

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عنمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master

Domaine : Mathématique informatique

Filière : Mathématique

Option : Analyse Mathématique

par :

Messaoudi Halima

Thème

Etude d'un problème aux limites semi-linéaire
hyperbolique pour un opérateur fortement elliptique

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

<i>Mr. Belabbaci Youcef</i>	M.C.(A)	Président
<i>Mr. Nouiri Brahim</i>	M.C.(B)	Examinateur
<i>Mr. Rahmoune Abdelaziz</i>	M.A.(A)	Examinateur
<i>Mme. Boukhatem yamna</i>	M.C.(B)	Encadreur
<i>Mr. Rahmoune Abita</i>	M.A.(B)	Co-Encadreur

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout, notre Dieu qui nous a éclairé la bonne voie et nous a aidé à la parcourir.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mes encadreurs Yamna Boukhatem et Abita Rahmoune pour m'avoir proposé ce sujet, leurs précieux conseils et leur aide le long de tout mon travail. Je remercie très chaleureusement les membres de jury à savoir Monsieur le président Youcef Belabbaci et Messieurs Nouiri Brahim, Rahmoune Abdelaziz de n'avoir pas hésité à accepter de juger ce travail.

Enfin, tous mes remerciements vont à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Je salue tous mes amis. Leur présence et leur soutien constant m'ont permis de réaliser mes rêves.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A ma grand-mère Khedidja et mon grand-père Ahmed pour leur douceur et leur gentillesse.

A celui qui m'a soutenue tout au long de ce mémoire mon mari Mohamed, sans oublier mes beaux parents que j'aime beaucoup.

A mes soeurs ainsi qu'à mes frères pour leur tendresse, leur complicité.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

ملخص

في هذا العمل نعتبر مسألة حدودية قطعية شبه خطية من اجل مؤثر إيهلجي ذات معاملات متغيرة. بفرض بعض الشروط على معطيات المسألة و بالإعتماد على طريقة التراص و تقريبات فاودو قلاركين، نبرهن وجود و وحدانية حل ضعيف. هذا العمل ينتهي بدراسة الارتباط المستمر للحل بالنسبة للمعطيات.

كلمات مفتاحية : فاودو قلاركين، طريقة التراص، مسألة حدودية قطعية شبه خطية.

Résumé

Dans ce travail, on considère un problème aux limites semi-linéaire hyperbolique pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables. Sous certaines hypothèses sur les données, en se basant sur la méthode de compacité et les techniques de Faedo-Galarekin, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible. Ce travail se termine par une étude sur la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Mots clés : Faedo-Galarekin, méthode de compacité ,problème aux limites semi-linéaire hyperbolique.

Abstract

In this work, we consider a semi-linear hyperbolic boundary value problem for a strongly elliptic operator with variable coefficients. Under certain assumptions on the data, based on the compactness method and techniques of Faedo-Galarekin, we prove the existence and uniqueness of a weak solution. This work ends with the study onto continuous dependence of the solution with respect to data.

Keywords : Faedo-Galarekin, the compactness method, semi-linear hyperbolic boundary value problem .

Table des matières

Introduction générale	v
1 Notions et préliminaires	2
1.1 Topologie faible	3
1.1.1 Définition et propriétés élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$	3
1.1.2 La topologie faible \ast $\sigma(E', E)$	3
1.1.3 Espaces réflexifs	4
1.1.4 Espaces séparable	5
1.2 Espaces L^p	5
1.2.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces L^p	6
2 Les espaces de Sobolev	9
2.1 Les espaces de Sobolev	10
2.1.1 Définitions et premières propriétés	10
2.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$	11
2.1.3 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$	13
2.2 Espaces fonctionnels	13
2.3 Compléments divers	16
2.3.1 Lemmes de Gronwall	17
3 Existence et unicité de la solution	19
3.1 Position du problème	20
3.2 Formulation variationnelle	21
3.3 Existence de la solution	24
3.3.1 Solutions approchées	25
3.3.2 Estimation a priori	26
3.3.3 Passage à la limite	29
3.4 Unicité de la solution	31
3.5 Dépendance continue de la solution par rapport aux données	33
Conclusion générale	35
Bibliographie	36

Introduction générale

Les équations différentielles aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la description des phénomènes naturels en Physique, Chimie, Biologie... En particuliers, plusieurs phénomènes naturels : corde ou membrane vibrante, ondes acoustiques, ondes électromagnétiques, ondes sismiques,..., sont modélisés par d'équation des ondes.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude théorique d'un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire pour un opérateur fortement elliptique avec des conditions aux limites de Dirichlet. Plus précisément, on cherche une fonction $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + |u|^\rho u = f, \quad x \in \Omega, t \in]0, T[, \quad (1)$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, où $\rho > -1$, Ω est ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière régulière Γ . f représente la densité des forces extérieures. A est un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 où les coefficients dépend de x et t défini par

$$A\varphi = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right),$$

où les fonctions $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, \infty)) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ sont symétriques et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2,$$

pour tout $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (0, T)$ et $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Une étude analogue a été donné par Y. Boukhatem and al dans [1], où les auteurs ont prouvé l'existence de la solution faible en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité. Puis, ils ont démontré l'unicité de la solution en se basant sur des hypothèses assez faibles que celles considérées par J.L. Lions dans [10] pour un problème similaire où $A = \Delta$.

Trois chapitres ont été considérés dans ce travail. Le premier chapitre est destiné à rappeler quelques outils mathématiques qui seront utiles par la suite. Nous commençons par des brefs définitions sur la topologie faible et la topologie faible $*$ et quelques résultats pour les espaces réflexifs et séparables. Nous terminons par des définitions et des propriétés

élémentaire sur des espaces L^p .

Dans le seconde chapitre, nous allons rappeler les notions essentielles, de même que les résultats fondamentaux, qui concernent les espaces de Sobolev et les espaces associés au problème d'évolution et on termine par quelques compléments nécessaires et les différents lemmes de Gronwall.

Le troisième chapitre sera consacré a l'étude d'un problème d'ondes semi-linéaires avec des conditions aux limites de Dirichlet pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables. Nous démontrons d'abord que le problème considéré est équivalent à un problème variationnel qu'on le précisera. Ensuite, sous certaines hypothèses sur les données initiales en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin ainsi que la méthode de compacité, nous allons démontrer l'existence d'une solution faible. Puis, on démontre l'unicité de la solution en se basant sur les mêmes hypothèses considérées par Lions dans [10] et sur le lemme de Gronwall. Nous terminons ce chapitre par l'étude de la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Ce mémoire se termine par une conclusion.

