REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Thème

Résolution numérique d'un problème inverse non linéaire en dimension un

Présentée par :
M^{elle} *Abdelouahab* Hanane

Soutenu publiquement le : xx/06/2015.

Devant le jury composé de :

Président :	M^r *BELABBACI* Youcef	M.C.A, Université de Laghouat
Encadreur :	M^r *NOUIRI* Brahim	M.C.B, Université de Laghouat
Co-Encadreur :	M^r *RAHMOUNE* Abita	M.A.A, Université de Laghouat
Examinateurs :	M^r *BOUKHATEM* Yamna	M.C.B, Université de Laghouat
	M^r *RAHMOUNE* Abdelaziz	M.A.A, Université de Laghouat

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ALLAH tout puissant qui m'a donné la patience, la volonté et le courage pour bien achever mes études. J'exprime ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de mémoire Monsieur NOUIRI Brahim.

J'adresse mon respect à Monsieur BELABBACI Youcef, mon professeur qui a honoré ce travail en acceptant de présider le jury, ainsi que l'examinatrice Madame BOUKHATEM Yamna et l'examinateur Monsieur RAHMOUNE Abdelaziz qui ont consacré leurs temps à bien jugé mon travail de façon aussi minutieuse.

Enfin, vifs remerciements sont aussi transmis à tous mes professeurs et à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire
A mes très chers parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien qui ont consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être. Qu'ALLAH leur assure une longue vie pour que je puisse veiller à leur bonheur !
Mon frère et mes sœurs.
Toute ma famille.
Toute ce que j'aime.
Mon encadreur Nouiri Brahim.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudie un problème inverse non linéaire pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème elliptique en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Ce problème inverse est fortement mal posé et la régularisation est nécessaire pour la stabilité de sa solution. Le problème inverse est étudié dans un cadre d'un problème d'optimisation avec contraintes où les contraintes est un ensemble convexe et fermé, et la fonction objective est donnée par la fonction de moindre carrés. Ce problème d'optimisation admet au mois une solution. La régularisation est nécessaire pour l'unicité de la solution. La résolution numérique de ce problème est équivalent à la résolution d'inéquation d'Euler. Enfin, nous avons utilisé la méthode du gradient projeté pour résoudre le problème d'optimisation régularisé.

Mots-Clés : Éléments finis, Méthode du gradient projeté, Moindre carrés, Méthode de Cholesky, régularisation.

Table des matières

1 Rappels sur des outils mathématiques **1**

1.1 Espaces normés 2
1.2 Espaces de Banach 3
1.3 Espaces de Hilbert 3
1.4 Opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert 7
1.5 Analyse convexe et optimisation 11
1.5.1 Condition d'optimalité 13

2 Problème direct : problème elliptique en dimension un **16**

2.1 Position du problème 17
2.2 Formulation variationnelle 17
2.3 Approximation par éléments finis 20
2.3.1 Implémentation numérique 22
2.3.2 Convergence de la méthode 24
2.3.3 Méthode de Cholesky 27
2.3.4 Exemples numériques 27

3 Problème inverse non linéaire **30**

3.1 Position du problème 31
3.2 Application de la solution 32
3.2.1 Continuité 32
3.2.2 Différentiabilité 33
3.3 Méthode de moindres carrés 37
3.4 Régularisation 38
3.5 Discrétisation par élément fini 39
3.6 Calcul du gradient 40
3.7 Méthode du gradient projeté 42

Table des figures

2.1 Exemple 1 :Problème direct 28
2.2 Exemple 2 :Problème direct 28
2.3 Exemple 3 :Problème direct 29
2.4 Exemple 4 :Problème direct 29

Introduction générale

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations du phénomène. En mathématiques, un problème inverse a la forme d'une équation

$$Ax = y \tag{1}$$

Où u représente les mesures effectuées, A représente les valeurs des paramètres du phénomène et A est un opérateur linéaire ou non linéaire.

Les problèmes inverses généralement sont des problèmes mal posés car si l'on cherche à résoudre l'équation (1) ; cela nécessite l'inversion de l'opérateur A. Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique et d'après Hadamard [6] un problème est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- ☞ La solution existe ;
- ☞ Elle est unique ;
- ☞ Elle dépend continument des données.

Donc, si l'une des trois conditions n'est pas satisfaite, on dit que le problème est mal posé.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par *simulation numérique* ou de façon analytique.

Dans ce mémoire, nous avons centré notre travail sur le problème elliptique en dimension un suivant :

$$-\left(a(x)u'(x)\right)' = f(x), \tag{2a}$$
$$u(0) = 0, \tag{2b}$$
$$a(1)u'(1) = \lambda. \tag{2c}$$

où (2b) est la condition de Dirichlet homogène et (2c) est la condition de Neumann.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner un rappel sur les espaces de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus et les propriétés les plus importantes dans les espaces de Hilbert.

Dans le second chapitre, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre un problème direct qui consiste à trouver u avec a, f et λ sont connues. cette méthode est basée sur trois étapes principales. D'abord, nous obtenons la formulation variationnelle du problème direct. Ensuite, nous discrétisons la formulation variationnelle par éléments finis $\mathbb{P}_1$ nous dérivons un système d'équations linéaires à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale. La méthode de Cholesky nous permet de proposé un algorithme pour résoudre le système linéaire associé. Finalement, nous programmons cet algorithme par Matlab et nous testons cet algorithme par quelques exemples numériques.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude un problème inverse pour identifier le paramètre a avec f et λ données et z une mesure de la solution u.

On remarque que le problème inverse ne peut pas être résolu directement en manipulant le problème aux limites (2a)-(2c). Nous avons montré que ce problème inverse est mal posé de sorte que n'est pas stable. D'autre part, on considère un opérateur implicite $\mathscr{F}$ qui associé le paramètre a, la solution $\mathscr{F}(a) = u$ du problème direct. Cet opérateur est deux fois différentiable.

Une approche étudiée pour résoudre le problème inverse est de poser un problème d'optimisation dont la solution est une approximation du paramètre a. L'idée est de minimiser la différence entre la solution calculée et la solution mesurée, en utilisant une certaine norme appropriée. Autrement dit, étant donné une mesure z de la solution u, donc le paramètre a est la solution du problème de moindre carrés :

$$\min_{a\in\mathscr{A}} J(a) \tag{3}$$

où J est une fonction définie par

$$J(a) := \frac{1}{2}\|F(a) - z\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 a(x)\left[\frac{d}{dx}(F(a(x)) - z)\right]^2 dx.$$

Nous montrons que la fonction J est deux différentiable et convexe. Donc, le problème d'optimisation (3) admet au moins une solution. Pour l'unicité de la solution, en utilisant la technique de régularisation, et on considère le problème régularisé :

$$\min_{a\in\mathscr{A}} J_\epsilon(a) \tag{4}$$

où

$$J_\epsilon(a) := J(a) + \frac{\epsilon}{2}\|a\|^2,\ \ \epsilon > 0.$$

La fonction J_ϵ est fortement convexe, donc le problème (4) admet une unique solution.

Pour résoudre numériquement le problème (4) il faut et il suffit de résoudre une inéquation variationnelle suivante : trouver $a^* \in \mathscr{A}$ telle que

$$\left\langle J'_\epsilon\left(a^*\right), a - a^*\right\rangle \geq 0,\ \ \text{pour tout } a \in \mathscr{A}. \tag{5}$$

où J'_ϵ est la dérivée de J_ϵ. Nous employons la méthode du gradient projeté pour résoudre l'inéquation variationnelle (5).

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous allons donner un rappel sur les espaces vectoriels normés et de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Hilbert et en termine par les propriétés les plus importantes dans l'analyse convexe et l'optimisation.

1.1 Espaces normés

Définition 1.1. (Semi norme). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle semi norme pour E une application $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $\forall x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

1. $P(x) \geq 0$,

2. $P(\lambda x) = \lambda P(x)$,

3. $P\left(x + y\right) \leq P(x) + P\left(y\right)$.

L'espace vectoriel E muni d'une semi norme s'appelle espace semi normé, noté (E, P).

Remarque 1.1. Pour une semi norme, on a $P(0) = 0$.
En effet.

$$P(0) = P(0.x) = 0.P(x) = 0.$$

A noter qu'il est possible que $P(x) = 0$ et $x \neq 0$.

Définition 1.2. (Norme). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E, une application $p : E \to \mathbb{R}$, telle que P est une semi norme pour E et de plus

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Remarque 1.2. L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace vectoriel normé.

Exemple 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, les applications suivantes sont des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$
$$\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |x_i|,$$
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geqslant 1.$$

Exemple 1.2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

L'application $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\|f\| = \left(\int_\Omega \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme pour L^2.

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.3. (Suite de Cauchy). Soit (E, P) un espace vectoriel semi normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } P(x_n - x_m) < \epsilon, \forall n, m \geq N.$$

Définition 1.4. (Espace complet). Soit (E, P) un espace vectoriel semi normé. On dit que (E, P) est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

Définition 1.5. (Espace de Banach). Un espace de Banach est un espace normé complet.

Définition 1.6. (Espace dual). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle dual de E, et on notera E^* (ou E'), l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires de E dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.3. On appelle bidual de E, et on notera $(E^*)^*$, dual de E^*.

1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.7. (Produit scalaire). Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Un produit scalaire sur E est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que pour touts $x, y, x_1, x_2 \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
3. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Définition 1.8. (Espace préhilbertien). Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque 1.4. Un produit scalaire sur E définit une norme sur E donnée par :

$$\forall x \in E : \|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.3. L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i.$$

est un produit scalaire usuel.

Exemple 1.4. $L^2(\Omega)$ est un espace préhilbertien si on le muni d'un produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

Lemme 1.1. *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit E un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{K}$. Pour tout $x, y \in E$ on a :*

$$\left|\left\langle x, y\right\rangle\right| \leqslant \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \left\langle y, y\right\rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Démonstration. L'inégalité (1.1) est trivialement satisfaite si $(x, y) = 0$. Supposons donc que $(x, y) \neq 0$. Alors on pose $z = x - \lambda y$ telle que $\left\langle z, y\right\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\left\langle x, y\right\rangle &= \left\langle z + \lambda y, y\right\rangle = \left\langle z, y\right\rangle + \lambda \left\langle y, y\right\rangle, \\ &= \lambda \left\langle y, y\right\rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\left\langle x, y\right\rangle}{\left\langle y, y\right\rangle}.\end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \left\langle z + \lambda y, z + \lambda y\right\rangle, \\ &= \langle z, z\rangle + |\lambda|^2 \left\langle y, y\right\rangle, \\ &\geqslant |\lambda|^2 \left\langle y, y\right\rangle, \\ &= \frac{|\left\langle x, y\right\rangle|^2}{\left\langle y, y\right\rangle^2} \left\langle y, y\right\rangle, \\ |\left\langle x, y\right\rangle| &\leqslant \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \left\langle y, y\right\rangle^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De plus on a l'égalité si $\langle z, z\rangle = 0$. □

Lemme 1.2. *(Inégalité de Minkowski) Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$, alors*

$$\sqrt{\left\langle x + y, x + y\right\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\left\langle y, y\right\rangle}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\left\langle x + y, x + y\right\rangle &= \langle x, x\rangle + 2Re\left\langle x, y\right\rangle + \left\langle y, y\right\rangle, \\ &\leq \langle x, x\rangle + 2\left|\left\langle x, y\right\rangle\right| + \left\langle y, y\right\rangle,\end{aligned}$$

On applique l'inégalité (1.1)on obtient :

$$\left\langle x + y, x + y\right\rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\left\langle y, y\right\rangle}\right)^2,$$

D'ou

$$\sqrt{\left\langle x + y, x + y\right\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\left\langle y, y\right\rangle}.$$

□

Lemme 1.3. *(Règle du parallélogramme). La norme induite par un produit scalaire satisfait l'égalité*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y,x+y)+(x-y,x-y),\\ &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y),\\ &= 2(\|x\|^2+\|y\|^2).\end{aligned}$$

□

Définition 1.9. (Espace de Hilbert). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Définition 1.10. (Orthogonalité). Soit H un espace de Hilbert deux vecteurs $x,y\in H$ sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle=0$ on note par : $x\perp y$. L'orthogonal d'un sous espace vectoriel A est :

$$A^{\perp}=\left\{x\in H,\langle x,y\rangle=0\quad\forall y\in A\right\}.$$

$A^{\perp}$ s'appelle le complément orthogonal de A.

Remarque 1.5. La relation d'orthogonalité possède les propriétés suivantes :

1. $\forall x,y\in H : x\perp y \Longleftrightarrow y\perp x$,
2. $\forall x\in H$, $0\perp x$,
3. $x\perp x\Rightarrow x=0$,
4. Soit $x\in H$. Pour tout $x_i\in H, i=1,\dots,n$, si $x\perp x_i \Longrightarrow x\perp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$, $\forall\lambda_i\in\mathbb{K}$.

Théorème 1.1. *Soit A un ensemble non vide d'un espace de Hilbert et soit $\overline{A}$ la fermeture de A. Alors, s'il existe $x\in\overline{A}$ tel que $x\perp A$ alors $x=0$.*

Démonstration. Soit $x\in\overline{A}\Rightarrow\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A$ tel que $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$. Donc $\langle x_n,x\rangle=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$.
alors : $\lim_{n\to\infty}\langle x_n,x\rangle=\|x\|^2=0\Rightarrow x=0$. □

Théorème 1.2. *Si A un ensemble non vide de H alors :*

$$A^{\perp}=\{x\in H\ /\ x\perp A\}.$$

est un sous espace vectoriel fermé de H.

