الـــــــجمهـــــــــــــــــــــــــــــورية الجـــزائرية

الديـــــــــــــــــــــــــــــــــــــقراطـــــــــــــــــــــــية

الشـــــــــــــــــــــــــــــعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة عمار ثليجي – الأغواط –

كليـــــة التكنولوجيا

قسم العلوم التقنية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Amar Telidji – Laghouat

Faculté de Technologie

Département des sciences techniques

دروس

المقياس: رياضيات1

السداسي الأول

مستوى السنة الأولى

جذع مشترك علوم و تقنيات

إعداد الأستاذ: مصباح قـدور

جامعة عمار ثليجي بالأغواط K.mosbah@lagh-univ.dz

السنة الجامعية: 2024-2023

الفهرس العام

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم و الصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين وبعد:

تتضمن هذه المطبوعة دروسا لمقياس مقرر رياضيات1 وفق مفردات عرض التكوين وهي مخصصة لطلاب السنة الاولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا وهي عبارة على دروس وعدة امثلة وتمارين محلولة بطرق وبراهين جديدة ومختلفة لحل العديد من المسائل ، كما يجد الطالب الجامعي تلخيصا لاهم التعاريف والنظريات الواجب معرفتها حتى يتسنى له فهم واستيعاب هذه المادة. و تركت للطالب ذي المستوى الجيد حل بعض التمارين ، و لتتاح له الفرصة لمقارنة نتائجه مع الحلول المعروضة و بعدة طرق في بعض الاحيان.

إن هذه المطبوعة و كأي نتاج علمي لا تخلو من النواقص و الهفوات ، وكل أملنا أن تسهم في تطوير العمل البيداغوجي والبحث العلمي و إثراء معلومات طلبتنا الاعزاء.

و الله الموفق.

الدكتور: مصـبــاح قــدور.

الفصل الأول

- مبادئ في المنطق الرياضي و نماذج من طرق البرهان الرياضي.

1- المنطق الرياضي:

1.1 - القضية :

نسمي قضية ما كل جملة يمكن الحكم على صحتها أو خطئها. ونرمز لها بأحد الرموز التالية:
P , Q , R , T , ... و نفيها بالرموز التالية : $\overline{P}\ ,\ \overline{Q}\ ,\ \overline{R}\ ,\ \overline{T}\ ,\ ....$.

2.1 - أمثلة :

- $0+4=1$: تشكل قضية لكنها خاطئة .
- $1\times 2=2$: تشكل قضية لكنها صحيحة.
- $x+3=0$: ليست قضية لأنه لا يمكن الحكم على صحتها أو خطئها. و ذلك المتغير x لا ينتمي إلى مجموعة محدودة .

3.1 - الروابط المنطقية:

1) - الوصل : لتكن P , Q قضيتين.
نسمي وصل القضيتين P , Q القضية : $P\wedge Q$ $(P\, et\, Q)$ و التي لا تكون صحيحة إلا إذا كانت القضيتين P , Q صحيحتين معا وخاطئة في الحالات الأخرى. وجدول الحقيقة التالي يبين ذلك :

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

2) - الفصل : لتكن P , Q قضيتين.
نسمي فصل القضيتين P , Q القضية : $P\vee Q$ $(P\ ou\ Q)$ و التي تكون خاطئة إذا كانت القضيتين P , Q خاطئتين معا و صحيحة في الحالات الأخرى. وجدول الحقيقة التالي يبين ذلك :

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

3) - الاستلزام : لتكن P , Q قضيتين.
نسمي القضية : $\left(\overline{P}\vee Q\right)$ القضية : P تستلزم Q $(\ P\ \Rightarrow Q\ )$ و التي تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة و صحيحة في الحالات الأخرى. وجدول الحقيقة التالي يبين ذلك :

P	Q	$P\Rightarrow Q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

1) - عكس الاستلزام : لتكن P , Q قضيتين.
نسمي القضية : $(\ Q\ \Rightarrow\ P\ )$ عكس الاستلزام للقضية : $(\ P\ \Rightarrow\ Q\ )$.

2) - نقيض الاستلزام : لتكن P , Q قضيتين.
نسمي القضية : $\left(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q} \right)$ النقيض الاستلزام : $(P \Rightarrow Q)$.

3) - العكس النقيض للاستلزام : لتكن P , Q قضيتين.
نسمي القضية : $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P} \right)$ العكس النقيض للاستلزام : $(P \Rightarrow Q)$.

4)- التكافؤ المنطقي : لتكن P , Q قضيتين.
نقول عن القضيتين P و Q أنهما متكافئتان إذا كانت القضيتين P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا و نرمز لها بالرمز : $(P \Leftrightarrow Q)$ أي القضية : $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.
وجدول الحقيقة التالي يبين ذلك :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

4.1 - نتائج : 1)- $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P} \right) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$.
2)- $\left(\overline{P} \vee \overline{Q} \right) \Leftrightarrow \left(\overline{P \wedge Q} \right)$.
3)- $\left(\overline{P} \wedge \overline{Q} \right) \Leftrightarrow \left(\overline{P \vee Q} \right)$.

5.1 - أمثلة:

1 . إذا كانت القضية p هي "المثلث Δ متساوي الساقين" و كانت القضية q هي "المثلث Δ قائم الزاوية"
فإن القضية $(p \wedge q)$ هي "المثلث Δ متساوي الساقين و قائم "'،

2 . " $2 > 1$ و $1 = 1$ " قضية صحيحة، 3. " $2 < 1$ و $1 = 1$ " قضية خاطئة .

3 . إذا كانت القضية p هي "المثلث Δ متساوي الساقين" و كانت القضية q هي "المثلث Δ قائم الزاوية"
فإن القضية $(p \vee q)$ هي "المثلث Δ متساوي الساقين أو قائم الزاوية" .

4 . " $2 < 1$ أو $1 = 1$ " قضية صحيحة.

5 . إذا كانت القضية p هي "المثلث Δ متساوي الساقين" و كانت القضية q هي "المثلث Δ قائم الزاوية"
فإن القضية $(p \Longrightarrow q)$ هي "المثلث Δ ليس متساوي الساقين أو قائم الزاوية".

6 . " $2 < 1$ أو $1 = 1$ " قضية صحيحة.

7 . " $2 > 1$ أو $1 = 1$ " قضية صحيحة.

8 . " $2 > 1$ أو $1 = 3$ " قضية خاطئة.

9 . مثال: (يوضح الاستلزام)

إفرض أن رئيس قسم العلوم التقنية يقول للطالب محمد إذا تحصلت على المعدل في مادة الرياضيات فسوف أعطيك هدية (لتكن سيارة)، هناك أربعة إحتمالات:

أ. يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و يحصل على الهدية،

ب. يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و لا يحصل على الهدية،

ج. لا يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و يحصل رغم ذلك على الهدية،

د. لا يحصل محمد على المعدل في مادة الرياضيات و لا يحصل على الهدية.

يكون رئيس القسم قد كذب على الطالب إلا في حالة واحدة فقط و هي الحالة الثانية.

نرمز ب: p للقضية " يحصل الطالب على المعدل في مادة الرياضيات "

و للقضيةq " يمنح رئيس قسم علوم المادة الهدية للطالب محمد ". ومنه نحصل على الجدول التالي:

P	q	$p\Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

10 . **أمثلة:**

1) "$2>1 \Leftrightarrow 1=1$" قضية صحيحة،

2) "$1=1 \Leftrightarrow 2=1$" قضية خاطئة،

3) "$1<0 \Leftrightarrow 2>1$" قضية خاطئة.

6.1 خواص: لتكن p,q,r ثلاث قضايا لدينا:

1. $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$ ،

2. $p \vee p \Leftrightarrow p$ و $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (خاصية الجمود)،

3. $p \wedge \bar{p}$ قضية خاطئة سواء كانت p صحيحة أو خاطئة (مبدأ عدم التناقض)،

4. $p \vee \bar{p}$ قضية صحيحة سواء كانت p صحيحة أو خاطئة،

5. $(p \Rightarrow p)$ و $(p \Leftrightarrow p)$ قضيتان صحيحتان سواء كانت p صحيحة أو خاطئة،

6. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ و $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (خاصية التبديل)،

7. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ (القانون الأول لدي مورغان)،

8. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ (القانون الثاني لدي مورغان)،

9. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$،

10. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$ ، $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ ،

11. $\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{cases}$ (خاصية التجميع)،

12. $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$ (خاصية التوزيع)،

13. القضيتان التاليتان صحيحتان:

$\begin{cases} (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \\ (p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r) \end{cases}$ (خاصية التعدي).

7.1 - المكممات:

1. تعريف الجملة مفتوحة:

نسمي جملة مفتوحة $P(x)$ معرفة على مجموعة X و التي تصبح قضية إلا إذا كان المتغير x يأخذ عناصر من المجموعة X.

2. تعريف : لتكن $P(x)$ جملة معرفة على مجموعة X .

1) نسمي القضية $P(x)$ صحيحة من اجل كل x من X. و نكتب:

$\forall x \in X \quad : \quad P(x)$ صحيحة .

2) إذا وجد على الأقل عنصر x من X بحيث تكون $P(x)$ صحيحة . و نكتب:

$\exists x \in X \quad : \quad P(x)$ صحيحة .

3 . ملاحظات:

1 - الجمل من الشكل : $\forall x \in X \quad : \quad P(x)$ أو $\exists x \in X \quad : \quad P(x)$ قضايا . يمكن التأكد من صحتها أو خطئها .

2 - الترتيب $\exists$, $\forall$ يختلف في الحالة العامة عن $\forall$, $\exists$.

3 - نفي القضية : $\forall x \in X \quad : \quad P(x)$ هي القضية : $\exists x \in X \quad : \quad \overline{P(x)}$. بمعنى :

$$\left(\overline{\exists x \in X \quad : \quad \overline{P(x)}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall x \in X \quad : \quad P(x)\right) .$$

8.1 - أنماط البرهان:

1- الاستنتاج :

إذا كانت P قضية صحيحة و كان $(P \Rightarrow Q)$ قضية صحيحة فان : Q قضية صحيحة.

2- البرهان بالخلف :

للبرهان عن صحة القضية : P نفرض أن القضية $\overline{P}$ صحيحة و نبين أن هذا الفرض يؤدي إلى تناقض . إذن : $\overline{P}$ قضية خاطئة و منه : P قضية صحيحة .

3- البرهان باستعمال العكس النقيض للاستلزام :

من اجل البرهان على صحة القضية : $(P \Rightarrow Q)$ يكفي البرهان على صحة القضية : $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

4- البرهان باستعمال مثال مضاد :

لكي نثبت عدم صحة القضية : $\forall x \in X \quad : \quad P(x)$. يكفي أن : $\overline{P(x_0)} \quad : \quad \exists x_0 \in X$.

5- البرهان بفصل الحالات: يعتمد هذا النوع من الإستدلال على القاعدة

$(p \Longrightarrow q$ و $\overline{p} \Longrightarrow)$ صحيحة فإن: q صحيحة.

6- البرهان بالتراجع :

للبرهان عن صحة القضية : $\forall n \geq n_0 \quad : \quad P(n)$. نتبع الخطوات التالية :

ا - نبرهن على صحة الخاصية : $P(n_0)$ مهما يكن n_0 .

ب - نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل n .

جـ - نبرهن صحة الخاصية $P(n)$ من اجل $n+1$. أي : $P(n+1)$ صحيحة .

6 - أمثلة:

1. $"\forall x \in \mathbb{R}: x \geq 0"$ القضية خاطئة،
2. $"\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0"$ القضية صحيحة.
3. $"\exists x \in \mathbb{R}: x \geq 0"$ القضية صحيحة،
4. $"\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0"$ القضية خاطئة.

5 . **مثال1:** بين أن $\sqrt{2}$ عدد أصم (عدد غير ناطق)

الحل : نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد ناطق إذن يمكننا كتابته على الشكل $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما $(b \neq 0)$ ومنه : $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2b^2 = a^2 \Longrightarrow a^2 = 2k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$.

إذن نستنتج أن a^2 و a عددان زوجيان، إذن بما أن a عدد زوجي فإنه قابل القسمة على 2 ومنه نستخلص أن b^2 و b عددان زوجيان كذلك و هذا يؤدي الى أن a و b قابلين للقسمة على 2 و هذا تناقض كون a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و بالتالي $\sqrt{2}$ عدد أصم .

6. **مثال2:** بين بإستعمال البرهان بالخلف أن:

$\forall x,y \in \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow xy + 2x + 2y + 2 \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

الحل: نفرض أن: $xy + 2x + 2y + 2$ لا ينتمي الى $\mathbb{R} - \{-2\}$ و منه فإن:

$$xy + 2x + 2y + 2 = -2 \Longrightarrow (x+2)(y+2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ y = -2 \end{cases}$$

و هذا تناقض كون $y \neq -2$ و $x \neq -2$.

7. مثال: ليكن n عدد طبيعي بين الإستلزام التالي: n عدد زوجي $\Rightarrow n^2$ عدد زوجي.
الحل: نستعمل البرهان بالعكس النقيض أي نبرهن الإستلزام: n^2 عدد فردي $\Rightarrow n$ عدد فردي.
ليكن n عدد طبيعي، نفرض أن n عدد فردي إذن $n = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي
و منه $n^2 = 2h + 1$ حيث $h = 2k^2 + 2k$ و منه n^2 عدد فردي.
و بالتالي مهما يكن n عدد طبيعي فإن : (n عدد زوجي $\Rightarrow n^2$ عدد زوجي) .

8. مثال: أثبت أن القضية " $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 10$ " خاطئة.

الحل:هنا يكفي أخذ قيمة للعدد n من المجموعة $\mathbb{N}$ بحيث تكون المتراجحة $n \geq 10$ غير صحيحة.

- نأخذ مثلا $n = 8$ فيكون لدينا: $8 \geq 10$ متراجحة غير صحيحة، و منه القضية "

$\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 10$ " غير صحيحة.

9 . مثال: أثبت أن: " جداء عددين طبيعيين متتاليين هو عدد طبيعي زوجي " . اي:

$n(n + 1)$ عدد طبيعي زوجي مهما يكن n من المجموعة $\mathbb{N}$.

الحل : هنا نميز حالتين: ونبين في كلتا الحالتين صحة القضية اي : يكون $n(n + 1)$ عدد زوجي.

1) لما يكون $n = 2k + 1$ عدد فردي ومنه: $n(n + 1) = 2(k + 1)(k + 2)$ عدد زوجي.

2) لما يكون $n = 2k$ عدد زوجي ومنه : $n(n + 1) = 2k(2k + 1)$ عدد زوجي.

10 . مثال: أثبت صحة القضية $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*: \underbrace{1+2+3+...+n}_{(1)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{n.(n+1)}{2}}_{(2)}$.

خ1) - التأكد من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n_0 = 1$:

$n = 1 \Rightarrow \underbrace{(1)}_{(1)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{(1).((1)+1)}{2} = \frac{(1).(2)}{2} = (1)}_{(2)}$. و منه القضية $P(1)$ صحيحة .

خ2) - نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل n . أي ان:

$P(n): \forall n \in \mathbb{N}^*: \underbrace{1+2+3+...+n}_{(1)} \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{n.(n+1)}{2}}_{(2)}$ صحيحة .

خ3) - نبرهن صحة الخاصية $P(n)$ من اجل $(n+1)$. أي : $P(n+1)$ صحيحة .

$P(n+1): \forall n \in \mathbb{N}^*: \underbrace{1+2+3+...+n}_{(1)} + (n+1) \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}}_{(2)}$.

لدينا ان:

$$P(n+1):\forall n\in\mathbb{N}^*:\ \underbrace{1+2+3+...+n}_{(1)}+(n+1)=\underbrace{\frac{n.(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n.(n+1)+2(n+1)}{2}}_{(2)}$$

.

$$=\frac{(n+1).(n+2)}{2}=\frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة. و منه خطوات البرهان بالتراجع محققة و بالتالي:

الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$.

المجموعات، العلاقات و التطبيقات

- ❖المجموعات
- ❖العلاقات
- ❖التطبيقات

- المجموعات -

2. نظرية المجموعات:

1.2 مفاهيم عامة:

تعريف المجموعة:
نسمي مجموعة كل جمع لأشياء تربطهم خاصية مشتركة و تدعى هذه الأشياء بعناصر المجموعة.

تعيين مجموعة: تكون مجموعة معينة تماما إذا تحقق أحد الشروط التالية:
1 . علمت جميع عناصرها.

2. علمت الخاصية التي تميز هذه المجموعة.

3. علمت بعض العناصر و العلاقة التي تربطها ببقية العناصر.

المجموعة المنتهية: هي المجموعة المكونة من عدد منته من العناصر.

المجموعة الغير منتهية: هي المجموعة المتكونة من عدد غير منته من العناصر.

المجموعة وحيدة العنصر: هي المجموعة المكونة من عنصر واحد.

المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تشمل على إي عنصر.

الانتماء: إذا كان العنصر x من المجموعة، نقول أن x ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \in E$ و إذا العنصر x ليس من المجموعة E ، نقول أن x لا ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \notin E$.

مثال: $1 \in \mathbb{N}$ و $-1 \notin \mathbb{N}$.

2.2 - تعاريف:

1/ <u>مجموعة الأعداد الطبيعية</u> $\mathbb{N}$ **:** وهي التي تستخدم في العد ، و يمكن الحصول على أي عدد منها بجمع العدد "1" الى نفسه عددا من المرات ، وهي اول نظام عددي عرفه الانسان ، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$، أي ان : $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,........\} \cup \{0\}$ و هي مجموعة غير منتهية و مغلقة تحت عمليات الجمع و الضرب.

2/ <u>مجموعة الأعداد الصحيحة</u> $\mathbb{Z}$ **:** وهي الاعداد الطبيعية مضافا اليها سالب الاعداد الطبيعية، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$، أي ان:
$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}) \cup (-\mathbb{N}) = \{.....,-4,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,+4,.....\}$ وهذه المجموعة غير منتهية ومغلقة تحت عمليات الجمع و الضرب و الطرح.

3/ <u>مجموعة الأعداد الناطقة</u> $\mathbb{Q}$ **:**

وهي الاعداد التي تكتب على الشكل : $\left(\dfrac{p}{q}\right)$ حيث: p,q يمثلان عددين صحيحين ، و $q \neq 0$ ،

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$، أي ان : $\mathbb{Q} = \left\{\left(\dfrac{p}{q}\right): p \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q \in \mathbb{N}^*, (p \wedge q) = 1\right\}$. و لدينا :

ا) - نلاحظ ان : أي عدد صحيح a $(a \in \mathbb{Z})$ يكون: عدد ناطق ، أي: $\left(\dfrac{a}{1} = a \in \mathbb{Q}\right)$.

ب) - <u>**حالة خاصة**</u> **:** <u>**مجموعة الأعداد العشرية**</u> D **:**

- <u>**العدد العشري**</u> : هو <u>عدد ناطق</u> يكتب على الشكل : $\left(\dfrac{p}{10^n}\right)$ حيث : $n \in \mathbb{N}$. اي ان:

- (يكون العدد $\alpha=\left(\frac{p}{q}\right)$ عددا عشريا) $\Leftrightarrow$ (تحليل مقامه q الى جداء عاملين لا يشمل الا العاملين : 2 او 5).

جـ) - **العدد الناطق** : يكون اما عددا عشريا منته مثل: $0,243=\frac{243}{10^3}$ ، و اما عددا عشريا غير منته و متكرر المقاطع مثل: $\frac{2}{7}=0,\underbrace{285714}\underbrace{285714}....,$ ، $\frac{3}{11}=0,27\,27\,27\,27.....$ ، $\frac{1}{3}=0,333333.....$.

خواص مجموعة الأعداد الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

ا - **قضية :** (نقبل بدون برهان)

- بين اي عددين حقيقيين من $\mathbb{R}$ يوجد على الاقل عدد ناطق من $\mathbb{Q}$.

ب - مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ كثيفة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.اي ان:
كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ يمكن تقريبه بقدر ما نريد بعدد من $\mathbb{Q}$.

4/ مجموعة الأعداد الصماء (الأعداد الغير الناطقة) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ او $\mathbb{Q}^C$:

- **العدد الاصم :** هو العدد الذي لا يمكن كتابته على على الشكل : $\left(\frac{p}{q}\right)$ حيث: p,q يمثلان عددين صحيحين ، و $q\neq 0$ ، أي ان: الاعداد الغير الناطقة هي الاعداد الحقيقية التي لا تكون اعدادا ناطقة ، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$، او $\mathbb{Q}^C$ ، أي ان:

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^C=\left\{r : r\neq\left(\frac{p}{q}\right) : (p\in\mathbb{Z})\ \wedge\ (q\in\mathbb{Z})\right\}.$$

- و الاعداد الصماء مثلا هي: $e=2,718....$ ، $\sqrt{2}=1,41421356....$ ، $\sqrt{3}=1,7320581....$ ، $\sqrt{5}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، e^2 ، e^3 ، e^p ، $\pi=3,14159265....$ ، $\left(\frac{3}{\pi}\right)$ ، $\left(1\pm\sqrt{5}\right)$ ، $\ln(2)$ ، $\ln(3)$ ، $\log_{10}(2)$ ، ....الخ.

- **خواص مجموعة الأعداد الصماء** $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:

ا) - إن جمع أو طرح عددين أصمين عموما هو عدد أصم (ليس عدد ناطق).مثلا: $\left(\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\right)\notin\mathbb{Q}$.

ب) - **قضية :** (نقبل بدون برهان)

- بين اي عددين ناطقين من $\mathbb{Q}$ يوجد على الاقل عدد اصم من $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

جـ) - مجموعة الأعداد الصماء $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ كثيفة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.اي ان:
كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ يمكن تقريبه بقدر ما نريد بعدد من $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

/5 مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

- الاعداد الحقيقية هي كل الاعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ والاعداد الغير الناطقة $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$،
أي ان: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^{C}=]-\infty,+\infty[$.

ا) - نلاحظ ان : $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq D\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.

ب) - ملاحظة : ان المجموعتين $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ غير كثيفتين في $\mathbb{R}$. بالفعل لاحظ مثلا:
$]0,+1[\cap\mathbb{N}=\phi$ ، $]-1,0[\cap\mathbb{Z}=\phi$.

جـ) - الاعداد الاولية :

تعريف:
نقول عن عدد طبيعي $a\in\mathbb{N}$ انه اولي اذا عدد قواسمه اثنان هما: 1 و a.
ملاحظة : العدد الطبيعي "1" لـيـس عدد اولي .

قضية1 : (نقبل بدون برهان)
- كل عدد اولي a يختلف عن 2 $(a\neq2)$ يكون باقي قسمته على العدد 4 اما 1 و اما 3.
- مجموعة الاعداد الاولية والتي باقي قسمتها على العدد 4 هو 1، تكتب بشكل مجموع مربعي عددين طبيعيين.

مثلا : $\begin{cases}5=(1)^2+(2)^2\\13=(2)^2+(3)^2\\17=(1)^2+(4)^2\end{cases}$.

قضية 2 : (نقبل بدون برهان)
- كل عدد طبيعي a $(a\in\mathbb{N})$ غـيـر اولي يقبل على الاقل قاسما اوليا b يحقق: $(b^2\leq a)$.

نتيجة:
- اذا كان $(a\in\mathbb{N})$ a عـددا طـبيعـيا اكبر من 1 $(a>1)$ و كان a لا يقبل أي قاسما اولـي b حيث: $(b^2\leq a)$ فان : a عدد اولي .

قضية 3 : (نقبل بدون برهان): - مجموعة الاعداد الاولية غير منتهية.

قضية 4 : (نقبل بدون برهان)
- كل عدد طبيعي a $(a\in\mathbb{N})$ غـيـر اولي واكـبـر من 1 $(a>1)$ يقبل تحـلـيـلا الى جـــداء عـوامل اولية ، و هذا التحليل وحـيــد .

ه - العـدد الـتــام:
تعريف: العـدد الـتــام هو العـدد الطبيعي الذي يساوي مـجـمـوع قـــواســمـــه.
مثال: العدد التام 6 ، قواسمه هي: 1 ، 2 ، 3 . اي: $6=1+2+3$.

- خواص مجموعة الأعداد الحقيقية:

1. $\mathbb{R}$ حقل تبديلي:
ا - $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبديلية . ب - $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة .
ج - $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}:\quad a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.
د - $\forall\, a,b\in\mathbb{R}:\quad a\times b=b\times a$.

2. $\mathbb{R}$ **مرتبة كليا:** نعرف على $\mathbb{R}$ علاقة الترتيب الاعتيادية أو الشائعة: $\leq$ أو $\geq$ والتي تحقق:

ا- $\forall a \in \mathbb{R} : \quad a \leq a$.

ب- $\forall a,b \in \mathbb{R} : \ (a \leq b \ \wedge \ b \leq a) \Leftrightarrow (a = b)$.

ج- $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \ (a \leq b \ \wedge \ b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$.

د- $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad a \leq b \ \vee \ b \leq a$.

- القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

- نسمي القيمة المطلقة لـ x : العدد الحقيقي الموجب $0 \leq |x|$ و المعرف بـ :

$$0 \leq |x| = \begin{cases} +x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

- خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

1 - $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. **2 -** $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x| \geq 0$.

3 - $\forall x \in \mathbb{R} : \quad -|x| \leq x \leq +|x|$.

4 - المتراجحة المثلثية : $\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad |x+y| \leq |x| + |y|$.

5 - $\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad |x-y| \leq |x| + |y|$.

6 - $\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad |x| - |y| \leq |x-y|$.

7 - $\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

8 - $\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$.

9 - $\forall x \in \mathbb{R} , \forall a \in \mathbb{R} : \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a$.

10 - $\forall x \in \mathbb{R} : \quad |-x| = |x| \ , \ \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$.

11 - $\forall x \in \mathbb{R} , \forall a \in \mathbb{R} : \quad |x| \geq a \Leftrightarrow a \leq x \ \vee \ x \leq -a$.

12 - $\forall x,y \in \mathbb{R} : \quad |x \times y| = |x| \times |y|$.

13 - $\forall x \in \mathbb{R} , \forall y \in \mathbb{R}^* : \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

- خواص:

1 - $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - a.b + b^2)$.

2 - $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + a.b + b^2)$.

- الأجزاء المحدودة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

- تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$.

1. نقول أن المجموعة A محدودة من الأعلى إذا كان:

$\exists M \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in A : \quad x \leq M$ ....$(*)$.

2. نقول أن المجموعة A محدودة من الأدنى إذا كان:

$\exists m \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in A : \ m \leq x$ ....$(**)$.

- تعريف:

لتكن A جزء غير خالي من $\mathbb{R}$.

- نقول عن جزء A من $\mathbb{R}$ انه محدود إذا كان محدود من الأعلى ومن الأدنى:

$\exists\ m\ ,\ M \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ x \in A :\quad m \le x \le M$.

- نتيجة:

لتكن $A \subset \mathbb{R}$ جزء غير خالي من $\mathbb{R}$.

A محدودة $\Leftrightarrow\quad |x| \le M\ :\ \exists\ M > 0\ ,\ \forall\ x \in A$.

- مثال: المجموعات التالية: $\{1,2,3\}$ ، $]0,1] \cup \{2\}$ ، $]0,1[\ \cap \mathbb{Q}$ مجموعات محدودة.

- ملاحظة:

1 . من العلاقة $(*)$ نستنتج أن :العدد M حاد أعلى وبالتالي: $\forall M' :\ M < M'$ يمثل كذلك حاد أعلى لـ A . و بالتالي: أي جزء محدود من $\mathbb{R}$ يملك ما لا نهاية من الحواد العليا .

2. من العلاقة $(**)$ نستنتج أن : العدد m حاد أدنى و بالتالي : $\forall m' :\ m' < m$ يمثل كذلك حاد أدنى لـ A . وبالتالي : أي جزء محدود من $\mathbb{R}$ يملك ما لا نهاية من الحواد الدنيا .

- تعريف:

1. إذا كان العدد M حاد أعلى لـ A . وكان $M \in A$) M يقع داخل A) فان: العدد M يسمى اكبر عنصر في المجموعة A . بمعنى : $Max\,(A) = M$.

2. إذا كان العدد m حاد أدنى لـ A . وكان $m \in A$) m يقع داخل A) فان: العدد m يسمى اصغر عنصر في المجموعة A . بمعنى : $Min\,(A) = m$.

- ملاحظة: ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا: $|x| = Max\,(-x\ ,+x)$.

- مثال:

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. نضع : $x^+ = Max\,(0\,,+x)$ و $x^- = Max\,(-x\ ,0)$.

بين أن: ا . $x^+ + x^- = |x|$. ب . $x^+ - x^- = x$.

- الحل:

- إثبات أن : ا . $|x| = x^+ + x^-$:

1. إذا كان:

$$x \ge 0\ :\ \begin{cases} x^+ = Max\,(0\,,+x) = +x \\ et \\ x^- = Max\,(-x\ ,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow\quad x^+ + x^- = +x \ ....(1)$$

2. إذا كان:

$$x \le 0\ :\ \begin{cases} x^+ = Max\,(0\,,+x) = 0 \\ et \\ x^- = Max\,(-x\ ,0) = -x \end{cases} \Rightarrow\quad x^+ + x^- = -x \ ....(2)$$

و حسب (1) و (2) أن: $x^+ + x^- = |x|$.

- إثبات أن: ب. $x^+ - x^- = x$:

1. إذا كان:

$$x \geq 0 : \begin{cases} x^{+} = Max\,(0, +x) = +x \\ et \\ x^{-} = Max\,(-x, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^{+} - x^{-} = +x \;....(1)$$

2. إذا كان:

$$x \leq 0 : \begin{cases} x^{+} = Max\,(0, +x) = 0 \\ et \\ x^{-} = Max\,(-x, 0) = -x \end{cases} \Rightarrow \quad x^{+} - x^{-} = +x \;....(2)$$

و حسب (1) و (2) أن: $x^{+} - x^{-} = x$.

- نظرية:

إذا كانت A جزء غير خالي من $\mathbb{R}$ و كانت A تملك اكبر عنصر (اصغر عنصر) فان: هذا العنصر وحيد .

البرهان:

نفرض أن A تملك أكثر من اكبر عنصر. أي : $Max\,(A) = M'$ ، $(M \neq M')$ و $Max\,(A) = M$. و لدينا: $M = Max\,(A) \Leftrightarrow x \leq M \;, \forall x \in A \;, M \in A$ و $M' = Max\,(A) \Leftrightarrow x \leq M' \;, \forall x \in A \;, M' \in A$. هذا يكافئ أن: $(M' \leq M \;\wedge\; M \leq M') \Leftrightarrow M = M'$. و هذا تناقض مع $(M \neq M')$.

إذن: العنصر وحيد .

- ملاحظة:

لتكن A جزء غير خالي من $\mathbb{R}$ محدود من الأعلى بـ M و $M \in A$ فان:

$-Max\,(A) = Min\,(-A)$. حيث : $(-A) = \{\, (-x) : x \in A \,\}$.

- مثال:

لتكن المجموعة $A = \{1,2,3\} \subset \mathbb{R}$ المزودة بعلاقة الترتيب الشائعة : $\geq$.