Notations

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , les notations qu'on a utilisé dans ce mémoire sont les suivantes :

$\bar{\Omega}$	L'adhérence de Ω .
Γ	La frontière de Ω .
$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω .
$D'(0, T; E)$	L'espace des distributions des fonction $u : [0, T] \rightarrow E$.
(\cdot, \cdot)	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert.
E'	Le dual topologique de E .
∇u	le gradient de u .
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$\ \cdot\ _p$	La norme associée à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
$L^p(0, T; E)$	L'espace des fonctions $t \rightarrow f(t)$ de $]0, T[\rightarrow E$ qui sont mesurables a valeur dans E .
$W^{1,p}(\Omega)$	L'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	La fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	L'espace de Sobolev.
$\ \cdot\ _{H_0^1(\Omega)}$	La norme associée à l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
\rightharpoonup	La convergence faible.
\rightharpoonup^*	La convergence faible $*$.
p.p.	Presque partout.
u'	La dérivé première de u par rapport aux temps notée aussi $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.
u''	La dérivée seconde de u par rapport aux temps notée aussi $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Chapitre 1

Notions et préliminaires

Le premier chapitre est un rappel de quelques outils mathématiques qui sera utiles par la suite. Nous commençons par des brefs définitions sur la topologie faible et la topologie faible $*$ et quelques résultats pour les espaces réflexifs et séparables. Nous terminons par des définitions et des propriétés élémentaire sur des espaces L^p . Pour la rédaction de ce chapitre les ouvrages [2], [3] et [6] ont été essentiellement utilisés.

1.1 Topologie faible

1.1.1 Définition et propriétés élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_f \in E'$, d'applications de E dans \mathbb{R} .

Définition 1.1.

la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie qui est le moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_f \in E'$.

Proposition 1.1.

Soit (x_n) une suite de E . On a :

- i) $x_n \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$.
- ii) Si $x_n \rightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.
- iii) Si $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- iv) Si $x_n \rightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \rightarrow f$ fortement dans E' , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Proposition 1.2.

Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Remarque 1.1.

Les ouverts (resp. les fermés) de la topologie faible $\sigma(E, E')$ soit aussi ouverts (resp. fermés) pour la topologie forte. Lorsque E est de dimension infinie la topologie faible $\sigma(E, E')$ est strictement moins fine que la topologie forte.

Théorème 1.1.

Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

1.1.2 La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$

Soit E un espace de Banach. Soit E' son dual (muni de la norme dual $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|$), et soit E'' son bidual muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|.$$

On a une injection canonique $J : E \rightarrow E''$ définie comme suit :

Soit $x \in E$ fixé, l'application $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de E' dans \mathbb{R} constitue une forme linéaire continue sur E' . On a donc

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

J est une isométrie i.e $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. En effet,

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|.$$

Pour chaque $x \in E$ on considère l'application $\varphi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'application $(\varphi_x)_{x \in E}$ de E' dans \mathbb{R} .

Définition 1.2.

La topologie faible $*$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Comme $E \subset E''$, la topologie $\sigma(E', E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$.

Proposition 1.3.

Soit (f_n) une suite de E' . On a

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in E$.
- ii) Si $f_n \rightarrow f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$,
si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$.
- iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.
- iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$, et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Théorème 1.2. (Banach-Alaoglu-Bourbaki)

L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$.

Remarque 1.2.

On verra dans la suite que la boule unité fermé d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte.

1.1.3 Espaces réflexifs

Définition 1.3.

Soit E un espace de Banach, et soit J l'injection canonique de E dans E'' . On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$ on identifier implicitement E et E'' , ($E = E''$).

Théorème 1.3. (Kakutani)

Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si :

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\},$$

est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Corollaire 1.1.

Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.

1.1.4 Espaces séparable

Définition 1.4.

On dit qu'un espace métrique est séparable, s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense partout.

Proposition 1.4.

Soit E un espace métrique séparable, et soit F un sous-ensemble de E . Alors F est séparable.

Théorème 1.4.

Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors E est séparable.

Théorème 1.5.

Soit E un espace de Banach séparable. Alors $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$. Réciproquement, si $B_{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$, alors E est séparable.

Théorème 1.6.

Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors B_E est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Et réciproquement.

Corollaire 1.2.

Soit E un espace de Banach séparable, et soit (f_n) une suite bornée dans E' . Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.7.

Soit E un espace de Banach réflexif, et soit (x_n) une suite bornée dans E . Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Théorème 1.8. (Eberlein-Šmulian)

Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$. Alors E est réflexif.

1.2 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx .

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ intgrable}\} &\longmapsto \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Cette application est une semi-norme.

On va définir une relation d'équivalence sur \mathcal{F} .

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \mathfrak{R} g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \quad f(x) = g(x) \text{ p.p.}$$

Définition 1.5.

L'ensemble quotient \mathcal{F}/\mathfrak{R} muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx$, s'appelle l'espace de Lebesgue est sera noté par $L^1(\Omega)$.

1.2.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces L^p

Définition 1.6.

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si f est mesurable et $|f|^p \in L^1(\Omega)$.

Proposition 1.5.

L'application

$$f \longmapsto \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

est une norme sur $L^p(\Omega)$.

Définition 1.7.

On dit que f est essentiellement bornée sur Ω s'il existe une constante C positive telle que $|f(x)| \leq C$ p.p.

La plus petite de ces constantes est appelée le sup essentiel de f . On le note par $ess.\sup |f(x)|$.

Définition 1.8.

On appelle espace de Lebesgue de puissance ∞ l'espace, noté $L^\infty(\Omega)$, des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} vérifiant :

$$ess.\sup |f(x)| < +\infty$$

Proposition 1.6.

L'application de $L^\infty(\Omega)$ dans \mathbb{R}^+

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \underset{x \in \Omega}{ess.\sup} |f(x)|$$

est une norme.

Notation 1.1.

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p , i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposition 1.7.

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx,$$

(qui s'écrit $\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ pour les fonctions réelles).

Proposition 1.8. (Inégalité de Young)

Soient $1 < p < \infty$ et $a, b \geq 0$. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration.

La fonction \log est concave. Donc $\forall a, b > 0$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} = \log(ab).$$

D'où

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Théorème 1.9. (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et,

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration.

1. Si $p = 1$ et si $p = \infty$ la conclusion est évidente.
2. Si $1 < p < \infty$: d'après l'**inégalité de Young**, on a :

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{1}{p} \|f(x)\|_p^p + \frac{1}{q} \|g(x)\|_q^q.$$

On remplace f par λf ($\lambda > 0$) il vient :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_q^q. \tag{1.1}$$

On choisit $\lambda = \|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{q/p}$, de manière à minimiser le membre à droite dans (1.1), on obtient alors

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Remarque 1.3.

Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de *Cauchy Schwarz*.

Théorème 1.10. (Fischer-Riesz)

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$, et si $1 < p < \infty$, alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach séparable.

Théorème 1.11.

Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Alors il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) de (f_n) telle que :

- i. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p sur Ω .
- ii. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N}$ et p.p sur Ω , avec $h \in L^p(\Omega)$.

Propriétés 1.1.

