle espace euclidien tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1.2 *Espace de Hilbert*

Définition 1

Un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire. En d'autres mots, un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien. Alors pour tout $x, y \in E$,

$\mid \langle x, y\rangle \mid \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ *.......(1)*

Démonstration :

Pour la démonstration de cette inégalité il suffit de considérer l'expression

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \mid \lambda \mid^2 \langle y, y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Posons $\lambda = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$,on a:

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$$

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \mid \langle x, y\rangle \mid^2 \geq 0$$

$$\mid \langle x, y\rangle \mid \leq \| x \| \| y \| \quad \forall x, y \in E.$$

Théorème 3

Dans un espace préhilbertien E, l'application $\|.\|$: $E \to \mathbb{R}$, donnée par

$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$*.......(2)*

pour tout $x \in E$ est une norme pour E

Démonstration :

Nous avons $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

De plus

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda\lambda\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = (|\lambda|^2\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|.$$

Enfin

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

D'où

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

La norme $\|.\|$ ainsi définie s'appelle la norme induite par le produit scalaire.

Remarques 4

En utilisant la norme induite par le produit scalaire, les inégalités (1) et (2) deviennent respectivement

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

et

$$|\langle x, y\rangle| \leq \tfrac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ .$$

Théorème 5 *(Loi du parallélogramme)*

La norme induite par le produit scalaire satisfait l'égalité

$$(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) ....(3)$$

Démonstration :

En effet

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Les égalités

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) = 4Re\langle x,y\rangle$$
$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4Im\langle x,y\rangle$$

Nous amènent à

$$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) ....(4)$$

Cette équation nous montre que deux produits scalaires différents sur E entraînent deux normes induites différentes.

Théorème 6 *:*

Un produit scalaire est une fonction continuée sur $E \times E$, par rapport à la norme induite.

Démonstration :

Soient $x_0, y_0 \in E$ et les suites $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$ et $\{y_n; n \in \mathbb{N}\} \subset E$ telles que $(x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0)$ et $(y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y_0)$, Alors :

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n - x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n - y_0| \\ &\leq |\langle x_n - x_0, y_n\rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\ &\leq \|x_n - x_0\|\,\|y_n\| + \|x_0\|\|y_n - y_0\|\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle.$$

Théorème 7

Soit E un espace de Banach . E est un espace de Hilbert (i.e. sa norme est induite par un produit scalaire) si et seulement si pour tout $x, y \in E$, on a:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) ....(5)$$

Le produit scalaire est unique, et on a :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) ....(6)$$

Démonstration :

La condition nécessaire est montrée dans le théorème (3) par les égalités (3) et (4). Supposons donc qu'on ait (5) et soit $\langle x, y\rangle$ donné par (6).

a) *Montrons d'abord que $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.*

En posons $x = y$ dans (6), alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(4\|x\|^2 + i|(1+i)|\|x\|^2 - i|(1-i)|\|x\|^2)\\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

b) *Montrons maintenant que l'application $\varphi = \langle ., .\rangle : E \times E \to K.$ donnée par (6) vérifie les conditions du produit scalaire.*

1) *Evidemment $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

2)
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 - i\|y+ix\|^2 + i\|y-ix\|^2)\\ &= \frac{1}{4}\overline{(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+ix\|^2 - i\|y-ix\|^2)}\\ &= \overline{\langle y, x\rangle}\end{aligned}$$

Puisque d'après (6)

$$Im\langle x, y\rangle = Re\langle x, iy\rangle$$

il suffit de montrer la linéarité de la première variable de $\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle$ pour la partie réell

3) *Soient x_1, x_2 et $y \in E$ et posons $u_1 = \frac{(x_1+x_2)}{2}$ et $u_2 = \frac{(x_1-x_2)}{2}$,*

et nous avons, en utilisant (5),

$$Re\langle x_1, y\rangle + Re\langle x_2, y\rangle = Re\langle u_1 + u_2, y\rangle + Re\langle u_1 - u_2, y\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\{\|u_1 + u_2 + y\|^2 - \|u_1 + u_2 - y\|^2 + \|u_1 - u_2 + y\|^2 - \|u_1 - u_2 - y\|^2\}$$
$$= \frac{1}{4}\{\|u_1 + u_2 + y\|^2 + \|u_1 - u\_2 + y\|^2\} - \frac{1}{4}\{\|u_1 + u_2 - y\|^2 + \|u_1 - u_2 - y\|^2\}$$
$$= \frac{1}{2}\{\|u_1 + y\|^2 + \|u_2\|^2\} - \frac{1}{2}\{\|u_1 - y\|^2 + \|u\_2\|^2\}$$
$$= \{\|u_1 + y\|^2 - \|u_1 - y\|^2\}$$
$$= 2Re\langle u_1, y\rangle$$
$$= 2Re\langle \tfrac{(x_1+x_2)}{2}, y\rangle.$$