لدينا : $Max\,(A) = +3$. و $(-A) = \{\, (-x) : x \in A \,\} = \{-3,-2,-1\}$ و بالتالي:

$Min\,(-A) = -3$. ومنه : $-Max\,(A) = -3 = Min\,(-A)$.

- تعريف:

لتكن A جزء غير خالي من $\mathbb{R}$.

1- نسمي حدا أعلى لـ A هو اصغر الحواد العليا لـ A . و نرمز له بالرمز: $Sup\,(A)$.

2- نسمي حدا أدنى لـ A هو اكبر الحواد الدنيا لـ A . و نرمز له بالرمز: $Inf\,(A)$.

- خاصية:

لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$ مزودة بعلاقة الترتيب الشائعة : $\geq$. و $m\,,\, M \in \mathbb{R}$. إن:

$$M = Sup\,(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : \; x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \,, \exists x_{\varepsilon} \in A : \; M - \varepsilon < x_{\varepsilon} \end{cases}$$

$$m = Inf\,(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : \; m \leq x \\ \forall \varepsilon > 0 \,, \exists x_{\varepsilon} \in A : \; x_{\varepsilon} < m + \varepsilon \end{cases}$$

- نظرية:

1. إذا كانت A جزء غير خالي من $\mathbb{R}$ محدود من الأعلى فان: A تملك حدا أعلى في $\mathbb{R}$.
2. إذا كانت A جزء غير خالي من $\mathbb{R}$ محدود من الأدنى فان: A تملك حدا أدنى في $\mathbb{R}$.

- خاصية ارخميدس:

- نظرية: إن: $\forall x>0 \ , \ \forall y\in\mathbb{R} \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ n.x>y$.

- نتيجة: إن: $\forall y\in\mathbb{R} \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ n>y$.

- برهان النظرية:

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. إذا كان $y\le 0$ فانه : $\exists n=1\in\mathbb{N}^* : \ y\le 0<1.x=n.x$.
و إذا كان $y\ge 0$: نستعمل البرهان بالخلف : نفرض أن : $n.x\le y$. و نعتبر المجموعة $X=\left\{ n.x : n\in\mathbb{N}^* \ , \ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$: المجموعة X محدودة من الأعلى بـ y و هي خالية لأنه من اجل: $n=x=1$ فان : $1\in X\neq\varnothing$. حسب النظرية الأخيرة أن المجموعة X تملك حدا أعلى . مثلا: $S=\sup X$: $\forall\varepsilon>0 \ , \exists \ n.x\in X : \ S-\varepsilon<n.x$. من اجل $\varepsilon=x$ نجد أن: $S-x<n.x$ أي: $S<(n+1).x$. و بما أن : $(n+1).x\in X$ و $S=\sup X$ أي: تناقض مع : $n.x\le y$. إذن الفرض أن: $n.x\le y$ خاطئ . و منه : $n.x>y$.

- نتائج خاصية ارخميدس:

1 - $\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ 0<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

2 - $\forall x>1 \ , \ \forall M\in\mathbb{R} \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ x^n>M$.

3 - $\forall\varepsilon>0 \ , \ \forall x : \ 0<x<1 , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ 0<x^n<\varepsilon$.

4 - $\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ 0<\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.

- الإثبات:

1 - من النظرية الأخيرة أنه من اجل: $\varepsilon=x$ و $y=1$ نجد أن:

$\forall x=\varepsilon>0 \ , \ \forall y=1\in\mathbb{R} \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ n.\varepsilon>y=1$. أي:

$\forall\varepsilon>0 \ , \ \exists n\in\mathbb{N}^* : \ 0<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

2 - نضع: $y=(x-1)>0$ و بالتالي : $x=(y+1)>0$. و حسب مفكوك نيوتن:

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ فان:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\times(n-k)!} \quad , \quad (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k \ x^{n-k}.y^k$$. و بالتعويض:

$$x^n=(1+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k \ y^k=1+C_n^1 \ y^1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k \ y^k>1+ny$$. و منه:

$x^n>1+ny \ \Rightarrow \ ny<x^n-1$. و ليكن $z=M-1$ و حسب النظرية الأخيرة أن:

$\exists n\in\mathbb{N}^* : \ z<n.y$. أي: $\exists n\in\mathbb{N}^* : \ M-1<n.y<x^n-1$. و منه:

$\exists n\in\mathbb{N}^* : \ x^n>M$.

3 - نختار في النتيجة 2: نعوض x بـ $\dfrac{1}{x}$ و $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$ نجد أن: $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n>M=\dfrac{1}{\varepsilon}$ أي:

$0<x^n<\varepsilon$.

4 - نأخذ $x=\frac{1}{2}$ في النتيجة 3 نجد أن: $0<\frac{1}{2^n}<\varepsilon \quad : \quad \exists n\in\mathbb{N}^* \ , \ \forall \varepsilon>0$.

- الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

- تعريف: نسمي الجزء الصحيح لعدد حقيقي x العدد الصحيح الذي نرمز له بالرمز $E(x)$ أو $[x]$
و الذي يحقق : $0\le\theta<1 \ , \ x=E(x)+\theta \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$.

- نتيجة: إن: $E(x)\le x<E(x)+1 \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$.
لان: $0\le\theta=x-E(x)<1 \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$. أي أن:
$E(x)\le x<E(x)+1 \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$.

- كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$:

نظرية:
بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد ناطق. بمعني:
$x<r<y \ : \ \exists r\in\mathbb{Q} \ , \ \forall y\in\mathbb{R} \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$.
البرهان:
نفرض أن : $x<y$. (نفس البرهان في حالة $x>y$) : أي: $y-x>0$.
و حسب خاصية ارخميدس أن: $n.(y-x)>1 .....(1) \ : \ \exists n\in\mathbb{N}^* \ , \ \forall(y-x)>0$. أي:
$(y-x)>\frac{1}{n} .....(1) \ : \ \exists n\in\mathbb{N}^* \ , \ \forall(y-x)>0$.
نضع : $k=E(n.x)$ و حسب تعريف الجزء الصحيح لعدد حقيقي أن:
$\frac{k}{n}\le x<\frac{k+1}{n} ......(2) \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$. و حيث أن: $(y-x)>\frac{1}{n}$ فان:
$y>\frac{1}{n}+x\ge\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\ge\frac{k+1}{n} \Rightarrow y>\frac{k+1}{n} ....(3)$. و حسب (2) و (3) نستنتج أن:
$x<\frac{k+1}{n}<y \ ....(4) \quad : \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$. أي:
$x<r<y \ ....(4) \quad : \quad \exists r=\frac{k+1}{n}\in\mathbb{Q} \ , \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

- كثافة $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$:

نظرية:
بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد حقيقي . بمعني:
$x<t<y \ : \ \exists t\in\mathbb{R} \ , \ \forall y\in\mathbb{R} \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$.

البرهان:
نفرض أن : $x<y$. (نفس البرهان في حالة $x>y$) لدينا :

$$\begin{cases} 2x=x+x<x+y \ ....(1) \\ et \\ x+y<y+y=2y \ ....(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{x+y}{2} \ ....(1) \\ et \\ \frac{x+y}{2}<y \ ......(2) \end{cases}$$

. أي أن:

$x<t<y \ ....(3) \quad : \quad \exists t=\frac{x+y}{2}\in\mathbb{R} \ , \ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

- كثافة الأعداد الصماء في $\mathbb{R}$:

- نظرية:

بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد أصم . بمعني:

$\forall x \in \mathbb{R} \;,\; \forall y \in \mathbb{R} \;,\; \exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;:\; x < p < y$.

- البرهان:

حسب النظرية السابقة: بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد على الأقل عدد ناطق. بمعني:

يوجد $r \in \mathbb{Q}$ يحقق: $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$: $\forall x \in \mathbb{R} \;,\; \forall y \in \mathbb{R}$.

نضع: $z = r.\sqrt{2}$. و يمكن أن نبرهن بسهولة أن: $z = r.\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6/ <u>مجموعة الأعداد المركبة</u> $\mathbb{C}$:

- <u>الاعداد المركبة</u> هي كل الاعداد $z \in \mathbb{C}$ التي تكتب على الشكل :

$z = (x + i.y) : (x = \mathrm{Re}(z)), (x = \mathrm{Im}\,g(z))$ ، ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$، أي ان : $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i.\mathbb{R}$.

حيث : $i.\mathbb{R} = \{ix \;/\; x \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$.

- نلاحظ ان : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq D \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

3.2 - الاحتواء :

لتكن $E \,,\, F$ مجموعتين. نقول أن E محتــواة في F إذا تحقق الاستلزام التالي:

$(\forall x : x \in E \Rightarrow x \in F)$ و نكتب: $E \subset F$. أي:

$E \subset F \Leftrightarrow (\forall x : x \in E \Rightarrow x \in F)$.

4.2 - المساواة :

لتكن $E \,,\, F$ مجموعــتـيـن. نقول أن E تساوي F إذا تحقق التكافؤ التالي:

$(\forall x : x \in E \Leftrightarrow x \in F)$ و نكتب : $E = F$. أي:

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset E)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x : x \in E \Leftrightarrow x \in F) .$$

5.2 - المجموعة الخالية:

- نقبل بوجود مجموعة لا تشمل أي عنصر , تسمى المجموعة الخالية و نرمز لها بالرمز $\varnothing$.

- **مثال:** المجموعة المعرفة بـ: $A = \{x \in N : \quad x^2 + 1 = 0\}$، هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد أي عدد طبيعي مربعه يساوي 1- .

6.2 - نـتـائـج:

1 . لدينا $E \subset E$.

2 . من اجل كل مجموعة E لدينا $\varnothing \subset E$.

3 . المجموعة الخالية $\varnothing$ وحيدة .

4 . الاحتواء علاقة متعدية بمعنى : $E \subset G \Rightarrow (E \subset F \wedge F \subset G)$.

7.2 - عمليات على المجموعات:

- التقاطع:

لتكن $E \,,\, F$ مجموعتين. نسمي تقاطع مجموعتين $E \,,\, F$: $E \cap F$ مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين $E \,,\, F$. و نكتب : $E \cap F = \{x \;/\; x \in E \wedge x \in F\}$.

- **مثال:** $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1,3\}$ و بالتالي: $A \cap B = \{0,1\}$.

- **خواص التقاطع:** لتكن المجموعات الكيفية A، B و C لدينا ان:

1. $A\cap B = B\cap A$ ، 2. $A\cap A = A$ ، 3. $A\cap\varnothing=\varnothing$ ، 4. $A\cap E=A$

5. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$، 6. $A\cap B \subseteq B$ ، $A\cap B \subseteq A$.

- **ملاحظة:** نقول أن المجموعتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ منفصلتان إذا كان تقاطعهما يساوي مجموعة خالية.

- **الاتحاد:**

لتكن E , F مجموعتين. نسمي اتحاد مجموعتين E , F : $E \cup F$ مجموعة العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين المجموعتين E , F. و نكتب: $E \cup F = \{x \ / \ x \in E \ \vee \ x \in F\}$.

- **مثال:** $A = \{0,1,3\}$ ، $B = \{2,4\}$ و $A \cup B = \{0,1,2,3,4\}$.

- **الاحتواء:**

- نقول أن المجموعة $\boldsymbol{A}$ محتـواة في المجموعة $\boldsymbol{B}$، إذا كان كل عنصر من $\boldsymbol{A}$ هو كذلك عنصر من $\boldsymbol{B}$ و نكتب $A \subseteq B$ و بعبارة رياضية لدينا: $A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x,\ \ x \in A \Longrightarrow x \in B]$. ونقول أيضا أن المجموعة $\boldsymbol{B}$ مجموعة جزئية من المجموعة $\boldsymbol{A}$.

- **مثال** : مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة.

- **بعض الخــواص:**

لتكن A , B , C **مجموعات جزئية من المجموعة** K.

1 - $A\cap B \subseteq A$ ، $A\cap B \subseteq B$ ، $A \subset A\cup B$ ، $B \subset A\cup B$ ، $A\cap A = A$ ، $A\cup A = A$ ، $A\cap\varnothing = \varnothing$ ، $A\cup\varnothing = A$.

2 - خاصية التبديل: $A\cap B = B\cap A$ ، $A\cup B = B\cup A$.

3 - خاصية التجميع: $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ ، $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$.

4 - خاصية التوزيع: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ .....(1)

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ .....(2)

- **متممة مجموعة:**

لتكن E مجموعة جزئية من المجموعة K.

نسمي متممة المجموعة E بالنسبة إلى المجموعة K : مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة K و لا تنتمي إلى المجموعة E. ونكتب:

$C_K E = \{x \ / \ x \in K \ \wedge \ x \notin E\} = K - E$.

خواص:

1 - $C_E E = \varnothing$ **.** $C_E \varnothing = E$ **.**

-2 $C_F\left(C_F E\right) = E$**.**

-3 $E \cup \left(C_K E\right) = K$ **و** $E \cap \left(C_K E\right) = \varnothing$ **.**

-4 قانوني ذي مورقان: $(1)..... C_K\left(A \cap B\right) = C_K A \cup C_K B$

$(2)..... C_K\left(A \cup B\right) = C_K A \cap C_K B$

8.2 - الفرق بين مجموعتين:

لتكن $E \,,\, F$ مجموعتين جزئيتين من المجموعة K.

نسمي الفرق بين المجموعتين $E \,,\, F$: $E - F$ مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة E و لا تنتمي إلى المجموعة F . و نكتب: $E - F = \{x \;/\; x \in E \;\wedge\; x \notin F\}$ و بنفس الكيفية:

$F - E = \{x \;/\; x \in F \;\wedge\; x \notin E\}$.

- إذا أخذنا $E = F$: فان: $E - E = \{x \;/\; x \in E \;\wedge\; x \notin E\}$ و التي تساوي $\varnothing$. أي:

$E - E = \varnothing$.

- خواص:

1 - $E - F \subseteq E$ ، $\varnothing - E = \varnothing$ ، $E - \varnothing = E$ ، $E - E = \varnothing$ ،

$E - F = E \cap C_K F$ **.**

-2 $C_K\left(C_K E\right) = E$**.** و عموما أن**:** $E - F \neq F - E$ **.**

3 – إذا كان: $F \subset E \;\Rightarrow\; E - F = E \cap \overline{F}$ **.**

- 4 $E \cup \left(C_F E\right) = F$ **و** $E \cap \left(C_F E\right) = \varnothing$ **.**

9.2 - الفرق التناظري بين مجموعتين:

لتكن $E \,,\, F$ مجموعتين. نسمي الفرق التناظري بين المجموعتين $E \,,\, F$: $E \,\Delta\, F$ مجموعة العناصر الغير المشتركة بين المجموعتين $E \,,\, F$. و نكتب:

حيث : $F \subset K \quad , \quad E \subset K$

$$\left\{\begin{array}{l} E \;\Delta\; F \overset{1}{=} \left(E - F\right) \cup \left(F - E\right) \\ E \;\Delta\; F \overset{2}{=} \left(E \cup F\right) - \left(E \cap F\right) \\ E \;\Delta\; F \overset{3}{=} \left(E \cap C_K F\right) \cup \left(F \cap C_K E\right) \end{array}\right. .$$

- نـتـائـج:

1 - $E \;\Delta\; E = \varnothing$ ، $\forall E \subset K \;:\; E \,\Delta\, \varnothing = E$ ،

$\forall\, E \subset K \;,\; F \subset K \;:\; E \,\Delta\, F = F \,\Delta\, E$ **.**

-2 $\left(E \,\Delta\, F\right) \Delta\, L = E \,\Delta \left(F \,\Delta\, L\right)$ $\forall\, E \,, F \,, L \subset K \;:$**.**

-3 $\forall E \subset K \;:\; E \,\Delta\, K = K - E = C_K E$ **. لان :** $E \cup K = K$ **و** $E \cap K = E$ **.**

10.2 - المجموعة الجزئية:

لتكن $E \,,\, A$ مجموعتين.

تعريف: نقول أن A مجموعة جزئية من المجموعة E إذا كانت $A \subset E$.

11.2 - مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن E , A مجموعتين غير خاليتين.

تعريف: نسمي مجموعة أجزاء المجموعة E : المجموعة التي عناصرها أجزاء E , و نرمز لها بالرمز: $P(E)$. أي: $P(E)=\{A/\ A\subseteq E\}$ و. $A\in P(E) \Leftrightarrow A\subseteq E$.

- خواص:

1- $P(E)$ غير خالية . ذلك أن: $E\in P(E)$ و $\varnothing \in P(E)$.

2- $P(E)$ مغلقة بالنسبة للتقاطع: $\forall A , B \in P(E):\quad A\cap B \in P(E)$.

3- $P(E)$ مغلقة بالنسبة للاتحاد : $\forall A , B \in P(E):\quad A\cup B \in P(E)$.

4- أصلي مجموعة (عدد عناصر مجموعة) :

- إذا كان عدد عناصر المجموعة E هو n . أي: $Card\ E = n$ فان عدد عناصر المجموعة $P(E)$ هو $Card\ P(E) = 2^{Card\ E} = 2^n$.

5- لتكن $A\subset E$, $B\subset E$ مجموعتين من E. لدينا ان: $A\subset B \Rightarrow P(A)\subset P(B)....(1)$ ، $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)....(2)$ ، $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)....(3)$.

- مثال: لتكن المجموعة E المعرفة بـ: $E = \{1,2,3\}$. حدد مجموعة أجزاء المجموعة E.

- نعلم ان : $Card\ E = n = 3$. و منه: عدد عناصر المجموعة $P(E)$ هو $Card\ P(E) = 2^{Card\ E} = 2^n = 2^3 = 8$. أي: مجموعة أجزاء المجموعة E هي:

$P(E)=\{ \{1},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}=E , \varnothing \}$.

13.2 - الجداء الديكارتي للمجموعتين:

لتكن E , F مجموعتين غير خاليتين.

تعريف: نسمي الجداء الديكارتي للمجموعتين F و E : $E\times F$ مجموعة الثنائيات (x,y) حيث x من المجموعة E و y من المجموعة F. و نكتب:

$E\times F=\{(x,y)\ /\ x\in E \wedge y\in F\}$.

خواص:

1 - $(x,y)=(a,b) \Leftrightarrow x=a \wedge y=b$ **.**

2 - $E\times F\times G=\{(x,y,z):\ x\in E ,\ y\in F ,\ z\in G\}$ مجموعة الثلاثيات .

3 - $E_1\times E_2\times ...\times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1,x_2,...,x_n):\ x_i\in E_i ,\ 1\le i\le n\}$ مجموعة النونيات

. وإذا كان $E_1=E_2=...=E_n=E$ فان: $\prod_{i=1}^{n} E_i = \prod_{i=1}^{n} E = E^n$.

4 - خاصية التجميع: $(E\times F)\times G = E\times (F\times G)$ **.**

5 - $E\times\varnothing = \varnothing$ **.**

6 - $E\times F \neq F\times E$ **إذا كان** $E\neq F$**.**

7 - إذا كان $Card\ E = n$ **و** $Card\ F = m$ فان : عدد عناصر المجموعة $E\times F$ هو $Card\ E\times F = Card\ E\cdot Card\ F = n\cdot m$ **.**

14.2 - مفهوم تجزئة مجموعة :

لتكن E مجموعة كيفية و $\{ A_k , k \in I \}$ (حيث I مجموعة أدلة) عائلة أجزاء من المجموعة E.

- نقول أن $\{ A_k , k \in I \}$ تشكل تجزئة للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

1- كل عناصر $A_k , k \in I$ غير خالية . أي : $\forall A_k , k \in I ; \quad A_k \neq \varnothing$.

2- الأجزاء $A_k , k \in I$ منفصلة مثنى مثنى أي : $A_i \cap A_j = \varnothing \quad , \forall i \neq j$.

$\bigcup_{k \in I} A_k = E$.

- أمثلة:

1- لتكن المجموعة E المعرفة بـ: $E = \{ 1 , 2 , 3 \}$.

- المجموعات أو العائلة المتكونة من: $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{2\}$ ، $A_3 = \{3\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E.

- المجموعات أو العائلة المتكونة من: $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{2 , 3\}$ تشكل تجزئة أخرى للمجموعة E.

2- لتكن المجموعة $E = \mathbb{R}$. إن العائلة $\{ A_n =]n , n+1] , n = E(x) \in \mathbb{Z} , \forall x \in \mathbb{R} \}$ تشكل تجزئة للمجموعة $E = \mathbb{R}$.

نتيجة: ينتج من هذا التعريف و حسب خواص التقاطع والإتحاد أنه من أجل كل جزء من المجموعة E يختلف عن E و Φ توجد تجزئة ل E هي : $\Omega = \{A , A^c\}$.

15.2 - مفهوم التغطية:

لتكن E مجموعة كيفية و $\{ B_k , k \in I \}$ عائلة مجموعات كيفية .

- نقول أن العائلة $\{ B_k , k \in I \}$ تشكل تغطية للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

$E \subset \bigcup_{k \in I} B_k$.

- امثلة:

1- لتكن المجموعة E المعرفة بـ: $E = \{ 1 , 2 , 3 \}$.

- إن العائلة: $\{ \{1\} , \{2, -1\} , \{3 , 4 , 5\} \}$ تشكل تغطية للمجموعة E.

- إن العائلة: $\{ \{1 , 2\} , \{4, -1\} , \{3 , 4 , 7\} \}$ تشكل تغطية أخرى للمجموعة E.

2- لتكن المجموعة $E = \mathbb{R}$.

- إن العائلة $\{ B_n =]-n , +n[\ , n \in \mathbb{N} \}$ تشكل تغطية للمجموعة $E = \mathbb{R}$.

16.2 - البيان:

لتكن $E\ ,\ F$ مجموعتين غير خاليتين.

نسمي بيانا أو مجموعة بيانية في $E\times F$ كل مجموعة جزئية G من $E\times F$. فإذا كان $(x\,,\,y)$ عنصرا من البيان G فنقول أن y يقابل x وفق البيان G أو x يرتبط بـ y وفق البيان G .

- البيان العكسي لبيان: ليكن G بيانا.

البيان العكسي للبيان G هو المجموعة G^{-1} المعرفة كما يلي:

$(x\,,\,y)\in G \Leftrightarrow (x\,,\,y)\in G^{-1}$. و نقول عن G انه متناظر إذا كان: $G^{-1} = G$.

- نتيجة :

ينتج من هذا التعريف انه إذا كان: G بيانا في $E\times F$ فان: G^{-1} بيانا في $E\times F$. و أن البيان العكسي لـ G^{-1} هو G.

17.2 - العلاقة بين مجموعتين:

لتكن $E\ ,\ F$ مجموعتين. نسمي علاقة بين المجموعة E نحو المجموعة F كل ثلاثية $\Re=(E,F,G)$ حيث G بيان في $E\times F$. يدعى البيان G بيان العلاقة $\Re$, فيما تدعى المجموعة E مجموعة انطلاقها و المجموعة F مجموعة وصولها .

* فإذا كان $(x\,,\,y)$ عنصرا من G , فنقول أن x يرتبط بـ y أو y يقابل x وفق العلاقة $\Re$.

و نكتب $\Re(x\,,\,y)$ أو $x\,\Re\,y$.

* وإذا كان $(x\,,\,y)$ ليس عنصرا من G , فنقول أن x ليست له علاقة مع y , و إذا كانت $E=F$ فنقول أن $\Re$ علاقة ثنائية على E.

18.2 - تعريف آخر للعلاقة:

نسمي علاقة من المجموعة E نحو المجموعة F كل جملة مفتوحة $\Re(x\,,\,y)$ على $E\times F$. و الجملة المفتوحة هي كل عبارة تحوي متغيرات يمكننا الحكم عليها بالصحة أو الخطأ عند استبدال متغيراتها بقيم .

* نسمي المجموعة G المعرفة كما يلي: $G=\{(x\,,\,y)\in E\times F\ ;\quad \Re(x\,,\,y)\}$ بيان العلاقة $\Re$.

* و إذا لم يوجد أي عنصر $(x\,,\,y)$ من $E\times F$ يحقق العلاقة $\Re(x\,,\,y)$ قلنا أن $\Re$ علاقة مستحيلة. وعلى العموم نسمي علاقة مستحيلة كل علاقة بيانها المجموعة الخالية $\varnothing$.

* و إذا كانت جميع عناصر $E\times F$ تحقق العلاقة $\Re(x\,,\,y)$. فنقول أن العلاقة $\Re$ مطلقة . و على العموم نسمي علاقة مطلقة من E نحو F كل علاقة بيانها يساوي $E\times F$.

19.2 - العلاقة العكسية لعلاقة:

لتكن $\Re=(E,F,G)$ علاقة . العلاقة العكسية للعلاقة $\Re$ هي العلاقة $\Re^{-1}$ من F نحو E المعرفة كما يلي: $\Re^{-1}=(F\,,\,E\,,\,G^{-1})$. و لدينا : $\Re(x\,,\,y) \Leftrightarrow \Re^{-1}(x\,,\,y)$.

20.2 - خواص العلاقة الثنائية:

لتكن $\Re$ علاقة ثنائية على المجموعة E, و لنعتبر المجموعة $E^2=E\times E$. نقول عن العلاقة $\Re$ أنها :

1 - انعكاسية (Réflexive) إذا كان : $x\,\Re x \qquad \forall x\in E :$.

2 - تناظرية (Symétrique) إذا كان : $x\,\Re y \Rightarrow y\,\Re x \qquad \forall x,y\in E :$.

3 - ضد تناظرية (Anti – Symétrique) إذا كان:
$$\forall x, y \in E : \quad (x \Re y) \wedge (y \Re x) \Rightarrow x = y .$$
4 - متعدية (Transitive) إذا كان:
$$\forall x, y, z \in E : \quad (x \Re y) \wedge (y \Re z) \Rightarrow x \Re z .$$

21.2 - علاقة التـكـافؤ:

- تعريف: لتكن $\Re$ علاقة ثنائية على المجموعة E.
نقول عن العلاقة $\Re$ أنها علاقة التـكـافؤ إذا كانت: انعكاسية وتناظرية و متعدية.

- صنف أو صف تـكـافؤ عنصر:
لتكن $\Re$ علاقة تـكـافؤ على المجموعة E. و ليكن x عنصر من E.
نسمي صنف تـكـافؤ العنصر x هي مجموعة العناصر y من E التي لها علاقة تـكـافؤ مع العنصر x. و نرمز لها بـ: $\dot{x}$ أو $\bar{x}$ أو $C(x)$. و نكتب: $\dot{x} = \{ y \in E : \quad y \Re x \}$.

- نـتـائج:
ينتج من هذا التعريف أن:
1- كل صنف تـكـافؤ غير خال . لان: $\forall x \in E : \ x \Re x \Rightarrow x \in \dot{x} \Rightarrow \dot{x} \neq \varnothing$.
2 - كل صنفي تـكـافؤ إما متساويين و إما منفصلين:
$$\forall x, y \in E : \ \dot{x} = \dot{y} \quad \vee \quad \dot{x} \cap \dot{y} = \varnothing .$$
3 - إن أي صنف تـكـافؤ يكون محددا تماما بإعطاء عنصر كيفي من عناصره x. يدعى x ممثلا لهذا الصنف التـكـافؤ.

- التجزئة المعرفة بواسطة علاقة تـكـافؤ:
* **مجموعة حاصل القسمة:** لتكن $\Re$ علاقة تـكـافؤ على المجموعة E. نسمي مجموعة حاصل القسمة على العلاقة $\Re$ هي مجموعة صفوف التـكـافؤ وفق العلاقة $\Re$. و نرمز لها بالرمز: $E/\Re$. ونكتب: $E/\Re = \{ \dot{x} \ ; \quad x \in E \}$.
* **نظرية:** إذا كانت $\Re$ علاقة تـكـافؤ على المجموعة E فان: المجموعة $E/\Re$ تشكل تجزئة للمجموعة E. تسمى التجزئة المعرفة بواسطة علاقة تـكـافؤ $\Re$.

- علاقة تـكـافؤ المعرفة بواسطة تجزئة :
* **نظرية:** لتكن E مجموعة. و لتكن $\Omega = \{ A_k \ , k \in I \}$ تجزئة للمجموعة E. نعرف علاقة تـكـافؤ على المجموعة E كما يلي:
$$\forall x, y \in E : \quad x \Re y \Leftrightarrow \exists k \in l \ ; \ \{x, y\} \subset A_k .$$
إن المجموعات الجزئية A_k هي أصناف التـكـافؤ في E وفق العلاقة $\Re$. بمعنى $E/\Re = \Omega$. تدعى $\Re$ علاقة تـكـافؤ المعرفة بواسطة التجزئة Ω.

* **نتيجة:** ينتج من النظريتين السابقتين أن: كل علاقة تـكـافؤ على مجموعة تعرف تجزئة لهذه المجموعة . وأن كل تجزئة لمجموعة تعرف علاقة تـكـافؤ على هذه المجموعة.

- أمثلة:
1- نعتبر المجموعة $E = \{1, 2, 3\}$ و العلاقتين: $\Re_1 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1) \}$ و $\Re_2 = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$. إنهما علاقتا تكافؤ على E. و لدينا:

$\dot{1}=\{1,3\}$ ، $\dot{2}=\{2\}$ ، $\dot{3}=\{1,3\}$ بالنسبة للعلاقة $\Re_1$. و $\dot{3}=\{3\}$ ، $\dot{2}=\{2\}$ ،
$\dot{1}=\{1\}$ بالنسبة للعلاقة $\Re_2$.

2 - نعتبر المجموعة $E=\mathbb{Z}$. إن العلاقة:
$\forall a,b\in E=\mathbb{Z}: \quad a\Re b \Leftrightarrow a-b=3.m \ , \ m\in\mathbb{Z}$ هي علاقة تكافؤ
على E . و لدينا صفوف التكافؤ التالية:
$\dot{2}=\{t=3.k+2\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ ، $\dot{1}=\{t=3.k+1\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ ، $\dot{0}=\{t=3.k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3 - نعتبر المجموعة $E=\mathbb{R}$. إن العلاقة:
$\forall a,b\in E=\mathbb{R}: \quad a\Re b \Leftrightarrow a^2-b^2=a-b$ هي علاقة تكافؤ على E . و لدينا
صفوف التكافؤ التالية: $\dot{a}=\{a\ ,\ (1-a)\}$.

4 - نعتبر المجموعة $E=\mathbb{R}$. نعرف العلاقة الثنائية كما يلي:
$\forall a,b\in E=\mathbb{R}: \quad a\Re b \Leftrightarrow a=b$. بين أن: $\Re$ هي علاقة تكافؤ على E.

- الحل: (أ) - $\Re$ انعكاسية (Réflexive) : $\forall a\in\mathbb{R}: \quad a=a \Rightarrow a\Re a$.

(ب) - $\Re$ تناظرية (Symétrique) :
$$\forall a,b\in\mathbb{R}: \quad a\Re b \Rightarrow b\Re a$$
$$\forall a,b\in\mathbb{R}: \quad a\Re b \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow b=a \Rightarrow b\Re a.$$

(جـ) - $\Re$ متعدية (Transitive) :
$$\forall a,b,c\in E=\mathbb{R}: \quad (a\Re b)\wedge(b\Re c) \Rightarrow a\Re c.$$

لدينا: $(a\Re b)\Leftrightarrow a=b$ ....(1) و $(b\Re c)\Leftrightarrow b=c$ ....(2) و حسب (1) و
(2) إذن: $a=b=c \Rightarrow a=c \Rightarrow a\Re c$.