- 1. $L^1(\Omega)$ est le dual topologique de $L^\infty(\Omega)$.
- 2. $L^1(\Omega) \subset (L^\infty)'(\Omega)$.
- 3. La boule unité fermée $B_{L^\infty(\Omega)}$ est compacte pour la topologie faible $\ast \sigma(L^\infty, L^1)$.
- 4. Si (f_n) une suite bornée dans L^∞ on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible $\ast \sigma(L^\infty, L^1)$.

Théorème 1.12. (Théorème de Riesz)

Soit T une forme linéaire et continue sur $L^p(\Omega)$. Alors il existe une unique fonction $g \in L^q(\Omega)$ telle que

$$T(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad , \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Chapitre 2

Les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces naturels de fonctions, physiquement les espaces de Sobolev s'interprètent comme des espaces de fonctions d'énergie finie.

Un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonction muni de la norme obtenue par la norme $L^p(\Omega)$ de la fonction elle-même ainsi que ses dérivées, jusqu'à un certain ordre.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

La première section contient quelques définitions et quelques propriétés utiles qu'il faut absolument connaître sur les espaces de Sobolev pour suivre le reste du travail. Dans la deuxième, on donne quelques définitions sur les espaces fonctionnels associés au problème d'évolution. On termine par quelques compléments divers et nécessaires pour l'étude de notre problème. Pour la rédaction de ce chapitre l'ouvrage [2] a été essentiellement utilisé.

2.1 Les espaces de Sobolev

2.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.

On pose

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n\},$$

la dérivation est à comprendre au sens des distribution.

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v),$$

est un espace de Hilbert. La norme associée est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2).$$

Proposition 2.1.

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

De la même façon, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$, où m est un entier strictement positif par :

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} =: \left(\sum_{\alpha: |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)| dx \right)^{1/2},$$

(où $D^\alpha u$ est comprise au sens des distributions).

Définition 2.2.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}.$$

Proposition 2.2.

L'application

$$u \mapsto \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty; \\ \sup_{1 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

est une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$.

Remarque 2.1.

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Proposition 2.3.

L'application définie par :

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longrightarrow (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $H^m(\Omega)$.

Démonstration.

La preuve est évidente puisque chaque terme est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. □

Théorème 2.1.

$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire est un espace de Hilbert.

Remarque 2.2. Si Ω est "assez régulier" avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, alors la norme de $W^{m,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p.$$

Théorème 2.2 (Rellich-Kondrachov).

On suppose Ω borné de classe C^1 . On a

Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;*

Si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$;

Si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$,

avec injections compactes.

2.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 2.3.

Soit $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note : $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est réflexif si $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.3.

$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.3.

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u = 0$ sur la frontière de Ω .

Pour la démonstration on a besoin du théorème et proposition suivantes :

Théorème 2.4.

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $\Omega =]a, b[$ et $p \geq 1$, Alors il existe une fonction \tilde{u} absolument continue dans $\overline{\Omega}$, telle que $u \stackrel{p,p}{=} \tilde{u}$ sur Ω et

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt \quad , \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Proposition 2.4.

Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ est à support compact, alors $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

Démonstration.

pour $\Omega =]a, b[$:

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Montrons que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, frontière de Ω .

$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \exists (u_n)_n \in D(\Omega)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

D'après le théorème précédant,

$$u_n(x) - u(x) \stackrel{p,p}{=} \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}(x) = \int_{x_0}^x u_n'(t) - u'(t) dt$$

D'après l'inégalité de Hölder :

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \|u_n'(t) - u'(t)\|_p (\text{mes } \Omega)^{1/q} \rightarrow 0.$$

C'est à dire $u_n \rightarrow u$ uniformément sur $\overline{\Omega}$. Pour $x \in \overline{\Omega}$, $u_n(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

D'où $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Réciproquement, soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Montrons que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

On fixe une fonction continue h sur \mathbb{R} telle que : $|h(t)| \leq t$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| < 1, \\ t & \text{si } |t| > 2. \end{cases}$$

Posons $u_n = \frac{1}{n}h(n.u)$ de telle manière que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ d'une part. D'autre part, $\text{Supp } u_n \subset \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ qui est un compact inclus dans Ω , car $u_n \rightarrow u$ et $u|_{\partial\Omega} = 0$, d'après

la proposition précédente on voit que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Posons $u_n = \frac{1}{n}h(n.u)$ de telle manière que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ d'une part. 'autre part, $Supp u_n \subset \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ qui est un compact inclus dans Ω , car $u_n \rightarrow u$ et $u|_{\partial\Omega} = 0$, d'après la proposition précédente on voit que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. \square

Remarque 2.4.

On peut définir $W_0^{m,p}(\Omega)$ pour $m > 1$, par :

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u = Du = \dots = D^{m-1}u = 0 \quad , \quad sur \partial\Omega\}$$

2.1.3 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

On désigne par $W_0^{-1,p}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.5.

On a

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

Si Ω est borné on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad , \quad Si \quad \frac{2n}{n-2} \leq p < \infty,$$

avec injections continues et denses.

Proposition 2.5.

Soit $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^{p'}(\Omega)$ telles que

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f_0(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx \quad , \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec $\|F\| = \max_{0 \leq i \leq n} \|f_i\|_{p'}$.

2.2 Espaces fonctionnels

Ce paragraphe est destiné à rappeler, au fur et à mesure des besoins, les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de *Banach* réel.

Définition 2.4.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de *Banach* réel. Nous notons par $D(0, T; E)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans E .

Définition 2.5.

Une fonction $f : [0, T] \rightarrow E$ est dite fortement dérivable en $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in E$ appelé la dérivée forte de f en t_0 , telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_E = 0.$$

Définition 2.6.

Une fonction $f : [0, T] \rightarrow E$ est dite intégrable s'il existe une suite de fonctions (f_n) , $n \in \mathbb{N}$ appartenant à $D(0, T; E)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|_E ds = 0.$$

Théorème 2.5. (Bochner)

Une fonction $f : [0, T] \rightarrow E$ mesurable, elle est intégrable si et seulement si $t \rightarrow \|f(t)\|_E : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T f(s) ds \right\|_E \leq \int_0^T \|f(s)\|_E ds.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0, T; E)$ est l'ensemble des classes de fonctions $f : (0, T) \rightarrow E$ mesurables, telles que l'application $t \rightarrow \|f(t)\|_E$ appartient à $L^p(E)$. On sait que $L^p(0, T; E)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0, T; E)} &= \left(\int_0^T \|f(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(0, T; E)} &= \inf \{ C > 0 / \|f(t)\|_E \leq C; \quad p.p. \ t \in (0, T) \} \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

Naturellement, on a :

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q) \quad \text{où } Q = \Omega \times]0, T[.$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

Proposition 2.6.