Démonstration. On a $A^{\perp}\neq\emptyset$ car $0\in A^{\perp}$. $\forall x_1,x_2\in A^{\perp},\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K},\forall y\in A$ on a :

$$\langle\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y\rangle=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle=0.$$

alors $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in A^{\perp}$. Donc $A^{\perp}$ est un sous espace de H.
D'autre part on a $\forall x_0\in\overline{A^{\perp}}\Rightarrow\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\perp}$ tel que $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$. Alors

$$\langle x_0,y\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle=0\quad\forall y\in A.$$

Donc $x_0\in A^{\perp}$ est un sous espace fermé. □

Corollaire 1.1. *Soit H_1 espace fermé de H et soit $x \in H$ alors il existe un élément $y_0 \in H_1$ telle que :*

$$\left(x - y_0\right) \perp H_1 \, et \; \|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in H_1.$$

On appelle cet élément la projection orthogonale de x sur H_1 et l'on note par : $y_0 = P_{H_1}(x)$.

Définition 1.11. (Ensemble convexe). Un ensemble S est dit convexe si pour tout points x et y de S le segment $\left[x, y\right]$ est inclus dans S i.e :

$$\forall x, y \in S, \forall t \in [0,1] : (1-t)\, x + t y \in S.$$

Exemple 1.5.
- Les sous ensembles convexes de l'espace $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$,
- Dans un espace vectoriel normé réel toute boule (ouverte ou fermé) est convexe.

Théorème 1.3. *(Décomposition orthogonale). Si H_1 est un sous espace fermé de H, alors tout $x \in H$ se décompose d'une manière unique :*

$$x = y + z \; où \; z \in H_1^{\perp}, y \in H_1.$$

Démonstration. L'existence d'une telle décomposition vient du fait que

$$x = px + (I-p)x.$$

où p est la projection orthogonal de H sur H_1 supposons :
$x = y + z, y \in H_1, z \in H_1^{\perp}$ alors :

$$px = py + pz = y,$$
$$(I-p)x = (I-p)y + (I-p)z = z.$$

cette décomposition est donc unique. □

Corollaire 1.2. *Soit H_1 un sous espace fermé de H, alors*

$$H_1 \cap H_1^{\perp} = \{0\} \; de\ plus \; H = H_1 \oplus H_1^{\perp}.$$

c'est à dire H admet une décomposition orthogonal.

Démonstration. Si $x = px + \left(I-p\right)x \in H_1 \cap H_1^{\perp}$ alors
$\left(x, px\right) = \left(x, \left(I-p\right)x\right) = 0$ ce qui entraine que

$$\left(x, px + \left(I-p\right)x\right) = (x, x) = \|x\|^2 = 0 \text{ donc } x = 0$$

D'après Théorème 1.3 on a $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$. □

1.4 Opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert

Définition 1.12. (Opérateur linéaire continu). Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert réels. On appel opérateur linéaire continu de H_1 dans H_2, toute application $T : H_1 \longrightarrow H_2$ telle que :

Linéarité : $\forall x, y \in H_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : T\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha T x + \beta T y$.

Continuité : $\exists K > 0, \forall x \in H_1 : \|Tx\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}$.

On définit la norme de l'opérateur T par :

$$\|T\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Tx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}, \quad x \neq 0.$$

Définition 1.13. (Noyau et image de T).

– Le noyau de l'opérateur T est un sous espace de H_1 défini par :

$$Ker\,(T) = \{x \in H_1 / Tx = 0\};$$

– L'image de T est le sous espace de H_2 définie par :

$$Im\,(T) = \{Tx \ / \ x \in H_1\}.$$

Théorème 1.4. *(Théorème de représentation de Riesz). Soit H un espace de Hilbert et soit L une forme linéaire continue sur H alors $\exists ! a \in H$ tel que :*

$$\forall x \in H : L(x) = \langle x, a\rangle \ \textit{et}\ \|L\|_{H'} = \|a\|_H.$$

Démonstration. 1. Si $L = 0 \Rightarrow \langle x, a\rangle = 0 \Rightarrow a = 0$.(le cas triviale)

2. Si $L \neq 0$: soit $F = Ker(L)$ (c'est un sous espace fermé car L est continue) on a : $H = F \oplus F^{\perp}$.
   Soit $y_0 \neq 0, y_0 \in F^{\perp}$ alors $L(y_0) \neq 0$, $\forall x \in H$.
   On pose $u = x - \frac{L(x)}{L(y_0)} y_0 \Rightarrow L(u) = 0$ c'est à dire $u \in F$ et comme $y_0 \in F^{\perp}$ on a : $\left\langle u, y_0\right\rangle = 0$ cela s'écrit en remplaçant u par son expression

$$\left\langle x, y_0 - \left\| y_0 \right\|\right\rangle^2 L(x)/L(y_0) = 0.$$

   On en déduit que :

$$L(x) = \left\langle x, y_0\right\rangle \frac{L(y_0)}{\left\|y_0\right\|^2} \quad \forall x \in E.$$

   Et il suffit alors de poser $a = \left\|y_0\right\|^{-2} \overline{L(y_0)}\, y_0$.
   a est unique car si $a_1 \neq a_2$ vérifiant $L(x) = \langle x, a_1\rangle = \langle x, a_2\rangle \, \forall x \in H \Rightarrow \langle x, a_1 - a_2\rangle = 0$ donc $a_1 = a_2$.
   $\|L\| = \|a\|$ on a :

$$\|L\|_{H'} = \sup_{x \in H} \frac{|L(x)|}{\|x\|_H} = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|x\|}.$$

   Donc $\|L\|_{H'} = \|a\|_H$.

□

Définition 1.14. (Fonction sesquilinéaire). Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) on dit qu'une fonction $f : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ est sesquilinéaire si :

1. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2, y \in H$:

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\right) = \alpha_1 f\left(x_1, y\right) + \alpha_2 f\left(x_2, y\right);$$

2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}, \forall x, y_1, y_2 \in H$:

$$f\left(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2\right) = \overline{\beta_1} f\left(x, y_1\right) + \overline{\beta_2} f\left(x, y_2\right);$$

3.

$$\left\|f\right\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \left\|y\right\|\leq 1} \left|f\left(x, y\right)\right| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{\left|f\left(x, y\right)\right|}{\|x\| \left\|y\right\|}.$$

Théorème 1.5. *Soit f une fonction sesquilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$. Alors il existe un opérateur unique $B \in L(H)$:*

$$\forall x, y \in H : f\left(x, y\right) = \left(x, By\right).$$

De plus, $\left\|f\right\| = \|B\|$.

Démonstration. Soit y fixé dans H. Alors l'application $\Phi : x \longrightarrow f\left(x, y\right)$ est une fonction linéaire de H dans $\mathbb{K}$. Donc d'après le Théorème de Riesz 1.4 : $\exists z \in H : \Phi(x) = f\left(x, y\right) = (x, z)$, □

posons $z = By$, alors on a :

$$f\left(x, y\right) = \left(x, By\right).$$

L'opérateur B est linéaire car, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall y_1, y_2 \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
\left(x, B\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right)\right) &= f\left(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) \\
&= \overline{\alpha_1} f\left(x, y_1\right) + \overline{\alpha_2} f\left(x, y_2\right) \\
&= \overline{\alpha_1}\left(x, By_1\right) + \overline{\alpha_2}\left(x, By_2\right) \\
&= \left(x, \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2\right).
\end{aligned}$$

Montrons que B est borné et que $\|B\| = \left\|f\right\|$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\|f\right\| &= \sup_{x,y\neq 0} \frac{f\left(x, y\right)}{\|x\| \left\|y\right\|} \\
&\geq \sup_{y\neq 0} \frac{\left(By, By\right)}{\left\|By\right\| \left\|y\right\|} \\
&= \sup_{y\neq 0} \frac{By}{y}.
\end{aligned}$$

Donc B est borné et $\|B\| \leq \|f\|$.

D'autre part :

$$\left|f(x,y)\right| = \left|(x,By)\right| \leq \|x\| \left\|By\right\| \leq \|x\| \|B\| \left\|y\right\|.$$

D'où $\|f\| \leq \|B\|$.

Pour l'unicité, soit B_1, B_2 tels que :

$$f(x,y) = \left(x, (B_1 - B_2)\, y\right) = 0.$$

Donc $B_1 = B_2$.

Définition 1.15. (Opérateur adjoint). Soit $A \in L(H)$, alors (Ax, y) est une fonction sesquilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{K}$ Le théorème 1.5 montre qu'il existe un opérateur unique noté $A^* \in L(H)$ pour lequel

$$\forall x, y \in H : (Ax, y) = (x, A^* y).$$

De plus

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

L'opérateur A^* est appelé l'opérateur adjoint de A.

Proposition 1.1. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soit $T, S \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$, on a :*

1. $(T^*)^* = T$,
2. $(TS)^* = S^* T^*$,
3. $(T+S)^* = T^* + S^*$,
4. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$,
5. $(ker T)^\perp = \overline{(Im T^*)}$.

Démonstration. 1. $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$ on a :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \overline{\langle T^* y, x\rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^* x\rangle} = \langle (T^*)^* x, y\rangle,$$

2. $\forall x, y \in H : \langle (TS)^* x, y\rangle = \langle x, TS(y)\rangle = \langle T^*(x), S(y)\rangle = \langle S^* T^*(x), y\rangle$,
3. $\langle (T+S)(x), y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle = \langle x, (T^* + S^*)\, y\rangle$,
4. $\langle \alpha T(x), y\rangle = \alpha \langle Tx, y\rangle = \alpha \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} T^* y\rangle$,
5. Soit $y \in Ker T^*$ alors, on a :

$$\begin{aligned} T^* y = 0 &\Leftrightarrow \langle x, T^* y\rangle = 0, \ \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in (Im T)^\perp \end{aligned}$$

donc $Ker(T^*) = (Im T)^\perp$.

□

Définition 1.16. Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que

- a est continue sur H s'il existe $M > 0$ si

$$\forall w, v \in H, |a(w,v)| \leq M \|w\|_H \|v\|_H .$$

- a est coercive (ou elliptique) si

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H \text{ tel que } a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2 .$$

Théorème 1.6. *(Lax-Milgram). Soit H un espace de Hilbert réel. On considère $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur H et $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors la formulation variationnelle suivante :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ telle que} \\ \forall v \in H, \quad a(u,v) = L(v). \end{cases} \tag{1.2}$$

admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L.

Démonstration. On a $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur H d'après le théorème de Riesz1.4 : $\exists A(w) \in H$ tel que :

$$a(w,v) = \langle A(w), v \rangle \, \forall v \in H.$$

la bilinéarité de $a(w,v)$ implique la linéarité de $w \to A(w)$ car pour touts $w_1, w_2 \in H, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle A(\alpha w_1 + \beta w_2), v \right\rangle &= a(\alpha w_1 + \beta w_2, v), \\ &= \alpha a(w_1, v) + \beta a(w_2, v), \\ &= \alpha \langle A w_1, v \rangle + \beta \langle A w_2, v \rangle, \\ &= \left\langle \alpha A w_1 + \beta A w_2, v \right\rangle. \end{aligned}$$

donc $w \to A(w)$ est linéaire.

On pose $v = A(w)$. D'après la continuité de $a(w,v)$, nous avons :

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M \|w\| \|A(w)\| \Rightarrow \|A(w)\| \leq M \|w\| .$$

donc $A \longrightarrow A(w)$ est continue.

Une autre application de Théorème 1.4, on a :

$$\exists f \in H \text{ tel que } \left\| f \right\|_H = \|L\|_{H'} \text{ et } L(v) = \left\langle f, v \right\rangle \forall v \in H.$$

Donc le problème variationnelle (1.2) est équivalent à trouver $u \in H$ tel que $A(u) = f$. On va montrer que A est bijectif (ce qui implique l'existence et l'unicité de u).

A **est injectif :** D'après la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ on a :

$$\alpha \|w\|^2 \leq a(w,w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|Aw\| \|w\|$$

ce qui donne

$$\alpha \|w\| \leq \|Aw\|, w \in H. \tag{1.3}$$

Soit $w_1, w_2 \in H$ tel que $A(w_1) = A(w_2)$ alors $A(w_1 - w_2) = 0$ (car A est linéaire). En utilisant (1.3), on obtient :

$$\alpha \|w_1 - w_2\| \leq \|A(w_1 - w_2)\| = 0 \Rightarrow w_1 = w_2.$$

A **est surjectif :** Il suffit de montrer que $ImA^{\perp} = \{0\}$. Soit $v \in ImA^{\perp}$, on a :

$$\forall A(w) \in ImA, \langle A(w), v\rangle = 0 \Rightarrow a(w,u) = 0$$

On pose $w = v$ et d'après la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ on a :

$$\alpha \| v\|^2 \leq a(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

donc $ImA^{\perp} = \{0\}$. D'autre part, on a :

$$H = ImA \oplus ImA^{\perp} \text{ et } ImA^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow ImA = H.$$

Alors, A est surjectif.

A^{-1} **est continue :** En remplaçant dans (1.3), on trouve que A^{-1} est continue sur H. Alors, la solution u dépend continument de f.

□

1.5 Analyse convexe et optimisation

Définition 1.17. (Fonction convexe). On dit qu'une fonction f définie sur un ensemble convexe non vide $S \in H$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ est :

1. Convexe sur S si est seulement si

$$f((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta) f(u) + \theta f(v) \quad \forall u, v \in S, \forall \theta \in [0,1].$$

2. Strictement convexe sur S si est seulement si

$$f((1-\theta)u + \theta v) < (1-\theta) f(u) + \theta f(v) \text{ lorsque } u \neq v, \text{ et } \theta \in]0,1[.$$

3. On dit qu'une fonction f définie sur un ensemble convexe S est fortement convexe si est seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} - \frac{\alpha}{8}\|u-v\|^2.$$

On dit aussi dans ce cas que f est α convexe.