و حسب (أ) ، (ب) ، (جـ) أن : $\Re$ هي علاقة تكافؤ على E.

22.2 - علاقة الـتـرتيب:

تعريف: لتكن $\Re$ علاقة ثنائية على المجموعة E. نقول عن العلاقة $\Re$ أنها علاقة ترتيب إذا كانت:
انعكاسية وضد تناظرية و متعدية في آن واحد.
وعندها نقول أن: $(E\ ,\ \Re)$ مجموعة مرتبة بالعلاقة $\Re$.

- ملاحظات هامة:

1- نقول عن عنصرين $y\ ,\ x$ من E أنهما قابلين للمقارنة إذا كان يحققان العلاقة:
$x\Re y \ \vee\ y\Re x$.

2- نقول عن العلاقة $\Re$ أنها علاقة ترتيب كلي على E إذا كان: جميع عناصر المجموعة E قابلة للمقارنة وفق العلاقة $\Re$. بمعنى $\forall x,y\in E \ ; \ x\Re y \ \vee\ y\Re x$.
و عـندها نقول أن المجموعة E مرتبة ترتيبا كليا بالعلاقة $\Re$.

3- ونقول عن العلاقة $\Re$ أنها علاقة ترتيب جـزئي على E إذا وجد: عنصرين $y\ ,\ x$ من E غير قابلين للمقارنة بالعلاقة $\Re$. وعـندها نقول أن المجموعة E مرتبة ترتيبا جزئيا بالعلاقة $\Re$.

- علاقة الـتـرتيب العكسية:

لتكن E مجموعة مرتبة بعلاقة تـرتيب $\Re$. عندئذ يمكننا تعريف علاقة الـتـرتيب $\Re^{-1}$ على E كما يلي: $\forall x,y\in E \ ; \ x\Re^{-1}y \Leftrightarrow y\Re x$.

- أمثلة:

1 - نعتبر المجموعة $E = \mathbb{N}$. إن العلاقة: $\Re \equiv {}^{//} \leq {}^{//}$ هي علاقة ترتيب على E. و هي علاقة ترتيب كلي على E.

2 - نعتبر المجموعة $E = \{1,2,3\}$ و العلاقتين: $\Re_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$. إنها علاقة ترتيب على E. و هي علاقة ترتيب جزئي على E.

3 - نعتبر المجموعة $E = \mathbb{N}^*$.

إن العلاقة: a يقسم $b \quad \Leftrightarrow \quad a \Re b \qquad \forall a,b \in E = \mathbb{N}^* :$. هي علاقة ترتيب على E. و هي علاقة ترتيب جزئي على E.

4 - نعتبر المجموعة $E = \mathbb{N}$. نعرف العلاقة الثنائية كما يلي:

$$\forall a,b \in E = \mathbb{N} : \quad a \Re b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \; ; \; b = a.k \, .$$

بين أن : $\Re$ هي علاقة تـرتيب على E.

- الحل : (ا) - $\Re$ انعكاسية (Réflexive) : $\forall a \in \mathbb{N} : \quad a \Re a$.

لدينا : $\exists k = 1 \in \mathbb{N} \; ; \; a = a.k \Rightarrow a \Re a$.

(ب) - $\Re$ ضد تناظرية (Anti – Symétrique) :

$$\forall a,b \in E = \mathbb{N} : \quad (a \Re b) \wedge (b \Re a) \Rightarrow a = b \, .$$

لدينا : $(a \Re b) \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} \; ; \; b = a.k_1 \; ....(1)$ و $(b \Re a) \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} \; ; \; a = b.k_2 \; ....(2)$. و بالتعويض (2) في (1)

نجد أن: $b = a.k_1 = (b.k_2).k_1 \Rightarrow b = b.k_1.k_2 \; ....(3) \Rightarrow k_1.k_2 = +1$.

إذن: $\exists k_1 = k_2 = 1 \in \mathbb{N} \; ; \; b = a.1 = a \Rightarrow a = b$.

و منه : $\Re$ ضد تناظرية على E.

(جـ) - $\Re$ متعدية (Transitive) :

$$\forall a,b,c \in E = \mathbb{N} : \quad (a \Re b) \wedge (b \Re c) \Rightarrow a \Re c \, .$$

لدينا : $(a \Re b) \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N} \; ; \; b = a.k_1 \; ....(1)$ و $(b \Re c) \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N} \; ; \; c = b.k_2 \; ....(2)$. و بالتعويض (1) في (2) نجد

أن: و حسب (1) و (2) إذن:

$$\begin{aligned} &\exists k_2 \in \mathbb{N} \; ; \; c = b.k_2 = (a.k_1).k_2 \; ....(3) \Rightarrow c = a.k_1.k_2 \\ &\Rightarrow \exists k_3 = (k_1.k_2) \in \mathbb{N} \; ; \; c = a.k_3 \Rightarrow a \Re c \end{aligned} \, .$$

و منه: $\Re$ متعدية على E.

و حسب (ا) ، (ب) ، (جـ) أن: $\Re$ هي علاقة تـرتيب على E.

23.2 - الحـواد العليا والحـواد الدنيا لمجموعة:

لتكن E مجموعة مرتبة بعلاقة تـرتيب $\Re$. و ليكن A جزءا من E. و a عنصرا من E.

* نقول عن a انه حـاد من الأعلى لـ A إذا كان: $\forall x \in A : \quad x \Re a$.

* نقول عن a انه حـاد من الأدنى لـ A إذا كان: $\forall x \in A : \quad a \Re x$.

* و نقول عن المجموعة A أنها محدودة من الأعلى (Majorée) إذا كانت مجموعة حوادها العليا غير خالية. بمعنى إذا قبلت على الأقل حـاد من الأعلى .

* و نقول عن المجموعة A أنها محدودة من الأدنى (Minorée) إذا كانت مجموعة حوادها الدنيا غير خالية. بمعنى إذا قبلت على الأقل حـاد من الأدنى.

* و نقول عن المجموعة A أنها محدودة (Bornée) إذا قبلت حـاد من الأعلى و حـاد من الأدنى. بمعنى: $A \; (est \; Borné) \Leftrightarrow \exists a,b \in E \; ; \; \forall x \in A : \quad a \Re x \; \wedge \; x \Re b$.

- **العنصر الأصغر:**

* نقول عن a من A انه عنصر اصغر (عنصر أول) في A إذا كان : $a\,\Re\,x \quad \forall x\in A :$.

و نرمز له بالرمز: $Min(A)=a\in A$ (و يكون a داخل المجموعة A) .

- **العنصر الأكـبر:**

* نقول عن a من A انه عنصر اكـبر (عنصر أخير) في A إذا كان : $x\,\Re\,a \quad \forall x\in A :$.

و نرمز له بالرمز: $Max(A)=a\in A$ (و يكون a داخل المجموعة A) .

- **نتيجة:** ينتج من هذا التعريف:

أن كل عنصر اصغـر هو حـاد من الأدنى. و كل عنصر اكـبـر هو حـاد من الأعلى.

- **مبرهنة:**

إذا قبلت المجموعة A عنصر اصغـر فانه وحيد. وإذا قبلت عنصر اكـبـر فانه وحيد.

24.2 - الحد الأعلى و الحد الأدنى لمجموعة:

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة E.

* نسمي اصغـر عنصر في مجموعة الحـواد الدنيا لـ A في حالة وجودها بالحد الأدنى للمجموعة A . و نرمز له بالرمز: $Inf\,(A)$ أو $Inf_E\,(A)$.

(و $Inf\,(A)$ ليس بالضرورة أن يكون داخل المجموعة A) .

* نسمي اكـبـر عنصر في مجموعة الحـواد العليا لـ A في حالة وجودها بالحد الأعلى للمجموعة A .

و نرمز له بالرمز: $Sup(A)$ أو $Sup_E\,(A)$.

(و $Sup(A)$ ليس بالضرورة أن يكون داخل المجموعة A) .

- **ملاحظة هامة:**

إذا قبلت مجموعة مـا عنصر اصغـر فهو حدها الأدنى. وإذا قبلت عنصر اكـبـر فهو حدها الأعلى.

- **خواص الحد الأعلى و الحد الأسفل في** $\mathbb{R}$:

لتكن A و B مجموعتين من $\mathbb{R}$ من أجل المجموعة $-A=\{-x\,;x\in A\}$ لدينا:

1. $sup(-A)=-inf(A)$ و $inf(-A)=-sup(A)$.

2. إذا كانت $A\cup B$ محدودة فإنه لدينا : $sup(\cup)=Max(sup(A)\,,sup(B))$

و $inf(A\cup B)=Min\,(inf(A)\,,inf\,(B))$.

25.2 - العنصر ألأصغري و العنصر ألأعظمي :

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة E. و λ عنصرا من A.

* نقول عن λ انه عنصر أصغـري إذا كان لا يقبل عنصرا اصغـر منه في A وفق العلاقة $\Re$.

بمعنى: (λ عنصر أصغري) $\Leftrightarrow$ $[\forall x\in A: \quad x\,\Re\,\lambda \Rightarrow x=\lambda]$.

* و نقول عن λ انه عنصر أعظمي إذا كان لا يقبل عنصرا اكـبـر منه في A وفق العلاقة $\Re$.

بمعنى: (λ عنصر أعظمي) $\Leftrightarrow$ $[\forall x\in A: \quad \lambda\,\Re\,x \Rightarrow x=\lambda]$.

- **نتيجة:** ينتج من هذا التعريف أن كل عنصر اصغـر هو عنصر أصغري . و كل عنصر اكـبـر هو عنصر أعظمي .

- **ملاحظة:** العنصران الأصغري والأعظمي لـيسا وحيدين على العموم .

- **أمثلة:**

1 - نعتبر المجموعة أو المجال $A=[-2,+3[\subset\mathbb{R}$. والمعرفة بالعلاقة الشائعة "$\leq$".

ا- عين مجموعة الحـواد العليا و الحـواد الدنيا للمجموعة A ثم اوجد $Inf(A)$ و $Sup(A)$.

ب – هل المجموعة A تملك اصغر عنصر و اكبـر عنصر؟

- الحل:

* مجموعة الحـواد الدنيا للمجموعة A هي : $I_A=\{x;\ x<-2\}=]-\infty,-2[$.

* مجموعة الحـواد العليا للمجموعة A هي : $S_A=\{x;\ x\geq+3\}=[+3,+\infty[$.

* الحد الأدنى للمجموعة A هو: $Inf(A)=-2\in A$.

* الحد الأعلى للمجموعة A هو: $Sup(A)=+3\notin A$.

* المجموعة A تملك اصغر عنصر لكون: $Min(A)=Inf(A)=-2\in A$.

* المجموعة A لا تملك اكبر عنصر لكون: $Max(A)\neq Sup(A)=+3\notin A$.

إذن: $Max(A)$ غير موجود.

2 - نعتبر المجموعة $E=\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. و نعرف على E العلاقة الثنائية $\Re$ كما يلي:

$$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2:\qquad (a,b)\,\Re\,(a',b')\ \Leftrightarrow\ a\leq a'\ \wedge\ b\leq b'.$$

ا- بين أن $\Re$ علاقة تـرتيب على E. و هل هذا التـرتيب كلي ؟

ب – عين مجموعة الحـواد العليا و الحـواد الدنيا للمجموعة

$A=\{(1,2),(3,1)\}\subset\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ثم اوجد $Inf(A)$ و $Sup(A)$.

جـ – هل $Min(A)$ و $Max(A)$ موجودان ؟

- الحل:

ا- إثبات أن علاقة تـرتيب على E :

(ا) - $\Re$ انعكاسية (Réflexive) : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\quad (a,b)\,\Re\,(a,b)$.

لدينا: $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\quad a\leq a\ \wedge\ b\leq b\ \Leftrightarrow\ (a,b)\,\Re\,(a,b)$.

و منه: $\Re$ انعكاسية على E.

(ب) - $\Re$ ضد تناظرية (Anti – Symétrique) :

$$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2:(a,b)\Re(a',b')\wedge(a',b')\Re(a,b)\Rightarrow(a,b)=(a',b').$$

لدينا : $(a,b)\,\Re\,(a',b')\ \Leftrightarrow\ a\leq a'\ \wedge\ b\leq b'\ ....(1)$ و

$(a',b')\,\Re\,(a,b)\ \Leftrightarrow\ a'\leq a\ \wedge\ b'\leq b\ ....(2)$. و حسب (1) و (2) نجد أن:

$$(a\leq a')\wedge(a'\leq a)\ \wedge\ (b\leq b')\wedge(b'\leq b)\ ....(3)\Rightarrow\ a=a'\ \wedge\ b=b'$$
$$\Rightarrow\ (a,b)=(a',b')$$

و منه: $\Re$ ضد تناظرية على E.

(جـ) - $\Re$ متعدية (Transitive) :

$$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2:(a,b)\Re(a',b')\wedge(a',b')\Re(a'',b'')\Rightarrow(a,b)=(a'',b'').$$

لدينا : $(a,b)\,\Re\,(a',b')\ \Leftrightarrow\ a\leq a'\ \wedge\ b\leq b'\ ....(1)$ و

$(a',b')\,\Re\,(a'',b'')\ \Leftrightarrow\ a'\leq a''\ \wedge\ b'\leq b''\ ....(2)$.

و حسب (1) و (2) وأن العلاقة الشائعة "$\leq$"علاقة تـرتيب في $\mathbb{R}$ (علاقة متعدية) نجد أن:

$$(a\leq a')\wedge(a'\leq a'')\ \wedge\ (b\leq b')\wedge(b'\leq b'')\ ....(3)\Rightarrow\ a\leq a''\ \wedge\ b\leq b''$$
$$\Rightarrow\ (a,b)\ \Re\ (a'',b'').$$

و منه: $\Re$ متعدية على E. و حسب (ا) , (ب) , (جـ) أن : $\Re$ هي علاقة ترتيب على E.
- المجموعة $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ليست مرتبة ترتيبا كليا وفق العلاقة $\Re$:
لأنه مثلا العنصران $(-2 , +3)$ و $(1 , 2)$ غير قابلين للمقارنة بالعلاقة $\Re$. بمعنى:
$(1, 2) \not\Re (-2 , +3) \wedge (-2 , +3) \not\Re (1, 2)$. و بالتالي $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ مرتبة ترتيبا جزئيا وفق العلاقة $\Re$.

ب - تعيين مجموعة الحواد العليا و الحواد الدنيا للمجموعة
$A = \{ (1,2),(3,1) \} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

1/ مجموعة الحواد الدنيا للمجموعة A :
- يكون العنصر (a , b) من $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حاد من الأدنى لـ A إذا كان:
$(a,b) \Re (x ,y) \quad : \quad \forall (x ,y) \in A$. و حسب العلاقة المعرفة $\Re$ لدينا:
$a \le x \wedge b \le y$. أي أن: a هو اصغر فاصلة في A : $x = 1$ و b هو اصغر ترتيب في A : $y = 1$. و منه مجموعة الحواد الدنيا للمجموعة A هي:
$I_A = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a < +1 \wedge b < +1 \} =]-\infty,+1[\times]-\infty,+1[$.

2/ مجموعة الحواد العليا للمجموعة A :
- يكون العنصر (α , β) من $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حاد من الأعلى لـ A إذا كان:
$(x ,y) \Re (\alpha,\beta) \quad : \quad \forall (x ,y) \in A$. و حسب العلاقة المعرفة $\Re$ لدينا:
$x \le \alpha \wedge y \le \beta$. أي أن: α هو اكبر فاصلة في A : $x = 3$ و β هو اكبر ترتيب في A : $y = 2$. و منه مجموعة الحواد العليا للمجموعة A هي:
$S_A = \{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 3 < \alpha \wedge 2 < \beta \} =]+3 , +\infty[\times]+2 , +\infty[$.

3/ الحد الأدنى للمجموعة A هو: $Inf (A) = (+1,+1) \notin A$.
4/ الحد الأعلى للمجموعة A هو: $Sup (A) = (+3 , +2) \notin A$.
5/ المجموعة A لا تملك اصغر عنصر و لا اكبر عنصر .
إذن: $Min (A)$ و $Max (A)$ غير موجودين .

3 . **تمرين:** نعرف في مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ علاقة الترتب الشائعة $(\le)$ و لتكن المجموعة $A = \{\frac{n+1}{n+2} \quad , n \in \mathbb{N}\}$، عين في حالة الوجود الحد الأعلى $sup(A)$، الحد الأسفل $inf (A)$، العنصر الأكبر $Max(A)$، و العنصر الأصغر $Min(A)$ للمجموعة A.

الحل : بإستعمال طريقة الحصر نجد: $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{1}{2} \le \frac{n+1}{n+2} < 1$ ومنه نستنتج أن:
$A = \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{2} \quad 1\right[$ إذن $Maj_A = \{x \in \mathbb{Q} \, ; x \ge 1\}$ و منه $sup(A) = 1$
(لأن 1 له علاقة مع جميع عناصر مجموعة الحواد العليا) و $Max(A)$ غير موجود لأن $1 \notin A$
من جهة أخرى لدينا $Min_A = \left\{x \in \mathbb{Q} \ ; x \le \frac{1}{2}\right\}$ ، إذن; $inf (A) = \frac{1}{2}$ (لأن $\frac{1}{2}$ له علاقة مع جميع عناصر الحواد الدنيا) و بما أن $\frac{1}{2} \in A$ فإن $Min(A) = \frac{1}{2}$.

26.2 - تعريف التطبيق: لتكن F , E مجموعتين.

نسمي تطبيقا من E نحو F كل علاقة تسمح بان ترفق بكل سابقة x من E لها صورة واحدة و واحدة فقط y من F. و نرمز له بالرمز : $\underset{X \to f(x)=y}{f : E \to F}$. و نكتب:

$(\text{تطبيق } f) \Leftrightarrow (\forall x \in E , \exists y \in F : y = f(x))$.

- ملاحظات:

1 . إذا وجد عنصر واحد على الأقل من مجموعة السوابق ليس له صورة فان: f ليس تطبيق.

2 . إذا وجد في مجموعة السوابق عنصر واحد على الأقل له أكثر من صورة فان: f ليس تطبيق.

3 . يمكن أن يكون لعنصر واحد من مجموعة الصور له عدة سوابق .

4 . يمكن أن يكون لعنصر من مجموعة الصور أن لا يكون صورة لأية سابقة .

27.2 - تعريف الدالة: لتكن F , E مجموعتين.

نسمي دالة من E نحو F كل علاقة تسمح بان ترفق بكل سابقة x من E لها صورة واحدة على الأكثر y من F. و نرمز لها بالرمز: $\underset{X \to f(x)=y}{f : E \to F}$.

- اقتصار تطبيق أو دالة:

لتكن F , E مجموعتين. و E' مجموعة جزئية غير خالية من E.

نسمي اقتصار تطبيق أو الدالة $\underset{X \to f(x)=y}{f : E \to F}$ على المجموعة E' تطبيق أو الدالة: $\underset{X \to f(x)=y}{g : E' \to F}$. و نرمز لها بالرمز: $g = f_{/E'}$.

- تمديد تطبيق أو دالة:

لتكن F , E مجموعتين. و E' مجموعة تحوي المجموعة E. و $f : E \to F$ تطبيقا من E نحو F. نقول عن تطبيق f من E' نحو F انه تمديد للتطبيق f إذا كان f هو اقتصار التطبيق f على E. بمعنى: $\forall x \in E : f(x) = f(x)$.

- أمثلة:

1. إن f ليس تطبيقا: $\underset{n \to f(n)=n-3}{f : \square \to \square}$. بل f دالة .

2. إن g تطبيق و دالة: $\underset{x \to g(x)=x^2+1}{g : \square \to \square}$.

3. إن h ليس تطبيقا: $\underset{x \to h(x)=\frac{x}{x-4}}{h : \square \to \square}$. بل f دالة .

- ملاحظة: كل تطبيق هو دالة . و العكس غير صحيح .

- بعض النماذج من التطبيقات:

1. التطبيق المطابق:

لتكن F , E مجموعتين. نسمي التطبيق $f \ : \underset{x \to f(x) = x}{E \ \to E}$ التطبيق المطابق للمجموعة $E^{/}$. و

نرمز له بالرمز: $Id_E : \ E \to E \ ; \ x \ \to x$.

2. التطبيق الثابت: نقول عن تطبيق f من E نحو F انه ثـابت إذا وجد عنصر $\lambda \in F$ بحيث:

$\forall x \in E : \ \ f(x) \ = \ \lambda$.

3. التطبيق المـمـيـز:

ليكن $A \subset E$ جـزءا من E . نسمي التطبيق المـمـيـز لـ A التطبيق الذي نرمز له بالرمز: χ_A

المعرف من المجموعة E نحو المجموعة $\{ \ 0 \, , 1 \ \}$ كما يلي: $\chi_A(x) \ = \begin{cases} 1 \ ; \ x \in A \\ 0 \ ; \ x \notin A \end{cases}$.

- الصورة المباشرة لمجموعة وفق تطبيق:

- تعريف: ليكن f تطبيقا من E نحو F . و ليكن $A \subset E$ جـزءا من E.

نسمي الصورة المباشرة للمجموعة A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F التي نرمز لها

بالرمز: $f\,(A)$ المعرفة بـ: $\begin{aligned} f\,(A) &= \{ \ y \in F \ \ ; \ \exists x \in A : \ y \ = f\,(x) \ \} \\ &= \{ \ f\,(x) \ : \ \ \ x \in A \ \ \ \} \end{aligned}$.

- حالات خاصة:

1. الصورة المباشرة للمجموعة الخالية اصطلاحا هي المجموعة الخالية . أي: $f\,(\varnothing) = \varnothing$.

2. $\forall \ \alpha \in E : \ \ f\,(\{\alpha\}) \ = \ \{ \ f\,(\alpha) \ \}$.

3. المجموعة $f\,(\,E\,)$ تسمى صورة التطبيق f . و نكتب: $\text{Im}(f\,) \ = \ f\,(\,E\,)$.

- خواص:

ليكن f تطبيقا من E نحو F. و ليكن $A \subset E$ و $B \subset E$ جزأين من E. لدينا الخواص التالية:

-1 $A \ \subset \ B \ \ \Rightarrow \ \ f\,(A) \ \subset \ f\,(B)$.

-2 $f\,(A \cup B) \ \ = \ \ f\,(A) \ \cup \ f\,(B)$.

-3 $f\,(A \cap B) \ \ \subset \ \ f\,(A) \ \cap \ f\,(B)$.

- ملاحظة هامة: نشير إلى انه لا توجد قاعدة محددة للمقارنة بين صورة المتممة و متممة الصور

$f\,(C_E\,A)$ و $C_F\left(f\,(A)\right)$.

- أمثلة:

1. ليكن التطبيق: $f : \square \to \square \ : \ x \ \to f\,(x) = |x|$.

- احسب ما يلي: $f\,(\,\square\,)$ و $f\,(\,\square\,)$.

- الحل:

- الصورة المباشرة للمجموعتين:

ا. $f\,(\,\square\,) = \{ \ f\,(x)\,; \ x \in \square \ \ \} = \{ \ |x|\,; \ x \in \square \ \ \} = \square$.

ب. $f\,(\,\square\,) = \{ \ f\,(x)\,; \ x \in \square \ \ \} = \{ \ |x|\,; \ x \in \square \ \ \} = \square$.

2. ليكن التطبيق: $f : □ \to □ \; : \; x \to f(x) = x+1$.

- احسب ما يلي : $f(□)$ و $f(□)$.

- الحل:

- الصورة المباشرة للمجموعتين:

ا. $f(□) = \{ f(x) ; \; x \in □ \} = \{ x+1 ; \; x \in □ \} = □^*$.

ب. $f(□) = \{ f(x) ; \; x \in □ \} = \{ x+1 ; \; x \in □ \} = □$.

- الصورة العكسية لمجموعة وفق تطبيق:

- تعريف: ليكن f تطبيقا من E نحو F. و ليكن $B \subset F$ جزءا من F. نسمي الصورة العكسية للمجموعة B وفق التطبيق f المجموعة الجزئية لعناصر من E التي صورتها تنتمي إلى B . و نرمز لها بالرمز: $f^{-1}(B)$ المعرفة بـ: $f^{-1}(B) = \{ x \in E \; ; \; f(x) \in B \} \subset E$.

- ملاحظة هامة: نشير إلى الرمز f^{-1} لا يعني بالضرورة أن التطبيق f يقبل تطبيقا عكسيا.

- حالات خاصة:

1. الصورة العكسية للمجموعة الخالية اصطلاحا هي المجموعة الخالية. أي : $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

2. $\forall b \in F : \; f^{-1}(\{b\}) = \{ x \in E : f(x) = b \}$.

3. المجموعة العكسية: $f^{-1}(F) = E$.

- خواص:

ليكن f تطبيقا من E نحو F. و ليكن $D \subset F$ و $K \subset F$ جزأين من F. لدينا الخواص التالية:

-1 $f^{-1}(D \cup K) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(K)$.

-2 $f^{-1}(D \cap K) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(K)$.

-3 $f^{-1}(C_F D) = C_E \left(f^{-1}(D) \right)$.

- مثال: ليكن التطبيق: $f : □ \to □ \; : \; x \to f(x) = |x|$.

- احسب مايلي: $f^{-1}(□)$ و $f^{-1}(□)$.

- الحل:

- الصورة العكسية للمجموعتين:

ا. $f^{-1}(□) = \{ x \in □ \; ; \; f(x) \in □ \} = \{ x \in □ \; ; \; |x| \in □ \} = □$.

ب. $f^{-1}(□) = \{ x \in □ \; ; \; f(x) \in □ \} = \{ x \in □ \; ; \; |x| \in □ \} = □$.

- تركيب التطبيقات:

- تعريف: لتكن G ، F ، E ثلاث مجموعات و f تطبيقا من $D_f \subset E$ نحو $f(D_f) \subset F$ و g تطبيقا من $D_g \subset F$ نحو G. نسمي مركب التطبيقين f و g التطبيق الذي نرمز له بالرمز: $g \circ f$ المعرف من المجموعة E نحو G كما يلي:

$$g \circ f : \; \underbrace{D_f \subset E \xrightarrow{f} f(D_f) \subseteq D_g \subset F \xrightarrow{g} G}_{} .$$

$$\forall x \in E : \; (g \circ f)(x) = g[f(x)] .$$

- ملاحظات وخواص:

لتكن $E\ ,\ F$ مجموعتين.

1. نرمز بـ: $F\left(E,F\right)$ إلى مجموعة التطبيقات المعرفة من E نحو F. و بـ: $F\left(E\right)$ إلى مجموعة التطبيقات المعرفة من E نحو E. عندئذ لدينا ما يلي:

ا - $\forall f \in F\left(E,F\right): \quad Id_F \circ f = f \quad \wedge \quad f \circ Id_E = f$.

ب – إذا كان f عنصرا من $F\left(E\right)$. نضع اصطلاحا: $f^{0} = Id_E$. و نعرف:

$\forall n \in \mathbb{N}^* : f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ fois}$.

ج - ليكن f عنصرا من $F\left(E,F\right)$ و g عنصرا من $F\left(F,E\right)$. عندئذ يمكننا تعريف التطبيق $g \circ f$ من E نحو E , و تعريف التطبيق $f \circ g$ من F نحو F.

إن هذين التطبيقين مختلفين على العموم (باعتبار $E \neq F$) .

د - ليكن f و g عنصرين من $F\left(E\right)$. نقول عن f و g أنهما تبديليان (متبادلان) إذا كان: $f \circ g = g \circ f$.

ه - التطبيق Id_E تبديلي مع جميع التطبيقات المعرفة من E نحو E .

و – القوى النونية f^n لتطبيق f متبادلة مع بعضها : $f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$.

28.2 - التطبيقات المتباينة و الغامرة و المتقابلة:

لتكن $E\ ,\ F$ مجموعتين و f تطبيقا من E نحو F.

1 / التطبيق المتباين:

تعريف:

- نقول عن التطبيق f انه متباين إذا كان من اجل كل صورة y من F له سابقة واحدة x على الأكثر من E.
- وبتعريف مكافئ إذا كان:

$\forall x_1 , x_2 \in E : \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$.

- و بوضع ثالث إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in E : \quad f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$.

2 / التطبيق الغامر:

تعريف:

- نقول عن التطبيق f انه غامر إذا كان من اجل كل صورة y من F له سابقة x على الأقل من E.
- وبتعريف مكافئ إذا كان: $\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E : \quad y = f\left(x\right)$.
- وبتعريف مكافئ: (التطبيق f انه غامر من E نحو F) $\Leftrightarrow$ ($f\left(E\right) = F$) .

3 / التطبيق التقابلي:

تعريف:

نقول عن التطبيق f انه تقابلي إذا كان من اجل كل صورة y من F له سابقة وحيدة x من E.

- وبتعريف مكافئ إذا كان: $\forall y \in F\ ,\ \exists! x \in E : \quad y = f\left(x\right)$.
- وبتعريف مكافئ: (التطبيق f انه تقابلي من E نحو F) $\Leftrightarrow$ (f متباين و غامر) .

4 / التطبيق العكسي لتطبيق تقابلي:

- لتكن $E\ ,\ F$ مجموعتين و f تطبيقا من E نحو F.
- إذا كان f تطبيقا تقابليا . فيمكننا تعريف تطبيق نرمز له بالرمز: f^{-1} من F نحو E كما يلي:

$\forall x \in E\ ,\ \forall y \in F : \quad x = f^{-1}\left(y\right) \Leftrightarrow y = f\left(x\right)$.

يدعى f^{-1} التطبيق العكسي للتطبيق f و هو تـقـابـل أيضـا . و لدينا الخواص التالية:

$(f^{-1})^{-1} = f$ ، $f \circ f^{-1} = Id_F$ ، $f^{-1} \circ f = Id_E$.

- نظرية:

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تابعا معرفا على E .

يكون (التطبيق f انه تـقـابـلي من E نحو F) $\Leftrightarrow$ (f متباين و غامر) $\Leftrightarrow$ (و جد تطبيق g من F نحو E بحيث: $f \circ g = Id_F \wedge g \circ f = Id_E$. أي أن:

f و g تطبيقين متعاكسين: $f^{-1} = g$ أو $g^{-1} = f$) .

- خـواص عـامة:

ليكن f عنصرا من $F(E,F)$ و g عنصرا من $F(F,E)$.

1 . إذا كان f متباين فان: $\forall A , B \in P(E): \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

2 . إذا كان f و g متباينين (غامرين على التوالي) فان: $g \circ f$ متباين (غامر على التوالي) .

3 . إذا كان f و g تقابليين فان: $g \circ f$ تقابلي . ولدينا : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4 . إذا كان $g \circ f$ متباينا فان: f متباين .

5 . إذا كان $g \circ f$ غامرا فان: g غامر .