1. $L^p(0, T; E)$, ($1 \leq p \leq \infty$) est un espace de Banach.
2. Si E est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_E$, alors $L^2(0, T; E)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; E)} = \int_0^T (u(t), v(t))_E dt.$$

3. $L^r(0, T; E) \hookrightarrow L^q(0, T; E)$ avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

4. Si E est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned} L^p(0, T; E)' &= L^q(0, T; E) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ L^1(0, T; E)' &\subset L^\infty(0, T; E), \end{aligned}$$

où $L^p(0, T; E)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; E)$, $1 \leq p \leq \infty$.

5. D'après le théorème de Dunford-Pettis (cf. par exemple Yosida) l'espace

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \quad (\text{resp } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$$

est le dual de

$$L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)) \quad (\text{resp de } L^1(0, T; L^2(\Omega))).$$

Et $H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)$ muni de la structure de dual fort de $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 2.7.

Soit $u, w \in L^1(0, T; E)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0, T)$ si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t) u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t) w(t) dt \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Soit $1 < p < \infty$. L'espace L^p l'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; E)$ est l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow E$ telles que $u \in L^p(0, T; E)$ et $u' \in L^p(0, T; E)$. L'espace $W^{1,p}(0, T; E)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;E)} = \left(\|u\|_{L^p(0,T;E)} + \|u'\|_{L^p(0,T;E)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 2.8.

Une fonction $f : [0, T] \rightarrow E$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_j, b_j) disjoints, inclus dans $[0, T]$, tels que $\sum_j (b_j - a_j) < \delta$ on a $\sum_j \|f(b_j) - f(a_j)\| \leq \varepsilon$.

Maintenant nous rappelons le lien entre les fonctions absolument continues et les fonctions de l'espace $W^{1,p}(0, T; E)$.

Théorème 2.6.

Soit $1 \leq p \leq \infty, E$ un espace de Banach reflexive et soit $u \in L^p(0, T; E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}(0, T; E)$.
2. u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0, T; E)$.

3. Il existe $u_0 \in E$ et $g \in L^p(0, T; E)$, telles que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Si E est un espace réflexive, alors toute fonction $u \in W^{1,p}(0, T; E)$ est fortement dérivable p.p. sur $(0, T)$ et $u' = \frac{du}{dt}$. Par ailleurs $W^{1,p}(0, T; E)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $u : [0, T] \rightarrow E$ absolument continues et $W^{1,\infty}(0, T; E)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes $u : [0, T] \rightarrow E$.

Etant donné un entier $k \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{k,p}(0, T; E) = \{u \in W^{k-1,p}(0, T; E); u' \in W^{k-1,p}(0, T; E)\}.$$

L'espace $W^{k,p}(0, T; E)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;E)} = \|u\|_{L^p(0,T;E)} + \sum_{\alpha=1}^k \|u^{(\alpha)}\|_{L^p(0,T;E)}.$$

On dénote aussi par $C(0, T; E)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans E avec la norme

$$\|u\|_{C(0,T;E)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_E,$$

2.3 Compléments divers

Proposition 2.7.

Si $f \in L^p(0, T; E)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; E)$, ($1 \leq p \leq \infty$), alors f est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $(0, T)$ continue de $[0, T] \rightarrow E$.

Théorème 2.7 (Formule de Green).

On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ , C^1 par morceaux. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, alors on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u v n_i d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

où n_i est la normale unité extérieure à Γ .

Un résultat essentiel pour les application du prochain chapitre est l'inégalité suivante :

Lemme 2.1 (Inégalité de Poincaré).

On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que :

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_p$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit une norme $\|\nabla u\|_2$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Soit H un espace de Hilbert réel

Définition 2.9.

Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que :

- (i) a est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à u et v , $(\forall u, v \in H)$.
- (ii) a est continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad , \quad \forall u, v \in H.$$

- (iii) a est elliptique ou coercive (ou encore définie positive) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in H \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

Lemme 2.2.

Soit $a(., .)$ une forme bilinéaire, continue et elliptique sur H . Alors il existe un isomorphisme $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$a(u, v) = (Au, v)_H \quad , \quad \forall u, v \in H.$$

2.3.1 Lemmes de Gronwall

Dans ce paragraphe, on donne quelques lemmes de Gronwall qui nous aide à démontrer l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Lemme 2.3.

Soient $f, g \in C(0, T; \mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) \Psi(s) ds \quad , \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^t f(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t g(s) ds \right) , \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $f = 0$, ce lemme s'écrit :

Corollaire 2.1.

Soit $g \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t g(s) \Psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^T g(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 2.4.

Soient $f, g \in C(0, T; \mathbb{R})$ deux fonctions positives pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2} \Psi^2(t) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^T f(s) \Psi(s) ds + \int_0^T g(s) \Psi(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$|\Psi(t)| \leq \left(a + \int_0^T f(s) ds \right) \exp \left(\int_0^T g(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $f = 0$, ce lemme devient :

Corollaire 2.2.

Soit $g \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que :

$$\frac{1}{2} \Psi^2(t) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^T g(s) \Psi^2(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$|\Psi(t)| \leq a \exp \left(\int_0^T g(s) ds \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème hyperbolique semi linéaire pour l'opérateur fortement elliptique. Sous certaines hypothèses sur les données initiales, nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible. La preuve est basée sur les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité. On termine par l'étude de la dépendance continue de la solution par rapport aux données. Pour la rédaction de ce chapitre les ouvrages[8], [9], [10] ont été essentiellement utilisés, ainsi que [1].

3.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de point générique $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, et soit Γ la frontière de Ω . On supposera toujours que Γ est "assez régulière".

Soit Q le cylindre de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$:

$$Q = \Omega \times]0, T[, \quad T \text{ fini,}$$

et par Σ la frontière latérale de Q :

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[.$$

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction u par rapport à x (parfois par rapport à t).

L'objet de ce chapitre est de chercher $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ solution du problème de Dirichlet suivant :

$$(P) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + |u|^\rho u = f & , \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad , \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

où la première équation représente une équation d'évolution du second ordre. $\rho > -1$ et f représente la densité des forces extérieures.

A est un opérateur elliptique d'ordre 2 défini par :

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad (3.1)$$

où

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega} \times]0, T[), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\exists \alpha > 0, \text{ telle que } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad (3.3)$$

pour tout $(x, t) \in \bar{\Omega} \times]0, T[$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

La deuxième équation du problème (P) représente les conditions aux limites sur Σ , et la

troisième équation c'est des conditions initiales, où les fonctions u_0, u_1 sont des données. Pour étudier l'existence et l'unicité du problème (P), on introduit l'espace V suivant :

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad \text{où} \quad p = \rho + 2.$$

L'espace V est muni de la norme suivante :

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

D'après le théorème de plongement de Sobolev, on a

$$\begin{cases} H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega); \\ \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad \text{si } n \geq 3, \end{cases} \quad (3.4)$$

de sorte que $V = H_0^1(\Omega)$ si $\rho \leq \frac{4}{n-2}$.