Définition 1.18. (Minimum local). On dit que u est un minimum local de f sur S si est seulement si :

$$u \in S \text{ et } \exists \delta > 0 \ / \ \forall v \in S, \|v-u\| < \delta \Rightarrow f(u) \leq f(v).$$

On dit que u est un minimum global de f sur S si est seulement si :

$$u \in S \text{ et } f(u) \leq f(v) \quad \forall v \in S.$$

Proposition 1.2. *(voir [1, p.294]). Si f est une fonction convexe sur un ensemble convexe S, tout point de minimum local de f sur S est un minimum global, si de plus f est strictement convexe, alors il existe au plus un minimum.*

Si S un convexe fermé et f est une fonction α convexe sur S. Alors, il existe un unique minimum global u de f sur S, et on :

$$\|u-v\|^2 \leq \frac{4}{\alpha}\left[f(v)-f(u)\right], \quad \forall v \in S.$$

Définition 1.19. (Différentiabilité au sens de Fréchet). On dit que la fonction f définie sur un voisinage de $u \in H$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est différentiable au sens de Fréchet en u s'il existe une forme linéaire $L \in H'$ continue sur H telle que

$$f(u+w) = f(u) + L(w) + o(w), \text{ avec } \lim_{\|w\|\to 0} \frac{|o(w)|}{\|w\|} = 0. \tag{1.4}$$

On appel L la différentielle de f en u et on note $L = F'(u)$.

On peut préciser la relation (1.3) en identifiant H et son dual H' grâce au théorème de représentation de Riesz 1.4.En effet, il existe un unique $p \in H$ tel que $\langle p, w\rangle = L(w)$, donc (1.3) devient

$$f(u+v) = f(u) + \langle p, w\rangle + o(w), \text{ avec } \lim_{\|w\|\to 0} \frac{\|o(w)\|}{\|w\|} = 0.$$

Définition 1.20. (Différentiabilité au sens faible). On dit que f définie sur un voisinage de $u \in H$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux en u s'il existe $L \in H'$ tel que

$$\forall w \in H, \lim_{\delta\to 0^+} \frac{f(u+\delta w) - f(w))}{\delta} = L(w). \tag{1.5}$$

Proposition 1.3. *(voir [1, 2p.305]) Soit f une fonction différentiable de H dans $\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$f \textit{ est convexe sur } H.$$

$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u), v-u\rangle \quad \forall u, v \in H. \tag{1.6}$$

$$\langle f'(u) - f'(v), u-v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in H.$$

Et pour $\alpha > 0$ les assertions suivantes sont équivalentes :

$$f \textit{ est } \alpha \textit{ convexe sur } H.$$

$$f(v) \geq f(u) + \langle f'(u), v-u\rangle + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

$$\langle f'(u) - f'(v), u-v\rangle \geq \alpha\|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

Définition 1.21. (Dérivée seconde). Soit f une fonction de H dans $\mathbb{R}$. On dit que f est deux fois différentiable en $u \in H$ si f est différentiable dans un voisinage de u et sa différentielle f' est différentiable en u. On note f'' la différentielle de f' en u qui vérifie

$$f'(u+w) = f'(u) + f''(u)v + o(w), \text{ avec } \lim_{\|w\|\to 0} \frac{|o(w)|}{\|w\|} = 0.$$

Définition 1.22. (Problème de minimisation). Soient H un espace de Hilbert réel, S un sous ensemble de H et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Un problème de minimisation du type suivant :"Trouver $u \in H$ ou S, un minimum de la fonction f". Ce problème est formulé de la façon suivante :

Problème de minimisation sans contrainte :

$$\min_{v\in H} f(x).$$

Problème de minimisation avec contrainte :

$$\min_{v\in S} f(x).$$

1.5.1 Condition d'optimalité

Théorème 1.7. *(Inéquation d'Euler, cas convexe, voir [1, 2p.307]). Soient H un espace de Hilbert réel et S un ensemble convexe de H. On considère $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $u \in S$. Alors,*

1. *Si u est un point de minimum local de f sur S on a :*

$$\langle f'(u), v-u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in S. \tag{1.7}$$

2. *De plus si f est convexe, alors u est un minimum global de f sur S.*

Démonstration. On suppose que $u \in S$ est un minimum local de f. Alors, pour tout $v \in S$ et $h \in]0,1]$ on a $u + h(v-u) \in S$, donc

$$\frac{f(u+h(v-u)) - f(u)}{h} \geq 0.$$

On en déduit(1.7) en faisant tendre h vers 0.

La deuxième assertion du Théorème 1.7 découle immédiatement de (1.6) et (1.7) . □

Remarque 1.6. L'inéquation d'Euler(1.7) il s'agit d'une condition nécessaire d'optimalité qui devient nécessaire et suffisante si f est convexe. Dans deux cas importants, (1.7) se réduit simplement à l'équation d'Euler $f'(u) = 0$.

1. Si $S = H$ alors $v - u$ décrit tout H lorsque v décrit H et donc (1.7) entraine $f'(u) = 0$.
2. Si u est intérieur à S, la même conclusion s'impose.

Proposition 1.4. *(voir [1, 2p.310]). On suppose que $S = H$ et que f est deux fois différentiable en u. Si u est un point de minimum local de f, alors*

$$f'(u) = 0 \text{ et } f''(u)(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in H.$$

Réciproquement, si pour tout v dans un voisinage de u

$$f'(u) = 0 \text{ et } f''(v)(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in H.$$

alors u est un minimum local de f.

Théorème 1.8. *(Projection sur un ensemble convexe fermé). Soit $S \subset H$ un convexe fermé non vide, alors $\forall f \in H, \exists! u \in S$ tel que*

$$\left|f-u\right| = \min_{v\in S}\left|f-v\right|. \tag{1.8}$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in S \quad (f-u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in S. \tag{1.9}$$

on note $u = P_S f$ la projection de f sur S.

Démonstration.

1. Existence :
   soit $v_n \in S$ et $d_n = \left|f - v_n\right| \to d = \inf_{v\in S}\left|f-v\right|$, montrons que v_n est de Chauchy. Appliquant l'inégalité du parallélogramme avec $a = f - v_n, b = f - v_m$ il vient

   $$\left|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right|^2 + \left|\frac{v_n - v_m}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right).$$

   Or $\frac{v_n+v_m}{2} \in S$ et donc $\left|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right| \geq d$.
   par conséquent :

   $$\left|\frac{v_n+v_m}{2}\right|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2.$$

   et $\lim_{m,n\to\infty}|v_n - v_m| = 0$ Donc $v_n \to u \in S$ et l'on a $d = \left|f-u\right|$.
2. Equivalence de(1.8)et(1.9) :
   soit $u \in S$ vérifiant(1.8)et soit $w \in S$.on a :$v = (1-t)u + tw \in S$ pour $t \in]0,1]$ et donc

   $$\left|f-u\right| \leq \left|f - [(1-t)u + tw]\right| = \left|(f-u) - t(w-u)\right|.$$

   par suite

   $$\left|f-u\right|^2 \leq \left|f-u\right|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2|w-u|^2.$$

   i.e :

   $$2(f-u, w-u) \leq t|w-u|^2 \text{ quand } t \to 0 \text{ on obtient(1.9).}$$

   Inversement, soit u vérifiant(1.9), alors on a

   $$\left|f-u\right|^2 - \left|v-f\right|^2 = 2(f-u, v-u) - |u-v|^2 \leq 0 \quad \forall v \in S \text{ d'où(1.8).}$$

3. Unicité :
   soient u_1 et u_2 vérifiant(1.9), alors on

$$\left(f - u_1, v - u_1\right) \leq 0 \quad \forall v \in S. \tag{1.10}$$
$$\left(f - u_2, v - u_2\right) \leq 0 \quad \forall v \in S. \tag{1.11}$$

   Reportant $v = u_2$ dans(1.10)et $v = u_1$ dans (1.11) on obtient après addition $|u_1 - u_2|^2 < 0$.

□

Lemme 1.4. *L'opérateur de projection sur un ensemble convexe satisfait les propriétés suivants :*

1. $\left\|P_S x - P_S y\right\| \leq \left\|x - y\right\| \quad \forall x, y \in H.$
2. $\left\langle x - P_S x, P_S x - y\right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H, \forall y \in S.$
3. $\left\|x - y\right\|^2 \geq \|x - P_S x\|^2 + \left\|y - P_S x\right\|^2 \quad \forall x \in H, y \in S.$

CHAPITRE 2

PROBLÈME DIRECT : PROBLÈME ELLIPTIQUE EN DIMENSION UN

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre le problème direct avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. La méthode des éléments finis est basé sur trois idées principales. D'abord, nous obtenons la formulation variationnelle du problème direct. Ensuite, nous discrétisons la formulation variationnelle par éléments finis $\mathbb{P}_1$ *et nous dérivons un système d'équations linéaires à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale. Avec la méthode de Cholesky nous avons proposé une algorithme pour résoudre ce système. Finalement, nous avons programmé cette algorithme par Matlab et nous testons cette algorithme par quelques exemples numériques.*

2.1 Position du problème

On considère le problème elliptique en dimension un avec conditions mixtes suivant :
Trouver $u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$-\left(a(x)u'(x)\right)' = f(x), \tag{2.1a}$$
$$u(0) = 0, \tag{2.1b}$$
$$a(1)u'(1) = \lambda. \tag{2.1c}$$

où $f \in L^2(0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in L^\infty(0,1)$ vérifiant la condition suivante :

$$\exists a_1, a_2 > 0,\ a_1 \leq a(x) \leq a_2,\ \text{ pour tout } x \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1. L'équation (2.1a) correspond à une solution à l'état stable de l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(au'\right)' + f. \tag{2.3}$$

où u est la température, f est un terme source, a est la conductivité thermique et λ est le flux de chaleur (entrant ou sortant). On peut utiliser la même équation pour modéliser un écoulement monophasique (comme du pétrole) : u est la pression, f représente les puits de pompage, a est la perméabilité du milieu et $\lambda = 0$ pour un milieu fermé. Une discussion détaillée de l'équation (2.3) peut être trouvée dans [**?**].

2.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace de Sobolev $H^1(0,1)$ par :

$$H^1(0,1) := \left\{v \in L^2(0,1) \text{ tel que } v' \in L^2(0,1)\right\}.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *On a l'inclusion* $H^1(0,1) \subset \mathscr{C}([0,1])$ *et*

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)}. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soient $u \in H^1(0,1)$. Alors, on a :

$$\forall x, y \in [0,1], u(y) = u(x) + \int_x^y u'(t)\,dt$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left|u(x) - u(y)\right| \leq \sqrt{|x-y|}\,\left\|u'\right\|_{L^2(0,1)} \tag{2.5}$$

donc u est continue sur $[0,1]$. De (2.5), nous avons :

$$|u(x)| \leq \left|u(y)\right| + \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)} \text{ pour tout } x, y \in [0,1].$$

En intégrant en y sur $[0,1]$, on obtient :

$$|u(x)| \leq \int_0^1 \left|u\left(y\right)\right| dy + \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)} \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

on en déduit l'estimation (2.5). □

On munit $H^1(0,1)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{H^1(0,1)} := \left(\|u\|^2_{L^2(0,1)} + \left\|u'\right\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{1/2}$$

et du produit scalaire associé

$$\langle u, v\rangle_{H^1(0,1)} := \int_0^1 \left(u(x)\, v(x) + u'(x)\, v'(x)\right) dx.$$

Lemme 2.2. *$H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $H^1(0,1)$ est complet. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^1(0,1)$.

Les deux suites (u_n) et $\left(u'_n\right)$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(0,1)$ qui est complet. Donc, il existe $u, v \in L^2(0,1)$ tels que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \text{ et } u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v.$$

De (2.4), on déduit que la suite (u_n) converge uniformément sur $[0,1]$ et par passage à la limite dans l'égalité

$$u_n(x) = u_n\left(y\right) + \int_x^y u'_n(t)\, dt$$

on obtient

$$u(x) = u\left(y\right) + \int_x^y v(t)\, dt.$$

Donc, $u \in H^1(0,1)$. □

On introduit l'espace V défini par :

$$V := \left\{v \in H^1(0,1) \ / \ v(0) = 0\right\}.$$

Lemme 2.3. *L'espace V est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1(0,1)$. De plus, l'application suivante :*

$$u \longmapsto \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)}$$

est une norme sur V équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(0,1)}$.

Démonstration. On considère l'application linéaire $\varphi : H^1(0,1) \to H^1(0,1)$ définie par

$$\varphi(v) = v(0).$$

De (2.4), l'application φ est continue sur $H^1(0,1)$, donc $ker(\varphi) = V$ est un sous espace fermé de $H^1(0,1)$. De plus, si $u \in V$ et pour tout $x \in \,]0,1[$, on a :

$$|u(x)| \leq \int_0^x \left|u'(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Il en résulte

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \left\|u'\right\|_{L^2(0,1)}.$$

Ainsi, nous avons :

$$\|u\|^2_{L^2(0,1)} + \left\|u'\right\|^2_{L^2(0,1)} \leq 2\left\|u'\right\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Alors, on a :

$$\left\|u'\right\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)} \leq \sqrt{2}\left\|u'\right\|_{L^2(0,1)}$$

d'où l'équivalence des normes. □

Lemme 2.4. *Le sous ensemble $\mathscr{A}$ défini par :*

$$\mathscr{A} := \left\{a \in L^\infty(0,1) \;\;/\;\; a_1 \leq a(x) \leq a_2,\;\; a_1, a_2 > 0\right\}$$

est convexe fermé.