6 . حتى يكون f تقابلا يكفي ايجاد تطبيق g من $F(F,E)$ بحيث:

$f \circ g = Id_F \wedge g \circ f = Id_E$.

- أمثلة:

1. نعتبر التطبيق: $f : \mathbb{R}_+ \to]0,1] : x \to f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

- بين أن: f تقابلي . و اوجد عبارة التطبيق العكسي f^{-1} .

- الحل: - إثبات أن f تقابلي:

1 / f متباين: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ : \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ : \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1}.$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

2 / f غامر: $y = f(x) \quad : \quad \exists x \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad \forall y \in]0,1]$. نحل المعادلة:

$$y = f(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x.y + y = 1 \Leftrightarrow x.y = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}.$$

نلاحظ انه: $\forall y \in]0,1] \quad , \quad \exists x = \dfrac{1-y}{y} \in \mathbb{R}_+ \quad : \quad y = f(x)$.

و منه: f غامر على $\mathbb{R}_+$.

- بما أن: f متباين و غامر على $\mathbb{R}_+$ فان: f تقابلي .

- إيجاد عبارة التطبيق العكسي f^{-1} :

$$f^{-1} :]0,1] \to \mathbb{R}_+ \quad : \quad y \to f^{-1}(y) = x = \frac{1-y}{y}.$$

و هو تقابلي على $]0,1]$.

التوابع العددية لمتغير حقيقي واحد

- النهايات
- الإستمرار
- الإشتقاق
- نظرية رول
- نظرية التزايدات المنتهية

1.3 . مفاهيم أولية:

- **تعريف:** نسمي تابعا حقيقيا لمتغير حقيقي كل تطبيق f معرفا على $\mathbb{R}$ أو على جزء D من $\mathbb{R}$ و يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$. وعندها نسمي ذلك الجزء D : بمجموعة تعريف التابع f و نرمز لها بالرمز: D_f. و نعبر عن تابع f بالكتابة: $\begin{array}{l} f : D \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) \end{array}$.

و نسمي مجموعة الأعداد $f(x)$ عندما يمسح x المجموعة D بمجموعة قيم التابع f، أو صورة التابع f ونرمز لها بالرمز: $\operatorname{Im}g(f)$. فلدينا إذن:

$$\operatorname{Im}g(f) = \{ f(x);\quad x \in D \}.$$

- أمثلة:

1 - العلاقة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ تابع معرف على المجال $[-1,+1]$ و يأخذ قيمه في المجال $[0,+1]$.

2 - العلاقة $f(x) = \sqrt{x}$ تابع معرف على المجال $\mathbb{R}_+$ و يأخذ قيمه في المجال $\mathbb{R}_+$.

3 - العلاقة $f(x) = \sqrt{-x^2}$ تابع معرف على المجموعة $D = \{0\}$ و يأخذ قيمه في $D^* = \{0\}$.

4 - العلاقة $f(x) = Sin(x)$ تابع معرف على المجال $\mathbb{R}$ و يأخذ قيمه في المجال $[-1,+1]$.

بعض النماذج من التوابع:

1 - التوابع الزوجية و التوابع الفردية:

ليكن D جزء من $\mathbb{R}$ و f تابعا معرفا على D نحو $\mathbb{R}$.

ا - نقول عن التابع f انه زوجي إذا كان:

1) D متناظر بالنسبة للمبدأ 0 . أي : $(-x) \in D \iff \forall x \in D$.

2) $\forall x \in D\ ;\quad f(-x) = +f(x)$

ب - نقول عن التابع f انه فردي إذا كان:

1) D متناظر بالنسبة للمبدأ 0 . أي : $(-x) \in D \iff \forall x \in D$.

2) $\forall x \in D\ ;\quad f(-x) = -f(x)$.

أمثلة :

1- التوابع التالية زوجية: $f(x) = |x|$ ، $g(x) = Cos(x)$ ، $h(x) = x^4 + 2x^2 - 1$.

2 - التوابع التالية فردية: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ، $g(x) = Sin(x)$ ، $h(x) = x^3 + 2x$.

3 - التوابع $f(x)=ax+b\ ,\ a,b\in\mathbb{R}$ معرفة على $\mathbb{R}$ ليست زوجية و لا فردية .
4 - التابع $f(x)=|x|$ المعرف على المجال $\mathbb{R}_+$ ليس زوجي و لا فردي .
5 - التابع $f(x)=x^2$ المعرف على المجال $\mathbb{R}_-$ ليس زوجي و لا فردي .

مبرهنة 1:
ليكن f تابعا معرفا على D نحو $\mathbb{R}$. عندئذ التابع f يكتب بطريقة وحيدة على شكل مجموع تابعين إحداهما زوجي والأخر فردي $f=g+h$. حيث : $\forall x\in D\ ;\ \ f(x)=g(x)+h(x)$ مع:
$g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ ، $h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.
وعندها نسمي g الجزء الزوجي للتابع f و نسمي h الجزء الفردي للتابع f .

ملاحظة: التابع الوحيد الزوجي و الفردي في أن واحد هو التابع المعدوم .

مبرهنة 2:
ليكن f و g تابعين معرفين على مجال I نحو $\mathbb{R}$ زوجيين أو فرديين .
ا - إذا كان التابعيين f ، g نفس الشفعية فان: $f\cdot g$ زوجي .
- و إذا كان التابعيين f ، g من شفعيتين مختلفتين فان: $f\cdot g$ فردي.
ب - التابع $\frac{1}{f}$ له نفس شفعية التابع f .
جـ - ليكن α و β سلميين من $\mathbb{R}$. إذا كان f و g تابعين زوجيين (فرديين على التوالي) فان:
$\alpha.f+\beta\cdot g$ زوجي (فردي على التوالي).
د - إذا كان التابع f تقابليا من D في D و فرديا فان: تابعه العكسي f^{-1} تقابلي فردي .
ه - إذا كان التابع f زوجيا فان: التابع $h\circ f$ زوجي مهما كان التابع h.
و - إذا كان التابع f فرديا و كان التابع g فرديا أو زوجيا فان: للتابع $g\circ f$ نفس شفعية التابع g .

2 - التوابع الدورية:
تعريف:
ليكن D جزءا غير خال من $\mathbb{R}$. و f تابعا معرفا من D نحو $\mathbb{R}$. و ليكن α عددا حقيقيا موجبا تماما . (α هو اصغر عدد حقيقي موجب تماما)
نقول أن التابع f انه α – دوري إذا كان : $\forall x\in D\ ,\ (x+\alpha)\in D\ \ ;\ \ f(x+\alpha)=f(x)$.

خواص:
1 - إذا كان التابع f هو α – دوريا فانه من اجل كل $k\in\mathbb{Z}^*$ يكون: f هو أيضا $k.\alpha$– دوريا.
2 - إذا كان التابعان f ، g هما α – دوريين فان: التابع $\lambda.f+\mu\cdot g$ يكون α – دوريا.
3 - إذا كان التابع f هو α – دوريا فان التابع $\frac{1}{f}$ يكون α – دوريا.
4 - إذا كان التابع f هو α – دوريا فانه من اجل كل تابع g يكون: التابع $g\circ f$ α – دوريا.

ملاحظات:
1 - إذا كان التابع f دوريا فإننا نستعمل عادة اصغر قيمة موجبة تماما للعدد α في حالة وجودها.
نسمي هذه القيمة : دور للتابع f .

تنبيه: نشير إلى اصغر قيمة موجبة تماما للعدد α ليست بالضرورة موجودة . فعلى سبيل المثال:

الدالة المميزة للمجموعة $\mathbb{Q}$ المعرفة بـ : $f(x)=\begin{cases}1\ ;\ si\ x\in\mathbb{Q}\\0\ ;\ si\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ تقبل أي عدد ناطق كدور لها . لكن لا يمكن تعيين اصغر عدد ناطق موجب يحقق مفهوم الدور وفق هذه الدالة .

2 - ليكن f تابعا α_1 – دوري و g تابعا α_2 – دوري . و لنفترض أن: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ عدد ناطق .

عندئذ التابعان: $f+g$, $f\cdot g$ دوريان . فمثلا : إذا كان $\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$ و $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ ولدينا

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}$ فان التابعان: $f+g$, $f\cdot g$ هما $\alpha_1=\frac{3\pi}{4}$ دوريان .

3 - إذا كان التابع f هو α – دوريا فان التابع: $g(x)=f(\lambda x+\mu)$ هو $\frac{\alpha}{|\lambda|}$ – دوريا.

أمثلة:

1- التابع: $f(x)=Sin(x)$ دوري و دوره $\alpha=2\pi$.

2 - التابع: $g(x)=Cos(x)$ دوري و دوره $\alpha=2\pi$.

3 - التابع: $h(x)=tg(x)$ دوري و دوره $\alpha=\pi$.

4 - التابع : $\varphi(x)=ctg(x)$ دوري و دوره $\alpha=\pi$.

3 - التوابع الرتيبة:

تعريف علاقة الترتيب:

ليكن I مجالا غير خال من $\mathbb{R}$. من اجل كل عنصرين f , g من $F(I,\mathbb{R})$. نعرف العلاقة $\leq$ كما يلي: $f\leq g \Leftrightarrow \forall x\in I\ ;\ f(x)\leq g(x)$.

- إن العلاقة $\leq$ علاقة ترتيب جزئي في $F(I,\mathbb{R})$. و يمكننا أيضا تعريف الترتيب الجزئي على $F(I,\mathbb{R})$ التي نرمز لها عادة بالرمز: $f\geq g \Leftrightarrow g\leq f$.

تعريفات:

ليكن f تابعا معرفا على مجال I في $\mathbb{R}$. نقول عن f انه:

1 - متزايد , إذا كان: $\forall x\in I\ ,\forall y\in I:\ (x\leq y)\Rightarrow f(x)\leq f(y)$. أو

$$\forall x\in I\ ,\forall y\in I\ ;\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\geq 0 .$$

2 - متزايد تماما , إذا كان: $\forall x\in I\ ,\forall y\in I:\ (x<y)\Rightarrow f(x)<f(y)$.

3 - متناقص , إذا كان: $\forall x\in I\ ,\forall y\in I:\ (x\leq y)\Rightarrow f(x)\geq f(y)$. أو

$$\forall x\in I\ ,\forall y\in I\ ;\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq 0 .$$

4 - متناقص تماما , إذا كان: $\forall x\in I\ ,\forall y\in I:\ (x<y)\Rightarrow f(x)>f(y)$.

5 - رتيب , إذا كان: متزايدا أو متناقصا .

6 - رتيب تماما , إذا كان: متزايدا تماما أو متناقصا تماما .

ملاحظات:

ا - فقط التوابع الثابتة: متزايدة و متناقصة في أن واحد.

ب - للتعبير على أن التابع ليس رتيبا يمكننا كتابة:

$$\exists (x , y , z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [x , y] \wedge f (z) \notin [f (x) , f (y)] .$$

جـ - ليكن f تابعا رتيبا . القول بان f تابعا ليس رتيبا تماما يعني انه توجد قطعة $[a , b]$ محتواة في المجال I مع $a < b$ بحيث يحافظ f على قيمة ثابتة عليها .

د - كل تابع f رتيبا تماما على مجال I في $\mathbb{R}$ فان: التابع f متباين على المجال I .

ه - كل تابع f رتيبا تماما ومستمرا على مجال I في $\mathbb{R}$ فان: التابع f تقابلي على المجال I نحو $f (I)$.

مثال: التابع: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^3$ رتيبا تماما على $\mathbb{R}$ فان: التابع f متباين على $\mathbb{R}$.

خواص:

ليكن f ، g تابعيين رتيبين على مجال I في $\mathbb{R}$.

1 - إذا كان للتابعين f ، g نفس الرتابة فان: $f + g$ رتيب و له نفس الرتابة.

2 - إذا كان التابعين f ، g رتيبين تماما فان: $f + g$ رتيب تماما .

3 - إذا كان التابعين f ، g موجبين متزايدين فان: $f \cdot g$ موجب متزايد .

4 - إذا كان التابعين f ، g موجبين متناقصين فان: $f \cdot g$ موجب متناقص.

5 - إذا كان التابعين f ، g سالبين متزايدين فان: $f \cdot g$ موجب متناقص.

6 - إذا كان التابعين f ، g سالبين متناقصين فان: $f \cdot g$ موجب متزايد.

ملاحظات:

ا- في الحالات الأخرى غير المذكورة آنفا لا يمكننا قول أي شي .

ب - ليكن f تابعا رتيبا على مجال I في $\mathbb{R}$. و $\lambda \in \mathbb{R}$.

1 - إذا كان $\lambda \geq 0$ فان: $\lambda \cdot f$ له نفس رتابة f .

2 - إذا كان $\lambda \leq 0$ فان: $\lambda \cdot f$ له رتابة معاكسة لرتابة f (مثل f و $-f$) .

مبرهنة 1: (مقلوب تابع رتيب)

ليكن f تابعا رتيبا على مجال I في $\mathbb{R}$. و لنفرض أن f لا ينعدم على I و يحافظ على إشارة ثابتة على هذا المجال. عندئذ: التابع $\frac{1}{f}$ رتيب على I و ذو رتابة معاكسة لرتابة f .

مبرهنة 2: (مركب تابعين رتيبين)

ليكن I و J مجالين غير خاليين من $\mathbb{R}$. و f تابعا من I في $\mathbb{R}$ بحيث: $f (I) \subseteq J$.
و g تابعا من J في $\mathbb{R}$. عندئذ: التابع المركب $g \circ f$ معرف على I و لدينا:

ا - إذا كان للتابعين f ، g نفس الرتابة فان: $g \circ f$ متزايد .

ب - إذا كان f ، g متعاكسي الرتابة فان: $g \circ f$ متناقص .

- الخاصيتان (ا) و (ب) تبقيان قائمتان من اجل الرتابة التامة .

أمثلة:

1 - ليكن التابع: $f (x) = x^2 + 1$. التابع f متزايد على المجال $] 0 , +\infty [$ و متناقص على المجال $] -\infty , 0 [$ و هو رتيب تماما على هذين المجالين.

2 - ليكن التابعان: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ ; x \to f (x) = 4x^4 + 1$ ، $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ ; x \to g (x) = \sqrt{x}$. لدينا التابعان متزايدان على $\mathbb{R}_+$. وعليه فالتابع:

$(g\circ f)(x)=\sqrt{4x^4+1}$ متزايد على $\mathbb{R}_+$. حيث: $\mathbb{R}_+ \xrightarrow[g\circ f]{\ \xrightarrow{f}\mathbb{R}_+\xrightarrow{g}\mathbb{R}_+\ } \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.

- التابع: $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ متناقص على $\mathbb{R}_+$. حيث: $\mathbb{R}_+ \rightarrow\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$.

- التابع: $(g\circ\varphi)(x)=\sqrt{\dfrac{1}{4x^4+1}}$ متناقص على $\mathbb{R}_+$. حيث:

$\mathbb{R}_+ \xrightarrow[g\circ \varphi]{\ \xrightarrow{\varphi}\mathbb{R}_+\xrightarrow{g}\mathbb{R}_+\ } \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$.

- التابع: $(g\circ f)(x)=\sqrt{4x^4+1}$ متناقص على $\mathbb{R}_-$.ذلك لان التابع f متناقص على $\mathbb{R}_-$.

4 - التوابع المحدودة:

تعريف: ليكن f عنصرا من $F(I,\mathbb{R})$.

1 - نقول عن التابع f انه محدود من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث:
$\forall x\in I\ ;\ f(x)\le\lambda$. و هذا يكافئ قولنا أن المجموعة $f(I)=\{f(x)\ ;\ x\in I\}$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$. و عندها نرمز بـ $\underset{I}{Sup}\,f$ أو $\underset{x\in I}{Sup}\,f(x)$ للحد الأعلى للمجموعة $f(I)$ و نسمي هذا المقدار بالحد الأعلى للتابع f على المجال I في $\mathbb{R}$.

2 - نقول عن التابع f انه محدود من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث:
$\forall x\in I\ ;\ f(x)\ge\lambda$. و هذا يكافئ قولنا أن المجموعة $f(I)=\{f(x)\ ;\ x\in I\}$ محدودة من الأدنى في $\mathbb{R}$. و عندها نرمز بـ $\underset{I}{Inf}\,f$ أو $\underset{x\in I}{Inf}\,f(x)$ للحد الأدنى للمجموعة $f(I)$ و نسمي هذا المقدار بالحد الأدنى للتابع f على المجال I في $\mathbb{R}$.

3 - نقول عن التابع f انه محدود إذا وجد عددين حقيقيين λ ، μ بحيث:
$\forall x\in I\ ;\quad \mu\le f(x)\le\lambda$.

ملاحظات و خواص:

ليكن f ، g عنصرين من $F(I,\mathbb{R})$.

1 - يكون التابع انه محدودا إذا وفقط إذا كان: $|f|$ محدودا من الأعلى .

2 - إذا كان f و g محدودين من الأعلى فان: $f+g$ محدود من الأعلى و لدينا:
$\underset{I}{Sup}(f+g)\le\underset{I}{Sup}(f)+\underset{I}{Sup}(g)$.

3 - إذا كان f و g محدودين من الأدنى فان: $f+g$ محدود من الأدنى و لدينا:
$\underset{I}{Inf}(f+g)\ge\underset{I}{Inf}(f)+\underset{I}{Inf}(g)$.

4 - إذا كان التابع f محدودا من الأعلى (محدودا من الأدنى على التوالي) فان:
$(-f)$ محدودا من الأدنى (محدودا من الأعلى على التوالي). و العكس صحيح .
ولدينا: $\underset{I}{Sup}(-f)=-\underset{I}{Inf}(f)$ ، $\underset{I}{Inf}(-f)=-\underset{I}{Sup}(f)$.

5 - ليكن λ سلميا من $\mathbb{R}_+^*$.

- إذا كان f محدودا من الأعلى فان: $(\lambda\cdot f)$ محدودا من الأعلى و لدينا:
$\underset{I}{Sup}(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot\underset{I}{Sup}(f)$.

- إذا كان f محدودا من الأدنى فان: $(\lambda\cdot f)$ محدودا من الأدنى و لدينا:
$\underset{I}{Inf}(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot\underset{I}{Inf}(f)$.

6 - إذا كان f و g محدودين فان: $\forall (\lambda , \mu)\in \mathbb{R}^2$ يكون التابع $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ محدودا .

أمثلة:

1 - التابعان: $f(x) = Sin(x)$ و $g(x) = Cos(x)$ محدودان على $\mathbb{R}$. ذلك أن:

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad -1 \le Sin(x) \le +1$ و $\forall x \in \mathbb{R} : \quad -1 \le Cos(x) \le +1$.

2 - التابع: $h(x) = x^2 + 1$ محدود من الأدنى بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

3 - التابع: $\varphi(x) = -\sqrt{x}$ محدود من الأعلى بالعدد 0 على $\mathbb{R}_+$.

2.3 . القيم القصوى للتابع:

تعريف 1:

ليكن f تابعا معرفا على مجال I و يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

* نقول عن f انه يتمتع بـذروة مطلقة عند $x_0 = \alpha$ إذا كان: $\forall x \in I \; ; \quad f(x) \le f(\alpha)$.

* نقول عن f انه يتمتع بـحضيض مطلق عند $x_0 = \alpha$ إذا كان: $\forall x \in I \; ; \quad f(x) \ge f(\alpha)$.

و في كلا الحالتين: نقول أن التابع f انه يتمتع بـقيمة قصوى مطلقة عند $x_0 = \alpha$.

ملاحظات:

1 - (التابع f انه يتمتع بـذروة مطلقة عند $x_0 = \alpha$) $\Leftrightarrow$

(التابع f محدود من الأعلى على I و أن $\underset{I}{Sup} f = f(\alpha)$) .

نعبر عن هذا بقولنا: أن التابع f يدرك حده الأعلى على I عند $x_0 = \alpha$. و يمكننا عندئذ الكتابة:

$\underset{I}{Max} f = f(\alpha)$. و بالتالي: $\underset{I}{Sup} f = f(\alpha)$.

2 - (التابع f انه يتمتع بـحضيض مطلق عند $x_0 = \alpha$) $\Leftrightarrow$

(التابع f محدود من الأدنى على I و أن $\underset{I}{Inf} f = f(\alpha)$) .

نعبر عن هذا بقولنا: أن التابع f يدرك حده الأدنى على I عند $x_0 = \alpha$. و يمكننا عندئذ الكتابة:

$\underset{I}{Min} f = f(\alpha)$. و بالتالي : $\underset{I}{Inf} f = f(\alpha)$.

تعريف 2:

ليكن f تابعا معرفا على مجال I و يأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

* نقول عن f انه يتمتع بـذروة محـلية عند $x_0 = \alpha$ إذا كان:

$\exists \varepsilon > 0 \; , \; \forall x \in I \cap [\, \alpha - \varepsilon \; , \; \alpha + \varepsilon \,] ; \quad f(x) \le f(\alpha)$.

بمعنى انه في جوار التابع f يأخذ قيما اقل أو تساوي $f(\alpha)$.

* نقول عن f انه يتمتع بـحضيض محـلي عند $x_0 = \alpha$ إذا كان:

$\exists \varepsilon > 0 \; , \; \forall x \in I \cap [\, \alpha - \varepsilon \; , \; \alpha + \varepsilon \,] ; \quad f(x) \ge f(\alpha)$.

بمعنى انه في جوار التابع f يأخذ قيما اكبر أو تساوي $f(\alpha)$.

ملاحظة : تدعى الذروة المحلية أو الحضيض المحلي بقيمة قصوى محلية . و كل قيمة قصوى مطلقة هي أيضا قيمة قصوى محلية , و العكس غير صحيح .

3.3 . النهايات للتابع:

تعريف نهاية تابع:

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة x_0.

- نقول عن f أنها تملك نهاية منتهية l عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرط: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$,

أي إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

مثال:

ليكن التابع: $f : I = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \to f(x) = 2x - 1$ معرف على $I = \mathbb{R}$.

لنبين باستخدام تعريف النهاية أن: $\lim_{x \to x_0 = 1} f(x) = 1 = l$. لدينا تعريفا أن:

$$\lim_{x \to x_0 = 1} f(x) = 1 = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon .$$

لنحدد المقدار: $|f(x) - 1| = |(2x - 1) - 1| = |2x - 2| = 2|x - 1|$. و منه:

حتى يكون: $|f(x) - 1| < \varepsilon$ يلزم و يكفي أن يكون: $2|x - 1| < \varepsilon$ أي: $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

إذن يكفي اخذ: $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ من اجل تقارب التابع $f(x)$ نحو $l = 1$ عندما x ينتهي آو يؤول إلى $x_0 = 1$.

نظرية: وحدانية النهاية

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة x_0.

إذا كانت f تملك نهاية منتهية l عند النقطة x_0 فإنها: وحيدة .

البرهان:

لنفرض أن: f تملك نهايتين منتهيتين l و l' عند النقطة x_0 و $l \neq l'$. أي:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \ldots(1)$$

و

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \ldots(2)$$

ونميز ما يلي: إذا كان: $\alpha_1 < \alpha_2$ فان: $[x_0 - \alpha_1 , x_0 + \alpha_1] \subset [x_0 - \alpha_2 , x_0 + \alpha_2]$.

وإذا كان: $\alpha_1 > \alpha_2$ فان: $[x_0 - \alpha_2 , x_0 + \alpha_2] \subset [x_0 - \alpha_1 , x_0 + \alpha_1]$.

و لدينا: $|l - l'| = \left|(f(x) - l) - (f(x) - l')\right| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'|$.

إذن يكفي اخذ : $\alpha = Min(\alpha_1 , \alpha_2) > 0$ من اجل الحصول على:

$$|l - l'| = \left|(f(x) - l) - (f(x) - l')\right| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

أي: $|l - l'| < \varepsilon \Leftrightarrow l - l' = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow l = l'$. و هذا تناقض مع الفرض $l \neq l'$. و

بالتالي: وحدانية النهاية للدالة f عند النقطة x_0 .

- النهاية من اليمين للتابع:

تعريف:

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة x_0.

- نقول عن f أنها تملك نهاية منتهية l على يمين النقطة x_0 إذا تحقق الشرط :

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$ ، أو $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ ، أي إذا كان:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists \alpha > 0 , \forall x \in I : \; 0 < (x - x_0) < (+\alpha) \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon \;........(1)$$

- النهاية من اليسار للتابع:

تعريف:

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة x_0.

- نقول عن f أنها تملك نهاية منتهية l على يسـار النقطة x_0 إذا تحقق الشرط :

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l$ ، أو $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ ، أي إذا كان:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists \alpha > 0 , \forall x \in I : \; (-\alpha) < (x - x_0) < 0 \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon \;.........(2)$$

ملاحظة:

- إن: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

- تعاريف لنهاية منتهية أو غير منتهية التابع لما $x \to \pm\infty$:

لدينا أن:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists B < 0 , \forall x : x \le B \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon \;........(3)$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists B > 0 , \forall x : x \ge B \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon \;........(4)$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0 , \exists B < 0 , \forall x : x \le B \Rightarrow f(x) \le A \;........(5)$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0 , \exists B > 0 , \forall x : x \ge B \Rightarrow f(x) \le A \;........(6)$.

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0 , \exists B < 0 , \forall x : x \le B \Rightarrow f(x) \ge A \;........(7)$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0 , \exists B > 0 , \forall x : x \ge B \Rightarrow f(x) \ge A \;........(8)$.

- العمليات الجبرية على النهايات:

نظرية: ليكن $f , g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة x_0. و لهما نهايتين على الترتيب l ، l' عند ما تؤول x إلى x_0. فان:

1 - $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = (l + l')$.

2 - $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = (l \cdot l')$.

3 - $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; ; \; \lim\limits_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (\lambda \cdot l)$.

4 - $\lim\limits_{x \to x_0} | f(x) | = | l |$. 5 - $l' \neq 0$ ، $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

- مبرهنة:

نقبل بدون برهان أن: ليكن $f , g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة x_0. و لهما نهايتين على الترتيب l , l' عند ما تؤول x إلى x_0. فان:

$\forall x \in I ; \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow l \le l'$.

- قضية:

إذا كانت $f , g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على مجال كيفي I تنتمي إليه نقطة x_0. وكانت الدالة f محدودة على المجال I وكانت نهاية الدالة g تؤول إلى "0" لما تؤول x إلى x_0. فان:

$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \times g(x) \right) = "0"$.

- مثال:

ليكن التابع: $h(x) = \begin{cases} x^2 . \ Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \ne 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

نلاحظ أن الدالة: $f(x) = Sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ محدودة على المجال $l = \mathbb{R}^*$ لكون أن:

$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad -1 \le Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le +1$. و أن الدالة $g(x) = x^2$ معرفة على المجال $D_g = \mathbb{R}$

و تحقق أن: $\lim_{x \to x_0 = 0} g(x) = \lim_{x \to x_0 = 0} x^2 = "0"$. و بالتالي:

$\lim_{x \to x_0 = 0} h(x) = \lim_{x \to x_0 = 0} x^2 . Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = "0"$.

- حـالات عدم التعيين:

نصادف في بعض الأحيان أثناء حساب نهاية ما لدالة حالات غير معروفة تسمى حـالات عـدم التعيين كما يلي : $1 \ / \ +\infty - \infty \ , \ 2 / \ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} \ , \ 3 / \ \pm\infty \times 0 \ , \ 4 / \ \dfrac{0}{0} \ ,$

$5 / \ (+1)^{+\infty} \ , \ 6 / \ 0^0 \ , \ 7 / \ (+\infty)^0$. ذلك أن :

$(+1)^{+\infty} = e^{+\infty \cdot \ln(1)} = e^{+\infty \cdot 0} \quad , \quad 0^0 = e^{0 \cdot \ln(0^+)} = e^{0 \cdot \infty} \quad , \quad (+\infty)^0 = e^{0 \cdot \ln(+\infty)} = e^{0 \cdot +\infty}$.

- التوابع المستمرة:

تعريف :

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة كيفية من I.

- نقول أن f مستمر عند النقطة x_0 إذا تحقق الشرط: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, بمعنى :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 , \forall x \in I : \\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

و δ يتعلق بـ x_0 و ε أي : $\delta = \delta(x_0 , \varepsilon)$.

- الاستمرار من اليمين للتابع:

تعريف 1:

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة كيفية من I.

- نقول أن التابع f انه مستمر على يـمـين النقطة x_0 إذا تحقق الشرط :

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$ ، بمعنى:

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 , \exists\, \delta>0 , \forall x \in I :$$

$$0<(x-x_0)<(+\delta) \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \text{ ....(1)}$$

- الاستمرار من اليسار للتابع:

تعريف 2:

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة كيفية من I.

- نقول أن التابع f انه مستمر على يسـار النقطة x_0 إذا تحقق الشرط :

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$ ، بمعنى :

$$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 , \exists\, \delta>0 , \forall x \in I :$$

$$(-\delta)<(x-x_0)<0 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \text{ ....(2)}$$

تعريف 3:

ليكن $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$ و x_0 نقطة كيفية من I.

- نقول أن التابع f انه مستمر عند النقطة x_0 إذا كان: مستمر على يمـين النقطة x_0 و على يسـار النقطة x_0 و يحقق الشرط : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

تعريف 4:

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية من المجال I بحيث : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$.

- نقول أن التابع f انه مستمر عند النقطة x_0 إذا كان: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

- أمثلة:

1 . التابع الثابت من الشكل: $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; x \to f(x) = C \; , \; C = cte$ يكون دوما مستمرا على I من $\mathbb{R}$.

2 . توابع كثيرات الحدود من الشكل: $P_n(x) = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + \dots + a_n.x^n \; , \; x \in \mathbb{R}$ مستمرة على I من $\mathbb{R}$.

3 - التابع: $f : I =]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; x \to f(x) = Sin(x)$ مستمر عند النقطة x_0 من $I =]a,b[$ من $\mathbb{R}$. لان:

$$\lim\limits_{x\to x_0} Sin(x) = Sin(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 , \exists\, \delta>0 , \forall x \in I :$$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |Sin(x)-Sin(x_0)|<\varepsilon$$

لنحدد المقدار: $|Sin(x)-Sin(x_0)|$: لدينا حسب العلاقات المثلية أن:

$$\forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} : Sin(\alpha+\beta) = Sin(\alpha).Cos(\beta) + Sin(\beta).Cos(\alpha) \text{ .....(1)}$$ و

$$\forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} : Sin(\alpha-\beta) = Sin(\alpha).Cos(\beta) - Sin(\beta).Cos(\alpha) \text{ .....(2)} .$$

و بالطرح (2) من (1) نجد أن:

$$\forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} : Sin(\alpha+\beta) - Sin(\alpha-\beta) = 2\,Cos(\alpha).Sin(\beta) \text{ .....(3)} .$$

و بوضع: $\alpha+\beta = \lambda_1$ و $\alpha-\beta = \lambda_2$ نجد أن:

$$\forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} : Sin(\lambda_1) - Sin(\lambda_2) = 2\,Cos\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right).Sin\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right) \text{ .....(4)} .$$

و بوضع : $x = \lambda_1$ و $x_0 = \lambda_2$ نجد أن:

$$. Sin(x) - Sin(x_0) = 2\,Cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).Sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \quad .....(5)$$

و منه المقدار : $\left| Sin(x) - Sin(x_0) \right|$:

$$\left| Sin(x) - Sin(x_0) \right| = \left| 2\,Cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).Sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq$$

$$\leq 2\left|Cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|.\left|Sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq \quad .$$

$$\leq 2\times 1\times\left|Sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq 2.\left|\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x-x_0| \,....(6)$$

حتى يكون: $\left| Sin(x) - Sin(x_0) \right| < \varepsilon$ يلزم و يكفي أن يكون: $|x-x_0| < \varepsilon$.