3.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, on démontre que sous les hypothèses suivantes :

$$(H) : \begin{cases} f \in L^2(Q), \\ u_0 \in V, \\ u_1 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad p = \rho + 2,$$

le problème (P) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$(P_V) : \begin{cases} (u''(t), v(t)) + a(u(t), v(t)) + (|u(t)|^\rho u(t), v(t)) = (f(t), v(t)) \quad , \quad \forall v \in V, \\ a(u, v) = (Au, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \end{cases}$$

Lemme 3.1.

L'application $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive.

Démonstration.

(i) La bilinéarité :

Soient $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \left(\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \lambda_1 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \lambda_2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v). \end{aligned}$$

de la même façon on vérifie que :

$$a(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 a(u, v_1) + \lambda_2 a(u, v_2).$$

(ii) **La continuité :**

$\forall u, v \in H_0^1(\Omega) :$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |a_{ij}(x, t)| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \\ &\leq \sup_{(x,t)} |a_{ij}(x, t)| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx. \end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on trouve :

$$|a(u, v)| \leq \sup_{(x,t)} |a_{ij}(x, t)| \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc

$$|a(u, v)| \leq \alpha_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{où} \quad \alpha_1 = \sup_{(x,t)} |a_{ij}(x, t)|, \quad (3.5)$$

puisque $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega} \times]0, T[)$, donc $\alpha_1 < \infty$.

(iii) **La coercivité :**

D'après (3.3) pour $\xi_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, on trouve :

$$a(u, u) \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \alpha \|\nabla u\|_2^2$$

et d'après l'inégalité de Poincaré (2.1) :

$$a(u, u) \geq \alpha \|\nabla u\|_2^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

□

Corollaire 3.1.

D'après la coercivité et la continuité de la forme $a(., .)$, on a :

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) \leq \alpha_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (3.6)$$

Lemme 3.2.

Sous les hypothèses (H), le problème (P) est équivalent au problème variationnel (P_V) .

Démonstration. .

(i) Soit u une solution du problème (P) , et soit $v \in V$.

En multipliant la première équation par v (au terme du produit scalaire) :

$$(u'', v) + (Au, v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v), \quad (3.7)$$

Alors

$$(Au, v) = \int_{\Omega} Au v dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx.$$

En utilisant la formule de Green (2.7), on obtient :

$$\int_{\Omega} Au v dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} v v_i d\Gamma + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

et puisque $v \in H_0^1(\Omega)$, donc $v = 0$ sur Γ . Alors

$$(Au, v) = \int_{\Omega} Au v dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \quad (3.8)$$

On remplace (3.8) dans (3.7) on trouve :

$$(u'', v) + a(u, v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

(ii) L'implication inverse.

Soit $u \in V$ une solution du problème (P_V) , on a :

$$(u'', v) + (Au, v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V,$$

où

$$(Au, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

On applique la formule de Green et puisque $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} (u''(t), v) + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} v v_i d\Gamma - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx + (|u(t)|^\rho u, v) \\ = (f, v). \end{aligned}$$

Pour $v = \varphi \in D(\Omega)$:

$$(u''(t), \varphi) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \varphi dx + (|u(t)|^\rho u, \varphi) = (f, \varphi),$$

d'où :

$$(u'', \varphi) + (Au, \varphi) + (|u|^\rho u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

donc :

$$u'' + Au + |u|^\rho u = f \quad \text{dans } D'(\Omega),$$

et par conséquent :

$$u'' + Au + |u|^\rho u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

□

Proposition 3.1.

Le problème (P_V) a un sens.

Démonstration.

Soit $u \mapsto u(t)$ est une fonction de $L^2(0, T; V)$ et soit v est un élément de V , alors la fonction $t \mapsto (u(t), v)_V$ appartient à $L^2(0, T)$.

La fonction u appartient à $L^2(0, T; V)$ donc, les fonctions $t \mapsto (u(t), v)$ et $t \mapsto a(u(t), v)$ appartiennent à $L^2(0, T)$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ||u(t)|^\rho u(t)v(t)|^2 dx &\leq \| |u(t)|^{2(\rho+1)} \|_2 \|v^2(t)\|_2 \\ &\leq \| |u(t)| \|_2^{2(\rho+1)} \|v(t)\|_2^2 \leq C. \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction $t \mapsto (|u|^\rho u(t), v)$ appartient à $L^2(0, T)$. De même, puisque f est une fonction de $L^2(0, T; V)$, la fonction $t \mapsto (f(t), v)$ est dans $L^2(0, T)$, pour tout $v \in V$.

Donc le problème variationnel (P_V) a un sens dans $D'([0, T])$.

□

3.3 Existence de la solution

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cités précédemment l'existence d'une solution faible sera obtenue en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin et la méthode de compacité.

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses (H) , le problème (P) admet une solution u vérifiant :

$$u \in L^\infty(0, T; V) \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{3.10}$$

Proposition 3.2.

Les deux expressions $u(x, 0) = u_0(x)$ et $u'(x, 0) = u_1(x)$ ont un sens

Démonstration.

De (3.9) , (3.10) et du proposition(2.7), on déduit en particulier que u est continue de $[0, T] \rightarrow$

$L^2(\Omega)$, alors $u(x, 0) = u_0(x)$ a un sens.

La première équation du problème (P) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f - Au - |u|^\rho u \quad (3.11)$$

Comme $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ on a $Au \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $|u|^\rho u \in L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega))$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) + L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega));$$

d'où, en particulier :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)),$$

en utilisant La proposition (2.7), la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue de $[0, T] \rightarrow H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ de sorte que $u'(x, 0) = u_1(x)$ a un sens. \square

Démonstration du Théorème 3.1

Pour la démonstration on utilise les techniques de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- (i) On construit des solutions "approchées" ;
- (ii) On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori ;
- (iii) On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité (pour passer à la limite dans les termes non linéaire).

3.3.1 Solutions approchées

L'espace V est séparable et d'après (1.4), il existe une sous suite $\{w_1, \dots, w_m\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall i : w_i \in V, \\ \forall m : w_1, \dots, w_m \text{ sont linéairement indépendantes,} \\ \text{L'espace } V_m = \langle \{w_1, \dots, w_m\} \rangle \text{ est dense dans } V. \end{cases}$$

En particulier :

$$\forall u_0 \in V \Rightarrow \exists (u_{0m})_{m \in \mathbb{N}^*} ; u_{0m}(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{km} w_k(x) \rightarrow u_0 \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty \quad (3.12)$$

$$\forall u_1 \in L^2(\Omega) \Rightarrow \exists (u_{1m})_{m \in \mathbb{N}^*} ; u_{1m}(x) = \sum_{k=1}^m \beta_{km} w_k(x) \rightarrow u_1 \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty \quad (3.13)$$

Donc, on cherche $u_m = u_m(t)$ solution "approchée" du problème (P_m) dans V_m sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i$$

Où

$$(P_m) : \begin{cases} (u_m''(t), w_k) + a(u_m(t), w_k) + (|u_m|^\rho u_m(t), w_k) = (f(t), w_k) \quad , \forall k = 1, 2, \dots, m \quad , \\ u_m(0) = u_{0m} \quad , \quad u_m'(0) = u_{1m}. \end{cases} \quad (3.14)$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du 2^{ème} ordre.