En multipliant l'équation (2.1a) par une fonction arbitraire $v \in V$ et en intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$-\int_0^1 \left(a(x)\,u'(x)\right)' v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx \tag{2.6}$$

Par intégration par parties, le membre gauche de (2.6) devient :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \left(a(x)\,u'(x)\right)' v(x)\,dx &= -a(x)\,u'(x)\,v(x)\big|_0^1 + \int_0^1 a(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx \\ &= -\lambda v(1) + \int_0^1 a(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx \end{aligned}$$

Par conséquent, la formulation variationnelle du problème (2.1a)-(2.1c) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ T(a,u,v) = \ell(v) \quad \text{pour tout } v \in V. \end{cases} \tag{2.7}$$

Où $T : \mathscr{A} \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme trilinéaire donnée par :

$$T(a,u,v) = \int_0^1 a(x)\,u'(x)\,v'(x)\,dx \;\; \text{pour tout } u, v \in V \tag{2.8}$$

et $\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire donnée par :

$$\ell(v) = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx + \lambda v(1) \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{2.9}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.7), nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $f \in L^2(0,1)$, le problème variationnel* (2.7) *admet une solution unique $u \in V$.*

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Lemme 2.3 nous avons :

$$\begin{aligned}\forall v \in V,\ |\ell(v)| &\leq \int_0^1 \left|f(x)\right| |v(x)|\,dx + |\lambda|\,|v(1)| \\ &\leq \left(\int_0^1 \left|f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + |\lambda| \left(\int_0^1 |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \\ &\leq M\,\|v\|_V \quad \text{où } M = \left\|f\right\|_{L^2(0,1)} + |\lambda|.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Alors, la forme linéaire ℓ est continue sur V.

Pur la continuité de T, on a :

$$\begin{aligned}\forall u,v \in V,\ |T(a,u,v)| &\leq \sup_{x\in[0,1]} |a(x)| \int_0^1 \left|u'(x)\right| \left|v'(x)\right| dx \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |a(x)| \left(\int_0^1 \left(u'\right)^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(v'\right)^2(x)\,dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(0,1)}\,\|u\|_V\,\|v\|_V.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Donc, la forme trilinéaire T est continue sur $V \times V$.

Pour la coercivité de T, on a :

$$\forall v \in V,\ T(a,v,v) = \int_0^1 a(x)\left(v'(x)\right)^2 dx \geq \inf_{x\in[0,1]} |a(x)| \int_0^1 \left(v'(x)\right)^2 dx \geq \alpha\,\|v\|_V^2. \tag{2.12}$$

où $\alpha = \inf_{x\in[0,1]} |a(x)| / \sqrt{2}$.

Enfin, les hypothèses de théorème de Lax-Milgram sont vérifies, donc le problème (2.7) admet une solution unique $u \in V$. □

Remarque 2.2. Pour tout $a \in \mathscr{A}$, l'application définie par :

$$v \longmapsto \sqrt{T(a,v,v)}$$

est une norme sur V.

2.3 Approximation par éléments finis

Nous construisons un sous espace V_h de V de dimension finie constitué de fonctions linéaires par morceaux. On se donne un entier naturel N et on pose $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$ pour $i = 0,\ldots,N+1$ (avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$) et $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0,\ldots,N$.

On définit l'espace vectoriel V_h par :

$$V_h := \left\{v_h \in \mathscr{C}([0,1]) : \ {v_h}_{|_{I_i}} \in \mathbb{P}_1,\ v_h(0) = 0\right\}. \tag{2.13}$$

où $\mathbb{P}_1$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1.

On définit, pour $j = 1, \dots, N+1$, les fonctions ϕ_j par :

$$\phi_j(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in \left[x_{j-1}, x_j\right], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in \left[x_j, x_{j+1}\right], \\ 0 \text{ si } x \leq x_{j-1} \text{ ou si } x \geq x_{j+1}. \end{cases} \qquad \text{pour tout } j = 1, \dots, N \tag{2.14}$$

$$\phi_{N+1}(x) := \begin{cases} \frac{x - x_N}{h} & \text{si } x \in [x_N, x_{N+1}], \\ 0 \text{ si } x \leq x_N. \end{cases} \tag{2.15}$$

Les fonctions ϕ_j, $j = 1, \dots, N+1$, sont des fonctions "chapeau" (voir figure 2.1), elles vérifient

$$\phi_j \in V_h \text{ et } \phi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Proposition 2.1. *L'espace vectoriel V_h défini par* (2.13) *est un sous espace de V de dimension $N+1$ et la famille $\{\phi_1, \dots, \phi_{N+1}\}$ est une base de V_h. En particulier, pour tout $v \in V_h$ on a :*

$$\forall x \in [0,1], \ v(x) = \sum_{j=1}^{N+1} v\left(x_j\right) \phi_j(x). \tag{2.16}$$

Démonstration. On montre d'abord que V_h est un sous-espace de V. Si $v \in V_h$ alors $v \in \mathscr{C}(0,1) \subset L^2(0,1)$, il suffit donc de montrer que $v' \in L^2(0,1)$.

Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(0,1)$, on a :

$$\left\langle v', \varphi \right\rangle = -\int_0^1 v\varphi' dx = -\sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_{|[x_j, x_{j+1}]} \varphi' dx.$$

Or $v_{|[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \subset \mathscr{C}(0,1)$. Donc, d'après intégration par parties, on obtient

$$\left\langle v', \varphi \right\rangle = \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'_{|[x_j, x_{j+1}]} \varphi dx + \sum_{j=0}^{N} \left[v\left(x_j\right) \varphi\left(x_j\right) - v\left(x_{j+1}\right) \varphi\left(x_{j+1}\right) \right].$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N} \left[v\left(x_j\right) \varphi\left(x_j\right) - v\left(x_{j+1}\right) \varphi\left(x_{j+1}\right) \right] &= \sum_{j=0}^{N} v\left(x_j\right) \varphi\left(x_j\right) - \sum_{j=0}^{N} v\left(x_{j+1}\right) \varphi\left(x_{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N} v\left(x_j\right) \varphi\left(x_j\right) - \sum_{j=1}^{N+1} v\left(x_j\right) \varphi\left(x_j\right) \\ &= v(x_0) \varphi(x_0) - v(x_{N+1}) \varphi(x_{N+1}) = 0. \end{aligned}$$

car $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$. On en déduit

$$\left\langle v', \varphi \right\rangle = \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'_{|[x_j, x_{j+1}]} \varphi dx$$

donc, on a :

$$v' = \sum_{j=0}^{N} v'_{|[x_j,x_{j+1}]} \chi_{|[x_j,x_{j+1}]} dx.$$

Où χ est la fonction caractéristique de $\left[x_j, x_{j+1}\right]$. D'où $v' \in L^2(0,1)$.

Il reste à montrer que $\{\phi_1, \dots, \phi_{N+1}\}$ est une base de V_h et l'égalité (2.16). Soit $j = 1, \dots, N+1$, alors $supp(\phi_j) \cap supp(\phi_{j+1}) = \left[x_j, x_{j+1}\right]$. De plus, $\{\phi_j, \phi_{j+1}\}$ est une base de $\mathbb{P}_1$ sur $\left[x_j, x_{j+1}\right]$.

En effet, $\mathbb{P}_1$ est de dimension 2 et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha\phi_j(x) + \beta\phi_{j+1}(x) = 0$ pour tout $x \in \left[x_j, x_{j+1}\right]$, en prenant $x = x_j$ on obtient $\alpha = 0$ et avec $x = x_{j+1}$ on obtient $\beta = 0$.

Soit $v \in V_h$, alors pour tout $j = 1, \dots, N+1$, $v_{|[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1$. Donc, $v_{|[x_j,x_{j+1}]} = \alpha\phi_j(x) + \beta\phi_{j+1}(x)$. En prenant $x = x_j$ puis $x = x_{j+1}$ on obtient $v_{|[x_j,x_{j+1}]} = v(x_j)\phi_j(x) + v(x_{j+1})\phi_{j+1}(x)$.

D'autre part, pour $x \in \left[x_j, x_{j+1}\right]$, $\phi_i(x)$ si $i \neq j$ et $i \neq j+1$, donc

$$\forall x \in \left[x_j, x_{j+1}\right], \ \sum_{i=1}^{N+1} v(x_i)\phi_i(x) = v(x_j)\phi_j(x) + v(x_{j+1})\phi_{j+1}(x) = v_{|[x_j,x_{j+1}]},$$

d'où le résultat. □

L'approximation par éléments finis de la formulation variationnelle (2.7) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ T(a, u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h. \end{cases} \tag{2.17}$$

D'après (2.10)-(2.12) et avec Théorème 1.5 de Lax-Milgram, le problème (2.17) admet une solution unique $u_h \in V_h$.

La solution u_h du problème variationnel (2.17) s'écrit

$$u_h = \sum_{j=1}^{N+1} u_j\phi_j \ \text{ où } u_j = u_h(x_j).$$

Et par la substitution $v_h = \phi_i$ pour $1 \le i \le N+1$, le problème (2.17) est équivalent le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } U = (u_1, \dots, u_{N+1})^T \text{ solution de} \\ KU = R \end{cases} \tag{2.18}$$

Où $K = (k_{ij})$ est une matrice symétrique appelée matrice de rigidité donnée par :

$$k_{ij} = T(a, \phi_j, \phi_i) \quad \forall 1 \le i, j \le N+1,$$

et $R = (r_i)$ le vecteur de charge donné par :

$$r_i = \ell(\phi_i) \quad \forall 1 \le i \le N+1.$$

2.3.1 Implémentation numérique

Pour calculer les composantes du vecteur de charge et les éléments de matrice de rigidité, nous utilisons la règle de Simpson suivante :

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right].$$

Vecteur de charge

Pour $i = 1,\ldots,N$ nous avons :

$$\begin{aligned}
r_i = \ell\left(\varphi_i\right) &= \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_{i+1})\,f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{h}\cdot\frac{h}{6}\left[(x_{i-1}-x_{i-1})\,f(x_{i-1}) + 4\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}-x_{i-1}\right)f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+(x_i-x_{i-1})\,f(x_i)\right]\\
&-\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{6}\left[(x_i-x_{i+1})\,f(x_i)+4\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}-x_{i+1}\right)f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+(x_{i+1}-x_{i+1})\,f(x_{i+1})\right]\\
&= \frac{h}{3}\left[f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)+f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

et

$$r_{N+1} = \ell\left(\varphi_{N+1}\right) = \frac{h}{6}\left[2f\left(\frac{x_N+x_{N+1}}{2}\right)+f(x_{N+1})\right]+\lambda.$$

Matrice de rigidité

Si $\left|i-j\right|>1$, $supp\left(\phi_i\right)\cap supp\left(\phi_i\right)=\emptyset$, donc $k_{ij}=0$ alors la matrice K est creuse. Pour les éléments de diagonale principale, nous avons pour $i=1,\ldots,N$:

$$\begin{aligned}
b_i = K_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)\left(\varphi_i'\right)^2 dx &= \frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_j} a(x)\,dx + \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)\,dx\\
&= \frac{1}{6h}\left[a(x_{i-1})+4a\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+2a(x_i)+4a\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+a(x_{i+1})\right].
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_{N+1} = K_{N+1,N+1} = \int_{x_N}^{x_{N+1}} a(x)\left(\varphi_{N+1}'(x)\right)^2 dx &= \frac{1}{h^2}\int_{x_N}^{x_{N+1}} a(x)\,dx\\
&= \frac{1}{6h}\left[a(x_N)+4a\left(\frac{x_N+x_{N+1}}{2}\right)+a(x_{N+1})\right].
\end{aligned}$$

Pour tout $i=1,\ldots,N$, nous avons :

$$\begin{aligned}
c_i = K_{i+1,i} = K_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)\,\varphi_{i+1}'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)\,dx\\
&= -\frac{1}{6h}\left[a(x_i)+4a\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+a(x_{i+1})\right].
\end{aligned}$$

Enfin, la matrice K est tridiagonale.

Proposition 2.2. *Le système linéaire* (2.18) *admet une solution unique* $U \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Démonstration. Pour tout vecteur $U \in \mathbb{R}^{N+1}$ et d'après (2.12), on a :

$$KU\cdot U = \sum_{i,j=1}^{N+1} T\left(a,\phi_i,\phi_j\right)u_i u_j = \sum_{i,j=1}^{N+1} T\left(a,u_i\phi_i,u_j\phi_j\right) = T(a,u_h,u_h) \geq a_1\left\|u_h\right\|^2 > 0$$

donc, K est définie positive. d'où le résultat. □

2.3.2 Convergence de la méthode

Nous allons étudier l'erreur $\|u-u_h\|_V$, où u est la solution de (2.7) et u_h est la solution du problème approché (2.17).

Théorème 2.2. *Si u et u_h sont les solutions respectives de* (2.7) *et* (2.17)*, on a l'estimation suivante :*

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{a_2}{a_1} \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V . \tag{2.19}$$

Démonstration. Puisque $V_h \subset V$, on déduit par soustraction des formulations variationnelles (2.7)et (2.17), que

$$T(a, u-u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h.$$

En choisissant $w_h = v_h - u_h$ et avec (2.11) et (2.12), on obtient :

$$a_1 \|u-u_h\|_V^2 \leq T(a, u-u_h, u-u_h) = T(a, u-u_h, u-v_h) \leq a_2 \|u-u_h\|_V \|u-v_h\|_V$$

pour tout $v_h \in V_h$. L'estimation (2.19) s'en déduit immédiatement. □

Définition 2.1. L'opérateur d'interpolation $\mathbb{P}_1$ est l'application $r_h : V \longrightarrow V_h$ définie par :

$$\forall v \in V,\ r_h v(x) := \sum_{j=1}^{N+1} v(x_j)\,\phi_j(x).$$

où les fonctions ϕ_j sont données par (2.14) et (2.15).