D'autre part, en posant $u_1 = u_2$ *nous obtenons*

$$Re\langle 2u_1, y\rangle = 2Re\langle u_1, y\rangle$$

ce qui entraîne l'additivité de φ *par rapport à la première variable*

4) *De l'additivité, nous obtenons pour tout* $n \in N$

$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle \quad \text{et} \quad \langle \tfrac{x}{n}, y\rangle = \frac{\langle x,y\rangle}{n}$$

ce qui entraîne pour $\lambda \in \frac{n_1}{n_2}, n_1, n_2 \in N$ *que*

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle........(7)$$

D'autre part puisque d'après (6)

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$$

(7) *reste vrai pour* $\lambda \in Q$ *et en utilisant la continuité de* φ *(respectivement des normes) aussi pour* $\lambda \in R$.

Il nous reste à montrer (7) pour $\lambda \in C$. *Il suffit de le montrer pour* $\lambda = i$ *puisque nous avons montré que* $\lambda = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in R$,

$$\langle(\alpha + \beta i)x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle ix, y\rangle.$$

D'après (6)

$$\langle ix, y\rangle = \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|ix + iy\|^2 - i\|ix - iy\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2)$$
$$= i\langle x, y\rangle$$

et le théorème est établi.

Définition 8

Soient un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$*et* $x, y \in H$ *,l'angle* θ *entre les deux vecteurs* x *et* y *est donné par :*

$$\cos\theta = \left\{ \begin{smallmatrix} \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} & si\ x\neq 0\ et\ y\neq 0 \\ 0 & si\ x=0\ ou\ y=0 \end{smallmatrix} \right\}$$

D'aprés (inégalité de cauchy schwarz) on a bien

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

si $(x, y) = 0, x \perp y$ *et* $\cos\theta = 0$ *d'ou* $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Théorème 9

Dans un espace de Hilbert H *sur* $\mathbb{R}$, *la loi du cosinus est vérifiée*

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 \| x \| \| y \| \cos\theta.$$

où θ *est l'angle entre les deux vecteurs* x *et* y.

Démonstration :

D'aprés définition on a $\langle x, y\rangle = \cos\theta \| x \| \| y \|$

et on à aussi

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle$$

donc

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\theta.$$

1.2.1 *Base Hilbertienne:*

Définition 10

Soit H *un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de* H *tout sous-ensemble fini ou dénombrable* $\{e_n\}_n$ *qui vérifie :*

$1-$ $\| e_n \| = 1$ *et* $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ *si* $n \neq m$.

$2-$*le sous-espace vectoriel engendré par* $\{e_n\}_n$ *(par combinaisons linéaires finies) est dense dans* H.

Exemple 11

Soit Ω *un ouvert de* $\Bbbk^n$*,et* $p \in [1, +\infty[$

Rappelons que l'on définit

$L^p(\Omega) = \{\ f$ *Lebesgue mesurable sur* Ω *:* $\mid f \mid^p$ *est Lebesgue intégrable sur* $\Omega\}$,

Pour $p = 2, L^2(\Omega)$ *muni de l'application*

$$\langle f; g\rangle = \int_\Omega f\,(t)\,\overline{g\,(t)}dt$$

est un produit scalaire. et on a

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega \mid f \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Hilbert.

Exemple 12

Soit E *l'ensemble des fonctions continues et bornées sur* $\mathbb{R}$.

$$\langle f, g\rangle = \lim_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}dt$$

est un produit scalaire sur E *.*

l'espace préhilbert n'est pas un espace de Hilbert.

CHAPITRE 2

Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert :

Nous introduisons dans ce chapiter les opérateurs dans un espace de Hilbert.

2.1 *Opérateurs Linéaires:*

Définition 13

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K ,on dit que l'application U définie sur E dans F est une application linéaire ou un opérateur linéaire si :

$\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$ *, on a* $U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y)$.