On considère les fonctions : $g_m = (g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t))$, $f_m = ((f, w_1), \dots, (f, w_m))$,
 $C_m = ((|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j))_{1 \leq j \leq m}$.

et les matrices :

$$B_m = ((w_i, w_j))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad A_m = (a(w_i, w_j))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

Les vecteurs sont linéairement indépendants (i.e $\forall i, j \det (w_i, w_j) \neq 0$), alors la matrice B_m est inversible.

Donc g_m est solution de :

$$(P'_m) : \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}[g_m(t)] + B_m^{-1} A_m(g_m(t)) + B_m^{-1} C_m = B_m^{-1}(f_m); \\ g_m(0) = (\alpha_{im})_{1 \leq i \leq m} = g_{0m}; \\ g'_m(0) = (\beta_{im})_{1 \leq i \leq m} = g_{1m}. \end{cases}$$

On a l'existence d'une solution unique locale du (P'_m) dans l'intervalle $[0, t_m]$, t_m dépend de m ayant la régularité suivante :

$$u_m \in L^2(0, t_m; V_m) \quad , \quad u'_m \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)).$$

L'étape qui suit montre que $t_m = T$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (i.e t_m ne dépend pas de m).

3.3.2 Estimation a priori

On multiplie l'équation (3.14) par $g'_{km}(t)$ et on somme sur k , ce qui donne

$$(u_m''(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m|^\rho u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)).$$

Mais comme : $u_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m)$ et $u'_m \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega))$,
 alors $a(u_m, u'_m) \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega))$, et on a

$$a(u_m(t), u_m(t)) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx \in H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{d}{dt} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(a'_{ij}(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + a_{ij}(x, t) \frac{\partial u'_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) dx \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} dx,
 \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx + 2a(u_m(t), u'_m(t))$$

D'où :

$$a(u_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx. \quad (3.15)$$

Et on a aussi,

$$(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u'_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|_2^2. \quad (3.16)$$

Et

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_p^p &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dx \\
 &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^p dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (|u_m(t)|^2)^{p/2} dx \\
 &= \frac{p}{2} \int_{\Omega} [(|u_m(t)|^2)^{\frac{p}{2}-1} \frac{d}{dt} (|u_m(t)|^2)] dx \\
 &= p \int_{\Omega} [(|u_m(t)|^2)^{\frac{p-2}{2}} u_m(t) u'_m(t)] dx \\
 &= p \int_{\Omega} [(|u_m(t)|)^{\rho} u_m(t) u'_m(t)] dx \\
 &= p(|u_m|^\rho u_m, u'_m) \quad / \quad \rho = p - 2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$(|u_m|^\rho u_m, u'_m) = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_p^p. \quad (3.17)$$

Moyennant à (3.15), (3.16) et (3.17), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_m(t), u_m(t)) + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_p^p \\ &= (f(t), u'_m(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, t) \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Par intégration de 0 à t , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} a(u_m(t), u_m(t)) + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_p^p \\ &= \int_0^t (f(\sigma), u'_m(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, \sigma) \frac{\partial u_m}{\partial x_j}(\sigma) \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(\sigma) dx d\sigma \\ &+ \frac{1}{2} \|u'_m(0)\|_2^2 + \frac{1}{2} a(u_m(0), u_m(0)) + \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_p^p. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, ainsi que la coercivité de $a(., .)$, il résulte :

$$\begin{aligned} & \|u'_m(t)\|_2^2 + \alpha \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_p^p \leq \\ & \leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_2^2 d\sigma + \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|_2^2 d\sigma + \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, \sigma) \frac{\partial u_m}{\partial x_j}(\sigma) \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(\sigma) dx d\sigma \\ & + \|u'_m(0)\|_2^2 + \alpha \|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{p} \|u_m(0)\|_p^p. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Puisque $f \in L^2(Q)$, alors $\int_0^t \|f(\sigma)\|_2^2 d\sigma \leq C_1$.

En utilisant l'hypothèse $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega} \times]0, T[)$ et l'inégalité de young

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| a'_{ij}(x, \sigma) \frac{\partial u_m}{\partial x_j}(\sigma) \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(\sigma) \right| dx d\sigma \\ & \leq \sup_{(x,t)} |a'_{ij}(x, t)| \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_j}(\sigma) \right| \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i}(\sigma) \right| dx d\sigma \\ & \leq nC_2 \int_0^t \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Le deuxième membre de l'estimation (3.18) est majoré par

$$C_3 + \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|_2^2 + nC_2 \int_0^t \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma.$$

Où $C_3 = C_1 + \|u'_m(0)\|_2^2 + \alpha \|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{p} \|u_m(0)\|_p^p$, d'après (3.12) et (3.13), C_3 est une constante positive.

On déduit donc, que

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + \alpha \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_p^p \leq C_3 + \int_0^t \|u'_m(\sigma)\|_2^2 d\sigma + nC_2 \int_0^t \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma.$$

alors

$$\beta(\|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_2^2) \leq \|u'_m(t)\|_2^2 + \alpha \|u_m(t)\|_2^2 + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_p^p \quad (3.19)$$

Où $\beta = \min(1, \alpha)$.

Et alors :

$$\beta(\|u'_m(\sigma)\|_2^2 d\sigma + \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \leq C_3 + \lambda \int_0^t (\|u'_m(\sigma)\|_2^2 + \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) d\sigma.$$

Où $\lambda = \max(1, nC_2)$.

On applique le lemme de Gronwall aux fonctions :

$$\Psi(t) = \|u'_m(\sigma)\|_2^2 + \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{\lambda}{\beta}.$$

On obtient

$$\|u'_m(\sigma)\|_2^2 d\sigma + \|u_m(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_3 e^{\frac{\lambda}{\beta} T} \quad \text{constante indépendante de } m. \quad (3.20)$$

D'où l'indépendance de t_m par rapport à m . On en déduit que $t_m = T$.

Lorsque $m \rightarrow +\infty$, de (3.20) on constate que :

$$\begin{cases} u_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; V); \\ \text{et } u'_m \text{ demeure dans un ensemble borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.21)$$

3.3.3 Passage à la limite

On déduit de (3.21) et d'après la proposition (1.1), qu'on peut extraire des sous-suites convergentes (u_ν) , (u'_ν) de (u_m) , (u'_m) respectivement et telles que, lorsque $\nu \rightarrow \infty$, on a :

$$u_\nu \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; V) \quad \text{faible} *; \quad (3.22)$$

$$u'_\nu \rightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{faible} *. \quad (3.23)$$

Par ailleurs, il résulte en particulier de (3.23) que

$$\begin{cases} (u_m) \text{ bornée dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q) \\ \text{et } (u'_m) \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{cases}$$

donc en particulier, on déduit que (u_m) demeure dans un borné de $H^1(Q)$. D'après le théorème (2.2)

L'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compacte.