Lemme 2.5. 1. *Pour tout $v \in H^2(0,1)$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que*

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq ch \left\| v'' \right\|_{L^2(0,1)} . \tag{2.20}$$

2. *Pour tout $v \in H^1(0,1)$, on a*

$$\lim_{h\to 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} = 0. \tag{2.21}$$

Démonstration. 1. On montre (2.20) pour $v \in \mathscr{C}^2([0,1])$ et par densité on en déduit (2.21) pour $v \in H^2(0,1)$. Il faut estimer $\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)}$ et $\left\| v' - (r_h v)' \right\|_{L^2(0,1)}$ en fonction de h.

Soit $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Comme $r_h v \in V_h$, on a $r_h v(x) = \alpha x + \beta$. De plus, $r_h v(x_j) = v(x_j)$ et $r_h v(x_{j+1}) = v(x_{j+1})$ donc

$$r_h v(x) = v(x_j) + \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h}(x - x_j).$$

On obtient

$$\begin{aligned} v(x) - r_h v(x) &= v(x) - v(x_j) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h}(x - x_j) \\ &= \int_{x_j}^{x} v'(t)\,dt - \frac{x - x_j}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t)\,dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $y \in \,]x_j, x[$ et $z \in \,]x_j, x_{j+1}[$ tels que

$$v(x) - r_h v(x) = \left(x - x_j\right) v'\left(y\right) - \left(x - x_j\right) v'(z) = \left(x - x_j\right) \int_z^y v''(t)\, dt.$$

Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |v(x) - r_h v(x)|^2 &\leq h^2 \left(\int_z^y v''(t)\, dt \right)^2 \leq h^2 \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} v''(t)\, dt \right)^2 \\ &\leq h^2 \left[\left(\left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} dt \right)^{1/2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|v''(t)\right|^2 dt \right)^{1/2} \right]^2 \\ &\leq h^3 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|v''(t)\right|^2 dt. \end{aligned}$$

On intègre par rapport à x sur $\left[x_j, x_{j+1}\right]$, on obtient :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2 \, dx \leq h^4 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|v''(t)\right|^2 dt.$$

En sommant sur $j = 0, \ldots, N$, on obtient

$$\| v - r_h v \|_{L^2(0,1)} \leq h^2 \left\| v'' \right\|_{L^2(0,1)}.$$

Il reste à obtenir une estimation sur les dérivées. Pour $x \in \left[x_j, x_{j+1}\right]$, on a :

$$\begin{aligned} v'(x) - (r_h v)'(x) &= v'(x) - \frac{v\left(x_{j+1}\right) - v\left(x_j\right)}{h} \\ &= v'(x) - \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(v'(x) - v'(t)\right) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x v''\left(y\right) dy dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|v'(x) - (r_h v)'(x)\right|^2 \leq \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x v''\left(y\right) dy dt \right]^2 &\leq \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v''\left(y\right) dy dt \right]^2 \\ &\leq h \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|v''\left(y\right)\right|^2 dy. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x sur $\left[x_j, x_{j+1}\right]$, on a :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|v'(x) - (r_h v)'(x)\right|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left|v''\left(y\right)\right|^2 dy.$$

On en déduit

$$\left\| v' - (r_h v)' \right\|_{L^2(0,1)} \leq h \left\| v'' \right\|_{L^2(0,1)},$$

d'où

$$\begin{aligned}\| v - r_h v \|^2_{H^1(0,1)} &= \| v - r_h v \|^2_{L^2(0,1)} + \left\| v' - \left(r_h v' \right) \right\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\leq h^4 \left\| v'' \right\|^2_{L^2(0,1)} + h^2 \left\| v'' \right\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\leq 2h^2 \left\| v'' \right\|^2_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

pour $h < 1$, ce qui donne (2.20).

2. On montre (2.21) pour $v \in \mathscr{C}^1([0,1])$. On montre tout d'abord que $\| v - r_h v \|_{L^2([0,1])}$ converge vers 0. Soit $x \in \left[x_j, x_{j+1} \right]$, on a :

$$v(x) - r_h v(x) = \int_{x_j}^{x} v'(t)\, dt - \frac{x - x_j}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t)\, dt,$$

d'où

$$|v(x) - r_h v(x)| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| v'(t) \right| dt + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| v'(t) \right| dt = 2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| v'(t) \right| dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'intégrale par rapport à x sur $\left[x_j, x_{j+1} \right]$, on obtient :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2\, dx \leq 2h \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| v'(t) \right|^2 dt.$$

donc, on a :

$$\| v - r_h v \|_{L^2(0,1)} \leq \sqrt{2} h \left\| v' \right\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Il reste à montrer que $\left\| v' - (r_h v)' \right\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\mathscr{C}^2([0,1])$ est dense dans $\mathscr{C}^1([0,1])$, il existe $\phi \in \mathscr{C}^2([0,1])$ telle que

$$\left\| v' - \phi' \right\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon.$$

Pour $u \in \mathscr{C}^1([0,1])$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| (r_h u)'(x) \right|^2 dx &= \frac{1}{h} \left(u\left(x_{j+1} \right) - u\left(x_j \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(t)\, dt \right)^2 \\ &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| u'(t) \right|^2 dt,\end{aligned}$$

donc $\left\| (r_h u)' \right\| L^2(0,1) \le \left\| u' \right\|_{L^2(0,1)}$. Alors, on en déduit

$$\left\| (r_h v)' - \left(r_h \phi\right)' \right\|_{L^2(0,1)} = \left\| \left(r_h \left(v - \phi\right)\right)' \right\|_{L^2(0,1)} \le \left\| v' - \phi' \right\| \le \epsilon.$$

En appliquant l'inégalité (2.20) à ϕ, on obtient :

$$\left\| \phi' - \left(r_h \phi\right)' \right\|_{L^2(0,1)} \le ch \left\| \phi'' \right\|_{L^2(0,1)} \le \epsilon,$$

pour h suffisamment petit, d'où

$$\begin{aligned} \left\| v' - (r_h v)' \right\|_{L^2(0,1)} &\le \left\| v' - \phi' \right\|_{L^2(0,1)} + \left\| \phi' - \left(r_h \phi\right)' \right\|_{L^2(0,1)} + \left\| \left(r_h \phi\right)' - (r_h v)' \right\|_{L^2(0,1)} \\ &\le c\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

□

Théorème 2.3. *Soient $u \in V$ la solution de* (2.7) *et $u_h \in V_h$ la solution de* (2.17)*. Alors, on a*

$$\lim_{h \to 0} \| u - u_h \|_{H^1(0,1)} = 0. \tag{2.22}$$

Autrement dit, la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ converge. De plus, si $u \in H^2(0,1)$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| u - u_h \|_{H^1(0,1)} \le ch \left\| f \right\|_{L^2(0,1)}. \tag{2.23}$$

On dit que la convergence est linéaire.

2.3.3 Méthode de Cholesky

L'algorithme de Cholesky peut être utilisé pour obtenir la solution d'un système linéaire à matrice symétrique, définie positive et tridiagonale comme suit :

Initiation : Soient a et f deux fonctions données, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$.

Factorisation :

$$d_1 = \sqrt{b_1}$$

Pour tout $i = 2, \ldots, N$

$$\begin{cases} \ell_i = c_{i-1} / d_{i-1}, \\ d_i = \sqrt{b_i - \ell_i^2}. \end{cases}$$

Résolution :

$$Ly = r \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = r_1 / d_1 \text{ et} \\ y_i = \left(r_i - \ell_i y_{i-1}\right) / d_i, \text{ pour tout } i = 2, \ldots, N+1. \end{cases}$$

$$L^T u = y \Longleftrightarrow \begin{cases} u_{N+1} = y_{N+1} / d_{N+1} \text{ et} \\ u_i = \left(y_i - \ell_{i+1} u_{i+1}\right) / d_i, \text{ pour tout } i = N, \ldots, 1. \end{cases}$$

2.3.4 Exemples numériques

Exemple 2.1.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= 4x + 1 \\
f(x) &= 16x - 2 \\
\lambda &= -5 \\
h &= 10^{-3} \\
u(x) &= x - x^2
\end{aligned}
$$

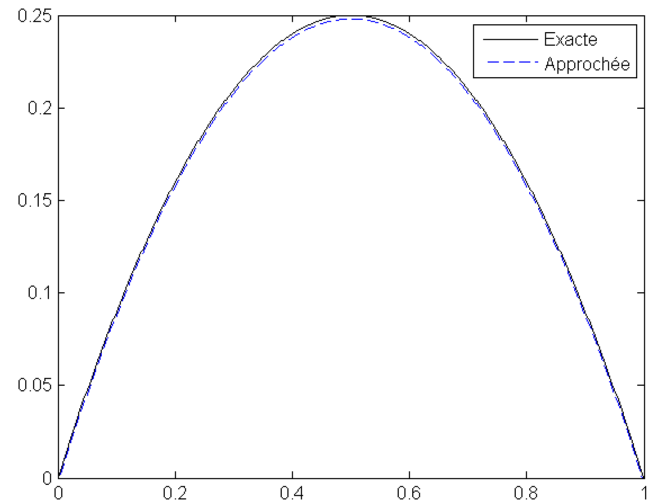

FIGURE 2.1 – Exemple 1 :Problème direct

Exemple 2.2.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= e^{-5\left(x-x^2\right)^2} \\
f(x) &= 10\left(6x^2 - 6x + 1\right) \\
\lambda &= 0 \\
h &= 10^{-2} \\
u(x) &= e^{5\left(x-x^2\right)^2} - 1
\end{aligned}
$$

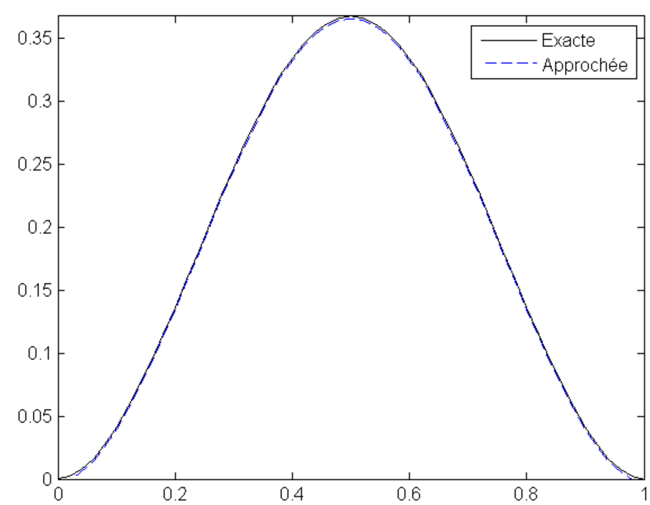

FIGURE 2.2 – Exemple 2 :Problème direct

Exemple 2.3.

$$a(x) = \cos(2\pi x) + 1$$
$$f(x) = 8\pi^2 \sin(2\pi x)(1 + 2\cos(2\pi x))$$
$$\lambda = 8\pi$$
$$h = 10^{-3}$$
$$u(x) = 2\sin(2\pi x)$$

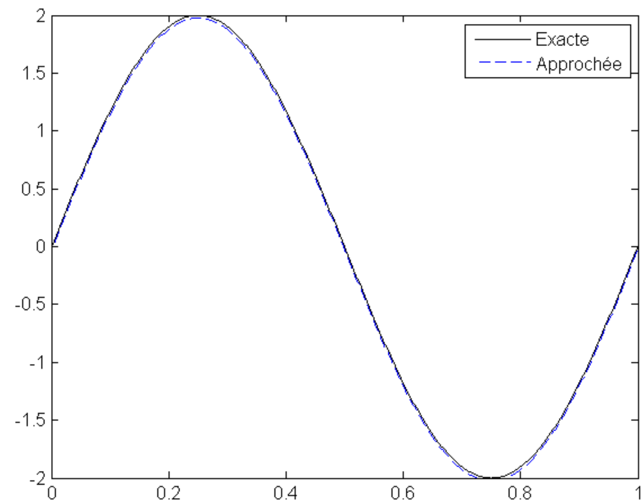

FIGURE 2.3 – Exemple 3 :Problème direct

Exemple 2.4.

$$a(x) = \ln(1 + x)$$
$$f(x) = \left(12x^2 - 9x + 1\right)\ln(1 + x) + \frac{4x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x}{1 + x}$$
$$\lambda = -\frac{1}{2}\ln(2)$$
$$h = 10^{-2}$$
$$u(x) = x^2(x - 1/2)(1 - x)$$

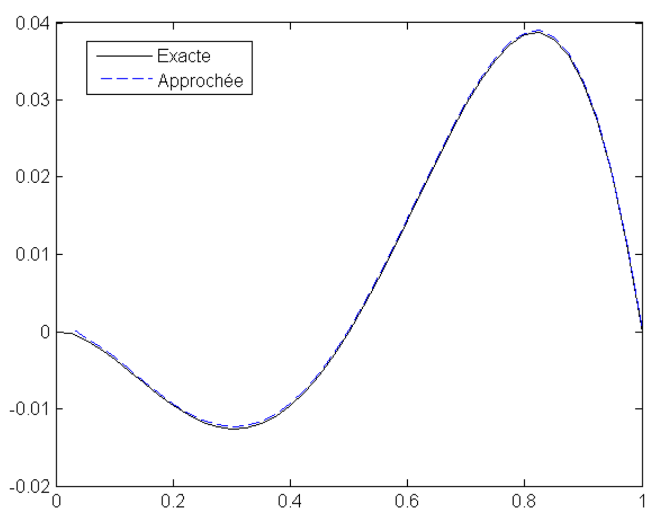

FIGURE 2.4 – Exemple 4 :Problème direct

CHAPITRE 3

PROBLÈME INVERSE NON LINÉAIRE

Dans ce chapitre, nous avons étudie un problème inverse pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème elliptique en dimension un avec des conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Nous démontrons que ce problème inverse n'est pas continu par rapport aux données. Notre problème inverse se ramène à une équation $F(a) = u$ où u est l'unique solution du problème direct et F est une application implicite non linéaire bornée, continue et deux fois différentiable. Donc, nous avons étudié notre problème dans un cadre d'un problème d'optimisation avec contraintes où les contraintes est un ensemble convexe et fermé, et la fonction objective est donnée par la fonction de moindre carrés. Ce problème d'optimisation admet au mois une solution. La régularisation est nécessaire pour l'unicité de la solution. La résolution numérique par éléments finis de ce problème est équivalent à la résolution d'inéquation d'Euler. Enfin, nous avons utilisé la méthode du gradient projeté pour résoudre le problème d'optimisation régularisé.