إذن يكفي اخذ: $\delta = \varepsilon > 0$ من اجل تقارب التابع $Sin(x)$ نحو $Sin(x_0)$ عندما x ينتهي أو يؤول إلى x_0 . و بالتالي: التابع $f(x) = Sin(x)$ مستمر عند النقطة x_0 من $I =]a,b[$ من ⎕.

4 - التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \begin{cases} a.\dfrac{e^x-1}{x} + x^2 & , \quad x > 0 \\ 1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$.

- تعيين قيمة العدد الحقيقي a و التي من اجلها يكون التابع f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$:

- يكون التابع f انه مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ إذا كان: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$.

لنحسب: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(a.\dfrac{e^x-1}{x} + x^2\right) = a\times 1 + 0 = a \quad .....(1)$. و

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 1 = f(0) \quad ....(2)$. و من (1) و (2) نجد أن : $a = 1$.

5 - التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \begin{cases} a.\dfrac{1-cos(x)}{x^2} + b.e^x & , \quad x > 0 \\ -a.\dfrac{tg(x)}{x} + b & , \quad x < 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

- تعيين قيم الأعداد الحقيقية a و b التي من اجلها يكون التابع g مستمر عند النقطة $x_0 = 0$:

- يكون التابع g انه مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ إذا كان: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) \overset{?}{=} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) \overset{?}{=} g(0)$.

لنحسب : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(a.\dfrac{1-cos(x)}{x^2} + b.e^x\right) \quad .....(1)$. لدينا أن:

$cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ عند جوار النقطة $x_0 = 0$ أو باستخدام العبارة:

$1-cos(x) = 2.\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) .....(*)$ و منه: $1-cos(x) \approx \frac{1}{2}x^2$. و بالتالي:

$$.\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(a.\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} + b.e^x \right) = a.\left(\frac{1}{2}\right) + b.(1) = \frac{a}{2} + b \quad .....(1)$$

و نعلم أن: $tg(x) \approx x$ عند جوار النقطة $x_0 = 0$. ومنه:

$$.\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(-a.\frac{tg(x)}{x} + b \right) = (-a.(1) + b) = -a + b \quad ....(2)$$

و لدينا أيضا أن: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \frac{a}{2} + b = g(0) = 2 \;.....(1) \\ et \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = -a + b = g(0) = 2 \;.........(2) \end{cases}$. ومنه:

$\begin{cases} a + 2b = 4 \;.....(1) \\ et \\ -a + b = 2 \;.........(2) \end{cases}$. أي أن: $a = 0$ و $b = +2$.

6 - ليكن التابع: $h(x) = \begin{cases} x^2.\ Sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

- نلاحظ أن الدالة: $f(x) = Sin\left(\frac{1}{x}\right)$ محدودة على المجال $I = \mathbb{R}^*$ لكون أن:

$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad -1 \leq Sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1$. و أن الدالة $g(x) = x^2$ معرفة على المجال

$D_g = \mathbb{R}$ و تحقق أن: $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0 = 0} x^2 = \text{"}0\text{"}$. و بالتالي:

$$.\lim_{x \to x_0 = 0} h(x) = \lim_{x \to x_0 = 0} x^2.Sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{"}0\text{"}$$

- و التابع h مستمر عند النقطة $x_0 = 0$. لان: $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} h(x) = 0 = h(0)$. و هو مستمر على كل المجال $\mathbb{R}$.

- أمثلة لتوابع غير مستمرة :

هناك توابع معرفة لكن استمرارها لا يتحقق في جميع نقاط المجال I من $\mathbb{R}$, مثال عن ذلك التابع :

$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. و الذي غير مستمر على كل $\mathbb{R}$.

و من بين حالات عدم الاستمرار:

1 - حالة $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$:

و مثال عن ذلك التابع : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ +2 & , \quad x = 0 \end{cases}$. و الذي غير مستمر عند النقطة

$x_0 = 0$. لان : $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} f(x) = \pm\infty \neq f(0) = +2$.

2 - **حالة** $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x)$ **و** $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x)$ **موجدتين و مختلفتين:**

ففي هذه الحالة يكون f غير مستمر عند النقطة x_0 . و تسمى النقطة x_0 " نقطة تقطع من النوع الأول " . و يسمى العدد: $\delta_{x_0} = \left(\lim\limits_{\substack{> \\ x \to}} f(x) - \lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) \right)$ قفزة التابع f عند النقطة x_0 . و مثال عن ذلك التابع: $f(x) = E(x) = [x] , x \in \mathbb{R}$.

و نعلم أن : $\forall x \in \mathbb{R} , \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$. و لدينا :

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to n}} f(x) = n - 1$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to n}} f(x) = n$.

و التابع $f(x) = E(x) = [x] , x \in \mathbb{R}$ غير مستمر على كل $\mathbb{Z}$.

3 - **حالة** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **غير موجودة :**

و مثال عن ذلك التابع: $f(x) = \begin{cases} Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ +1 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

و الذي غير مستمر عند النقطة $x_0 = 0$. لان:

$\lim\limits_{x \to x_0 = 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 = 0} Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = Sin(\pm\infty)$ غير موجودة .

4 - حالة $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x)$ **أو** $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x)$ **غير موجودة :**

ففي هذه الحالة يكون f غير مستمر عند النقطة x_0 .وتسمى النقطة x_0 " نقطة تقطع من النوع الثاني " .

5 - حالة $f(x_0) \neq \lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x)$ **:**

ففي هذه الحالة يكون f غير مستمر عند النقطة x_0 . و مثال عن ذلك :

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ +3 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

بما أن المقدار:

$$1 - cos(x) = 1 - cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 1 - \left(cos\left(\frac{x}{2}\right) . cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) . \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$= 1 - \left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right) ......(1) .$$

و نعلم أيضا أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) .....(2)$.

و حسب (1) و (2) نجد أن : $1 - cos(x) = 2. \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) .....(3)$. و بالرجوع إلى النهاية :

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{<> \\ x \to x_0}} 2.\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$. \quad = \lim_{\substack{<> \\ x \to x_0}} \frac{2.\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4.\ \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2}{4} \times (1) =$$

$$= \frac{1}{2} \neq +3 = f(0)$$

- الاستمرار على المجال من الشكل $]a\,,b[$:

تعريف:

ليكن $f \;:\;]a\,,b[\, \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال كيفي $]a\,,b[$ من $\mathbb{R}$.

- نقول أن التابع f انه مستمر على المجال $]a\,,b[$ إذا كان: التابع f مستمر عند كل نقطة من نقاط المجال $]a\,,b[$.
- نقول أن التابع f انه مستمر على المجال $[a\,,b]$ إذا كان: التابع f مستمر عند كل نقطة من نقاط المجال $]a\,,b[$ و على يسار a و على يمين b .

- العمليات الجبرية على التوابع المستمرة:

قضية : ليكن $f\,,g \;:\; I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على مجال كيفي I تنتمي إليه نقطة x_0. و مستمرتين عند النقطة x_0 من المجال I. فان التوابع التالية:

1- $(f+g)$ ، 2- $(f \cdot g)$ ، 3- $\left(\frac{f}{g}\right)\,,\ g(x) \neq 0\,,\ \forall x \in D_g$ ،

4- $(\lambda \cdot f)\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ، 5- $|f|\,,|g|$.

كلها مستمرة عند النقطة x_0 من المجال I .

- نظرية :

ليكن $f \;:\; I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ و $g \;:\; J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعيين معرفين و مستمرتين عند النقطة x_0 و $y_0 = f(x_0)$ على الترتيب بحيث : $f(I) \subseteq J$. فان : التابع المركب $g \circ f$ معرف و مستمر عند النقطة x_0 من I .

البرهان :

لدينا f مستمر عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,, \exists\, \eta_1 > 0\,, \forall x \in I :$$
$$. \quad |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;.....(1)$$

و لدينا g مستمر عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,, \exists\, \eta_2 > 0\,, \forall y \in J :$$
$$. \quad |y - y_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \;.....(2)$$

يكون $g \circ f$ مستمر عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_3 > 0, \forall x \in I :$$
$$|x - x_0| < \eta_3 \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon \;.....(3)$$

لدينا المقدار :
$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))|$$
$$= |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \;.....(4)$$

إذن يكفي اخذ : $\eta_3 = \eta_2 > 0$ من اجل الحصول على استمرار التابع $g \circ f$ عند النقطة x_0 .

- الاستمرار بانـتـظام للتابع :

- نظرية :

ليكن $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال كيفي I من $\mathbb{R}$.

- نقول أن التابع f انه مستمر بانـتـظام على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \;.....(**)$$

ملاحظات :

1 - أن الاستمرار العادي يتعلق بالنقطة x_0 فقط . بينما الاستمرار بانـتـظام يتعلق بكامل المجال.

2 - العدد η يتعلق بالنقطة x_0 و ε في حالة الاستمرار العادي . بينما العدد η يتعلق فقط بـ ε في حالة الاستمرار بانـتـظام .

3 - إن: (الاستمرار بانـتـظام) $\Rightarrow$ (الاستمرار العادي) و العكس غير صحيح .

- امثلة :

1 - **التابع** : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \to f(x) = Cos(x)$ مستمر بانـتـظام على كامل $\mathbb{R}$. لان:

يكون $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \to f(x) = Cos(x)$ مستمر بانـتـظام على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \eta \Rightarrow |Cos(x) - Cos(y)| < \varepsilon \;.....(1)$$

- لنحدد المقدار : $|Cos(x) - Cos(y)|$:

لدينا حسب العلاقات المثلية أن:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : Cos(\alpha + \beta) = Cos(\alpha).Cos(\beta) - Sin(\alpha).Sin(\beta) \;.....(1)$ و

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : Cos(\alpha - \beta) = Cos(\alpha).Cos(\beta) + Sin(\alpha).Sin(\beta) \;.....(2)$.

و بالطرح (2) من (1) نجد أن:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : Cos(\alpha + \beta) - Cos(\alpha - \beta) = (-2)\,Sin(\alpha).Sin(\beta) \;.....(3)$.

و بوضع: $\alpha + \beta = \lambda_1$ و $\alpha - \beta = \lambda_2$ نجد أن :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : Cos(\lambda_1) - Cos(\lambda_2) = (-2).\,Sin\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right).Sin\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) \;.....(4).$$

و بوضع: $x = \lambda_1$ و $y = \lambda_2$ نجد أن :

$$Cos(x) - Cos(y) = (-2).\,Sin\left(\frac{x + y}{2}\right).Sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \;.....(5).$$

و منه المقدار: $|Cos(x) - Cos(y)|$:

$$| Cos(x) - Cos(y) | = \left| (-2) . Sin\left(\frac{x+y}{2}\right) . Sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \leq$$
$$\leq 2 \left| Sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| . \left| Sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \leq$$
$$\leq 2 \times 1 \times \left| Sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \leq 2 . \left| \frac{x-y}{2} \right| \leq | x - y | ....(6)$$

حتى يكون: $| Cos(x) - Cos(y) | < \varepsilon$ يلزم و يكفي أن يكون: $| x - y | < \varepsilon$.

إذن يكفي اخذ: $\eta = \varepsilon > 0$ من اجل استمرار التابع $f(x) = Cos(x)$ بانتظام على $\mathbb{R}$.

2 - التابع: $g :]0,1] \to \mathbb{R} \; ; \; x \to g(x) = \frac{1}{x}$ غيـر مستمر بانـتـظام على المجال $]0,1]$ من $\mathbb{R}$. لان:

- يكون التابع g غيـر مستمر بانـتـظام على المجال $]0,1]$ من $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان:

$$\exists \varepsilon > 0 , \forall \eta > 0 , \exists (x_n), (y_n) \in]0,1] :$$
$$|x_n - y_n| < \eta \quad \wedge \quad | g(x_n) - g(y_n) | \geq \varepsilon .....(*)$$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; n < 2n \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$. و بوضع: $x_n = \frac{1}{n} \in]0,1]$ و $y_n = \frac{1}{2n} \in]0,1]$.

و منه : $|x_n - y_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \overset{?}{<} \eta .....(**)$.

و حسب خاصية ارخميدس:

- إن: $\forall x > 0 \; , \; \forall y \in \mathbb{R} \; , \; \exists n \in \mathbb{N}^* : \; n.x > y$. و بأخذ : $x = \eta > 0$ و $y = 1$

نجد إن : $n.\eta > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \eta$. و من جهة أخرى لدينا:

$$| g(x_n) - g(y_n) | = \left| g(\frac{1}{n}) - g(\frac{1}{2n}) \right| = | n - 2n | = n \geq 1$$
$$\Rightarrow \exists \varepsilon = 1 \; ; \; | g(x_n) - g(y_n) | \geq \varepsilon = 1$$

و هذا يؤكد عدم استمرار بانـتـظام للتابع g على المجال $]0,1]$ من $\mathbb{R}$.

- التابع اللبـشـيـتـزي (Fonction Lipchitzienne) :

تعريف:

ليكن $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع معرف على المجموعة D من $\mathbb{R}$.

- نقول أن التابع f انه تابع لبـشـيـتـزي (أو يحقق شرط لبـشـيـتـز) إذا وجد ثابت $K \geq 0$ بحيث:

$$\forall x_1 , x_2 \in D : | f(x_1) - f(x_2) | \leq K . |x_1 - x_2|$$

قضية:

كل تابع لبـشـيـتـزي فـهـو تابع مـسـتـمـر بانـتـظام على المجموعة D من $\mathbb{R}$.

مثال:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x}$.

إن التابع f لبـشـيـتـزي على $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. لان:

من اجل $x \geq 1$ التابع f لبـشـيـتـزي حيت : $K = \frac{1}{2} \geq 0$, بالفعل:

لدينا $|x-y| = \left|\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right| = \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| . \left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|$. و بما أن :

$x , y \geq 1$ فان : $\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right| \geq +2$. و بالتالي :

$$|x-y| = \left|\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right| = \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| . \left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|$$
$$\geq 2 . \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| .$$

أي أن: $\forall x , y \geq 1 \ , \ \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \frac{1}{2} . |x-y|$. حيث : $K = \frac{1}{2} \geq 0$. و بالتالي:

التابع $f(x) = \sqrt{x}$ مستمر بانتظام على $\mathbb{R}_+ = [0 , +\infty[$.

- التوابع المستمرة على مجال مغلق:

نقبل بدون برهان النظريات التالية:

1 - نظرية هاين Heine :

نظرية:

إذا كان f معرفا و مستمرا على مجال متراص (مغلق و محدود) من الشكل $I = [a , b]$

فانه: مستمر بانتظام على المجال $[a , b]$.

2 - نظرية :

ليكن $I =]a , b]$ مجالا محدودا من $\mathbb{R}$. و f معرفا و مستمرا على المجال $I =]a , b]$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$ موجودة فان: f يكون مستمر بانتظام على المجال $I =]a , b]$.

مثال:

ليكن التابع f المعرف و المستمر على $I =]0 , 1]$ بـ: $f(x) = x . Sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

- إن التابع: f مستمر بانتظام على المجال $I =]0 , 1]$. لان:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a=0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a=0} x . Sin\left(\frac{1}{x}\right) = "0"$ موجودة وهذا لكون الدالة:

$h(x) = Sin\left(\frac{1}{x}\right)$ محدودة على المجال $I = \mathbb{R}^*$. **أي أن:**

$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad -1 \leq Sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1$ **.** و الدالة $g(x) = x$ تحقق أن:

$\lim\limits_{x \to x_0 = 0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0 = 0} x = "0"$ **.** و بالتالي: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a=0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a=0} x . Sin\left(\frac{1}{x}\right) = "0"$ **.**

3 - نظرية:

ليكن f معرفا و مستمرا على مجال متراص (مغلق و محدود) من الشكل $I = [a , b]$ من $\mathbb{R}$. فـان:

1 - التابع f محدود على المجال $I = [a , b]$. أي : المجموعة $f(I)$ محدودة.

2 - التابع f يدرك حديه الأعلى و الأدنى . بمعنى : توجد نقطتين $x_m , x_M \in I = [a , b]$

بحيث: $f(x_m) = \underset{x \in I = [a,b]}{Inf} f(x) \quad , \quad f(x_M) = \underset{x \in I = [a,b]}{Sup} f(x)$.

- نظريات القيم المتوسطة:

نظرية القيم المتوسطة الأولى:

ليكن f تابعا معرفا و مستمرا على $I=[a,b]$. و كانت $f(a)\times f(b)<0$. فانه: توجد على الأقل نقطة $\exists c\in]a,b[$ بحيث: $f(c)=0$.

نظرية القيم المتوسطة الثانية:

ليكن $f : I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا معرفا و مستمرا على I . و I مجالا كيفيا , و لتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـ f حيث : $x_1<x_2$, عـنـدئذ: من اجل كل عدد حقيقي c بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و لا يساويهما , توجد $f(x_0)=c$ $x_0\in]x_1,x_2[$.

- الـتـمـديـد بالاستمرار للتابع:

تعريف :

ليكن $f : D\setminus\{x_0\}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعا معرفا على $D\setminus\{x_0\}$, إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ مـوجودة عـنـدئذ: نقول انه بإمكاننا تـمـديـد التابع f بالاستمرار إلى تابع مستمر f عند النقطة x_0 كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad x\in D\setminus\{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=l & , \quad x=x_0 \end{cases}$$

والذي هو مستمر على كل $\mathbb{R}$.

- أمثلة:

1 - ليكن التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $f(x)=x.Cos\left(\frac{1}{x}\right)$, و بما أن: $\lim_{x\to x_0=0} f(x)=\text{" }0\text{ "}$ مـوجودة . إذن: التابع f قابل للـتـمـديـد بالاستمرار عند النقطة $x_0=0$. و تابعه الممدد $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x.Cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x\neq x_0=0 \\ 0=l & , \quad x=x_0=0 \end{cases}$$

مستمر على كل $\mathbb{R}$.

2 - ليكن التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, و بما أن: $\lim_{x\to x_0=0} g(x)=\text{" }0\text{ "}$ مـوجودة . إذن : التابع g قابل للـتـمـديـد بالاستمرار عند النقطة $x_0=0$.

و تابعه الممدد $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x\neq x_0=0 \\ 0=l & , \quad x=x_0=0 \end{cases}$$

مستمر على كل $\mathbb{R}$.

3 - ليكن التابع الحقيقي المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالشكل: $h(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, و بما أن: $\lim_{x\xrightarrow{<}x_0=0} h(x)=\text{" }+\infty\text{ "}$ غير مـوجودة . و منه: التابع h غير قابل للـتـمـديـد بالاستمرار عند النقطة $x_0=0$ من اليسار . و بما أن: $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0=0} h(x)=\text{" }0\text{ "}$ موجودة . إذن: التابع h يمكن تـمـديـده بالاستمرار فقط عند النقطة $x_0=0$ من اليمين . و تابعه الممدد $h(x)$:

$$h(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x>x_0=0 \\ 0=l & , \quad x=x_0=0 \end{cases}$$

مستمر على كل $\mathbb{R}_+$.

4.3 - التوابع الرتيبة و الاستمرار:

نظرية 1:

ليكن I مجالا كيفيا و $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا معرفا و مستمرا على I . عندئذ: يكون $f(I) = J$ مـجـالا .

نظرية 2:

ليكن I مجالا كيفيا و $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا معرفا و مستمرا و رتـيـبـا تماما على I . عـنـدئذ يكون لدينا:

1 - التابع f تـقـابـلي من I نحو $f(I) = J$.

2 - التابع العكسي $f^{-1} : f(I) = J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ مستمرا و رتـيـبـا تماما على $f(I) = J$.(وهو كذلك تقابلي) .

5.3 - التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

1- التابع العكسي للتابع $Sin(x)$ (قـوس الجـيـب) : $Arcsin(y)$.

تعريف:

التابع $Sin(x)$ تابع فـردي , مستمر و مـتـزايـد تماما على المجال $I = \left[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}\right]$. أي:

$Sin(x) : \left[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1 , +1]$ تـقـابـلـي . و بالتالي يملك تقابلا عـكسيا . و نرمز له بالرمز: $Arcsin(y) : [-1 , +1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}\right]$. وهو تابع فـردي , مستمر و مـتـزايـد تماما على المجال $[-1 , +1]$. و يحقق أن:

1 - $y = sin(x) , \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = Arcsin(y) , \forall y \in [-1 , +1]$.

2 - $Arcsin(\sin(x)) = x \ , \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2}\right]$.

3 - $Sin(Arcsin(y)) = y \ , \forall y \in [-1 , +1]$.

2 - التابع العكسي للتابع $Cos(x)$ (قـوس جـيـب الـتـمـام): $Arc\cos(y)$.

تعريف:

التابع $Cos(x)$ تابع زوجـي , مستمر و مـتـنـاقص تماما على المجال $I = [0 , \pi]$. أي:

$Cos(x) : [0 , \pi] \longrightarrow [-1 , +1]$ تـقـابـلـي . و بالتالي يملك تقابلا عـكسيا . و نرمز له بالرمز: $Arc\cos(y) : [-1 , +1] \longrightarrow [0 , \pi]$. و هو تابع زوجـي , مستمر و مـتـنـاقص تماما على المجال $[-1 , +1]$. و يحقق أن:

1 - $y = Cos(x) , \forall x \in [0 , \pi] \Leftrightarrow x = Arc\cos(y) , \forall y \in [-1 , +1]$.

2 - $Arc\cos(\cos(x)) = x \ , \forall x \in [0 , \pi]$.

3 - $Cos(Arc\cos(y)) = y \ , \forall y \in [-1 , +1]$.

4 - خاصية : $Arcsin(x) + Arc\cos(x) = \frac{\pi}{2} \ , \ \forall x \in [-1 , +1]$.

3 - التابع العكسي للتابع $tan(x)$ (قـوس الظـل) : $Arc\tan(y)$.

تعريف:

التابع $\tan(x)$ تابع فـردي , مستمر و مـتـزايـد تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$. أي: $I = \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$

$\tan(x):\ \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$ تـقـابـلـي . وبالتالي يملك تقابلا عـكسيا .

ونرمز له بالرمز: $Arc\tan(y):\ \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$. و هو تابع فـردي , مستمر و مـتـزايـد تماما على المجال $\mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$. و يحقق أن:

-1 $y = \tan(x)\ ,\ \forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x = Arc\tan(y)\ ,\ \forall\ y \in \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$.

2 - $\lim\limits_{y\to-\infty} Arc\tan(y) = Arc\tan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. و

$\lim\limits_{y\to+\infty} Arc\tan(y) = Arc\tan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$.

3 - $Arc\tan(\tan(x)) = x\ \ ,\ \forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ +\frac{\pi}{2}\right[$.

4 - $\tan(Arc\tan(y)) = y\ \ ,\ \forall\ y \in \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$.

5 - خاصية : $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & ,\ x<0 \\ +\frac{\pi}{2} & ,\ x>0 \end{cases}$.

4 - التابع العكسي للتابع $Cotg(x)$ (قـوس ظـل الـتـمـام) : $Arc\cot g(y)$.

تعريف:

التابع $Cotg(x)$ تابع زوجـي , مستمر و مـتـنـاقـص تماما على المجال $]0\ ,\ \pi[$. $I =]0\ ,\ \pi[$ أي:

$Cotg(x):\ ]0\ ,\ \pi[\longrightarrow \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$ تـقـابـلـي . و بالتالي يملك تقابلا عـكسيا .

ونرمز له بالرمز: $Arc\cot g(y):\ \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[\longrightarrow]0\ ,\ \pi[$. و هو تابع زوجـي , مستمر و مـتـنـاقـص تماما على المجال $\mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$. و يحقق أن:

1 - $y = Cotg(x)\ ,\ \forall\ x \in]0\ ,\ \pi[\Leftrightarrow x = Arc\cot g(y)\ ,\ \forall\ y \in \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$.

2 - $\lim\limits_{y\to-\infty} Arc\cot g(y) = Arc\cot g(-\infty) = +\pi$. و

$\lim\limits_{y\to+\infty} Arc\cot g(y) = Arc\cot g(+\infty) = 0$.

3 - $Arc\cot g(\cot g(x)) = x\ \ ,\ \forall x \in]0\ ,\ \pi[$.

4 - $Cotg(Arc\cot g(y)) = y\ \ ,\ \forall y \in \mathbb{R} =]-\infty\ ,+\infty[$.

5 - اشـتـقـاقـيـة الـتـوابع العـكـسـيـة:

1 - $(Arcsin(x))' = \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}\ :\ \forall\ x \in]-1\ ,\ +1[$. و بصفة عامة يمكن تعريف المشتقة التالية : $\forall f(x) \in]-1\ ,\ +1[\ ,\ (Arcsin(f(x)))' = \frac{+f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$.

2 - $\left(Arccos(x)\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$: $\forall x \in]-1, +1[$. و بصفة عامة يمكن تعريف المشتقة التالية: $\forall f(x) \in]-1, +1[$, $\left(Arc\cos(f(x))\right)' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$.

3 - $\left(Arc\tan(x)\right)' = \dfrac{+1}{1+x^2}$: $\forall x \in \mathbb{R}$. و بصفة عامة يمكن تعريف المشتقة التالية:

$\left(Arc\tan(f(x))\right)' = \dfrac{+f'(x)}{1+(f(x))^2}$, $\forall f(x) \in]-\infty, +\infty[$.

4 - $\left(Arc\,cotan(x)\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$: $\forall x \in \mathbb{R}$. و بصفة عامة يمكن تعريف المشتقة التالية:

$\left(Arccotan(f(x))\right)' = \dfrac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}$, $\forall f(x) \in]-\infty, +\infty[$.

6 - خــواص:

-1 $\mathrm{Cos}(a+b) = \mathrm{Cos}(a).\mathrm{Cos}(b) - \mathrm{Sin}(a).\mathrm{Sin}(b)$: $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

-2 $\mathrm{Cos}(a-b) = \mathrm{Cos}(a).\mathrm{Cos}(b) + \mathrm{Sin}(a).\mathrm{Sin}(b)$: $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

-3 $\mathrm{Sin}(a+b) = \mathrm{Sin}(a).\mathrm{Cos}(b) + \mathrm{Cos}(a).\mathrm{Sin}(b)$: $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

-4 $\mathrm{Sin}(a-b) = \mathrm{Sin}(a).\mathrm{Cos}(b) - \mathrm{Cos}(a).\mathrm{Sin}(b)$: $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

-5 $\mathrm{Cos}^2(x) + \mathrm{Sin}^2(x) = +1$: $\forall x \in \mathbb{R}$.

-6 $\forall a,b \in \mathbb{R} : tg(a+b) = \dfrac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a).tg(b)}$.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : tg(a+b+c) = \frac{tg(a)+tg(b)+tg(c) - tg(a).tg(b).tg(c)}{1 - tg(a).tg(b) - tg(b).tg(c) - tg(c).tg(a)} .$$

-7 $\forall a,b \in \mathbb{R} : tg(a-b) = \dfrac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a).tg(b)}$.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : tg(a-b-c) = \frac{tg(a)-tg(b)-tg(c) + tg(a).tg(b).tg(c)}{1 + tg(a).tg(b) + tg(b).tg(c) + tg(c).tg(a)} .$$

-8 $\forall a,b \in \mathbb{R} : cotg(a+b) = \dfrac{cotg(a).cotg(b) - 1}{cotg(a) + cotg(b)}$.

-9 $\forall a,b \in \mathbb{R} : cotg(a-b) = \dfrac{cotg(a).cotg(b) + 1}{cotg(a) - cotg(b)}$.

-10 $\mathrm{Sin}(a) - \mathrm{Sin}(b) = +2.\mathrm{Sin}\left(\dfrac{a-b}{2}\right).\mathrm{Cos}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$: $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

-11 $\mathrm{Sin}(a) + \mathrm{Sin}(b) = +2.\mathrm{Sin}\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\mathrm{Cos}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$: $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

- 12 $\mathrm{Cos}(a) + \mathrm{Cos}(b) = +2.\mathrm{Cos}\left(\dfrac{a-b}{2}\right).\mathrm{Cos}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$: $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

$$. \forall a,b \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Cos}(a) - \mathrm{Cos}(b) = -2 . \mathrm{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right) . \mathrm{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad -13$$

$$. \forall a,b \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Sin}(a) . \mathrm{Sin}(b) = \frac{\mathrm{Cos}(a-b) - \mathrm{Cos}(a+b)}{2} \quad -14$$

$$. \forall a,b \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Sin}(a) . \mathrm{Cos}(b) = \frac{\mathrm{Sin}(a+b) + \mathrm{Sin}(a-b)}{2} \quad -15$$

$$. \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Cos}(2x) = 2\mathrm{Cos}^2(x) - 1 = 1 - 2\mathrm{Sin}^2(x) \quad -16$$

$$. \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Cos}^2(x) = \frac{1 + \mathrm{Cos}(2x)}{2} \quad -17$$

$$. \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Sin}^2(x) = \frac{1 - \mathrm{Cos}(2x)}{2} \quad -18$$

$$. \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Cos}^3(x) = \frac{3\mathrm{Cos}(x) + \mathrm{Cos}(3x)}{4} \quad -19$$

$$. \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Sin}^3(x) = \frac{3\mathrm{Sin}(x) - \mathrm{Sin}(3x)}{4} \quad -20$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \mathrm{Cos}^2(x) + \mathrm{Sin}^2(x) = +1 \ \ avec$$

$$. \ \mathrm{Sin}^2(x) = \frac{tg^2(x)}{1 + tg^2(x)} \quad et \quad \mathrm{Cos}^2(x) = \frac{+1}{1 + tg^2(x)} \quad -21$$

6.3 - الـتوابـع القـطـعية وتـوابعها العكسية -

- Fonctions Hyperboliques et leurs Réciproques -

I - الـتـوابع القـطـعـية (الـزائـديـة) :

ا - تعاريف:

1 - الجـيـب الـقـطـعي Sinus Hyperbolique : $Sinh(x)$ أو $Sh(x)$.

- نسمي الجـيـب الـقـطـعي Sinus Hyperbolique التابع الـفـردي المعرف و المستمر و مـتـزايـد تماما على $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بالعلاقة التالية:

$$. Sh(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto Sh(x) = Sinh(x) = \frac{e^{+x} - e^{-x}}{2}$$

و الذي يحقق:

$$* \quad \lim_{x \to -\infty} Sinh(x) = Sinh(-\infty) = -\infty \ \text{و} \ \lim_{x \to +\infty} Sinh(x) = Sinh(+\infty) = +\infty \ .$$

$$* \quad . \ Sinh(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

2 - الجـيـب تـمـام الـقـطـعي Cosinus Hyperbolique : $Cosh(x)$ أو $Ch(x)$.