On note $L(E, F)$ *l'ensemble de tous les opérateurs linéaires de E vers F.*

2.2 *Opérateurs Continues :*

Définition 14

Soient E et F deux espaces normés , un opérateur U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F est dit continue au point x_0 de A, si pour toute suite x_n de A converge vers x_0, on a la suite $U(x_n)$ converge vers $U(x_0)$.

L'opérateurs U est dite continue sur A , s'il est continue en chaque point de A.

Théorème 15

Soient E et F deux espaces normés , U un opérateur linéaire défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F , continu en x_0 de A , alors U est continu on chaque point de A .

Démonstration :

Soit x_n une suite convergente vers x, alors :

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \\ &= y_n + (x - x_0) \ , \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} [x_0 + (x_n - x)] = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$

D'où

$$\begin{aligned} U(x_n) &= U[x_0 + (x_n - x)] + U(x - x_0) \\ &= U(y_n) + U(x - x_0) \end{aligned}$$

Ce qui implique:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} U(x_n) &= \lim_{n\to\infty} U(y_n) + U(x - x_0) \\ &= U(x). \end{aligned}$$

2.3 *Opérateurs Bornés :*

Définition 16

un opérateur linéaire U défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive M, telle que :

$$\| U(x) \|_F \leq M \| x \|_E, \forall x \in E........(1)$$

Proposition 17

La plus petite des constantes M est appelée norme de U et que l'on noté $\| U \|$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\| U \| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E}\\ &= \sup_{\|x\|=1} \| U(x) \|_F\\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \| U(x) \|_F.\end{aligned}$$

Démonstration :

En effet , de la relation (1), *les constantes* M *s'écrivent:*

$$\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M \ , \forall x \in E,\ x \neq 0,$$

D'où , la plus petite des constantes M *notée* $\| U \|$ *s'écrit comme suit*

$$\| U \| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned}\| U \| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E}\\ &= \sup_{x\neq 0} \| \frac{1}{\|x\|_E}U(x) \|_F\\ &= \sup_{x\neq 0} \| U(\frac{x}{\|x\|_E}) \|_F\\ &= \sup_{\|x\|=1} \| U(x) \|_F \ .\end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\| U \| = \sup_{\|x\|=1} \| U(x) \|_F \ .$$

Possons sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ *des deux membres, on obtient*

$$\sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \| U(x) \|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \| U(x) \|_F \ .$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1} \| U(x) \|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \| U(x) \|_F$$

D'où la troisiéme égalité

$$\| U \| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \| U(x) \|_F \ .$$

Remarques 18

Un opérateur linéaire U *est continue si et seulement si il est borné .*

Théorème 19

Soient E *et* F *deux espaces normés , l'ensemble* $\mathcal{L}(E,F)$ *de tout les opérateurs linéaires continues de* E *dans* F *est un sous espace vectoriel de* $L(E,F)$ *de plus* $\mathcal{L}(E,F)$ *muni de la norme* $\| U \|$ *est un espace normé.*

Démonstration :

En effet ,si $\| U \| = 0$ *, avec* $U \in \mathcal{L}(E,F)$ *alors , de la relation*

$$\| U(x) \| \leq \| U \| \| x \|,$$

On aura

$$U(x) = 0,\ \forall x \in E,\ d'où\ U = 0$$

Soit $U_1, U_2 \in \mathcal{L}(E,F)$*,alors* $U = U_1 + U_2 \in \mathcal{L}(E,F)$*, avec*$\| U(x) \| \leq \| U \| \| x \|$

De plus ,on a:

$$\begin{aligned} \| U(x) \| &\leq \| U_1(x) \| + \| U_2(x) \| \\ &\leq \| U_1 \| \| x \| + \| U_2 \| \| x \| \\ &\leq (\| U_1 \| + \| U_2 \|) \| x \|, \end{aligned}$$

D'où

$$\| U \| \leq \| U_1 \| + \| U_2 \|$$

Car $\| U \|$ *est un borné supérieur*

Soit $U \in \mathcal{L}(E,F)$*, alors* $\forall \lambda \in K$*, on a* $\lambda U \in \mathcal{L}(E,F)$ *,avec*

$$\| \lambda U(x) \| \leq \| \lambda U \| \| x \|,$$

ce qui implique:

$$\| \lambda U(x) \| = | \lambda | \| U(x) \| \leq | \lambda | \| U \| \| x \|$$

D'où

$$\| \lambda U \| \leq |\lambda| \| U \|$$

d'autres parts ,on a :

$$\frac{1}{|\lambda|} \| \lambda U(x) \| = \| U(x) \| \leq \| U \| \| x \| \leq \frac{1}{|\lambda|} \| \lambda U \| \| x \| .$$