3.1 Position du problème

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème qui consiste à trouver le paramètre $a \in \mathscr{A}$:

$$-\left(a(x)u'(x)\right)' = f(x), \tag{3.1a}$$
$$u(0) = 0, \tag{3.1b}$$
$$a(1)u'(1) = \lambda. \tag{3.1c}$$

Où $f \in L^2(0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont connues et $u \in V$ une solution mesurée du problème direct (2.1a)-(2.1c).

Lemme 3.1. *Le problème* (3.1a)-(3.1c) *est mal posé c'est à dire la solution a n'est pas continue par rapport la donnée u.*

Démonstration. Pour montrer que le problème (3.1a)-(3.1c) n'est pas continu, nous considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} a(x) = \frac{1}{2}, \\ u(x) = x^2, \\ f(x) = -1, \\ \lambda = 1. \end{cases}$$

Soient (a_n) et (u_n) deux suites définies par :

$$a_n(x) = \frac{1}{2+\cos(n\pi x)} \ \text{ et } \ u_n(x) = x^2 + \frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}.$$

On remarque que

$$-\left(a_n(x)\,u_n'(x)\right)' = -1 \ \text{ et } \ a_n(1)\,u_n'(1) = 1$$

Nous avons :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n(x) - u(x)) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right) = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |a_n(x) - a(x)| = \frac{1}{2+(-1)^n} - \frac{1}{2} \neq 0.$$

donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{x\in[0,1]} |a_n(x) - a(x)| \neq 0.$$

Alors, le problème (3.1a)- (3.1c) n'est pas continu par rapport au données, donc mal posé. □

3.2 Application de la solution

On définit l'application $F : \mathscr{A} \to V$ par :

$$\forall a \in \mathscr{A}, \;\; F(a) = u$$

est l'unique solution du problème variationnel (2.7).

Lemme 3.2. *L'application F est bornée c'est à dire*

$$\|u\|_V = \|F(a)\|_V \leq \frac{M}{\alpha}, \;\; \textit{pour tout} \;\; a \in \mathscr{A}.$$

Démonstration. En remplaçant dans (2.7) $v = u$ et avec (2.10) et (2.12), on obtient :

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq T(a,u,u) \leq |\ell(u)| \leq M \|u\|_V$$

d'où

$$\|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha}.$$

□

3.2.1 Continuité

Pour la continuité de l'application F, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.1. *L'application F est continue et satisfaite les inégalités suivantes :*

$$\|F(a) - F(b)\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F(b)\|_V \|a - b\|_{L^\infty(0,1)}, \tag{3.2}$$

$$\|F(a) - F(b)\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F(a)\|_V \|a - b\|_{L^\infty(0,1)}, \tag{3.3}$$

$$\|F(a) - F(b)\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2} \|a - b\|_{L^\infty(0,1)}. \tag{3.4}$$

Démonstration. Pour l'inégalité (3.2), on pose dans le problème variationnel (2.7), $u = F(a)$ et puis $w = F(b)$, on obtient :

$$T(a,u,v) = \ell(v) = T(b,w,v), \;\; \text{pour tout } v \in V. \tag{3.5}$$

On pose dans (3.5), $v = u - w$, on obtient :

$$T(a,u,u-w) = T(b,w,u-w) = T(b-a,w,u-w) + T(a,w,u-w).$$

donc

$$T\left(a,u-w,u-w\right)=T\left(b-a,w,u-w\right)=-T\left(a-b,w,u-w\right).$$

D'après les conditions (2.11) et (2.12), nous avons :

$$\alpha\left\|u-w\right\|_V^2\leq\left\|a-b\right\|_{L^\infty(0,1)}\left\|w\right\|_V\left\|u-w\right\|_V\Leftrightarrow\left\|F(a)-F(b)\right\|_V\leq\frac{1}{\alpha}\left\|F(b)\right\|_V\left\|a-b\right\|_{L^\infty(0,1)}.$$

Pour l'inégalité (3.3), on pose dans (3.5) $v=w-u$, on trouve :

$$T\left(b,w,w-u\right)=T\left(a,u,w-u\right)=T\left(a-b,u,w-u\right)+T\left(b,u,w-u\right).$$

donc

$$T\left(b,w-u,w-u\right)=T\left(a-b,u,u-w\right).$$

En utilisant (2.11) et (2.12), nous obtenons :

$$\alpha\left\|w-u\right\|_V^2\leq\left\|a-b\right\|_{L^\infty(0,1)}\left\|u\right\|_V\left\|u-w\right\|_V\Leftrightarrow\left\|w-u\right\|_V\leq\frac{1}{\alpha}\left\|F(a)\right\|_V\left\|a-b\right\|_{L^\infty(0,1)}.$$

Pour l'inégalité (3.4), on applique le lemme 3.2 et (3.2), on obtient :

$$\left\|u-v\right\|_V\leq\frac{1}{\alpha}\left\|F(b)\right\|_V\left\|a-b\right\|_{L^\infty(0,1)}\leq\frac{M}{\alpha^2}\left\|a-b\right\|_{L^\infty(0,1)}.$$

□

3.2.2 Différentiabilité

Soit a un élément de l'intérieur de $\mathscr{A}$ et pour tout $\delta a\in\mathscr{A}$ tel que $a+\delta a\in\mathscr{A}$, on pose :

$$\delta w=F\left(a+\delta a\right)-F\left(a\right).$$

De (2.7) avec $u=F(a)$, on a :

$$T\left(a,F\left(a\right),v\right)=\ell\left(v\right)\quad\forall v\in V.\tag{3.6}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}\ell\left(v\right)=T\left(a+\delta a,F\left(a+\delta a\right),v\right)&=T\left(a+\delta a,u+F\left(a+\delta a\right)-F\left(a\right),v\right)\\&=T\left(a+\delta a,u+\delta w,v\right),\ \forall v\in V.\end{aligned}\tag{3.7}$$

De (3.6) et (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned}0&=T\left(a+\delta a,u+\delta w,v\right)-T\left(a,u,v\right)\\&=T\left(a+\delta a,u,v\right)+T\left(a+\delta a,\delta w,v\right)-T\left(a,u,v\right)\\&=T\left(a,u,v\right)+T\left(\delta a,u,v\right)+T\left(a+\delta a,\delta w,v\right)-T\left(a,u,v\right)\\&=T\left(\delta a,u,v\right)+T\left(a+\delta a,\delta w,v\right).\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$T\left(a+\delta a,\delta w,v\right)=-T\left(\delta a,u,v\right).\tag{3.8}$$

Pour la différentiabilité de l'application F, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. *(voir [4, p. 262]). Pour tout $a \in \mathscr{A}$, F est différentiable en a, et $\delta u = DF(a)\delta a$ est l'unique solution de l'équation variationnelle*

$$T(a,\delta u,v) = -T(\delta a,u,v) \quad \forall v \in V. \tag{3.9}$$

où $u = F(a)$. De plus

$$\|DF(a)\delta a\|_V \le \frac{M}{\alpha^2}\|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}. \tag{3.10}$$

Démonstration. De (2.10), (2.11) et (2.12) et avec Théorème 1.5 l'équation variationnelle(3.9) admet une unique solution.

En utilisant (3.8) et (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = T(a+\delta a,\delta w,v) - T(a,\delta u,v) &= T(a,\delta w,v) + T(\delta a,\delta w,v) - T(a,\delta u,v) \\ &= T(a,\delta w - \delta u,v) + T(\delta a,\delta w,v). \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$T(a,\delta w - \delta u,v) = -T(\delta a,\delta w,v) \;\text{ pour tout }\; v \in V. \tag{3.11}$$

On pose dans (3.11) $v = \delta w - \delta u$, nous obtenons :

$$T(a,\delta w - \delta u,\delta w - \delta u) = -T(\delta a,\delta w,\delta w - \delta u).$$

En utilisant (2.11) et (2.12), nous obtenons :

$$\alpha\|\delta w - \delta u\|_V^2 \le \|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}\|\delta w\|_V\|\delta w - \delta u\|_V.$$

Avec (3.4), on obtient :

$$\|\delta w - \delta u\|_V \le \frac{M}{\alpha^3}\|\delta a\|^2_{L^\infty(0,1)}.$$

Nous avons :

$$\frac{\|F(a+\delta a) - F(a) - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}} = \frac{\|\delta w - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}} \le \frac{M}{\alpha^3}\|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}.$$

Donc,

$$\frac{\|F(a+\delta a) - F(a) - \delta u\|_V}{\|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}} \xrightarrow[\|\delta a\|\to 0]{} 0.$$

D'où F est différentiable en a.

Il reste à montrer l'inégalité (3.10). On pose $v = \delta u$ dans (3.9), et en utilisant (2.11) et (2.12), nous obtenons

$$\alpha\|\delta u\|_V^2 \le T(a,\delta u,\delta u) = -T(\delta a,F(a),\delta u) \le \|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}\|F(a)\|_V\|\delta u\|_V$$

En appliquant Lemme 3.2, on obtient :

$$\|DF(a)\delta a\|_V \leq \frac{M}{\alpha^2}\|\delta a\|_{L^\infty(0,1)}.$$

$\square$

Pour étudier la dérivée seconde de F, on procède de la même manière que la dérivée première. Donc, pour a un élément de l'intérieur de $\mathscr{A}$ et soient $\delta a_1, \delta a_2 \in \mathscr{A}$ tels que $a+\delta a_1$ et $a+\delta a_2$ restent dans l'intérieur de $\mathscr{A}$. En utilisant (3.9), on obtient :

$$T\left(a+\delta a_1, DF(a+\delta a_1)\delta a_2, v\right) = -T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1), v\right), \quad \forall v \in V.$$

Donc, pour tout $v \in V$ on a :

$$\begin{aligned} T\left(a+\delta a_1, DF(a+\delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v\right) &= -T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1), v\right) \\ &\quad - T\left(a+\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v\right) \\ &= -T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v\right) \\ &\quad - T\left(\delta a_2, F(a) + DF(a)\delta a_1, v\right) \\ &\quad - T\left(a+\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v\right) \\ &= -T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v\right) \\ &\quad - T\left(\delta a_2, F(a), v\right) - T\left(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, v\right) \\ &\quad - T\left(a, DF(a)\delta a_2, v\right) - T\left(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v\right). \end{aligned}$$

Grâce (3.9), nous avons :

$$T\left(a, DF(a)\delta a_2, v\right) = -T\left(\delta a_2, F(a), v\right). \tag{3.12}$$

On remplace (3.12) dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} T\left(a+\delta a_1, DF(a+\delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v\right) &= -T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v\right) \\ &\quad - T\left(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, v\right) - T\left(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour la dérivée seconde de F, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Pour tout a dans l'intérieur de $\mathscr{A}$, F est deux fois différentiable au point a. Donc,*

$$D^2u\left(\delta a_1, \delta a_2\right) = D^2F(a)\left(\delta a_1, \delta a_2\right)$$

est l'unique solution de l'équation variationnelle

$$T\left(a, D^2u\left(\delta a_1, \delta a_2\right), v\right) = -T(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, v) - T(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, v) \quad \forall v \in V. \tag{3.14}$$

De plus, on a :

$$\left\|D^2F(a)\left(\delta a_1, \delta a_2\right)\right\|_V \leq \frac{M}{\alpha^3}\left(\|\delta a_1\|^2_{L^\infty(0,1)} + \|\delta a_2\|^2_{L^\infty(0,1)}\right).$$

Démonstration. Avec les conditions (2.10)-(2.12) et d'après Théorème 1.5, l'équation variationnelle (3.14) admet une unique solution. Donc, la quantité $D^2F(a)(\delta a_1, \delta a_2)$ est bien définie. De (3.13) et (3.14), nous obtenons pour tout $v \in V$

$$\begin{aligned} T(a+\delta a_1, DF(a+\delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v) - T\left(a, D^2F(a)(\delta a_1, \delta a_2), v\right) \\ = -T(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v). \end{aligned}$$

donc, on a :

$$\begin{aligned} & T\left(a, DF(a+\delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2 - D^2F(a)(\delta a_1, \delta a_2), v\right) \\ & = -T(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, v) \\ & - T(\delta a_1, DF(a+\delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2, v). \end{aligned} \tag{3.15}$$

On pose

$$\delta^2 u = DF(a+\delta a_1)\delta a_2 - DF(a)\delta a_2,$$

et choisissons

$$v = \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2),$$

donc, (3.15) devient

$$\begin{aligned} & T\left(a, \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2), \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\right) = -T\left(\delta a_1, \delta^2 u, \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\right) \\ & - T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, \delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.11), (2.12) et théorème 3.1, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left\|\delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\right\|_V \le \frac{M}{\alpha^4} \|\delta a_2\|_{L^\infty(0,1)} \|\delta a_1\|^2_{L^\infty(0,1)} + \frac{1}{\alpha} \|\delta a_1\|_{L^\infty(0,1)} \left\|\delta^2 u\right\|_V. \tag{3.16}$$