- نسمي الجـيـب تـمـام الـقـطـعي Cosinus Hyperbolique التابع الـزوجي الـمـوجب تـمـاما المعرف والمستمر و متـنـاقص تـمـاما على المجال $]-\infty , 0]$ و مـتـزايـد تماما على $[0 , +\infty[$ بالعلاقة التالية:

$$. Ch(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto Ch(x) = Cosh(x) = \frac{e^{+x} + e^{-x}}{2}$$

و الذي يحقق:

$$* \quad \lim_{x \to -\infty} Cosh(x) = \lim_{x \to +\infty} Cosh(x) = +\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \to 0^-} Cosh(x) = \lim_{x \to 0^+} Cosh(x) = +1 \ .$$

* و هو تقابل مثلا من $\mathbb{R}_+$ نحو $[+1 , +\infty[$. و $Ch(0) = Cosh(0) = +1$.

3 - الـظـل الـقـطـعي **Tangente Hyperbolique** : $\tanh(x)$ أو $th(x)$.

- نسمي الـظـل الـقـطـعي Tangente Hyperbolique التابع الـفـردي المعرف و المستمر و مـتـزايـد تماما على $\mathbb{R}$ نحو $]-1, +1[$ بالعلاقة التالية:

$$th(x) : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, +1[$$

$$x \mapsto th(x) = \tanh(x) = \frac{Sinh(x)}{Cosh(x)} = \frac{Sh(x)}{Ch(x)} = \frac{e^{+x} - e^{-x}}{e^{+x} + e^{-x}} = \frac{e^{+2x} - 1}{e^{+2x} + 1}$$

. و الذي يحقق:

* $\lim_{x \to +\infty} th(x) = +1$ و $\lim_{x \to -\infty} th(x) = -1$.

* و هو تقابل مثلا من $\mathbb{R}$ نحو $]-1, +1[$. و $th(0) = \tanh(0) = +1$.

4 - الـظـل تـمـام الـقـطـعي **Cotangente Hyperbolique** : $Co\,th(x)$ أو $Cth(x)$.

- نسمي الـظـل تـمـام الـقـطـعي Cotangente Hyperbolique التابع الـفـردي المعرف و المستمر و مـتـنـاقـص تماما على $\mathbb{R}^*$ نحو $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$ بالعلاقة التالية:

$$Coth(x) : \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$$

$$x \mapsto Cth(x) = Coth(x) = \frac{Cosh(x)}{Sinh(x)} = \frac{Ch(x)}{Sh(x)} = \frac{e^{+x} + e^{-x}}{e^{+x} - e^{-x}} = \frac{e^{+2x} + 1}{e^{+2x} - 1}$$

او بعبارة أخرى: $\forall x \in \mathbb{R}^* : Cth(x) = Coth(x) = \dfrac{1}{\tanh(x)} = \dfrac{1}{\text{th}(x)}$.

و الذي يحقق:

* $\lim_{x \to +\infty} cth(x) = +1$ و $\lim_{x \to -\infty} cth(x) = -1$.

* و هو تقابل مثلا من $\mathbb{R}^*$ نحو $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$.

ب - بعض الـعلاقـات الـعـامـة:

-1 $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad Ch(a \pm b) = Ch(a).Ch(b) \pm Sh(a).Sh(b)$.

- 2 $\forall a,b \in \mathbb{R} : \quad Sh(a \pm b) = Sh(a).Ch(b) \pm Ch(a).Sh(b)$.

- 3 $\forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch(x) + Sh(x) = e^{+x} \;....(*)$.

- 4 $\forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch(x) - Sh(x) = e^{-x} \;....(**)$.

- 5 حسب $(*)$ و $(**)$ أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch^2(x) - Sh^2(x) = +1 \;....(***)$.

- 6

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{Ch^2(x)} = \frac{Ch^2(x) - Sh^2(x)}{Ch^2(x)} = 1 - \frac{Sh^2(x)}{Ch^2(x)} = 1 - th^2(x) .$$

- 7

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{Sh^2(x)} = \frac{Ch^2(x) - Sh^2(x)}{Sh^2(x)} = \frac{Ch^2(x)}{Sh^2(x)} - 1 = Cth^2(x) - 1 .$$

- 8 $\forall a \in \mathbb{R} : \quad Ch(2.a) = Ch^2(a) + Sh^2(a)$.

- 9 $\forall a \in \mathbb{R} : \quad Sh(2.a) = 2 . Sh(a) . Ch(a)$.

- 10 $\forall a,b \in \mathbb{R} : \; th(a+b) = \dfrac{th(a) + th(b)}{1 + th(a) . th(b)}$.

$$. \forall a,b \in \mathbb{R} : \quad Ch(a)+Ch(b) = 2.\ Ch\left(\frac{a+b}{2}\right).\ Ch\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad - 11$$

$$. \forall a,b \in \mathbb{R} : \quad Ch(a)-Ch(b) = 2.\ Sh\left(\frac{a+b}{2}\right).\ Sh\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad - 12$$

$$. \forall a \in \mathbb{R} : \quad Ch(2.a) = \frac{1+th^2(a)}{1-th^2(a)} \quad - 13$$

$$. \forall a \in \mathbb{R} : \quad Sh(2.a) = \frac{2.th(a)}{1-th^2(a)} \quad - 14$$

$$. \forall a \in \mathbb{R} : \quad th(2.a) = \frac{2.th(a)}{1+th^2(a)} \quad - 15$$

ج - اشتقاقية التوابع القطعية:

$$. \quad (Sh(x))' = Ch(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad - 1$$

$$. \quad (Ch(x))' = Sh(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad - 2$$

$$. \quad (th(x))' = \left(\frac{Sh(x)}{Ch(x)}\right)' = \frac{Ch^2(x)-Sh^2(x)}{Ch^2(x)} = \frac{+1}{Ch^2(x)} \quad - 3$$

$$= +1 - th^2(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$. \quad (Coth(x))' = \left(\frac{Ch(x)}{Sh(x)}\right)' = \frac{Sh^2(x)-Ch^2(x)}{Sh^2(x)} = \quad - 4$$

$$= +1 - Coth^2(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

II - التوابع القطعية العكسية:

1 - التابع القطعي العكسي للتابع $Sh(x)$ (عمدة الجيب القطعي) : $ArgSh(x)$.

تعريف:

التابع Sinus Hyperbolique : $Sh(x)$ تابع فردي , مستمر و متزايد تماما من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. أي: $Sh(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تقابلي . و بالتالي يملك تقابلا عكسيا . نسميه: " Argument sinus Hyperbolique " " عمدة الجيب القطعي " و نرمز له بالرمز: $ArgSh(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. و هو تابع فردي , مستمر ومتزايد تماما على $\mathbb{R}$. حيث:

- 1 $y = Sh(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \iff x = ArgSh(y),\ \forall y \in \mathbb{R}$.

2 - يمكن أن نعبر عن التابع $ArgSh(x)$ بدلالة دالة اللوغاريتم . و ذلك بالشكل التالي:

لدينا سابقا أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch^2(x) - Sh^2(x) = +1$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch^2(x) = Sh^2(x) + 1 \quad .$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch(x) = \sqrt{Sh^2(x)+1} \quad ......(1)$$

و لدينا أيضا أن:

$$. \forall y \in \mathbb{R} : \quad e^{+y} = Ch(y) + Sh(y) \quad ....(2)$$

و حسب (1) نجد أن:

$$. \forall y \in \mathbb{R} : \quad e^{+y} = \sqrt{Sh^2(y)+1} + Sh(y) \quad ....(3)$$

و بوضع $y = ArgSh(x) \Leftrightarrow Sh(y) = x$. و حسب (3) أن:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad e^{+y} = \sqrt{Sh^2(y) + 1} + Sh(y)$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R} : \quad y = \arg Sh(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) ....(4)$$

2 - التابع القطعي العكسي للتابع $Ch(x)$ (عمـدة جيـب الـتـمام القطعي) : $ArgCh(x)$.

تعريف:

التابع $Ch(x)$: Cosinus Hyperbolique تابع زوجي , مستمر و مـتـزايـد تماما من $[0, +\infty[$ نحو $[+1, +\infty[$. أي : $Ch(x)$ تـقـابـلـي . و بالتالي يملك تقابلا عـكسيا . نسميه: " Argument cosinus Hyperbolique " " عـمـدة جيـب الـتـمام الـقـطعي " و نرمز له بالرمز: $ArgCh(x) : [+1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ . . و هو تابع زوجي , مستمر و مـتـزايـد تماما على $[+1, +\infty[$. حيث:

1 - $x = ArgCh(y), \ \forall y \in [+1, +\infty[\ \Leftrightarrow \ y = Ch(x), \ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

2 - يمكن أن نعبر عن التابع $ArgCh(x)$ بدلالة دالة الـلـوغـاريتم . و ذلك بالشكل التالي:

لدينا سابقا أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Ch^2(x) - Sh^2(x) = +1$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad Sh^2(x) = Ch^2(x) - 1$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad Sh(x) = \sqrt{Ch^2(x) - 1} \ ......(1)$$

و لدينا أيضا أن: $\forall y \in \mathbb{R} : \quad e^{+y} = Ch(y) + Sh(y) \ ....(2)$.

و حسب (1) نجد أن:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad e^{+y} = Ch(y) + \sqrt{Ch^2(y) - 1} \ ....(3)$$

و بوضع $y = ArgCh(x) \Leftrightarrow Ch(y) = x$. و حسب (3) أن:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad e^{+y} = Ch(y) + \sqrt{Ch^2(y) - 1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathbb{R} : \quad y = \arg Ch(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) ....(4)$$

3 - التابع القطعي العكسي للتابع $th(x)$ (عمـدة الـظـل القطعي) : $Argth(x)$.

تعريف:

التابع $th(x)$: Tangente Hyperbolique تابع فـردي , مستمر و مـتـزايـد تماما على $\mathbb{R}$ نحو $]-1, +1[$. أي: $th(x)$ تـقـابـلـي . و بالتالي يملك تقابلا عـكسيا . نسميه: " Argument Tangente Hyperbolique " " عمدة الـظـل الـقـطعي " و نرمز له بالرمز: $Argth(x) :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R}$ . . و هو تابع فـردي , مستمر و مـتـزايـد تماما على $]-1, +1[$. حيث:

1 - $x = Argth(y), \ \forall y \in]-1, +1[\ \Leftrightarrow \ y = th(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2 - يمكن أن نعبر عن التابع $Argth(x)$ بدلالة دالة الـلـوغـاريتم . و ذلك بالشكل التالي:

لدينا سابقا أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad y = th(x) = \frac{e^{+2x}-1}{e^{+2x}+1} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad y.(e^{+2x}+1) = (e^{+2x}-1)$$

$$. \quad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad e^{+2x}.(y-1) = (-y-1)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad e^{+2x} = \frac{(-y-1)}{(y-1)} = \frac{(y+1)}{(1-y)} \quad , \forall y \in]-1,+1[\;.....(1)$$

و بإستعمال دالة اللـوغـاريتم للعبارة (1) نجد أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad e^{+2x} = \frac{(-y-1)}{(y-1)} = \frac{(y+1)}{(1-y)} \quad , \forall y \in]-1,+1[$$

$$. \quad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \quad 2.x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right), \ \forall y \in]-1,+1[$$

$$\Leftrightarrow \quad x = Argth(y) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right), \ \forall y \in]-1,+1[$$

أي أن: $. \ Argth(x) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), \ \forall x \in]-1,+1[\;.....(2)$

4 - التابع القطعي العكسي للتابع $Coth(x)$ (عمـدة ظـل الـتـمـام القطعي) : $ArgCoth(x)$.

تعريف:

التابع Cotangente Hyperbolique : $Coth(x)$ تابع فـردي , مستمر و مـتـنـاقص تماما على $\mathbb{R}^*$ نحو $]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$. أي : $Coth(x)$ تـقـابـلـي . و بالتالي يملك تقابلا عـكسيا . نسميه: " Argument Cotangente Hyperbolique " " عمدة الـظـل التمام الـقـطـعي " و نرمز له بالرمز:

$\mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[: ArgCoth(x)$. و هو تابع فـردي , مستمر و مـتـنـاقص تماما على $]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}^*$. حيث:

- 1
$$y = Coth(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$
$$. \quad x = ArgCoth(y) \ , \ \forall y \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$$

2 - يمكن أن نعبر عن التابع $ArgCoth(x)$ بدلالة دالة الـلـوغـاريتم .وذلك بالشكل التالي:

لدينا سابقا أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad y = Coth(x) = \frac{e^{+2x}+1}{e^{+2x}-1} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* : \quad y.(e^{+2x}-1) = (e^{+2x}+1)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* : \quad e^{+2x}.(y-1) = (y+1)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* : \quad e^{+2x} = \frac{(y+1)}{(y-1)} \quad , \forall y \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[\;.....(1)$$

و باستعمال دالة اللوغاريتم للعبارة (1) نجد أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad e^{+2x} = \frac{(y+1)}{(y-1)} \quad , \forall y \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$$

$$. \quad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* : \quad 2.x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right), \ \forall y \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$$

$$\Leftrightarrow \quad x = ArCoth(y) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right), \ \forall y \in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$$

أي أن: $ArgCoth(x) = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ ,\forall x \in]-\infty , -1[\cup]+1 , +\infty[.....(2)$.

ج - اشتقاقية التوابع القطعية العكسية:

1 - $\left(\arg Sh(x)\right)' = \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{+1}{\sqrt{1+x^2}} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$.

و بصفة عامة يمكن تعريف المشتقة التالية:

$$\left(\arg Sh(f(x))\right)' = \frac{+f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}} \ , \ \forall f(x) \in \mathbb{R} \ .$$

2 - $\left(\arg Ch(x)\right)' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{+1}{\sqrt{x^2-1}} \ ,$.

$\forall x \in]+1 , +\infty[$

و بصفة عامة يمكن تعريف المشتقة التالية:

$$\left(\arg Ch(f(x))\right)' = \frac{+f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}} \ , \ \forall f(x) \in]+1 , +\infty[\ .$$

-3 $\forall x \in]-1 , +1[\ : \ \left(Argth(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\right)' = \frac{+1}{1-x^2}$.

- 4 $\forall x \in]-\infty , -1[\cup]+1 , +\infty[\ : \ \left(ArgCoth(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' =$.

$$= \frac{+1}{1-x^2}$$

6.3 - التابع القابل للتفاضل عند نقطة:

تعريف:

ليكن $f\ :\ D\subset \mathbb{R}\ \rightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا في جوار $x_0 \in D$.

- نقول عن التابع f انه قابل للتفاضل عند النقطة x_0 إذا أمكن تقريبه في x_0 بتابع تالفي . بصيغة أدق:
- نقول عن التابع f انه قابل للتفاضل عند النقطة x_0 إذا وجد جوار V للنقطة x_0 وعدد حقيقي A , لا يتعلق بـ x , بحيث:

$f(x) = f(x_0) + A.(x-x_0) + \eta_{x_0}(x).(x-x_0)\ ,\ \forall x \in V\ ....(*)$. حيث أن:

η_{x_0} هو تابع يحقق: $\lim\limits_{x\to x_0} \eta_{x_0}(x) = 0$.

- يسمى الجزء: " $f(x_0)+A.(x-x_0)$ " بالجزء ألتالفي . بينما يسمى الجزء: " $(x-x_0)\ .\ \eta_{x_0}(x)$ " بالباقي .
- يدعى العدد A " بمشتق التابع f " عند النقطة x_0 و نرمز له بـ $f'(x_0)$.

خاصية:

- العدد A (إن وجد) يكون وحيدا .
- بوضع: $x-x_0=h \iff x = x_0+h$, فان المساواة (*) تصبح:

$f(x_0+h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + h.\varepsilon(h)\ ......(**)$. حيث أن: " $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ " .

- يدعى التطبيق: $h \longrightarrow f'(x_0).h$, " تفاضل التابع f " عند النقطة x_0 (أو التطبيق الخطي المماس للتابع f عند النقطة x_0) و يرمز له بالرمز : df_{x_0} .

و منه يكون لدينا: $df_{x_0}:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \longrightarrow df_{x_0}(h) = f'(x_0).h$. و نكتب عندئذ:

$f(x_0+h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + h.\varepsilon(h)\ ......(***)$.

ملاحظة:

- إن التطبيق: $h \longrightarrow f'(x_0).h$ هو تطبيق خطي .

7.3 - التابع القابل للاشتقاق عند نقطة:

تعريف :

نقول عن تابع f معرف في جوار V للنقطة x_0 , انه قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت للنسبة: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية. عند ما يؤول x إلى x_0 في $V-\{x_0\}$.

خاصية:

- يكون f قابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان قابلا للتفاضل عند النقطة x_0 .

و يكون لدينا: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

8.3 - المشتق من اليمين - المشتق من اليسار:

تعريف:

- نقول عن تابع f انه قـابل للاشتقاق من اليـسار عند النقطة x_0 إذا كانت:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة و منتهية. و تسمى هذه النهاية "' بالعدد المشتق من اليسار "' للتابع f عند النقطة x_0. و نرمز له بالرمز: "' $f_g'(x_0)$ أو $f_-'(x_0)$ "' .

- نقول عن تابع f انه قـابل للاشتقاق من اليمين عند النقطة x_0 إذا كانت:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة و منتهية. و تسمى هذه النهاية "' بالعدد المشتق من اليمين"' للتابع f عند النقطة x_0. و نرمز له بالرمز: "' $f_d'(x_0)$ أو $f_+'(x_0)$ "' .

خـاصية:

- يكون التابع f قـابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان قـابلا للاشتقاق من اليمين و من اليسار عند النقطة x_0 , و كان: $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.

9.3 - التابع المشتق:

تعريف:

ليكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $D \subset \mathbb{R}$, نقول أن التابع f قـابل للاشتقاق على D إذا وفقط إذا كان f قـابلا للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من D وعندئذ يسمى التطبيق:

$\begin{array}{l} f' : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow f'(x) \end{array}$ بـالـتـابع الـمـشـتـق.

10.3 - الـرمــز الـتـفـاضـلــي:

ليكن التابع المـطـابـق: $\begin{array}{l} Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow Id(x) = x \end{array}$. انه قـابل للاشتقاق

و $\left(Id(x)\right)' = +1 \;\; : \forall x \in \mathbb{R}$, إذن: $Id(x)$ قـابل للمفاضلة عند كل نقطة $x \in \mathbb{R}$. و نرمز لهذا التفاضل بـ: dx والمعرف بـ: $dx(h) = h \, , \; \forall h \in \mathbb{R}$.

ليكن التابع f المعرف و القابل للتفاضل عند x_0 , إن تفاضله هو التطبيق:

$df_{x_0}(h) = f'(x_0).h \Rightarrow df_{x_0}(h) = f'(x_0).dx(h)$. و منه:

$df_{x_0} = f'(x_0).dx \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{df_{x_0}}{dx}$. و بالتالي: إذا كان f قـابلا للاشتقاق على المجموعة D فإننا نرمز لمشتقه f بـ : $\dfrac{df}{dx}$. إذن: $f' = \dfrac{df}{dx}$.

ملاحظات:

1 - إذا كانت: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$. فلا نقول أبدا أن التابع f قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 .

2 - إذا كان التابع f قـابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 , فان: f يكون مستمرا عند هذه النقطة .

3 - إن وجود مشتق عند النقطة x_0 من اليمين و من اليسار لتابع f (حتى و لو كانا مختلفين) يقتضي استمرارية التابع f عند هذه النقطة .

4 - اذا كان f قـابلا للاشتقاق من اليمين و من اليسار عند النقطة x_0 ، بحيث:

$f_d'(x_0) \neq f_g'(x_0)$ عندئذ: التابع f غير قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 . و البيان (C_f) يشمل " نـقـطـة زاويــة " عند هذه النقطة .

مثال:

ليكن التابع f المعرف بالشكل: $\forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \begin{cases} x\,.\,Sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

- إن هذا التابع معرف و مستمر عند النقطة $x_0 = 0$.لكنه غير قـابل للاشتقاق عند هذه النقطة x_0 لا من اليمين ولا من اليسار .

11.3 - حساب المشتقات:

1 - حساب المشتقات بعض التوابع المألوفة:

التابع $f(x)$	التابع المشتق $f'(x)$
C ثـابت	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ 0\ "$
x	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ 1\ "$
$x^n\ ,(n \geq 2)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ n\,.\,x^{n-1}\ "$
$\left(\frac{1}{x}\right)$	$\forall x \in \mathbb{R}^*\ ,\ "\ -\frac{1}{x^2}\ "$
$\sqrt{x}$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ "\ \frac{+1}{2.\sqrt{x}}\ "$
$Cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ -Sin(x) = Cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ "$
$Cos(a.x+b)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ -a.Sin(a.x+b)\ "$
$Sin(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ Cos(x) = Sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ "$
$Sin(a.x+b)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ a\,.Cos(a.x+b)\ "$
$\tan(x)$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\ ,\ "\ \frac{+1}{Cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)\ "$
$Cotg(x)$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\ ,\ "\ \frac{-1}{Sin^2(x)} = -1-Cos^2(x)\ "$

$\ln(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ "\ \frac{+1}{x}\ "$
e^{+x}	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ e^{+x}\ "$
$Ch(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ Sh(x)\ "$
$Sh(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ Ch(x)\ "$
$th(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ "\ \frac{+1}{Ch^2(x)} = 1-th^2(x)\ "$
$Coth(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ "\ \frac{-1}{Sh^2(x)} = 1-\frac{1}{th^2(x)} = 1-Coth^2(x)\ "$

- **نقبل بدون برهان النظرية التالية:**

نظرية:

ليكن $f , g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قـابلين للاشتقاق عند النقطة x_0، و ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ ، لدينا:

1 - التابع $(f + g)$ قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) .$$

2 - التابع $\lambda . f$ قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا: $(\lambda . f)'(x_0) = \lambda . f'(x_0)$.

3 - التابع $(f . g)$ قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا:

$$(f . g)'(x_0) = f'(x_0) . g(x_0) + g'(x_0) . f(x_0) .$$

4 - إذا كان: $g(x_0) \neq 0$ ، فإننا نستطيع إيجاد جوار V للنقطة x_0 يكون عليه التابع g غير معدوم وبالتالي فان: $\left(\frac{f}{g}\right) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ يكون قـابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) . g(x_0) - g'(x_0) . f(x_0)}{(g(x_0))^2} .$$

بالأخص التابع $\left(\frac{1}{g}\right)$ قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2} .$$

مشـتـق تـابع مـركـب:

نظرية:

ليكن $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 و $x_0 \in D$ و ليكن $g : D' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابل للاشتقاق عند النقطة $f(x_0)$. نفرض أن: $f(D) \subseteq D'$ فان: التابع المركب $g \circ f$ يكون قابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] . f'(x_0) .$$

مشـتـق تـابع عـكـسي:

نظرية:

ليكن $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعا معرفا و $x_0 \in D$. نفرض أن التابع f مستمر و رتيب تماما على D . وبالتالي التابع f يعرف تقابلا من D إلى $f(D) = D'$ و أن التابع f^{-1} يكون: مستمرا على $f(D) = D'$ و رتـيبـا تماما ، و له نفس اتجـاه تغيرات التابع f .

إذا كان التابع f قابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 و إذا كان $f'(x_0) \neq 0$ فان:

التابع العـكـسي f^{-1} يكون قابلا للاشتقاق عند النقطة $f(x_0)$ و لدينا:

ليكن $g : D' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابل للاشتقاق عند النقطة $f(x_0)$. نفرض أن: $f(D) \subseteq D'$

فان: التابع المركب $g \circ f$ يكون قابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 و لدينا:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{+1}{f'(x_0)} .$$

نـتـيـجـة: إن النظرية السابقة تسمح لنا بإتمام جدول مشتقات التوابع المألوفة:

التابع $f(x)$	التابع المشتق $f'(x)$
$x^{\frac{1}{n}}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$
$x^r\ ,\ r\in\mathbb{Q}$	$r\cdot x^{r-1}\ ,\ r\in\mathbb{Q}$
$ArcSin(x)$	$\forall x\in]-1,+1[\ ,\ \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$
$ArcCos(x)$	$\forall x\in]-1,+1[\ ,\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Arc\tan(x)$	$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \frac{+1}{1+x^2}$
$ArcCot(x)$	$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \frac{-1}{1+x^2}$
$ArgSh(x)$	$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \frac{+1}{\sqrt{1+x^2}}$
$ArgCh(x)$	$\forall x\in]+1,+\infty[\ ,\ \frac{+1}{\sqrt{x^2-1}}$
$Argth(x)$	$\forall x\in]-1,+1[\ ,\ \frac{+1}{1-x^2}$
$ArgCoth(x)$	$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[\ ,\ \frac{+1}{1-x^2}$

12.3 - الاشتقاق على مجال من $\mathbb{R}$:

تعريف:

ليكن $f\ :\ I=[a\ ,\ b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا معرفا.

- نقول أن التابع f انه يقبل الاشتقاق على المجال $I=[a\ ,\ b]$ إذا وفقط إذا كان f قـابلا للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجال $I=[a\ ,\ b]$. أي: أن التابع f قابل للاشتقاق عند كل نقطة من المجال المفتوح $]a\ ,b[$ و انه قابل للاشتقاق عن يسار النقطة a وعن يمين النقطة b.

13.3 - الـقـيم الـقـصـوى المحلية:

نظرية:

إذا كان $f\ :\ I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا معرفا وكانت $x_0\in I$ و كان f قـابل للاشتقاق عند النقطة x_0 ويمتلك " قيمة قـصـوى محلية " عند النقطة x_0 فان: $f'(x_0)=0$. (العكس غير صحيح) .

ملاحظات:

1 - العكس غير صحيح في الحالة العامة.

إذا كان: $f'(x_0)=0$ مـوجود , فان قبول التابع f " لقيمة قـصـوى محلية " لـيـس امــرأ مــؤكدا . ومثال عن ذلك:

- التابع $f\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\longrightarrow f(x)=x^3$ يحقق $f(0)=0$ و لكن عند النقطة $x_0=0$ لا يقبل قيمة حدية. لأنه مهما كان الجوار $V(0)$ للنقطة $x_0=0$ لدينا:

$\forall x \in V(0) ; \begin{cases} f(x)=x^3 < 0=f(0) , x<0 \\ f(x)=x^3 > 0=f(0) , x>0 \end{cases}$. بالرغم التابع f قـابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$. و لدينا: $f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=3.x^2$.
في حـين أن: النقطة $(0 , f(0)) = (0 , 0)$ لا تمثل" قيمة قصـوى محلية " للتابع f .

2 - يمكن لتابع f أن يقبل " قيمة قصـوى محلية " عند النقطة x_0 بـدون أن يكون التابع f قـابلا للاشتقاق عند هذه النقطة x_0. و مثال عن ذلك:
- التابع $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longrightarrow g(x)=|x|$ يحقق $g(0)=0$ و يمتلك " قيمة قصـوى محلية صـغـرى " هي النقطة الـزاوية $(0 , g(0)) = (0 , 0)$. في حـين أن:
التابع g غير قـابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$. و لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad g'(x) = \begin{cases} g'_-(x) = -1 , x<0 \\ g'_+(x) = +1 , x>0 \end{cases}.$$

نظرية:
ليكن $f : I =]a , b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا و قـابلا للاشتقاق على $I =]a , b[$ " n " مـرة . نفرض أن هناك $c \in]a , b[$ تحقق:

$$\begin{cases} f'(c) = f''(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{cases}.$$

1 - حتى تكون" $f(c)$ " " قيمة قصـوى محلية " يجب أن يكون الـعـدد " n " زوجيــا.
2 - إذا كان: " n " زوجيــا فــان:
- " $f(c)$ " " قيمة صـغـرى محلية " إذا كـانت $f^{(n)}(c) > 0$.
- " $f(c)$ " " قيمة عـظـمـى محلية " إذا كـانت $f^{(n)}(c) < 0$.

حــالة خــاصة:
ليكن $f : I =]a , b[\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا و قـابلا للاشتقاق على $I =]a , b[$ مـرتين. نفرض أن هناك $c \in]a , b[$ تحقق: $f'(c) = 0$. (أي: النقطة c حـرجــة) و $f^{(")}(c) \neq 0$.
1 - إذا كان $f''(x) < 0$ فــان: " $f(c)$ " " قيمة عـظـمـى محلية " .
2 - إذا كان $f''(x) > 0$ فــان: " $f(c)$ " " قيمة صـغـرى محلية " .

نظرية:
ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ و $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا و f قـابلا للاشتقاق على I .
1 - إذا كان: $f'(x) = 0 , \forall x \in I$ فان: f ثـابتـا على I.
2 - إذا كان: $f'(x) \geq 0 , \forall x \in I$ فان: f متـزايـد على I.
3 - إذا كان: $f'(x) \leq 0 , \forall x \in I$ فان: f متـنـاقص على I.

14.3 - حساب المشتقات المتعاقبة:

تعريف:

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ و $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا , نعرف " المشتق النوني " (إن وجد) على المجال I . بالتراجع و ذلك بوضع:

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad \begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)} \right)' \end{cases}.$$

إذا كان: $f^{(n)}$ موجودا و مستمرا .

نشير بـ : $D^{(n)}(I)$ لأسرة التوابع القابلة للاشتقاق n مرة على مجال I.

مثال:

لنحسب " المشتق النوني " للتابعين المعرفين على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$f(x) = Sin(x)$ ، $g(x) = Cos(x)$. لدينا:

1 - $\forall x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = Cos(x) = Sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2} \right)$ ، و منه:

$\forall x \in \mathbb{R} : \; f^{(")}(x) = Cos\left(x + \frac{\pi}{2} \right) = Sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2} \right)$. و بالبرهان بالتراجع أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f^{(n)}(x) = \left(Sin(x) \right)^{(n)} = Sin\left(x + n.\frac{\pi}{2} \right).$$

2 - و بنفس الطريقة. نجد أن:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; g^{(n)}(x) = \left(Cos(x) \right)^{(n)} = Cos\left(x + n.\frac{\pi}{2} \right).$$

15.3 - صف أو صنف التوابع:

تعريف:

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$ و $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا , و ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

- نقول أن التابع f انه من الصف أو من الصنف $C^{(n)}(I)$ إذا كان: التابع f يقبل الاشتقاق حتى الدرجة n و المشتق $f^{(n)}$ مستمر على I.
- نقول أيضا أن التابع f قابل للاشتقاق و باستمرار n مرة على I.
- نقول عن التابع f انه من الصف أو من الصنف $C^{(\infty)}(I)$ إذا كان: التابع f قابلا للاشتقاق لا نهائيا على I . أي أن: $f^{(n)}$ موجود مهما كان $n \in \mathbb{N}^*$.
- نضع: $C^{(0)}(I) = C(I)$: "' مجموعة التوابع المستمرة على I "'.

أمثلة:

1 - التابع المعرف بـ : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; x \longrightarrow f(x) = x.\sqrt{x}$ من الصنف $C^{(1)}$ على المجال $[0 , 1]$.