D'où

$$\| U \| \leq \frac{1}{|\lambda|} \| \lambda U \| \Rightarrow | \lambda | \| U \| \leq \| \lambda U \| .$$

Remarques 20

soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ *est un espace de Banach .*

Proposition 21

Soit H un espace de Hilbert de $U : H \to H$ une application linéaire ,alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1-U est continue .

2-U est continue en 0.

3-Il existe $x \in H$ tel que U est continue en x .

4-Il existe un constante $C > 0$ telle que $\| Uh \| \leq C \| h \|$ pour tout $h \in H$.

Définition 22

On appelle opérateur sur H une application linéaire continue de H dans H ,on note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H si $U \in \mathcal{L}(H)$,on définit sa ***norme opérateur*** *par :*

$$\| U \| = \sup\{\| Uh \| : h \in H, \| h \| \leq 1\}.$$

Proposition 23 *les propriétés de la norme opérateur:*

1-$\| U \| = 0$ si et seulement si $U = 0$, $U \in \mathcal{L}(H)$.

2-$\| U + W \| \leq \| U \| + \| W \|$, $U, W \in \mathcal{L}(H)$.

3-$\| \alpha U \| \leq | \alpha | \| U \|$, $U \in \mathcal{L}(H)$ et $\alpha \in \mathbb{k}$.

4-$\| UW \| \leq \| U \| \| W \|$, $U, W \in \mathcal{L}(H)$.

2.4 *Opérateur adjoint :*

Définition 24

Soit H un espace de Hilbert de $U \in \mathcal{L}(H)$,alors il existe un unique opérateur $U^* \in \mathcal{L}(H)$ appelé ***adjoint*** *de H qui vérifie la relation suivante :*

Pour tout $x, y \in H$, $< Ux, y > = < x, U^* y >$. de plus , on a :

$$\| U \|_{op} = \| U^* \|_{op} .$$

Proposition 25

Soit $U, W \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\alpha \in \mathbb{k}$ *Alors:*

1. $(\alpha U + W)^* = \overline{\alpha} U^* + W^*$.
2. $(UW)^* = W^* U^*$.
3. $(U^*)^* = U$.
4. *Si* U *est inversible d'inverse* U^{-1}, *alors* U *est inversible et* $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$.

2.5 *Espace Dual :*

Définition 26

On appelle dual topologique d'un espace vectoriel normé E *sur* K *est l'espace vectoriel sur* K *des formes linéaires continues de* E *dans* K, *normé par la norme d'opérateur,*

appelée dans ce cas la norme duale :

$$\| \ell \| = \sup_{\|x\| \leq 1} | \ell(x) | .$$

Cet espace vectoriel normé est noté $E\prime$, *et c'est un espace de Banach*

(car $E\prime = L(E, K)$ *et* K *est complet). Le dual topologique du dual topologique de* E *est appelé le* ***bidual topologique*** *de* E, *et noté* $E\prime\prime$.

2.6 *Espace Réflexif :*

Soit X *un espace vectoriel normé, sur* R *ou* C. *On note* $X\prime$ *son dual topologique, c'est-à-dire l'espace de Banach des formes linéaires continues de* X *dans le corps de base. On peut alors former le bidual topologique* $X\prime\prime$, *qui est le dual topologique de* $X\prime$. *Il y a une application linéaire continue naturelle*

$J : X \to X\prime\prime$

définie par

$$J(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } X \text{ et } \varphi \text{ dans } X\prime.$$

Donc, J *envoie* x *vers la forme linéaire continue sur* $X\prime$ *donnée par l'évaluation* *en x. Comme conséquence du théorème de Hahn-Banach, J préserve la norme (soit encore$\| J(x) \|=\| x \|$) et est donc injective. L'espace X est alors dit réflexif si J est bijective.*

Remarques 27

Cette définition implique que tout espace normé réflexif est de Banach, puisque X est isomorphe à X''.