D'autre part, en remplaçant dans (3.13) $v = \delta^2 u$, on obtient :

$$\begin{aligned} T\left(a+\delta a_1, \delta^2 u, \delta^2 u\right) = -T\left(\delta a_2, DF(a)\delta a_1, \delta^2 u\right) - T\left(\delta a_1, DF(a)\delta a_2, \delta^2 u\right) \\ - T\left(\delta a_2, F(a+\delta a_1) - F(a) - DF(a)\delta a_1, \delta^2 u\right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.11) et (2.12), on trouve :

$$\left\|\delta^2 u\right\|_V \le \frac{M}{\alpha^3}\left(2\|\delta a_1\|_{L^\infty(0,1)} \|\delta a_2\|_{L^\infty(0,1)} + \frac{1}{\alpha} \|\delta a_2\|_{L^\infty(0,1)} \|\delta a_1\|^2_{L^\infty(0,1)}\right). \tag{3.17}$$

De (3.16) et (3.17), on obtient :

$$\frac{\left\|\delta^2 u - D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\right\|_V}{\|\delta a_1\|_{L^\infty(0,1)} \|\delta a_2\|_{L^\infty(0,1)}} \le \frac{M}{\alpha^4}\left(3\|\delta a_1\|_{L^\infty(0,1)} + \|\delta a_1\|^2_{L^\infty(0,1)}\right) \xrightarrow[(\|\delta a_1\|, \|\delta a_2\|) \to 0]{} 0$$

Alors, F est deux fois différentiable au point a. On pose dans (3.14) $v = D^2F(a)(\delta a_1, \delta a_2)$ et en utilisant (2.11), (2.12) et (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|D^2 u(\delta a_1, \delta a_2)\right\|_V & \le \frac{1}{\alpha}\left(\|DF(a)\delta a_1\|_V \|\delta a_1\|_{L^\infty(0,1)} + \|DF(a)\delta a_2\|_V \|\delta a_2\|_{L^\infty(0,1)}\right) \\ & \le \frac{M}{\alpha^3}\left(\|\delta a_1\|^2_{L^\infty(0,1)} + \|\delta a_2\|^2_{L^\infty(0,1)}\right). \end{aligned}$$

□

3.3 Méthode de moindres carrés

Étant donné $z \in V$ (mesure de u), nous cherchons $a \in \mathscr{A}$ solution de

$$F(a) = z. \tag{3.18}$$

où l'application F est définie implicitement. Elle est non linéaire. Nous cherchons une autre formulation du problème (3.18), nous proposons une formulation comme un problème de moindres carrés, nous remplaçons (3.18) par le problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\begin{cases} \min J(a) \\ a \in \mathscr{A} \end{cases} \tag{3.19}$$

où $J : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle donnée par :

$$J(a) = \frac{1}{2} \|F(a) - z\|_V^2 = \frac{1}{2} T(a, F(a) - z, F(a) - z). \tag{3.20}$$

Pour l'existence de la solution du problème de minimisation avec contrainte (3.19), nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Le problème de minimisation avec contrainte* (3.19) *admet au moins une solution.*

Démonstration. La fonctionnelle J est deux fois différentiable. Soit a un élément de l'intérieur de $\mathscr{A}$, donc pour tout $\delta a \in \mathscr{A}$, nous avons :

$$DJ(a)\delta a = \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) - z, F(a) - z) + T(a, DF(a)\delta a, F(a) - z).$$

D'après (3.9), on a

$$T(a, DF(a)\delta a, F(a) - z) = -T(\delta a, F(a), F(a) - z),$$

donc

$$\begin{aligned} DJ(a)\delta a &= \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) - z, F(a) - z) - T(\delta a, F(a), F(a) - z), \\ &= -\frac{1}{2} T(\delta a, F(a) + z, F(a) - z). \end{aligned}$$

La dérivée seconde de F est donnée par :

$$\begin{aligned} D^2 J(a)(\delta a, \delta a) &= -\frac{1}{2} T(\delta a, DF(a)\delta a, F(a) - z) - \frac{1}{2} T(\delta a, F(a) + z, DF(a)\delta a) \\ &= -T(\delta a, F(a), DF(a)\delta a) \quad \text{en utilisant (3.9)} \\ &= T(a, DF(a)\delta a, DF(a)\delta a) \quad \text{en utilisant (2.12)} \\ &\geq \alpha \|DF(a)\delta a\|_V^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alors, F est convexe. D'après Proposition 1.4, le problème (3.19) admet au moins une solution. □

Pour étudier l'unicité de la solution du problème (3.19), on va étudier un problème régularisé.

3.4 Régularisation

On considère le problème régularisé suivant :

$$\begin{cases} \min J_\epsilon(a) \\ a \in \mathscr{A} \end{cases} \tag{3.21}$$

où J_ϵ est une fonctionnelle donnée par :

$$J_\epsilon(a) = J(a) + \frac{\epsilon}{2}\|a\|_V^2, \quad \epsilon > 0. \tag{3.22}$$

Proposition 3.3. *Le problème régularisé* (3.21) *admet une solution unique.*

Démonstration. Soit $a \in \mathscr{A}$, il suffit de montrer que F est strictement convexe c'est à dire :

$$D^2 J_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) > 0.$$

On pose $R_\epsilon(a) = \frac{\epsilon}{2}\|a\|_V^2 = \frac{\epsilon}{2} T(a,a,a)$. La dérivée seconde de J_ϵ est donnée par :

$$D^2 J_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) = D^2 J(a)(\delta a, \delta a) + D^2 R_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) \quad \text{pour tout } \delta a \in \mathscr{A}.$$

Nous avons :

$$DR_\epsilon(a)\,\delta a = \frac{\epsilon}{2} T(\delta a, a, a) + \epsilon T(a, \delta a, a) \quad \text{pour tout } \delta a \in \mathscr{A}.$$

De (3.9), on obtient :

$$DR_\epsilon(a)\,\delta a = \frac{-\epsilon}{2} T(\delta a, a, a)$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} D^2 R_\epsilon(a)(\delta a, \delta a) &= \frac{-\epsilon}{2}\left(T(\delta a, \delta a, a) + T(\delta a, a, \delta a)\right), \\ &= -\epsilon T(\delta a, a, \delta a) \\ &= \epsilon T(a, \delta a, \delta a). \end{aligned}$$

Donc

$$D^2 J(a)(\delta a, \delta a) = T(a, DF(a)\delta a, DF(a)\delta a) + \epsilon T(a, \delta a, \delta a),$$

En utilisant (2.12), on obtient

$$D^2 J(a)(\delta a, \delta a) \geq \alpha\left[\|DF(a)\,\delta a\|_V^2 + \epsilon\|\delta a\|_V^2\right] \geq \alpha\epsilon\|\delta a\|_V^2.$$

D'où, F est fortement convexe donc strictement convexe. Alors, le problème régularisé (3.21) admet une solution unique. □

3.5 Discrétisation par élément fini

Soit $\mathscr{A}_h$ une discrétisation de $\mathscr{A}$ telle que

$$\mathscr{A}_h = \mathscr{A} \cap V_h.$$

Le problème discret est défini par :

$$\begin{cases} \min J(a) = \frac{1}{2} T(a, F(a) - z, F(a) - z) \quad \forall F(a), z \in V_h \\ a \in \mathscr{A}_h \end{cases} \tag{3.23}$$

Où $F : \mathscr{A}_h \longrightarrow V_h$ telle que

$$F(a) = u_h \quad \forall a \in \mathscr{A}_h.$$

Soit $(\phi_i)_{0 \le i \le N+1}$ une base telle que $(\phi_i)_{1 \le i \le N+1}$ est données par (2.14) et (2.15) et $\phi_0(x)$ est définie par :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{h-x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour discrétiser le problème (3.23), on pose :

$$U(x) = \sum_{j=1}^{N+1} U_j \phi_j, \quad Z(x) = \sum_{k=1}^{N+1} Z_k \phi_k \ \text{ et } \ a(x) = \sum_{i=0}^{N+1} A_i \phi_i.$$

Alors, on a :

$$J(a) = \frac{1}{2} T(a, U - Z, U - Z). \tag{3.24}$$

Par la substitution $U(x)$ et $Z(x)$ dans (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} J(a) &= \frac{1}{2} T\left(a, \sum_{i=1}^{N+1} U_i \phi_i - \sum_{i=1}^{N+1} Z_i \phi_i, \sum_{j=1}^{N+1} U_j \phi_j - \sum_{j=1}^{N+1} Z_j \phi_j\right), \\ &= \frac{1}{2} T\left(a, \sum_{i=1}^{N+1} (U_i - Z_i) \phi_i, \sum_{j=1}^{N+1} \left(U_j - Z_j\right) \phi_j\right), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} (U_i - Z_i) \left(U_j - Z_j\right) T\left(a, \phi_i, \phi_j\right), \end{aligned}$$

qui est la forme matricielle suivant :

$$J(a) = \frac{1}{2} (U - Z)^T K(a) (U - Z).$$

Où

$$U-Z=(U_1-Z_1,U_2-Z_2,...,U_{N+1}-Z_{N+1})^T,$$

et

$$K(A)_{ij}=T\left(a,\phi_i,\phi_j\right)=\int_0^1 a(x)\,\phi_i'(x)\,\phi_j'(x).$$

La formule discrète de la régularisation $R_\epsilon(a)$ est la suivante :

$$R_\epsilon(a)=\frac{\epsilon}{2}T\left(a,\sum_{i=1}^{N+2}A_i\phi_i,\sum_{j=1}^{N+2}A_j\phi_j\right)=\frac{\epsilon}{2}\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{i=0}^{N+1}A_iA_jT\left(a,\phi_i,\phi_j\right)=\frac{\epsilon}{2}A^T\tilde{K}A.$$

A n'est pas nulle à la frontière, donc $A\in\mathbb{R}^{N+2}$, ce qui implique que $\tilde{K}$ est une matrice carré tridiagonale d'ordre $N+2$.

3.6 Calcul du gradient

Pour calculer le gradient de la fonctionnelle J, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Pour tout $p_h\in V_h$, la dérivée de J est donné par*

$$J'(a)\,p_h=-\frac{1}{2}T\left(p_h,F(a),F(a)\right)+\frac{1}{2}T\left(p_h,z,z\right).$$

Démonstration. On a

$$J(a)=\frac{1}{2}T(a,F(a)-z,F(a)-z),$$

alors

$$\begin{aligned}J'(a)\,p_h&=\frac{1}{2}\left[T\left(p_h,F(a)-z,F(a)-z\right)+T\left(a,F'(a)\,p_h,F(a)-z\right)\right.\\&\quad\left.+T\left(a,F(a)-z,F'(a)\,p_h\right)\right],\\&=\frac{1}{2}T\left(p_h,F(a)-z,F(a)-z\right)+T\left(a,F'(a)\,p_h,F(a)-z\right),\end{aligned}$$

par l'équation (3.9), on a

$$T\left(a,F'(a)\,p_h,F(a)-z\right)=-T\left(p_h,F(a),F(a)-z\right),$$

donc

$$
\begin{aligned}
J'(a)\,p_h &= \frac{1}{2} T\left(p_h, F(a)-z, F(a)-z\right) - T\left(p_h, F(a), F(a)-z\right), \\
&= -\frac{1}{2} T\left(p_h, F(a)+z, F(a)-z\right), \\
&= -\frac{1}{2}\left[T\left(p_h, F(a), F(a)\right) - T\left(p_h, F(a), z\right) + T\left(p_h, z, F(a)\right) - T\left(p_h, z, z\right)\right], \\
&= -\frac{1}{2}\left[T\left(p_h, F(a), F(a)\right) - T\left(p_h, z, z\right)\right].
\end{aligned}
$$

□

De la mêm façon, on peut calculer le gradient de la partie régularisé R_ϵ par le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Pour tout $p_h \in V_h$, la dérivée de R_ϵ est donné par*

$$R'_\epsilon(a)\,p_h = \frac{\epsilon}{2} T\left(a, a, p_h\right).$$

Démonstration. on a

$$R_\epsilon(a) = \frac{\epsilon}{2} T(a, a, a),$$

alors

$$R'_\epsilon(a)\,p_h = \frac{\epsilon}{2}\left[T\left(p_h, a, a\right) + T\left(a, p_h, a\right) + T\left(a, a, p_h\right)\right],$$

par l'équation(3.9), on a

$$T\left(a, p_h, a\right) = -T\left(p_h, a, a\right).$$

Donc

$$
\begin{aligned}
R'_\epsilon(a)\,p_h &= \frac{\epsilon}{2}\left[T\left(p_h, a, a\right) - T\left(p_h, a, a\right) + T\left(a, a, p_h\right)\right], \\
&= \frac{\epsilon}{2} T\left(a, a, p_h\right).
\end{aligned}
$$

□

Puisque $a \in \mathscr{A}_h$, donc on peut écrire

$$a = \sum_{i=0}^{N+1} a_i \phi_i,$$

alors

$$\frac{\partial J_\epsilon}{\partial a_i} = J'(a)\,\phi_i + R'_\epsilon(a)\,\phi_i. \tag{3.25}$$

et donc obtenir le gradient $\nabla J_\epsilon(a)$ pour tout $a \in \mathscr{A}_h$. De l'équation(3.20) on a

$$\frac{\partial J_\epsilon}{\partial a_i} = J'(a)\phi_i + R'_\epsilon(a)\phi_i,$$