2 - التابع المعرف بـ : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; x \longrightarrow g(x) = Cos(x)$ من الصنف $C^{(\infty)}$ على المجموعة $\mathbb{R}$.

نظرية: صيغة ليبنيتز

ليكن $f\,,g : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. و ليكن $n\in\mathbb{N}$. إذا كان $f\,,g\in C^{(n)}(I)$ ، فان:
و لدينا: $(f\,.\,g)\in C^{(n)}(I)$

$$(f\,.\,g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,.\,f^{(k)}(x)\,.\,g^{(n-k)}(x),\ et\ C_n^k=\frac{n!}{k!.(n-k)!}\,.$$

16.3 - نظرية رول (Michel Rolle) :

نظرية:

ليكن f تابعا معرفا على المجال $I=[a\,,b]$ $(a\neq b)$ و يحقق الشروط التالية:

ا - التابع f مستمر على المجال $I=[a\,,b]$.

ب - التابع f قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجال $]a\,,b[$.

جـ - التابع f يحقق: $f(a)=f(b)$.

فـان: تـوجد نقطة $c\in\,]a\,,b[$ بحيث: $f'(c)=0$.

ملاحظات:

1- النقطة $c\in\,]a\,,b[$ لـيست بالضرورة وحيدة .

2 - تبين الأمثلة التالية أن شروط نظرية رول لازمة لتطبيقها. وذلك:

ا- قابلة الاشتقاق ضرورية في كل نقطة من نقاط المجال $]a\,,b[$. ومثال عن ذلك:

- التابع f المعرف على المجال $I=[-1\,,+1]$ بـ : $f(x)=|x|$. يحقق جميع شروط نظرية رول عـدا شرط الاشتقاق عند النقطة $x_0=0$ لان:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad f'(x)=\begin{cases} f'_-(x)=-1\ ,\ x<0\\ f'_+(x)=+1\ ,\ x>0\end{cases}\,.$$

فـانه: لا تـوجد نقطة $c\in\,]-1\,,+1[$ بحيث: $f'(c)=0$.

ب - يجب على التابع f أن يـكون مستمرا على المجال $I=[a\,,b]$. ومثال عن ذلك:

- التابع f المعرف على المجال $I=[0\,,+1]$ بـ :

$f(x)=\begin{cases}(1-x) & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$. و يحقق: $f(0)=f(+1)=0$.

- التابع f يحقق جميع شروط نظرية رول عـدا شرط الاستـمـرار عند النقطة $x_0=0$.

فـانه: لا تـوجد نقطة $c\in\,]0\,,+1[$ بحيث: $f'(c)=0$.

جـ - يجب على التابع f أن يحقق الشرط : $f(a)=f(b)$. ومثال عن ذلك:

- التابع f المعرف على المجال $I=[0\,,+1]$ بـ : $f(x)=x$. و $f(0)=0\neq f(+1)=+1$.

- التابع f يحقق جميع شروط نظرية رول عـدا الشرط : $f(a)=f(b)$.

فـانه: لا تـوجد نقطة $c\in\,]0\,,+1[$ بحيث: $f'(c)=0$.

3 - شروط نظرية رول ليست كافية . ومثال عن ذلك:

- التابع f المعرف على المجال $I=[-1\,,+1]$ بـ : $f(x)=x^3$. لا يحقق كل شروط نظرية رول على المجال $I=[-1\,,+1]$. في حين: $f'(0)=0$.

4 - لا نطلب قابلية الاشتقاق عند a و b . ومثال عن ذلك:

- التابع f المعرف على المجال $I=[-1\,,\,+1]$ بـ : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

نظرية رول المعممة:

نظرية:

ليكن f تابعا معرفا و مستمرا على المجال $I=[a\,,\,+\infty[$ وقابلا للاشتقاق على المجال $]a\,,\,+\infty[$ و يحقق: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$.

فانه: توجد على الأقل نقطة $c\in\,]a\,,\,b[$ بحيث: $f'(c)=0$.

17.3 - نظرية التزايدات المنتهية (لا غرانج Lagrange) :

نظرية:

ليكن f تابعا معرفا على المجال $I=[a\,,\,b]$ ($a\neq b$) و مستمرا على المجال $I=[a\,,\,b]$ و قابل للاشتقاق على المجال $]a\,,\,b[$. فانه: توجد نقطة $c\in\,]a\,,\,b[$ بحيث:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \ ....(1)\ .$$

مثال1:

باستعمال نظرية التزايدات المنتهية . برهن على أن:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \ |Sin(x)|\leq|x|\ .$$

الحل:

من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ (موجب مثلا) نطبق نظرية التزايدات المنتهية على المجال $I=[0\,,\,x]$. بالنسبة للتابع $Sin(x)$ على المجال $I=[0\,,\,x]$ و يكون لدينا:

$$c\in\,]0\,,\,x[\ :\ Sin(x)-Sin(0)=(x-0).Cos(c)$$
$$\Leftrightarrow\ |Sin(x)|=x\ |Cos(c)|\leq x\ \ ,\ \ x>0\ .$$
$$\Leftrightarrow\ |Sin(x)|\ \leq x\ \ ,\ \ x>0\ ....(1)$$

- و بنفس الطريقة نبرهن المتراجحة عندما يكون $x\in\mathbb{R}$ سالبا .

مثال2:

باستعمال نظرية التزايدات المنتهية . برهن على أن:

$$\forall x>0\ :\ \ \frac{1}{1+x}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}\ .$$

الحل:

ليكن التابع $\ln(x)$ هو من الصنف $C^{(\infty)}(]0\,,+\infty[)$, شروط نظرية التزايدات المنتهية محققة على كل مجال $I=[x\,,\,x+1]$ حيث $x>0$ و بالتالي:

$$c\in\,]x\,,\,x+1[\ :\ \ln(x+1)-\ln(x)=(x+1-x).\ln'(c)$$
$$=\frac{1}{c}\ ....(1)\ .$$

و بحصر المقدار $\left(\frac{1}{c}\right)$ نجد أن:

$$c\in\,]x\,,\,x+1[\,,\,x>0\ \Leftrightarrow\ 0<x<c<x+1\Leftrightarrow\ \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}\ ......(2)\ .$$

و حسب (1) و (2) نجد أن:

$$\forall x > 0 : \ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} \ ......(3)$$

نتيجة: حول نظرية الـتـزايـدات المنتهية

- هناك تعريف مـكـافـئ لـنظرية الـتـزايـدات المنتهية . وذلك كما يلي:

- ليكن $f : I = [a , a+h] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعا معرفا و مستمر على المجال $I = [a , a+h]$. و قابل للاشتقاق على المجال $]a , a+h[$ فـانـه: تـوجد نقطة $\theta \in]0 , 1[$ بحيث:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta.h) , c = a + \theta.h$$

$$\Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = h.f'(a+\theta.h) ....(2)$$

(نأخذ $b = a+h , h > 0$ و $0 < \theta = \frac{c-a}{h} < 1$. في النظرية السابقة) .

مثال:

باستعمال النتيجة الأخيرة . عين قيمة العدد $\theta \in]0 , 1[$ و العدد الحقيقي $c = a + \theta.h$ للتابع المعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = a.t^2 + b.t + c'$.

- لدينا أن: $f'(t) = 2a.t + b$. و بما أن $f(t)$ كثير حدود فهو مستمر على $\mathbb{R}$ و قابل للاشتقاق على كل نقاط $\mathbb{R}$. و بالتالي هو مستمر على كل مجال من الشكل: $I = [x , x+h]$. و قابل للاشتقاق على المجال $]x , x+h[$ و ذلك من اجل كل x من $\mathbb{R}$. إذن : حسب النتيجة الأخيرة لـنظرية الـتـزايـدات المنتهية يكون لدينا:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta.h) , c = a + \theta.h$$

$$\Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = h.f'(a+\theta.h) ....(2)$$

و منه: $f(x+h) - f(x) = h.f'(x+\theta.h) ....(3)$. و بحساب المقدار:

$$f(x+h) - f(x) = a.(x+h)^2 + b.(x+h) + c' - ax^2 - b\,x - c'$$
$$= a.x^2 + 2.a.x.h + a.h^2 + b.x + b.h + c' - a.x^2 - b\,x - c'$$
$$= 2.a.x.h + a.h^2 + b.h \ ......(*)$$

و من جهة أخرى:
$$h.f'(x+\theta.h) = h.\left(2a.(x+\theta.h) + b\right)$$
$$= 2ax.h + 2a.\theta.h^2 + b.h \ ....(**)$$

$$2.a.x.h + a.h^2 + b.h = 2ax.h + 2a.\theta.h^2 + b.h$$

وحسب $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $\Leftrightarrow a.h^2 = 2a.\theta.h^2 \Leftrightarrow +1 = 2.\theta$.

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2} \ , \quad 0 < \theta = \frac{1}{2} < 1$$

و بالتالي: العدد الحقيقي $c = a + \theta.h$: $c = x + \theta.h = x + \frac{1}{2} \times h$.

نظرية الـتـزايـدات المنتهية الـمـعـمـمـة (كـوشي Cauchy) :

نظرية:

ليكن $f , g : I = [a , b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين معرفين و مستمرين على المجال $I = [a , b]$ ($a < b$) و قابلين للاشتقاق على المجال $] a , b [$ و إذا كان التابع g' لا يـنـعدم على المجال $] a , b [$. فـانه: تـوجد نقطة $c \in] a , b [$

بحيث: $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad ....(2)$$.

البرهان:

لتكن الدالة $h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g(x)$ مستمرة على المجال $I = [a , b]$ ($a < b$) و قابلة للاشتقاق على المجال $] a , b [$ وهذا راجع لكون الدالة g مستمرة على المجال $I = [a , b]$ ($a < b$) و قابلة للاشتقاق على المجال $] a , b [$. فحسب نظرية الـتـزايـدات المنتهية:

تـوجد نقطة $c \in] a , b [$ بحيث: $\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(c) \quad ....(1)$ ، حيث:

$h'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g'(c)$ من جهة ، و من جهة اخرى:

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g(a)}{b - a} = h'(c) \quad ....(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times\left(g(b)-g(a)\right)}{b - a} = h'(c) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = h'(c)$$

و بمان الدالة f تحقق شروط نظرية الـتـزايـدات المنتهية فان:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = h'(c) \Leftrightarrow \exists c \in]a,b[: \ f'(c) = h'(c)$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]a,b[: \ f'(c) = h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\times g'(c) .$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in]a,b[: \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

18.3 - قـاعـدة لـوبـيـطـال (Règle de L'Hôpital) :

تعريف:

ليكن $f , g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين معرفين من الصنف $C^{(n)}(I)$. ولتكن x_0 نقطة من I ,

إذا كان:

1 - $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = ...= f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

2 - $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = ...= g^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g^{(n)}(x_0) \neq 0$.

فـــان: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)} = ... = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)} .$$

ملاحظة:

- لتطبيق قـاعـدة لـوبـيـطـال يجب أن يتحقق أن النهاية تكون على الشكل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \; .$$

19.3 - مقارنة التوابع في جوار نقطة:

- لا متناهي الـصـغر , لا متناهي الـكـبـر:

تعريف:

ليكن $g \;,\; f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين معرفين على مجال $I \subset \overline{\mathbb{R}}$. و لتكن x_0 نقطة من I.

1 - نقول أن التابع g انـه " مـهـمـل أمام التابع f " بجور النقطة x_0 و باستعمال رمز **لـونـدو Landau** نكتب: $g = \circ(f)$ إذا كان: $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

و بعبارة أخرى في حالة $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\, \exists \alpha > 0 \,;\, |x - x_0| < \alpha \;\Rightarrow\; |g(x)| \le \varepsilon . |f(x)| .$$

2 - إذا كان $f = 1$, أي إذا كان: $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, قـلـنـا إن g " لا متناهي الـصـغر" عندما x يؤول إلى x_0 .

3 - إذا كان: $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$, قـلـنـا إن g " لا متناهي الـكـبـر"عندما يؤول x إلى x_0.

امثلة:

1 - $x.Sin\left(\frac{1}{x}\right) = \circ\left(\frac{1}{x}\right) \;.\; \forall x \in V(0)$. لان:

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{x.Sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to x_0 = 0} x^2.Sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \; .$$

2 - $x^2.Cos(x) = \circ(x) \;.\; \forall x \in V(0)$. لان:

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{x^2.Cos(x)}{x} = \lim_{x \to x_0 = 0} x.Cos(x) = 0 \; .$$

3 - $x^3.e^{+x^2} = \circ(x^2) \;.\; \forall x \in V(0)$. لان:

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{x^3.e^{+x^2}}{x^2} = \lim_{x \to x_0 = 0} x.e^{+x^2} = 0 \; .$$

4 - $\left(\frac{1}{x}\right) = \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \;.\; \forall x \in V(0)$. لان:

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to x_0 = 0} x = 0 \; .$$

5 - $\circ(x) = \left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. $\forall x \in V(+\infty)$. لان:

$$\lim_{x \to x_0 = +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = +\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{x^4}\right)}{(x)} = \lim_{x \to x_0 = +\infty} \left(\frac{1}{x^5}\right) = 0 .$$

تعريف:

ليكن $f , g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين معرفين على مجال $I \subset \overline{\mathbb{R}}$. و لتكن x_0 نقطة من I .

1 - نقول أن التابعين f و g أنـهـما " مـتـكـافـئـتـان " بجوار النقطة x_0 إذا:

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +1$. نـكـتـب تـعـبـيـرا عن ذلك: $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

2 - نقول أن التابعين f و g أنـهـما " مـتـكـافـئـتـان " بجور النقطة x_0 إذا:

$f - g = \circ(g)$ أو $f - g = \circ(f)$.

نتيجة:

- إذا كان التابعين f و g تابعين معرفين في جوار النقطة x_0 فان:

$$\left(g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x) \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +1 \right) .$$

نظرية:

- العلاقة: $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g \,\Re\, f$ هي علاقة تـكافـؤ بالنسبة لفضاء التوابع.

نـتـائج:

1 - إذا كان: $f(x) \underset{x_0}{\sim} f_1(x)$ و $g(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x)$ فــان:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} = l .$$

2 - $g(x) \times f(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x) \times f_1(x)$.

3 - $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{f_1(x)}$.

4 - $g(x) \pm f(x) \;\cancel{\xrightarrow{\underset{x_0}{\sim}}}\; g_1(x) \pm f_1(x)$.

امثلة:

1 - $Sin(x) \underset{x_0 = 0}{\sim} x$. لان: $\lim_{x \to x_0 = 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \dfrac{Sin(x)}{x} = 1$.

2 - $Sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x_0 = +\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{x}\right)$. لان: $\lim_{x \to x_0 = +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = +\infty} \dfrac{Sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = 1$.

3 - $\left(e^{+x} - 1\right) \underset{x_0 = 0}{\sim} x$. لان: $\lim_{x \to x_0 = 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \dfrac{\left(e^{+x} - 1\right)}{x} = 1$.

4 - لأن: $\left(1 - Cos(x)\right) \underset{x_0=0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{\left(1 - Cos(x)\right)}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)} = 1 \; .$$

5 - لأن: $\tan g(x) \underset{x_0=0}{\sim} x$.

$$\lim_{x \to x_0 = 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{\tan g(x)}{x} = \lim_{x \to x_0 = 0} \frac{Sin(x)}{x} \times \frac{1}{Cos(x)} = 1 \times 1 = 1 \; .$$

الفصل الرابع

دستور تايلور و النشر المحدود

- **دستور تايلور**
- **النشور المحدود**

دستور تايلور و النشر المحدود

1.4- دستور تـايـلـور – بـاقي لاغرانـج و مـاك - لـوران:

تعريف 01:

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$. و ليكن f تابعا حقيقيا معرفا على المجال I . و ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

- نقول عن التابع f انه من الصنف $C^{(n)}$ على المجال I اذا كان f قابلا للاشتقاق n مرة على المجال I , و كان مشتقه $f^{(n)}$ مستمرا على المجال I.

- و نقول عن التابع f انه من الصنف $C^{(0)}$ على المجال I إذا كان مستمرا على المجال I .

و إذا كان f قابلا للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات فنقول أن f من الصنف $C^{(\infty)}$ على المجال I.

- دستور تـايـلـور- بـاقي لاغرانـج:

نـظريـة:

ليكن المجال المتراص $I = [a,b]$, و ليكن f تابعا حقيقيا من الصنف $C^{(n)}$ على المجال $I = [a,b]$, مع $f^{(n)}$ قابلا للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$. عـنـدئـذ: يـوجد c من $]a,b[$ بحيث:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!}.f^{(1)}(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}.f^{(2)}(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}.f^{(3)}(a) +$$

$$+ .... + \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a) + + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c) \quad .....(1)$$

.

تسمى العبارة الأخيرة بـدسـتـور تـايـلـور – بـاقي لاغـرانـج .

- دستور مـاك - لـوران:

في دستور تـايـلـور ,لنضع: $h = b - a$ و $c = a + \theta . h$ مع $\theta \in]0,1[$ عـنـدئـذ نجد:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^1}{1!}.f^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!}.f^{(2)}(a) + \frac{h^3}{3!}.f^{(3)}(a) +$$

$$+ .... + \frac{h^n}{n!}.f^{(n)}(a) + + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(a+\theta.h) \quad ....(2)$$

- إن العلاقة (2) بـيـن لنا انه من اجل h في جوار الصفر فان: $h \longrightarrow f(a+h)$ يقترب من كثير الحدود:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a) = f(a) + \frac{h^1}{1!}.f^{(1)}(a) + \frac{h^2}{2!}.f^{(2)}(a) + \frac{h^3}{3!}.f^{(3)}(a) + + ... + \frac{h^n}{n!}.f^{(n)}(a)$$

.

والعدد المكمل : " $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(a+\theta.h)$ " يدعى " بـبـاقي لاغـرانـج " .

- لنفرض الآن أن: " $0 \in I$ " . عـنـدئـذ بتعويض العدد a " بالصفر " في العلاقة (2) , يكون لدينا من اجل كل h من $I = [a,b]$ يـوجـد: $\theta \in]0,1[$ بحيث:

$$f(h)=f(0)+\frac{h^1}{1!}.f^{(1)}(0)+\frac{h^2}{2!}.f^{(2)}(0)+\frac{h^3}{3!}.f^{(3)}(0)+$$
$$.+....+\frac{h^n}{n!}.f^{(n)}(0)++\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(\theta.h)\ ....(3)$$
- تسمى العبارة الأخيرة بدستور مـــاك - لـوران.

مثال 01:

ليكن التابع: $f(x)=Sin(x)$. نعلم إن التابع f من الصنف $C^{(\infty)}$ على ℝ. و لدينا من اجل كل $k\in$ℕ : $f^{(k)}(x)=Sin\left(x+k.\frac{\pi}{2}\right)$. و عليه فـان: $f^{(k)}(0)=Sin\left(k.\frac{\pi}{2}\right)$

عـنـدئـذ: فمن اجل k زوجـي لدينا أن: $k=2p\ ,\ p\in$ℕ $\Rightarrow f^{(2p)}(0)=0$. و من اجل k فـردي لدينا أن: $k=2p+1\ ,\ p\in$ℕ $\Rightarrow f^{(2p+1)}(0)=Sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^p$. إذن:

$$f^{(2p+2)}(x)=Sin\left(x+(2p+2).\frac{\pi}{2}\right)=Sin(x+(p+1).\pi)=(-1)^{p+1}.Sin(x).$$

فحسب دستور مـــاك - لـوران فانه من اجل كل x من ℝ يـوجـد: $\theta\in\left]0,1\right[$ بحيث:

$$Sin(x)=f(0)+\frac{x^1}{1!}.f^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}.f^{(2)}(0)+\frac{x^3}{3!}.f^{(3)}(0)+$$
$$+....+\frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(\theta.h)\ ....(3)\ .$$
أي أن:
$$Sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....+(-1)^p.\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+(-1)^{p+1}.\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!}.Sin(\theta.x).$$

مثال 02:

ليكن التابع: $g(x)=Cos(x)$. نعلم إن التابع g من الصنف $C^{(\infty)}$ على ℝ. و لدينا من اجل كل $k\in$ℕ : $g^{(n)}(x)=Cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$. فبنفس الطريقة المتبعة في المثال 01 نجد انه من اجل كل x من ℝ يـوجـد: $\theta\in\left]0,1\right[$ بحيث:

$$Cos(x)=g(0)+\frac{x^1}{1!}.g^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}.g^{(2)}(0)+\frac{x^3}{3!}.g^{(3)}(0)+$$
$$+....+\frac{x^n}{n!}.g^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.g^{(n+1)}(\theta.h)\ .$$
أي أن:
$$Cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+(-1)^p.\frac{x^{2p}}{(2p)!}+(-1)^{p+1}.\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.Sin(\theta.x).$$

1 - مفهوم النشر المحدود:

تعريف 01:

ليكن f تابعا حقيقيا معرفا على مجال I من ℝ. ولتكن x_0 نقطة من المجال I أو احد طرفيه , و $n\in$ℕ.

1 . نقول عن f انه يقبل نشرا محدودا من المرتبة "n" في جوار x_0, إذا وجد كثير حدود $P(x)$ من ℝ$[x]$, من درجة تساوي"n" على الأكثر, بحيث: $f(x)=P(x)+\varepsilon(x^n)$. بحيث:

$\varepsilon(x^n)$: ينتهي إلى الصفر لما ينتهي x إلى $x_0=0$. أي أن:

$P(x)=a_0+a_1.x^1+a_2.x^2+a_3.x^3+....+a_n.x^n$ و

$$. \ f(x) = \left[a_0 + a_1 . x^1 + a_2 . x^2 + a_3 . x^3 + ... + a_n . x^n \right] + \varepsilon\left(x^n \right) ....(*)$$

- وعندها نسمي كثير الحدود $P(x)$ بـ " الجزء الرئيسي " للتابع f. فيما نسمي $\varepsilon\left(x^n \right)$ بـ " بـبـاقــي أو الخطأ المرتكب للنشر المحدود ".

ملاحظة:

إن مفهوم الجزء الرئيسي للتابع f , هو احد الطرق لـتـقـريـب التابع f بـكـثـيـر حـدود في مجال يحوي الصفر .

2 . و لنعتبر الآن: $x_0 \in \mathbb{R}$ مع $x_0 \neq 0$.

- نقول عن التابع f انه يقبل نشرا محدودا من المرتبة "n" في جوار x_0, إذا وجد كثير حـدود $P(x)$ من $\mathbb{R}[x]$, من درجة تساوي "n" على الأكثر, بحيث:

$$f(x) = P\left(x - x_0 \right) + \varepsilon\left(\left(x - x_0 \right)^n \right) ...(**)$$. حيث:

$\varepsilon\left(\left(x - x_0 \right)^n \right)$ ينتهي إلى الصفر لما ينتهي x إلى x_0 .

3 . نشير إلى أن التعريف يبقى صحيح من اجل $x_0 = +\infty$ (أو $x_0 = -\infty$) حيث:

أنـنـا نقول عن f انه يقبل نشرا محدودا من المرتبة "n" في جوار $x_0 = +\infty$, (أو $x_0 = -\infty$) إذا وجـد كثير حـدود $P(x)$ من $\mathbb{R}[x]$, من درجة تساوي "n" على الأكثر, بحيث:

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x} \right) + \varepsilon\left(\frac{1}{x^n} \right)$$. بحيث: $\varepsilon\left(\frac{1}{x^n} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. إذن:

$$. \ f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x^1} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \varepsilon\left(\frac{1}{x^n} \right) ....(***)$$

تعريف 02:

1 . إذا قبل التابع f نهاية منتهية عند جوار x_0 أي أن: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ فــان: التابع f يقبل نشرا منتهيا في جوار x_0 يكتب على الشكل: $f(x) = P_n(x) + \left(x - x_0 \right)^n . \varepsilon(x)$. أي أن:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 . \left(x - x_0 \right)^1 + a_2 . \left(x - x_0 \right)^2 + \\ &+ a_3 . \left(x - x_0 \right)^3 + ... + a_n . \left(x - x_0 \right)^n + \left(x - x_0 \right)^n . \varepsilon(x) ....(****) \end{aligned}$$.

مع: $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) \overset{?}{=} 0$.

2 . إن " درجة النشر المنتهي" تظهر في الحد: $\left(x - x_0 \right)^n . \varepsilon(x)$ و لـيـس في كثير الحدود $P_n(x)$ الذي يمكن أن تكون درجته اقل تماما من "n".

3 . إن الكتابة التالية: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ هي احد الطرق لـتـقـريـب التابع f بـكـثـيـر حـدود $P_n(x)$ في مجال يحوي الصفر, مع أن الخطأ المرتكب $R_n(x)$ للتابع f ينتهي إلى الصفر لما ينتهي x إلى $x_0 = 0$.

ملاحظة هامة:

- ان رتبة نشر محدود تتعلق بالخطا (او الباقي) $R_n(x) = x^n . \varepsilon(x)$ وليس بدرجة كثير الحدود P_n التي من الممكن ان تكون اقــل تماما من n.

- و كمثال عن ذلك: $f(x) = x^4 + x^3 . \varepsilon(x)$ يمثل نشرا محدودا من الرتبة 3 و ليس الرتبة 4 لأنه: يمكن كتابته على الشكل: $f(x) = x^4 + x^3 . \varepsilon(x) = x^3 . \left(x + \varepsilon(x) \right)$. أي ان:

$$f(x) = x^4 + x^3 . \varepsilon(x) = x^3 . \varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) = \left(x + \varepsilon(x) \right)$$ أي ان:

مع: $f(x)=x^4+x^3.\varepsilon(x)=(0)+x^3.\varepsilon_1(x)$ ، $\lim_{x\to x_0}\varepsilon_1(x)=\lim_{x\to x_0}\left(x+\varepsilon(x)\right)=0$.

و بالتالي: كثير الحدود المرفق (أي الجزء الرئيسي لهذا النشر) معدوم.

2 - خواص النشر المحدود:

نشير إلى أن الخواص التي سنعطيها فيما يلي تتعلق بالنشر المحدود في جوار الصفر تبقى صحيحة من اجل x_0 كذلك , سواء كان x_0 منتهيا أو غير منتهي .و يكفي لذلك للرجوع إلى جوار الصفر وضع تبديل متغير: $u=x-x_0$ أو $u=\dfrac{1}{x_0}$.

1. مبرهنة 01:

إذا كان للتابع f نشرا محدودا في جوار $x_0=0$ من المرتبة "n" فـانه: يتمتع بنشر محدود في هذا الجوار من اجل كل مرتبة r حيث: $r\le n$.

2. مبرهنة 02:

إذا كان التابع f يتمتع بنشر محدود في جوار $x_0=0$ من المرتبة"n"فـان:هذا النشر المحدود وحيد.

3. نشر مـاك - لـوران:

ليكن I مجالا مفتوحا من $\mathbb{R}$ يحوي الصفر. و ليكن f تابعا من الصنف $C^{(\infty)}$ على المجال I , عندئذ: حسب دستور مـاك - لـوران فـان: f يتمتع بنشر محدود من المرتبة"n" في جوار $x_0=0$ يكتب على الشكل:

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}.x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}.x^3+....++\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n+\varepsilon\left(x^n\right).$$

حيث: $\varepsilon\left(x^n\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$. نسميه نشر مـاك – لـوران للتابع f في جوار $x_0=0$.

مثال 01:

1. ليكن التابع: $f(x)=e^x$. لدينا أن: التابع f قابل للاشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$ n مرة. و من اجل كل n من $\mathbb{N}$, لدينا: $f^{(n)}(x)=e^x$ و أن: $f^{(n)}(0)=e^0=+1$. ومنه:

$$f(x)=e^x=1+\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}.x^2+\frac{1}{3!}.x^3+....++\frac{1}{n!}.x^n+\varepsilon\left(x^n\right).$$

و هو نشر مـاك - لـوران للتابع $f(x)=e^x$ في جوار $x_0=0$.

2 . بما انه لدينا من اجل كل $a\in\mathbb{R}_+^*$: $a^x=e^{x\ln(a)}$. ينتج من هذا انه من اجل x من $\mathbb{R}$:

$$a^x=e^{x\ln(a)}=1+\frac{\left(\ln(a)\right)^1}{1!}x^1+\frac{\left(\ln(a)\right)^2}{2!}x^2+...+\frac{\left(\ln(a)\right)^n}{n!}x^n+\varepsilon\left(x^n\right).$$

و هو نشر مـاك - لـوران للتابع $a^x=e^{x\ln(a)}$ في جوار $x_0=0$.

مثال 02:

1 . ليكن التابع: $g(x)=Cos(x)$. لدينا أن: التابع f قابل للاشتقاق بالاستمرار على $\mathbb{R}$ n مرة.

و من اجل كل n من $\mathbb{N}$, لدينا: $g^{(n)}(x)=Cos\left(x+n.\dfrac{\pi}{2}\right)$ و $g^{(n)}(0)=Cos\left(n.\dfrac{\pi}{2}\right)$.

فمن اجل n زوجـي لدينا أن: $n=2p\ ,\ p\in\mathbb{N}\ \Rightarrow g^{(2p)}(0)=Cos(p\pi)=(-1)^p$. و من اجل n فـردي لدينا أن: $n=2p+1\ ,\ p\in\mathbb{N}\ \Rightarrow g^{(2p+1)}(0)=Cos\left((2p+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

إذن يكون لدينا: $Cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+(-1)^p\,.\,\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\varepsilon\left(x^{2p+1}\right)$

2 . و من اجل التابع: $f(x)=Sin(x)$ يكون لدينا من اجل كل x من ℝ:

$$Sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....+(-1)^p\,.\,\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\varepsilon\left(x^{2p+2}\right).$$

2.4 - العمليات على النشر المحدود:

1. الجمع:

- إذا كان التابعان f و g يتمتعان بنشرين محدودين من المرتبة "n" في جوار $x_0=0$ بحيث: $f(x)=P(x)+\varepsilon_1\left(x^n\right)$ و $g(x)=q(x)+\varepsilon_2\left(x^n\right)$ فـان: التابع $(f+g)$ يتمتع بنشر محدود من المرتبة "n" في جوار $x_0=0$. ولدينا:

$$(f+g)(x)=P(x)+q(x)+\varepsilon\left(x^n\right).$$

- إذا كان الـنـشـريـن المحدودين للتابعين f و g في جوار $x_0=0$ ن مرتبتين مختلفتين $m\,,n$ على الترتيب فان: نشر تابع الجمع آو الطرح $(f\pm g)$ يكون:

$$dégré\left(f\pm g\right)\le \inf\left(n\,,m\right).$$

مثال 01:

اوجد النشر المحدود من المرتبة "n" للتابعين:

$$Ch(x)=Cosh(x)=\frac{e^{+x}+e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad Sh(x)=Sinh(x)=\frac{e^{+x}-e^{-x}}{2}:$$

- لدينا أن: $e^x=1+\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}.x^2+\frac{1}{3!}.x^3+....++\frac{1}{n!}.x^n+\varepsilon_1\left(x^n\right)...(1)$ وكذلك أن:

$e^{-x}=1-\frac{1}{1!}x^1+\frac{1}{2!}.x^2-\frac{1}{3!}.x^3+....+(-1)^n.\frac{1}{n!}.x^n+\varepsilon_2\left(x^n\right)...(2)$. و بالجمع (1) و (2) والقسمة على 2 نجد أن: $Ch(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+....+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\varepsilon\left(x^{2p+1}\right).$

و بالطرح (1) و (2) و القسمة على 2 نجد أن:

$$Sh(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+....+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\varepsilon\left(x^{2p+2}\right).$$

2 . الـجـداء:

- إذا كان التابعان f و g يتمتعان بنشرين محدودين من المرتبة "n" في جوار $x_0=0$ بحيث: $f(x)=P(x)+\varepsilon_1\left(x^n\right)$ و $g(x)=q(x)+\varepsilon_2\left(x^n\right)$ فـان: التابع $(f.g)$ يتمتع بنشر محدود من المرتبة "n" في جوار $x_0=0$. و لدينا: $(f\cdot g)(x)=r(x)+\varepsilon\left(x^n\right)$. حيث: $r(x)$ هو باقي القسمة الاقليدية لـ $p(x).q(x)$ على x^{n+1} مع: $dég\,r(x)\le n$.