Propriété :

• *Tout espace de Hilbert est réflexif, de même que les espaces L^p pour* $1 < p < \infty$.

• *Si Y est un sous espace vectoriel fermé d'un espace réflexif X alors Y et X/Y sont réflexifs.*

Pour un espace normé X, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1-X est réflexive.

2-X est complèt et son dual est réflexif.

3-X est complète et toute forme linéaire continue sur X atteint sa norme en un point de la boule unité de X.

4-X est complet et tout convexe fermé non vide C de X est "proximinal",c'est à dire que pour tout x dans X ,il existe dans C au moins un C (non unique en général) tel que $\| x - c \|$soit égal à la distance de x à c.

Exemple 28

Dans l'espace $L^2(\Omega, A, P)$, la série formelle $\sum_{i \in N} \alpha_i \beta^i$ définit un opérateur si et seulement si la série des coefficients est absolument sommable :

$$\sum_{i \in N} | \alpha_i | < \infty.$$

CHAPITRE 3

Théorèmes de Riesz dans un espace de Hilbert:

3.1 *Base de Riesz:*

Définition 29

Une base $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est dite base de Riesz de* H*, si elle est équivalente à une base orthonormée de* H*, c'est à dire que:*

$\delta_n = Ge_n$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

avec $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une base orthonormée de* H *et* G *est un opérateur borné et inversible sur* H*.*

3.2 *Théorème de Riesz de la projection orthogonale:*

Théorème 30

Soit H *un espace de Hilbert et* C *une partie convexe fermé non vide, pour tout* $x \in H$ *il existe un unique* $y \in C$ *tel que:* $\quad d\ (x, C) = \parallel x - y \parallel$

on a $y = x_C$ *est appelé projeté orthogonal de* x *sur* C*.et l'application associée notée* $Pc(x)$*.*

Démonstration :

Pour tout $z \in C$ *on a* $\| x - z \| = d(x, C)$ *(qui existe, puisque c'est l'inf d'une partie non vide).*

Par définition, il existe $(x_n)_{n\in N} \in C^n$ *tel que :*

$$d\ (x, C) \leq \| x - x_n \| \leq d\ (x, C) + \frac{1}{n}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons que(x_n) *est de suite Cauchy ,*

ainsi, H *étant hilbertien c'est un espace complet, donc on pourra conclure quant à la convergence de la suite*(x_n)*:*

Soit $p, q \in \mathbb{N}$*, et notons* $\delta = d(x, C)$.

H *étant un espace de Hilbert, l'identité du parallélogramme est vérifiée, donc*

$$\begin{aligned} 2(\| x - x_p \|^2 + \| x - x_q \|^2) &= \| (x - x_p) - (x - x_q) \|^2 + \| (x - x_p) + (x - x_q) \|^2 \\ &= \| x_q - x_p \|^2 + \| 2x - x_p - x_q \|^2 \\ &= \| x_q - x_p \|^2 + 4 \| x - \tfrac{x_p + x_q}{2} \|^2 \end{aligned}$$

C *est convexe, donc*

$$\frac{x_p + x_q}{2} \in C \text{ on a } \| x - \frac{x_p + x_q}{2} \|^2 \leq \delta^2$$

donc on a

$$\| x_q - x_p \|^2 \leq 2(\| x - x_p \|^2 - \delta^2 + \| x - x_q \|^2 - \delta^2)$$

Or il apparaît par comparaison que:

$$\lim_{p \to +\infty} \| x - x_p \| = \delta,$$

donc

$$\lim_{p \to +\infty} \| x - x_p \|^2 = \delta^2.$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $p \geq n_0$ *on a*

$$|\ \ \| x - x_p \|^2 - \delta^2 | \leq \frac{\varepsilon^2}{2},$$

D'où pour $p, q \geq n_0$ *on a*

$$\| x_q - x_p \| \leq \varepsilon,$$

donc (x_n) *est bien une suite de Cauchy, donc elle converge vers* $y \in \overline{C}$ *car* H *est complet . Mais* C *est fermé donc* $C = \overline{C}$ *et* $y \in C$ *,* *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \| x - x_n \| = \| x - y \|$$

par continuité de l'application norme, donc par unicité de la limite,

$$\| x - y \| = \delta = d\,(x, C)$$

on prend $y, z \in C$ *vérifiant*

$$\| x - y \| = \| x - z \| = d\,(x, C)$$

on construit une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $c_n = y$ *si* n *est pair* ,$c_n = z$ *si* n *est impair* .

pour tout $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\| x - c_n \| = \delta$$

donc avec le méme raisonnement que ci-dessus, cela implique la convergence de la suite(C_n)*, et donc* $y = z$.