En utilisant les deux lemme 3.3 et 3.4, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\epsilon}{\partial a_i} &= -\frac{1}{2}T\left(\phi_i, F(a), F(a)\right) + \frac{1}{2}T\left(\phi_i, z, z\right) + \frac{\epsilon}{2}T\left(a, \phi_i, a\right), \\
&= -\frac{1}{2}T\left(\phi_i, \sum_{k=1}^{N+1} U_k\phi_k, \sum_{l=1}^{N+1} U_l\phi_l\right) + \frac{1}{2}T\left(\phi_i, \sum_{k=1}^{N+1} Z_k\phi_k, \sum_{l=1}^{N+1} Z_l\phi_l\right) \\
&+ \frac{\epsilon}{2}T\left(a, \phi_j, \sum_{i=0}^{N+1} a_i\phi_i\right), \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N+1} U_kU_l T\left(\phi_i, \phi_k, \phi_l\right) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N+1} T\left(\phi_i, \phi_k, \phi_l\right) + \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=0}^{N+1} a_i T\left(a, \phi_j, \phi_i\right), \\
&= -\frac{1}{2}U^T K_i U + \frac{1}{2}Z^T K_i Z + \frac{\epsilon}{2}\left(\tilde{K}A\right)_i.
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
(K_i)_{k,l} &= T\left(\phi_i, \phi_k, \phi_l\right) \text{ pour } k, l = 1, \ldots, N+1, \\
\left(\tilde{K}_i\right)_{k,l} &= T\left(\phi_i, \phi_k, \phi_l\right) \text{ pour } k, l = 0, \ldots, N+1.
\end{aligned}$$

et

$$\nabla J_\epsilon(a) = \left(\frac{\partial J_\epsilon(a)}{\partial a_0}, \ldots, \frac{\partial J_\epsilon(a)}{\partial a_{N+1}}\right)^T$$

3.7 Méthode du gradient projeté

La méthode de gradient projeté consiste à résoudre le problème d'optimisation en dimension finie suivant :

$$\begin{cases} \min J_\epsilon(a) \\ a \in \mathscr{A}_h \end{cases} \tag{3.26}$$

Où J_ϵ est donnée par :

$$J_\epsilon(a) = \frac{1}{2}(U-Z)^T K(a)(U-Z) + \frac{\epsilon}{2}A^T\tilde{K}A.$$

Pour étudier le problème (3.26), on a la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Soit* $\rho > 0$. $a^* \in \mathscr{A}_h$ *est une solution de* (3.26) *si est seulement si*

$$a^* = P_{\mathscr{A}_h}\left(a^* - \rho J'_\epsilon\left(a^*\right)\right).$$

où P *la projection orthogonale sur* $\mathscr{A}_h$.

Démonstration. Du fait que J_ϵ est fortement convexe, l'inéquation d'Euler constitue une condition nécessaire et suffisante d'optimalité. Ainsi pour $a^* \in \mathscr{A}_h$ et $\rho > 0$, on a :

$$\begin{aligned} a^* \text{ est minimum } &\Longleftrightarrow \left\langle J'_\epsilon\left(a^*\right), a - a^*\right\rangle \geq 0 \ \ \forall a \in \mathscr{A}_h \\ &\Longleftrightarrow \left\langle -J'_\epsilon\left(a^*\right), a - a^*\right\rangle \leq 0 \ \ \forall a \in \mathscr{A}_h, \end{aligned}$$

qui est équivalente pour tout $\rho > 0$ à l'inégalité

$$\left\langle -\rho J'_\epsilon\left(a^*\right), a - a^*\right\rangle \leq 0 \ \ \forall a \in \mathscr{A}_h,$$

Ceci donne

$$\left\langle \left[a^* - \rho J'_\epsilon\left(a^*\right)\right] - a^*, a - a^*\right\rangle \leq 0 \ \ \forall a \in \mathscr{A}_h.$$

En utilisant Théorème 1.8 de projection, cette inégalité est équivalente à l'égalité

$$a^* = P_{\mathscr{A}}\left(a^* - \rho J'_\epsilon\left(a^*\right)\right).$$

□

La résolution du problème de minimisation (3.26) se ramène à un problème de point fixe de l'application $\varphi : \mathscr{A}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(a) = P_{\mathscr{A}_h}\left(a - \rho J'_\epsilon(a)\right).$$

Pour calculer numériquement ce point fixe, en utilisant la méthode du gradient projeté avec pas fixe, qui consiste à construire une suite $a^{(k)} \in \mathscr{A}_h$ donnée par :

$$\begin{cases} a^{(0)} \text{ donné } \in \mathscr{A}_h, \\ a^{(k+1)} = P_{\mathscr{A}_h}\left(a^{(k)} - \rho J'_\epsilon\left(a^{(k)}\right)\right) \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Pour démontrer la convergence de la suite (3.27), nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Le fonctionnelle* $J_\epsilon : \mathscr{A}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ *est fortement convexe, tel que le* J'_ϵ *soit lipschitzienne :*

$$\left\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b), a - b\right\rangle \geq l\,\|a - b\|^2, \tag{3.28}$$

et

$$\left\| J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\right\| \leq L\,\|a - b\|. \tag{3.29}$$

Démonstration. Pour montrer que J'_ϵ est fortement convexe en utilisant le théorème des accroissements finis :

$$J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b) = (a-b)\,J''_\epsilon(c)\,,\ c \in\ ]\,a,b\,[$$

Donc, on a :

$$\left\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle = \left\langle (a-b)\,J''_\epsilon(c)\,, a-b\right\rangle \geq \alpha\epsilon\,\|a-b\|^2\,. \tag{3.30}$$

D'où (3.28). Il reste a montrer que J'_ϵ est lipschitzienne, donc il suffit de montrer que J' et R'_ϵ sont Lipschitzienne.

J' **est lipschitzienne :** De l'équation(3.30) on a

$$\left\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle = \left\langle (a-b)\,J''_\epsilon(c)\,, a-b\right\rangle,$$

et on a

$$J''(c)\,(\delta a, \delta a) = T\,(c, DF(c)\,\delta a, DF(c)\,\delta a)\,,$$

on pose $\delta a = a - b$, donc

$$\begin{aligned}\left\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle &= J''(c)\,(a-b, a-b)\,,\\ &= T\,(c, DF(c)\,(a-b)\,, DF(c)\,(a-b))\,,\end{aligned}$$

en utilisant (2.11) et (3.10) , on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\left\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle\right| &\leq \|c\|_{L^\infty(0,1)}\,\|DF(c)\,(a-b)\|^2\,,\\ &\leq \frac{M^2\,\|c\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha^4}\,\|a-b\|^2\,,\end{aligned}$$

on devise par $\|a-b\|$, on obtient

$$\frac{\left|\left\langle J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle\right|}{\|a-b\|} \leq L\,\|a-b\|\,,\ \ L = \frac{M^2\,\|c\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha^4} \tag{3.31}$$

Donc, J' est lipschitzienne.

R'_ϵ **est lipschitzienne :** En appliquant le théorème des accroissements finis sur R'_ϵ dans $[a,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned} & R'_\epsilon(a) = R'_\epsilon(b) + (a-b)\,R''_\epsilon(a+\theta(b-a))\,,\\ \Leftrightarrow\ & \left\langle R'_\epsilon(a) - R'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle = \left\langle (a-b)\,R''_\epsilon(a)\,, a-b\right\rangle,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} & R''_\epsilon(a)\,(\delta a, \delta a) = \epsilon T\,(a, \delta a, \delta a)\,,\\ \Leftrightarrow\ & \left\langle R'_\epsilon(a) - R'_\epsilon(b)\,, a-b\right\rangle = \epsilon T\,(a, \delta a, \delta a)\,,\end{aligned}$$

on pose $\delta a = a - b$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle R'_\epsilon(a) - R'_\epsilon(b), a-b\right\rangle &= \epsilon T(a, a-b, a-b),\\ &\leq a_2\epsilon \|a-b\|^2,\\ \Leftrightarrow \frac{\left|\left\langle R'_\epsilon(a) - R'_\epsilon(b), a-b\right\rangle\right|}{\|a-b\|} &\leq a_2\epsilon\|a-b\|,\end{aligned}$$

donc

$$\left\|R'_\epsilon(a) - R'_b\right\| \leq a_2\epsilon\|a-b\|. \tag{3.32}$$

on ajoute l'équation(3.28) à l'équation(3.27), on obtient

$$\left\|J'_\epsilon(a) - J'_\epsilon(b)\right\| \leq (a_2k + a_2\epsilon)\|a-b\|.$$

On pose $a_2k + a_2\epsilon = L$. Donc J'_ϵ est lipschitzienne.

□

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses* (3.28)*et*(3.29) *et si* $\rho \in \left]0, \frac{2l}{L^2}\right[$. *Alors la suite* $a^{(k)}$ *est convergente vers* a^* *c'est à dire :*

$$\left\|a^{k+1} - a^*\right\| \leq \mu\left\|a^k - a^*\right\| \text{ pour } \mu < 1.$$

Démonstration. Pour prouver la convergence de la méthode de projection en utilisant les propriétés de l'opérateur de projection le lemme 1.4, on pose

$$\begin{aligned}a &= a^{k+1} - \rho J'_\epsilon\left(a^{k+1}\right),\\ b &= a^* - \rho J'_\epsilon(a^*),\end{aligned}$$

on a

$$\left\|P_{\mathscr{A}_h}(a) - P_{\mathscr{A}_h}(b)\right\| \leq \|a-b\| \quad \forall a, b \in \mathscr{A}_h.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|a^{k+1} - a^*\right\|^2 &= \left\|P_{\mathscr{A}_h}\left(a^* - \rho J'_\epsilon(a)\right) - P_{\mathscr{A}_h}\left(a^* - \rho J'_\epsilon(a^*)\right)\right\|^2,\\ &\leq \left\|a^k - \rho J'_\epsilon\left(a^k\right) - \left(a^* - \rho J'_\epsilon(a^*)\right)\right\|^2,\\ &= \left\|a^k - a^*\right\|^2 - 2\rho\left\langle J'_\epsilon\left(a^k\right) - J'_\epsilon(a^*), a^k - a^*\right\rangle + \rho^2\left\|J'_\epsilon\left(a^k\right) - J'_\epsilon(a^*)\right\|^2,\end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses sur J_ϵ on déduit

$$\left\| a^{k+1} - a^* \right\|^2 \leq \left(1 - 2\rho l + \rho^2 L^2\right) \left\| a^k - a^* \right\|^2.$$

On a par hypothèse

$$\begin{aligned} & \mu = 1 - 2\rho l + \rho^2 L^2 < 1, \\ & \Rightarrow -2\rho l + \rho^2 L^2 < 0, \\ & \Rightarrow \rho\left(-2l + \rho L^2\right) < 0, \\ & \Rightarrow \left(-2l + \rho L^2\right) < 0, \\ & \Rightarrow \rho < \frac{2l}{L^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| a^{k+1} - a^* \right\|^2 \leq \mu \left\| a^k - a^* \right\| \quad \text{pour } \mu < 1.$$

D'où la convergence de la méthode(3.27). □

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudie un problème inverse non linéaire pour l'identification numérique d'un paramètre dans un problème elliptique en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet-Neumann suivant : Trouver $u :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -\left(a(x)u'(x)\right)' &= f(x), \\ u(0) &= 0, \\ a(1)u'(1) &= \lambda. \end{aligned}$$

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ Problème direct : nous avons utilisé la méthode des éléments finis et en termine par la méthode de Cholesky pour quelques exemples numériques avec programme sous Matlab.
- ✓ Problème inverse non linéaire : nous avons utilisé la méthode de moindres carrés et la méthode du gradient projeté.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Identification numérique le paramètre a pour un problème parabolique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) &= f(x,t),\ 0 < x \leq 1,\ t > 0. \\ u(0,t) &= 0,\quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0,\quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x),\ 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

- ☞ Identification numérique le paramètre a pour un problème hyperbolique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) &= f(x,t),\ 0 < x \leq 1,\ t > 0. \\ u(0,t) &= 0,\quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0,\quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x),\ 0 < x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= u_0(x),\ 0 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation.* Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[2] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media.* American Elsevier, New York, 1972.

[3] L. F. Demkowicz and J. T. Oden. *Applied Functional Analysis.* CRC Press,, 1996.

[4] M.S. Gockenbach and A.A. Khan. An abstract framework for elliptic inverse problems. part 1 : an output least squares approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 12 :259–276, 2007.

[5] M. Hanke H. Engl and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems Mathematics and Its Applications.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[6] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale University Press, 1923.

[7] A.N. Iusem J. Y. Cruz, J.Y. Bello. *Full convergence of an approximate projection method for nonsmooth variational inequalities.* Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, 2010.

[8] Z. Nashed K. M. Furati and A. H. Siddiqi. *Mathematical Models and Methods for Real World Systemss.* Taylor & Francis Group, LLC, 2006.

[9] C. T. Kelly. *Iterative Methods for Optimization.* SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 1999.

[10] M. Mogé. Méthodes numériques pour un problème inverse. Master's thesis, EPFL, Suisse, 2011.

[11] N.Saouli. Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2013.

[12] J. Oleksyn. Extragradient methods for elliptic inverse problems and image denoising. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, England, 2011.

[13] B. Brian R. C. Aster and H.T. Clifford. *Parameter Estimation and Inverse Problems.* Elsevier Academic Press, 2005.

[14] E. Ramirez. *Finite element methods for parameter identification problem of linear and nonlinear steady-state diffusion equations.* PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.

[15] Y. Z. Said. Méthodes de factorisation pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2014.

[16] S. Sariaydin. Numerical identification of a variable parameter in 2d elliptic boundary value problem by extragradient methods. Master's thesis, Rochester Institute of Technology, Rochester, England, 2013.

[17] A. Timmaoui. Méthodes itératives pour les problèmes inverses linéaires. Master's thesis, Université de Laghouat, Algérie, 2013.

[18] J. Zou. Numerical methods for elliptic inverse problems. *Intern. J. Computer Math*, 70 :211–232, 1998.