Ce qui nous permet de conclure que la sous-suite (u_ν) :

$$u_\nu \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ fort p.p.} \quad (3.24)$$

Et comme $|u_m|^\rho u_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega))$, on a :

$$|u_\nu|^\rho u_\nu \rightarrow w \text{ dans } L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega)) \text{ faible} * . \quad (3.25)$$

Pour terminer la démonstration il reste à montrer que :

$$w = |u|^\rho u. \quad (3.26)$$

alors on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.

Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_ν et g sont deux fonctions de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, telles que

$$\|g_\nu\|_q \leq C, \quad g_\nu \rightarrow g \text{ p.p dans } Q.$$

$g_\nu \rightarrow g$ dans $L^q(Q)$ faible.

Dans notre cas on prend $g_\nu = |u_\nu|^\rho u_\nu$, $q = \frac{\rho + 1}{\rho + 2} = p'$.

D'après (3.24), il résulte :

$$g_\nu = |u_\nu|^\rho u_\nu \rightarrow |u|^\rho u = g \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort}$$

et d'après (3.25), on a : $g_\nu \rightarrow w$ dans $L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega))$ faible,

d'où $w = g = |u|^\rho u$ grâce au Lemme. Ainsi on peut passer à la limite Dans l'équation (3.14) pour $m = \nu$.

Pour j fixé quelconque et $\nu > j$, on a

$$(u_\nu''(t), w_j) + a(u_\nu(t), w_j) + (|u_\nu|^\rho u_\nu(t), w_j) = (f(t), w_j).$$

De (3.26) et de la convergence faible, on déduit que

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j) + a(u, w_j) + (|u|^\rho u, w_j) = (f, w_j),$$

puisque V_m dense dans V , on obtient $\forall v \in V$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a(u, v) + (|u|^\rho u, v) = (f(t), v).$$

D'où il résulte que u satisfait la première équation du problème (P) (et aussi à (3.9)(3.10)).

Reste à vérifier les conditions initiales.

D'après (3.22)(3.23) et (le lemme 2.7) on a en particulier, $u_\nu(0) \rightarrow u(0)$ dans $L^2(\Omega)$ faible ; or (voir (3.12)) $u_\nu(0) = u_{0\nu} \rightarrow u(0)$ dans V , donc on a $u(0) = u_0$.

Par ailleurs, on a :

$$(u_\nu'', w_j) \rightarrow (u'', w_j) \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T) \text{ faible} * .$$

Donc :

$$(u_\nu'(0), w_j) \rightarrow (u'(0), w_j) \text{ et par conséquent } (u'(0), w_j) \rightarrow (u_1, w_j), \quad \forall j,$$

d'où $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$.

3.4 Unicité de la solution

Théorème 3.2.

Sous les hypothèses du théorème(3.1), avec

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \quad (\rho \text{ fini quelconque si } n = 2). \quad (3.27)$$

Alors la solution u obtenue au théorème(3.1) est unique.

Démonstration.

Soient u, v deux solutions, au sens du théorème(3.1) ; on pose $w = u - v$. Alors w satisfait :

$$w'' + Aw + |u|^\rho u - |v|^\rho v = 0, \quad (3.28)$$

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0, \quad (3.29)$$

$$w \in L^\infty(0, T; V) \quad , \quad w' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.30)$$

Puisque $w'(t) \notin H_0^1(\Omega)$, alors on ne peut pas remplacer v par $w'(t)$ dans la première équation du problème (P_V) . Il faut introduire une fonction auxiliaire suivante :

$$\forall s \in]0, T[, \quad \text{soit } \psi :]0, T[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \psi(t) = \begin{cases} - \int_s^t w(\sigma) d\sigma & , t \leq s; \\ 0 & t > s. \end{cases}$$

on a $\psi'(t) = w(t)$, $\forall t \leq s$ et $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$ avec $w_1(t) = \int_0^t w(\sigma) d\sigma$. En multipliant (3.28) par un élément $\psi(t)$, on obtient

$$(w'', \psi) + (Aw, \psi) + (|u|^\rho u - |v|^\rho v, \psi) = 0. \quad (3.31)$$

En intégrant sur $[0, s]$, et en utilisant la formule de Green, on trouve :

$$- \int_0^s (w', \psi') dt + \int_0^s a(w, \psi) dt = \int_0^s (|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi) dt. \quad (3.32)$$

Et d'après (3.15), on a :

$$\int_0^s a(\psi', \psi) dt = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} a(\psi, \psi) dt - \frac{1}{2} \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} dx dt,$$

puisque $\psi(0) = -w_1(s)$, alors :

$$\begin{aligned} & \|w(s)\|_2^2 + \alpha \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & \leq 2 \int_0^s \int_\Omega (|u|^\rho u - |v|^\rho v) \psi(t) dx dt - \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a'_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} dx dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

On a

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x,t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} dx dt \right| \\
 & \leq \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} a'_{ij}(x,t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} \right| dx dt \\
 & \leq \frac{1}{2} C_2 \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) dt \\
 & \leq n C_2 \int_0^s \|\psi(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Où $C_2 = \sup_{(x,t)} |a'_{ij}(x,t)|$ et puisque : $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$, on a :

$$\left| \int_0^s \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x,t) \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_i} dx dt \right| \leq 2C_2 T \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2C_2 \int_0^s \|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt. \tag{3.35}$$

Pour estimer le premier terme du second membre de (3.33), on suppose que $|v| < |u|$;

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \left| \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |v|^\rho v) \psi(t) dx \right| dt & \leq \int_0^s \int_{\Omega} \left| |u|^{\rho+1} - |v|^{\rho+1} \right| |\psi(t)| dx dt \\
 & \leq \int_0^s \int_{\Omega} \left| |u| - |v| \right| (|u|^\rho + |u|^{\rho-1}|v| + \dots + |v|^\rho) |\psi(t)| dx dt \\
 & \leq (\rho + 1) \int_0^s \int_{\Omega} |u(t)|^\rho |w(t)| |\psi(t)| dx dt.
 \end{aligned}$$

Ce qui est majoré d'après l'inégalité de Hölder, par :

$$(\rho + 1) \int_0^s \int_{\Omega} \| |u|^\rho \|_n \|w(t)\|_2 (\|w_1(t)\|_q + \|w_1(s)\|_q) dx dt, \tag{3.36}$$

où $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$.