Il y a donc unicité du projeté orthogonal.

Applications du théorème de projection:

Proposition 31

Pour toute partie A *de* H, $A^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* H.

Démonstration :

Soit $A^{\perp}$ *un sous-espace, Montrons qu'il est fermé :*

Si on prend $y \in \overline{A^{\perp}}$ *il existe une suite* (y_n) *d'élèments de* $A^{\perp}$*qui converge vers* y.

La fonction $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ *est continue d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz ,*

or $\forall x \in A, \forall n \in N$ *on a:*

$\langle x, y_n \rangle = 0$ *donc avec* $n \to +\infty$ *on a* $\langle x, y \rangle = 0$ *par continuité, donc* $y \in A^{\perp}$ *:*

$A^{\perp}$ *est bien un fermé.*

Proposition 32

Soit H *un espace hilbertien et* F *un sous-espace fermé de* H.

1- F *et* $F^{\perp}$ *sont des sous-espaces fermés supplémentaires.*

2-Pour tout $x \in H$, *on a* $x_F = P_F(x)$ *projection orthogonale sur F.*

3-F $\oplus F^{\perp} = H$.

4- $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

5-F dense dans H $\Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$.

3.3 *Théorème de représentation de Riesz:*

Rappels:

Un isomorphisme est un application linéaire bijectif.

Un endomorphisme est un application linéaire continue.

Théorème 33

Soit $H\prime$ *le dual topologique de* H *,soit* $a \in H$ *,on note* $\varphi_a : x \in H \to \langle a, x\rangle \in \mathbb{k}$ *alors* $\varphi : a \in H \to \varphi_a \in H\prime$ *est bien définie, et c'est un* isomorphisme *de* H *sur* $H\prime$ *.*

Démonstration :

φ *est bien définie est bien linéaire*

φ *est injective :*

si $a = 0$ *alors en particulier,* $\varphi_a(a) = \langle a, a\rangle = \parallel a \parallel^2 = 0$ *donc* $a = 0$ *et* $ker\ \varphi = \{0\}$.

φ *est surjective:*

Soit $L \in H\prime$*, Si* $L = 0, L = \varphi(0)$ *et c'est bon , sinon notons* $E = ker\ L, E$ *est un hyperplan de* H*.*

Ayant $E = L^{\langle -1\rangle}(\{0\})$ *et* L *continue,* E *est un fermé de* H*.*

D'aprés la proposition,

$E \oplus E^{\perp} = H$*. Ayant* L *différente de l'application nulle, il existe* $u \in E^{\perp}$ *tel que* $L(u) \neq 0$*.*

On a en fait $E = Vect\ a$ *:*

si on prend $x \in E^{\perp}$ *et si on note* $w = x - \frac{L(x)}{L(a)}a$

On a : $L(w) = L(x) - \frac{L(x)}{L(a)}L(a)$

par linéarité, donc $L(w) = L(x) - L(x) = 0$ *:*$w \in E$. *Or* $w \in E^{\perp}$ *par construction,*

Donc

$w \in E \cap E^{\perp} = \{0\}$ *d'ou* $x = \frac{L(x)}{L(a)}a$ *:* $x \in Vect\ a$ *et par double inclusion (l'autre inclusion étant évidente) on a bien* $E^{\perp} = Vect\ a$.

On a donc pour tout $x \in H$ $x = \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E, x_E \in E$.

Notons maintenant $b = \frac{L(a)}{||a||^2}a$.

On a pour tout $x \in H$

$$\langle x, b\rangle = \langle \frac{L(x)}{L(a)}a + xE, \frac{L(a)}{||a||2}\rangle = \frac{L(x)}{L(a)}\frac{L(a)}{||a||^2}\langle a, a\rangle = L(x)$$

car $x_E \in E$ *et* $a \in E^{\perp}$.

D'ou l'on a $L = \varphi_b$ *et* φ *est bien surjective.*

En conclusion, est bien un isomorphisme, il y a donc isomorphisme entre H *et son dual topologique.*

Proposition 34 *(* ***L'existence d'un opérateur adjoint)***

Soit $U \in L(H)$ *endomorphisme continu de* H.

Il existe un unique $U^* \in L(H)$ *tel que pour tout* $(x, y) \in H^2$ *on a.*

$$< Ux, y >=< x, U^*y > .$$

Démonstration :

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et la définition de la norme opérateur, on a l'inégalité:

$$| \langle Ux, y\rangle | \leq \| U \|_{op} \| x \| \| y \| .$$

Ainsi, l'application $\ell y : x \to \langle Ux, y\rangle$ *est une forme linéaire continue sur* H, *et par* ***le théorème de représentation de Riesz****, il existe un unique élément dans* H *notons-le* $A^*(y)$ *tel que:*

$$< Ux, y >=< x, U^*y >$$

On vérie facilement que pour tous $y, z \in H$ *et* $\lambda \in \Bbbk$, $U^*(y) + \lambda U^*(z)$ *vérie la propriété qui définit* $U^*(y + \lambda z)$. *Par unicité,*

$$U^*(y) + \lambda U^*(z) = U^*(y + \lambda z),$$

ce qui prouve que U^* *est linéaire.*

On calcule la norme opérateur de U^*.

$$\begin{aligned}\| U^* \|_{op} &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |< U^*x, y >| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |< y, U^*x >| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |< Uy, x >| \\ &= \| U \|_{op} .\end{aligned}$$

3.4 *Théorème de Riesz-Fischer:*

Théorème 35

soit $\{\varphi_k\}$ *un systéme orthonormé dans un espace de hilbert H, et soient les valeurs* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ...$*telles que la série* $\sum_{k=1}^{\infty} \mid \alpha_k \mid^2$*soit convergente, alors on peut trouver un vecteur* $f \in H$,*telque:*

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle \quad \forall i = 1, 2, ...$$

et de plus ,on a :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid \langle f, \varphi_i \rangle \mid^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mid \alpha_i \mid^2 = \| f \|^2 .$$

Démonstration :

soit $\{f_n\}$ *la suite des sommes partielles donnée par :*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

de la convergence de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \mid \alpha_i \mid^2$,*on déduit que la suite* $\{f_n\}$ *est de cauchy, bien entendu pour des valeurs entiers p et q assez grandes, telles que* $p \leq q$, *on a:*

$$\| f_p - f_q \| = \sum_{i=p+1}^{q} \mid \alpha_i \mid^2 < \varepsilon.$$

L'espace H étantde Hilbert, alors la suite $\{f_n\}$ *est une suite convergente vers un élément f de H .d'ou de larelation* $f = f_n + (f - f_n)$, *et de la composition du systéme* $\{\varphi_k\}$ *avec les deux membres ,on obtient:*

$\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle + \langle f - f_n, \varphi_i \rangle.$

le second terme $\langle f - f_n, \varphi_i \rangle$ *de la somme figurant au second member tend vers 0 quand* $n \to \infty$ *et cela due à la continuité du produit scalaire, car*

$| \langle f - f_n, \varphi_i \rangle | \leq \| f - f_n \| \| \varphi_i \|$

tandis que le premier terme $\langle f_n, \varphi_i \rangle$ *de la somme figurant au second member coincide avec la valeur* $\alpha_i, \forall i \leq n$ *d'ou la relation* $\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle = \alpha_i$ *pour tout* $i \leq n$ *, ce qui entraine :*

$$\langle f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \rangle = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k |^2$$

passant à la limite quand $n \to \infty$, *on obtient l'égalité de parseval*

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k |^2 \quad .$$

Conclusion :

Les espaces de Hilbert sont donc espace réflexif, le théorème de Riesz est utiliser pour monter l’existence d’un opérateur adjoint d’une part, et d’autre part une fonctionnelle linéaire x′ : H→₵ s’écrit sous la forme d’un produit scalaire x′=<x, y>.

Bibliographie :

[1] H.BREZIS, Analyse fonctionnelle, Masson paris (1987).

[2] N. BOCCARA, Analyse fonctionnelle.

[3] G.CHILOV, Analyse mathématique fonction d'une variable.

[3] WALER HENGARTNER, MARCEL LAMBERT et CORINA REISCHER, Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les Presses de l'Université du Québec(1981).

[4] D.FEYEL, Espaces de Hilbert, Université d'Evry M52 2008-09.

[5] JULIEN BAGLIO, Algèbre linéaire.