Mais d'après (3.27) $\rho n \leq q$, alors

$$\| |u|^\rho \|_n \leq \|u\|_q^{\rho n} \leq \|u\|_q^\rho,$$

et d'après l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ où $q = \frac{2n}{n-2}$, on déduit que $\|u\|_q \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, d'où

$$\| |u|^\rho \|_n \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^\rho,$$

et comme $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, alors $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^\rho$ est majoré par une constante C_4 . Donc (3.36) devient

$$\left| \int_{\Omega} (|v|^{\rho}v - |u|^{\rho}u) \psi dx \right| dt \leq C_4 \int_0^s \|w(t)\|_2 (\|w_1(t)\|_q + \|w_1(s)\|_q) dt \quad (3.37)$$

Par l'inégalité de Young, nous majorons (3.37) comme suit :

$$\frac{\alpha}{4} \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_5 \int_0^s (\|w(t)\|_2^2 + \|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) dt, \quad (3.38)$$

où $C_5 = \frac{C_4}{2} + \frac{C_4^2}{2} \sqrt{\frac{2T}{\alpha}}$. Alors de (3.33), on conclut

$$\begin{aligned} \|w(s)\|_2^2 + \alpha \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq (2C_2T + \frac{\alpha}{2}) \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2C_5 \int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt \\ &\quad + 2(C_2 + C_5) \int_0^s \|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pour un choix convenable pour la constante C_2 , il vient

$$\beta (\|w(s)\|_2^2 + \|w_1(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \leq 0 + C_6 \int_0^s (\|w(t)\|_2^2 + \|w_1(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2) dt,$$

où $C_6 = 2(C_2 + C_5)$, $\beta = \min(1, \frac{\alpha}{2} - 2C_2T)$.

D'où, d'après le lemme de Gronwall $w = 0$,
et par conséquent, l'unicité de la solution. □

3.5 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

On considère sous les hypothèses du Théorème (3.2), l'application (non linéaire) π définie par :

$$\begin{aligned} L^2(Q) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\rightarrow W(Q) \\ \{f, u_0, u_1\} &\rightarrow u \end{aligned} \quad (3.40)$$

où u est la solution du problème, et

$$W(Q) = \{\varphi | \varphi \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \varphi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|\varphi\|_{W(Q)} = \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\varphi'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.3.

Sous les hypothèses du Théorème (3.2), l'application π définie en (3.40) est continue .

Démonstration. Soit $v = \pi(\{g, v_0, v_1\})$ et supposons que

$$\{g, v_0, v_1\} \rightarrow \{f, u_0, u_1\} \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow W(Q).$$

Alors v demeure dans un borné de $W(Q)$. On peut alors choisir v dans un borné de $W(Q)$.
On a :

$$\begin{cases} u'' - Au = f - |u|^\rho u, \\ v'' - Av = g - |v|^\rho v. \end{cases}$$

Soit $w = u - v$, on a

$$w'' - Aw = f - g - (|u|^\rho u - |v|^\rho v). \quad (3.41)$$

On multiplie les deux membres de (3.41) par w' , et lorsque les intégrales ci-après ont un sens, on obtient après utilisations de la formule de Green et les conditions initiales du problème (P),

$$(w''(t), w'(t)) + a(w(t), w'(t)) = (f - g, w'(t)) - \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |v|^\rho v)w'(t)dx. \quad (3.42)$$

Et on a d'après (3.15) et (3.16) :

$$a(w(t), w'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(w(t), w(t)) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad (3.43)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx. \quad (3.44)$$

Et,

$$(w''(t), w'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w'(t), w'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w'(t)\|_2^2.$$

Alors (3.42) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \|w'(t)\|_2^2 \right] &= (f - g, w'(t)) - \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |v|^\rho v)w'(t)dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En intégrant (3.45) entre 0 et t , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(t)\|_2^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\|w(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(0)\|_2^2 \right] &= \int_0^t (f - g, w')(\sigma) d\sigma \\ - \int_0^t \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |v|^\rho v)w'(\sigma) dx d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, \sigma) \frac{\partial w(\sigma)}{\partial x_j} \frac{\partial w(\sigma)}{\partial x_i} dx d\sigma, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(t)\|_2^2 \right] &= \frac{1}{2} \left[\|u_0 - v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1 - v_1\|_2^2 \right] + \int_0^t (f - g, w')(\sigma) d\sigma \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |v|^\rho v) w'(\sigma) dx d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a'_{ij}(x, \sigma) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx d\sigma, \end{aligned}$$

d'où, on déduit toujours par des majorations analogues à (3.34),(3.37) et grâce au fait que v demeure dans une bornée de $W(Q)$ que :

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(t)\|_2^2 &\leq \|u_0 - v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1 - v_1\|_2^2 + \int_0^t (\|(f - g)(\sigma)\|_2^2 + \|w'(\sigma)\|_2^2) d\sigma \\ &\quad + C_5 \int_0^t \|w(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)} \|w'(\sigma)\|_2 d\sigma + 2nC_2 \int_0^t \|w(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(t)\|_2^2 &\leq \|u_0 - v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1 - v_1\|_2^2 + \int_0^t \|(f - g)(\sigma)\|_2^2 d\sigma \\ &\quad + C_6 \int_0^t (\|w(\sigma)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(\sigma)\|_2^2) d\sigma. \end{aligned}$$

où $C_6 = \max(1 + C_5/2, 2nC_2 + C_5/2)$. En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w'(t)\|_2^2 \leq c(u, v) \left[\|u_0 - v_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_1 - v_1\|_2^2 + \int_0^t \|(f - g)(\sigma)\|_2^2 d\sigma \right] \quad (3.46)$$

d'où $c(u, v)$ est fonction de u et v , bornée sur les bornés $W(Q)$. Donc la fonction π est continue. \square

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire pour un opérateur fortement elliptique avec des coefficients variables et des conditions aux limites de Dirichlet. En se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin ainsi que la méthode de compacité, nous avons analysé la question d'existence et l'unicité de solution faible pour ce problème. En fin, nous avons étudié la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Bibliographie

- [1] Y. Boukhatem, B. Benabderrahmane, A. Rahmoune, Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème aux limites non linéaire, *Anale Univ.Oradea,Fasc Matematica, Tom XVI*, (2009),167-181.
- [2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle-Théorie et Application, *Masson,Paris*, (1987).
- [3] G. Choquet, Cours d'analyse, Topologie.Tome 2 , *Masson et Cie, Paris*, (1973).
- [4] R. Dauthry et J. L. lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, *Masson, Paris*, (1988).
- [5] G. Duvaut, J. L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, *Dunod*, (1972).
- [6] A. Kolmogorov, S. Fomine, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, *Mir, Moscou*, (1977).
- [7] G. Duvaut, J. L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, *Dunod*, (1972).
- [8] J. L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications,vol.1, *Paris,Dunod*, (1968).
- [9] J. L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications,vol.2, *Paris,Dunod*, (1968).
- [10] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires , *Paris,Dunod*, (1969).
- [11] K. Yosida, Functional Analysis, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New york*, (1974).