- إذا كان الـنـشـريـن المحدودين للتابعين f و g في جوار $x_0=0$ من مرتبتين مختلفتين $m\,,n$ على الترتيب فان: نشر تابع الـجــداء $(f\cdot g)$ يكون:

$$dégré\left(f\times g\right)\le \inf\left(n\,,m\right).$$

مثال 02:

اوجد النشر المحدود من المرتبة $"n"=3$ للتابع : $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ في جوار $x_0=0$.

- من اجل ذلك لدينا: $(1)...$ $e^x=1+\dfrac{1}{1!}x^1+\dfrac{1}{2!}.x^2+\dfrac{1}{3!}.x^3+....++\dfrac{1}{n!}.x^n+\varepsilon(x^n)$.

و كذلك: $(2)...$ $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=1-\dfrac{1}{2}.x+\dfrac{3}{8}.x^2-\dfrac{5}{16}.x^3+\varepsilon(x^3)$.

عندئذ لدينا حسب خاصية الجداء:

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}=1+\frac{1}{2}.x+\frac{3}{8}.x^2-\frac{1}{48}.x^3+\varepsilon(x^3)...(3).$$

3. المقلوب:

إذا كان التابع f يتمتع بنشر محدود من المرتبة $"n"$ في جوار $x_0=0$ تقييمه غيرمعدوم, أي أن:

$f(x)=P(x)+\varepsilon(x^n)$ ،

$P(x)=a_0+a_1.x^1+a_2.x^2+a_3.x^3+....+a_n.x^n\ ,\ a_n\neq 0$.

فـان: التابع $\dfrac{1}{f}$ يتمتع بنشر محدود من المرتبة $"n"$ في جوار $x_0=0$. و لدينا:

$\dfrac{1}{f(x)}=q(x)+\varepsilon(x)$.

حيث: $q(x)$ هو حاصل قسمة 1 على $P(x)$ " وفق القوى المتزايدة حتى المرتبة $"n"$ ".

4. القسمة:

إذا كان التابعان f و g يتمتعان بنشرين محدودين من المرتبة $"n"$ في جوار $x_0=0$ بحيث:

$f(x)=P(x)+\varepsilon_1(x^n)$ و $g(x)=q(x)+\varepsilon_2(x^n)$ حيث:

$q(x)=b_0+b_1.x^1+b_2.x^2+b_3.x^3+....+b_n.x^n\ ,\ b_n\neq 0$. فـــان:

التابع $\dfrac{f}{g}$ يتمتع بنشر محدود من المرتبة $"n"$ في جوار $x_0=0$. و لدينا:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=A(x)+\varepsilon(x^n)$. حيث: $A(x)$ هو حاصل قسمة $P(x)$ على $q(x)$

" و فق القوى المتزايدة حتى المرتبة $"n"$ ".

مثال 03:

اوجد النشر المحدود من المرتبة $"n"=5$ للتابع: $f(x)=\tan g(x)$ في جوار $x_0=0$.

- من اجل ذلك لدينا تعريفا أن: $f(x)=\tan g(x)=\dfrac{Sin(x)}{Cos(x)}$. ولدينا من جهة أخرى:

$Sin(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\varepsilon_1(x^5)\ ...(1)$ و $Cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\varepsilon_2(x^5)\ ...(2)$.

عندئذ بإجراء القسمة و فق القوى المتزايدة الجزء الرئيسي لـ $Sin(x)$ على الجزء الرئيسي لـ $Cos(x)$ حتى المرتبة $"n"=5$ نجد أن:

$$\tan g(x)=\frac{Sin(x)}{Cos(x)}=x+\frac{1}{3}.x^3+\frac{2}{15}.x^5+\varepsilon(x^5)...(3)\ .$$

مثال 04:

اوجد النشر المحدود من المرتبة $"n"=5$ للتابع: $f(x)=th(x)$ في جوار $x_0=0$.

- من اجل ذلك لدينا تعريفا أن: $f(x)=th(x)=\dfrac{Sh(x)}{Ch(x)}$. ولدينا من جهة أخرى:

$Sh(x)=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\varepsilon_1(x^5)$ ...(1) و $Ch(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\varepsilon_2(x^5)$ ...(2).

عندئذ بإجراء القسمة وفق القوى المتزايدة الجزء الرئيسي لـ $Sh(x)$ على الجزء الرئيسي لـ $Ch(x)$ حتى المرتبة $"n"=5$ نجد أن:

$$th(x)=\frac{Sh(x)}{Ch(x)}=x-\frac{1}{3}.x^3+\frac{2}{15}.x^5+\varepsilon(x^5)...(3) .$$

5 . النشر المحدود لتابع مركب:

نظرية:

إذا كان التابعان f و g يتمتعان بنشرين محدودين من المرتبة $"n"$ في جوار $x_0=0$ و كان:

$\lim\limits_{x\to x_0=0} f(x)=0$, حيث: $f(x)=P(x)+\varepsilon_1(x^n)$ و

$g(x)=q(x)+\varepsilon_2(x^n)$ عندئذ: التابع المركب $(g\circ f)$ يتمتع بنشر محدود من المرتبة $"n"$ في جوار $x_0=0$. ولدينا: $(g\circ f)(x)=R(x)+\varepsilon(x^n)$.

حيث : $R(x)$ هو باقي القسمة الاقليدية لـ $(q\circ p)(x)$ على x^{n+1} .

مثال 04 :

اوجد النشر المحدود من المرتبة $"n"=5$ للتابع: $f(x)=sh[\ln(1+x)]$ في جوار $x_0=0$.

- من اجل ذلك لدينا أن: $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+\varepsilon(x^5)$ ...(1) . ولدينا من جهة أخرى: $Sh(u)=u+\dfrac{u^3}{3!}+\dfrac{u^5}{5!}+\varepsilon(u^5)$ ...(2) . وبتطبيق النظرية نحصل على النشر التالي:

$$f(x)=sh[\ln(1+x)]=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{2}+\varepsilon(x^5) .$$

- - وبطريقة أخرى , لدينا تعريفا أن:

$$f(x)=sh[\ln(1+x)]=\frac{1}{2}\left(e^{\ln(1+x)}-e^{-\ln(1+x)}\right)=\frac{1}{2}\left(1+x-\frac{1}{1+x}\right)...(*) .$$

و لدينا تعريفا أن: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\varepsilon(x^5)$ ....(3) . و بالتعويض في العبارة $(*)$ نجد أن: $f(x)=sh[\ln(1+x)]=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^5}{2}+\varepsilon(x^5)$.

3.4 - النشر المحدود المعمم: ليكن f تابعا معرفا في جوار الصفر ماعدا عند النقطة "0" , أي: $\lim\limits_{x\to x_0=0} f(x)=\pm\infty$. - لنفرض انه يوجد عدد طبيعي m من $\mathbb{N}^*$ بحيث: يكون للتابع $x^m\times f(x)$ نشرا محدودا من المرتبة $"n"$ $(m\le n)$ في جوار "0" :

$x^m\times f(x)=a_0+a_1.x^1+a_2.x^2+a_3.x^3+....+a_n.x^n$. عندئذ: يكون لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{x^m}\left(a_0+a_1.x^1+a_2.x^2+a_3.x^3+....+a_n.x^n\right)+\varepsilon(x^{n-m})...(*) .$$

نسمي هذه العلاقة " بالنشر المحدود المعمم من المرتبة "$n-m$" " للتابع f في جوار الصفر.

مثال 05:

اوجد النشر المحدود المعمم من المرتبة $"n"=4$ للتابع: $f(x)=Cotg(x)$.

- من اجل ذلك لدينا تعريفا أن: $f(x)=Cotg(x)=\dfrac{Cos(x)}{Sin(x)}$ و $\lim\limits_{x\to x_0=0} f(x)=\pm\infty$.

حيث: $$f(x)=Cotg(x)=\frac{Cos(x)}{Sin(x)}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\varepsilon_1(x^5)}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\varepsilon_2(x^6)} .$$

- فمن اجل $m=1$ نحصل على التابع:

$$x\times Cotg(x)=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\varepsilon_1(x^5)}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\varepsilon_2(x^5)}=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+\varepsilon(x^5)$$. أي أن:

و عليه فان: النشر المحدود المعمم للتابع: $f(x)=Cotg(x)$ من المرتبة $"n"=4$ في جوار الصفر: $$f(x)=Cotg(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\varepsilon(x^4)....(*) .$$

- قائمة النشور المحدودة لبعض الدوال الشهيرة في جوار الصفر "0" -

$$Cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+....+(-1)^n\times\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$Sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+....+(-1)^n\times\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+.....+(-1)^{n-1}\times\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$e^x=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^9}{9!}+....+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x^1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+.....+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)....(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+.....+(-1)^n\times x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+.....+x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{(1+x)}=(1+x)^{\alpha=\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^1-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{48}x^3+....+(-1)^{n-1}\times\frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n\times n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}=(1+x)^{\alpha=-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^1+\frac{3}{8}x^2+....+(-1)^n\times\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n\times n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\tan g(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+o\left(x^{15}\right)$$

$$ArcSin(x)=x+\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\times\frac{x^5}{5}+....+\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n.n!}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$Arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+....+(-1)^n\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\mathrm{Cosh}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{12}}{12!}+\frac{x^{14}}{14!}+....+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\mathrm{Sinh}(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{13}}{13!}+\frac{x^{15}}{15!}+....+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\tan gh(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+o\left(x^{15}\right)$$

$$Arg\,\mathrm{Sin}\,h(x)=x-\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\times\frac{x^5}{5}+....+(-1)^n\times\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n\times n!}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$Arg\tan gh(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{13}x^{13}+....+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

الفصل الخامس

البنى الجبرية، الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

- البنى الجبرية الأساسية
- الفضاءات الشعاعية
- التطبيقات الخطية

1.5 - البنى الجبرية الأساسية (الزمرة، الحلقة و الحقل)

العمليات الداخلية:

تعريف: لتكن E مجموعة غير خالية , نسمي عملية داخلية في E أو قانونا داخليا في E كل تطبيق f معرفا على الجداء الديكارتي $E\times E$ نحو E كما يلي: $\underset{(x,y)\to f(x,y)=z}{f : E\times E \to E}$.

- و نرمز للعمليات الداخلية بالرموز التالية: $+ , \times , * , (\circ) , T , \perp , \Delta , ...$.

و سنصطلح على الكتابة: $z = x\ T\ y$ بدلا من أن نكتب: $z = T(x , y)$.

ملاحظة: يمكننا أن نلاحظ انه يمكن صياغة تعريف العملية الداخلية بالطريقة التالية:

$(*$ عملية داخلية في $E)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x , y \in E : \ x * y \in E)$.

أمثلة:

1. $+ : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \ : \ (x,y)\to x+y$ ، $\cdot : \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R} \ : \ (x,y)\to x.y$.
2. $E=\mathbb{N}$ والعملية: $x*y = x^2+y^2$ داخلية في $E=\mathbb{N}$. لكون:
$\forall x , y \in\mathbb{N} : \ x^2+y^2\in\mathbb{N}$.
3. $E=\mathbb{N}$ و العملية: $x*y = x-y$ ليست داخلية في $E=\mathbb{N}$. لكون:
$\forall x=+3 , y=+4\in\mathbb{N} \ : \ x-y = 3-4 = -1\notin\mathbb{N}$.
4. $+ : [0,1]\times[0,1]\to[0,1] \ : \ (x,y)\to x+y$.
العملية ليست داخلية في $E=[0,1]$. لكون:
$\forall x=+1 , y=\frac{1}{2}\in[0,1] \ : \ x+y = \frac{3}{2}\notin[0,1]$.

2.5 - خواص العملية الداخلية :

- **التجميع:**

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$. نقول أن العملية $*$ تجميعية في E إذا و فقط إذا تحقق: $\forall x,y,z\in E : (x*y)*z = x*(y*z)$.

- مثلا : 1 . في $E=\mathbb{N}$ الجمع تجميعي و الضرب تجميعي .

2 . في $E=\mathbb{N}$ و العملية: $x*y = x^2+y^2$ ليست تجميعية . لكون:

لدينا و $x=1 , y=2 , z=3$: $(x*y)*z = (1*2)*3 = 34 .....(1)$

و $x*(y*z) = 1*(2*3) = 170 .....(2)$.

- **التبديل:**

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$. نقول أن العملية $*$ تبديلية في E إذا و فقط إذا تحقق: $\forall x,y\in E : \ (x*y) = (y*x)$.

- **أمثلة:** 1. الجمع في $E=\mathbb{Z}$ تبديلي . 2. الطرح في $E=\mathbb{Z}$ ليس تبديلي.

3. التقاطع $\cap$ و الاتحاد $\cup$ في $P(E)$ تبديليان .

- التوزيع:

لتكن E مجموعة غير خالية و لتكن T و $*$ عمليتان داخليتان في E.

- نقول أن العملية $*$ توزيعية على العملية T إذا و فقط إذا تحقق:

$\forall\ x, y, z \in E: \quad x*(y\ T\ z) = (x*y)\ T\ (x*z)$. و تحقق أيضا:

$\forall\ x, y, z \in E: \quad (x\ T\ y)*z = (x*z)\ T\ (y*z)$.

- العنصر الحيادي:

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$. و ليكن $e_E \in E$.

- نقول عن e_E انه عنصرا حياديا بالنسبة للعملية الداخلية $*$ في E إذا و فقط إذا تحقق:

$\forall\ x \in E: \quad (x*e_E) = (e_E*x) = x$.

- أمثلة:

1. " 0 " هو عنصر حيادي بالنسبة للجمع في $E = \mathbb{R}$.
2. " 1 " هو عنصر حيادي بالنسبة للضرب في $E = \mathbb{R}$.
3. في المجموعة $L = P(E)$ أن:

ا - بالنسبة للعملية " $\cup$ " $= *$: أن المجموعة تقبل عنصرا حياديا هو: $e_{P(E)} = \varnothing$.

ب - بالنسبة للعملية " $\cap$ " $= *$: أن المجموعة تقبل عنصرا حياديا هو: $e_{P(E)} = E$.

- العنصر النظير:

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$. و تقبل عنصرا حياديا $e_E \in E$. نقول أن $x \in E$ يقبل عنصرا نظيرا نرمز له بالرمز x^{-1} بالنسبة للعملية الداخلية $*$ في E إذا و فقط إذا تحقق: $\forall\ x \in E\ ,\ \exists\ x^{-1} \in E\ :\ x*x^{-1} = x^{-1}*x = e_E$.

- أمثلة:

1. في $E = \mathbb{R}$ لكل عنصر $x \in \mathbb{R}$ نظيرا في $\mathbb{R}$ هو: $x^{-1} = (-x)$ بالنسبة لعملية الجمع.
2. في $E = \mathbb{R}^*$ لكل عنصر $x \in \mathbb{R}^*$ نظيرا في $\mathbb{R}^*$ هو: $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ بالنسبة لعملية الضرب .
3. في $E = \mathbb{N}$ العدد 4 ليس له نظيرا في $\mathbb{N}$ بالنسبة لعملية الجمع $+$.

- قضية 1:

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$, العنصر الحيادي $e_E \in E$ إذا وجد فهو وحيد .

- قضية 2:

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$, إذا كانت العملية $*$ تجميعية فان: العنصر النظير x^{-1} إذا وجد فهو وحيد .

3.5 - الـزمـرة:

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية و $*$ عملية داخلية في G . نقول عن الثنائية $(G,*)$ زمـرة إذا و فقط إذا تحقق: 1. العملية $*$ تجميعية .

2. المجموعة G تقبل عنصرا حياديا $e_G \in G$ بالنسبة إلى العملية $*$.

3. كل عنصر $x \in G$ يقبل عنصرا نظيرا $x^{-1} \in G$ بالنسبة إلى العملية $*$.

و زيادة عن ذلك . إذا كانت العملية $*$ تبديلية فإننا: نقول عن $(G,*)$ إنها زمـرة تبديلية أو أبلية.

- **أمثلة :**

1. $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة لكون عناصرها لا تملك نظائر في $\mathbb{N}$.
2. المجموعات $(\mathbb{Z}, +)$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ ، $(\mathbb{R}, +)$ ، $(\mathbb{C}, +)$ زمر تبديلية .

4.5 - الزمرة الجزئية:

تعريف1: لتكن $(G, *)$ زمرة ، و $H \subseteq G$ مجموعة جزئية غير خالية من G.

- نقول عن $(H, *)$ إنها زمرة جزئية من G إذا و فقط إذا تحقق:

1. $e_G \in H$ ، حيث e_G هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى العملية $*$ في G .
2. $\forall x, y \in H : \quad x * y \in H$. (أي العملية $*$ داخلية في H) .
3. $\forall x \in H : \quad x^{-1} \in H$ ، حيث x^{-1} العنصر النظير بالنسبة إلى العملية $*$.

و نرمز لها بالرمز: $H \leq G$.

تعريف 2 مكافئ للزمرة الجزئية:

لتكن $(G, *)$ زمرة ، و $H \subseteq G$ مجموعة جزئية من G .

- نقول عن $(H, *)$ إنها زمرة جزئية من G إذا و فقط إذا تحقق:

1. $H \neq \varnothing$. ($e_G \in H$) .
2. $\forall x, y \in H : \quad x * y^{-1} \in H$. حيث y^{-1} العنصر النظير لـ y بالنسبة إلى العملية $*$.

مثال:

نعتبر الزمرة التبديلية $(\mathbb{R}^3, +)$ ونعرف المجموعة:

$$H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - y + 2z = 0 \} .$$

- بين أن: $(H, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^3, +)$.

- **الحل:**

1/ $H \neq \varnothing$. ($e_G \in H$) :

لدينا $e_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in H$ لان: $x - y + 2z = (0) - (0) + 2(0) = 0 \Rightarrow e_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3} \in H$.

2/ ليكن $X = (x_1, y_1, z_1)$ و $Y = (x_2, y_2, z_2)$ من H . نريد إثبات أن: $X + Y \in H$.

لدينا: $X = (x_1, y_1, z_1) \in H \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - y_1 + 2z_1 = 0 \quad ....(1)$ و

$Y = (x_2, y_2, z_2) \in H \quad \Leftrightarrow \quad x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \quad ....(2)$. و منه:

$$X + Y = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2 , \; y_1 + y_2 , \; z_1 + z_2) \overset{?}{\in} H .$$

أي: $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 + 2z_1) + (x_2 - y_2 + 2z_2) = 0 + 0 = 0$

و بالتالي : $X + Y \in H$.

3/ ليكن $X = (x, y, z)$ من H . نريد إثبات أن: $X^{-1} \overset{?}{\in} H$:

نعلم أن العنصر النظير لـ $X = (x, y, z)$ بالنسبة إلى العملية $* = +$ هو:

$$X^{-1} = -X = (-x, -y, -z) .$$

لدينا: $X = (x, y, z) \in H \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$. و منه:

$(-x) - (-y) + 2(-z) = -(x - y + 2z) = -(0) = 0$. إذن: $X^{-1} \in H$.

و حسب 1/ و 2/ و 3/ أن: $(H, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^3, +)$.

نتائج:

لتكن $(G,*)$ زمـرة ,

1. $\forall x, y \in G: \quad (x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
2. $\forall n \geq 1, \forall x \in G: \quad x^n = \underbrace{x*x*x*....*x}_{n\ fois}$.
3. إذا كانت H و K زمـرتـان جـزئيتان من G فان: $(H \cap K)$ زمـرة جـزئية من G.
4. إذا كانت H و K زمـرتـان جـزئيتان من G فان: $(H \cup K)$ لـيـس بالضرورة زمـرة جـزئية من G .

5.5 - الحـلـقـة و الحـقـل:

عموميات و تعاريف:

تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بالعمليتين $*$ و $\top$. نقول عن الثلاثية $(A, *, \top)$ إنها حـلـقـة إذا و فقط إذا تحقق:

1. $(A, *)$ زمـرة تبديلية .
2. المجموعة A تقبل عنصرا حياديا $1_A \in A$ بالنسبة إلى العملية $\top$.
3. العملية $\top$ توزيعية على العملية $*$. و إضافة إذا كانت العملية $\top$ تبديلية , نقول أن $(A, *, \top)$ حـلـقـة تبديلية.

أمثلة:

1. المجموعات $(□, +, \times)$, $(□, +, \times)$, $(□, +, \times)$, $(□, +, \times)$, $\left(□/n□ , +, \times \right)$ كلها حـلـقـات.
2. $L = P(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E مزودة بالفرق التناظري Δ $\left(A \,\Delta\, B \overset{1}{=} (A \cup B) - (A \cap B) \right)$ وعملية التقاطع $\cap$ هي حـلـقـة تبديلية. و تدعى الحلقة $(P(E), \Delta, \cap)$ بـحـلـقـة بــول.

6.5 - الحـلـقـة الجـزئية:

تعريف:

لتكن $B \subseteq A$ مجموعة جزئية من الحـلـقـة $(A, *, \top)$ يحتوي على $1_A \in A$ و مستقرة بالنسبة إلى العمليتين $*$ و $\top$.

- نقول عن B إنها <u>حـلـقـة جزئية</u> من الحـلـقـة $(A, *, \top)$ إذا و فقط إذا تحقق:

1) - $(B, *)$ زمـرة جـزئية من الزمرة $(A, *)$. و $1_A \in B$.

2) - العملية $\top$ عملية داخلية في B أي : $\forall x, y \in B: \quad x \top y \overset{?}{\in} B$.

مثال: $(□, +, \times)$ حـلـقـة جزئية من الحـلـقـة $(□, +, \times)$.

7.5 - الحـلـقـة الـتـامـة:

تعريف: نقول عن الحـلـقـة $(A, *, \top)$ حيث $A \neq \{ e_{(A,*)} \}$ إنها تـامــة إذا كانت لا تملك أي قـاسم للعنصر الحيادي $e_{(A,*)}$. بمعنى:

(تكــون $(A,*,T)$ حلقة تــامة) $\Leftrightarrow$

$$\left(\forall\ x\ ,\ y\ \in\ A\neq\left\{e_{(A,*)}\right\}:\ \ x\ T\ y\ =\ e_{(A,*)}\ \overset{?}{\Longrightarrow}\begin{cases} x\ =\ e_{(A,*)} \\ \vee \\ y\ =\ e_{(A,*)} \end{cases}\right).$$

أمثلة :

1. في الحلقة $\left\{\bar 0,\bar 1,\bar 2,\bar 3,\bar 4,\bar 5\right\} = \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ المزودة بالعمليتين $+$ و $\times$. و نعلم أن: $e_{(\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}},+)} = \bar 0$. لدينا:

$$1/\quad \bar 2\times\bar 3 = \bar 6 = \bar 0$$
$$2/\quad \bar 3\times\bar 2 = \bar 6 = \bar 0$$
$$3/\quad \bar 3\times\bar 4 = \overline{12} = \bar 0$$
$$4/\quad \bar 4\times\bar 3 = \overline{12} = \bar 0$$

إذن: قواسم الصفر في الحلقة $\left\{\bar 0,\bar 1,\bar 2,\bar 3,\bar 4,\bar 5\right\} = \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ هي: $\left\{\bar 2,\bar 3,\bar 4\right\}$.

أي أن: الحلقة $\left(\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}\ ,+\ ,\times\right)$ لـيسـت تــامــة.

2. إن: ($A = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ حلقة تــامــة) $\Leftrightarrow$ (n عدد أولي).

8.5 - التماثل بين البنى الجبرية:

تماثل الزمر: لتكن $(G_1,*)$, (G_2,T) زمرتين , e_1 العنصر الحيادي لـ G_1 , e_2 العنصر الحيادي لـ G_2 , و ليكن $f\ :\ (G_1,*)\ \to\ (G_2,\mathrm{T})$ تطبيقا.

نقول عن f انه تماثلا بين الزمرتين G_1 و G_2 إذا و فقط إذا تحقق:

$$\forall\ x,y\in G_1:\ f(x*y) = f(x)\ \ \mathrm{T}\ \ f(y).$$

مثال:

ليكن التطبيق f المعرف بـ : $f\ :\ (\mathbb{R}^*,\times)\ \to\ (\mathbb{R}^*_+,\times):\ x\to|x|$.

إن f تماثل بين الزمرتين $(\mathbb{R}^*,\times)$ و $(\mathbb{R}^*_+,\times)$ لان:

$$\forall\ x,y\in\mathbb{R}^*:\ f(x\times y)\ \overset{?}{=}\ f(x)\times f(y).$$

لدينا : $\forall\ x,y\in\mathbb{R}^*:\ f(x\times y) = |x\times y| = |x|\times|y| = f(x)\times f(y)$.

9.5 - نواة $Ker(f)$ و صورة $\mathrm{Im}(f)$ التماثل f :

تعريف: لتكن $(G,*)$, (G',T) زمرتين, و ليكن $f\ :\ (G,*)\ \to\ (G',\mathrm{T})$ تماثلا .

1. نعرف نواة التماثل f المجموعة الغير الخالية المعرفة بـ:

$$Ker(f) = \left\{x\in G:\ f(x) = e_{G'}\right\}.$$

2. نعرف صورة التماثل f المجموعة الغير الخالية المعرفة بـ:

$$\mathrm{Im}(f) = f(G) = \left\{f(x)\ :\ x\in G\right\}.$$

قضية:

لتكن $\left(G , * \right)$ ، $\left(G^{'} , \mathrm{T} \right)$ زمرتين, و ليكن $f \ : \ \left(G , * \right) \ \rightarrow \ \left(G^{'} , \mathrm{T} \right)$ تماثل فان:

1) نواة التماثل f : $Ker\left(f \right)$ زمرة جزئية من الزمرة $\left(G , * \right)$.

2) صورة التماثل f : $\mathrm{Im}\left(f \right)$ زمرة جزئية من الزمرة $\left(G^{'} , \mathrm{T} \right)$.

10.5 - تماثل الحلقات:

تعريف:

نقول عن التطبيق f المعرف من الحلقة $\left(A , * , \mathrm{T} \right)$ إلى الحلقة $\left(B , * , \mathrm{T} \right)$ انه تماثل حلقات إذا و فقط إذا تحقق:

$$1/ \quad f\left(1_A \right) = 1_B \, .$$

$$2/ \quad \forall \ x , y \in A : \ f\left(x * y \right) = f\left(x \right) * f\left(y \right).$$

$$3/ \quad \forall \ x , y \in A : \ f\left(x \, \mathrm{T} \, y \right) = f\left(x \right) \, \mathrm{T} \, f\left(y \right).$$

11.5 - الحقل:

لتكن $\left(A , * , \mathrm{T} \right)$ حلقة .

<u>**تعريف 1**</u> **:** نسمي حقلا كل حلقة تختلف عن الصفر $\left(A \neq \left\{ 0_K \right\} , * , \mathrm{T} \right)$ بحيث كل عنصر غير معدوم منها يقبل نظيرا (مقلوب) بالنسبة إلى العملية T .

و إذا كانت العملية T تبديلية فإننا نقول أن : $\left(A \neq \left\{ 0_K \right\} , * , \mathrm{T} \right)$ الحقل تبديلي .

<u>**تعريف 2**</u> **:** نسمي $\left(A \neq \left\{ 0_K \right\} , * , \mathrm{T} \right)$ حقلا إذا و فقط إذا تحقق:

ا - $\left(A \ , \ * \ \right)$ زمرة تبديلية .

ب - $\left(A \neq \left\{ 0_{K,*} \right\} , \ \mathrm{T} \right)$ زمرة. ($0_{K,*}$ العنصر الحيادي بالنسبة إلى العملية $*$) .

ج - العملية T توزيعية على العملية $*$.

و إذا كانت العملية T <u>تبديلية</u> فإننا نقول أن: $\left(A \neq \left\{ 0_K \right\} , * , \mathrm{T} \right)$ <u>الحقل تبديلي</u> .

<u>**تعريف 3**</u> **:** نسمي $\left(A \neq \left\{ e_{(A,*)} \right\} , * , \mathrm{T} \right)$ حقلا إذا و فقط إذا تحقق:

ا - $\left(A , * , \mathrm{T} \right)$ حلقة تبديلية واحدية $\left(e_T = 1_{(A,T)} \in A \right)$.

ب - كل عنصر x من A يختلف عن $e_{(A,*)}$ $\left(\forall x \neq e_{(A,*)} \in A \right)$ يقبل مقلوب x^{-1} (x^{-1} نظيرا للعنصر x) بالنسبة إلى العملية T .اي ان:

$\forall \ x \neq \left\{ e_{(A,*)} \right\} \in A \ , \ \exists \ x^{-1} \in A : \ \ x * x^{-1} = \ x^{-1} * x = \ 1_{(A,T)} \Rightarrow x^{-1} = ...$. حيث:

($1_{(A,T)}$ العنصر الحيادي الواحدي بالنسبة إلى العملية T) .

امثلة:

1. $\left(\mathbb{Z} , + , \times \right)$ ليس حقل .
2. $\left(\mathbb{Q} , + , \times \right)$ و $\left(\mathbb{R} , + , \times \right)$ حقلين تبديليين.
3. $\left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ , + , \times \right)$ حقل تبديلي.

الفضاءات الشعاعية

12.5 - الفضاء الشعاعي:

تعريف: (بنية الفضاء الشعاعي)

لتكن E مجموعة غير خالية و K حقلا تبديليا .

- نقول عن E أن لها بنية فضاء شعاعي على الحقل K (أو K فضاء شعاعي) إذا تحققت الشروط التالية:

1 - إذا كانت E مزودة بعملية داخلية جمعية $(+)$ تجعل منها زمرة تبديلية. أي أن:

$(E, +)$ زمـرة تـبديـلية.

2 - اذا وجد تطبيق من $K \times E$ نحو E نعبر عنه كما يلي: $\begin{array}{c} K \times E \longrightarrow E \\ (\alpha, u) \longrightarrow \alpha . u \end{array}$ ويحقق الخواص التالية:

$$a) \forall (x, y) \in E^2 , \forall \alpha \in K : \alpha .(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$$

$$b) \forall x \in E , \forall (\alpha, \beta) \in K^2 : x .(\alpha + \beta) = \alpha . x + \beta . x$$

$$c) \forall x \in E , \forall (\alpha, \beta) \in K^2 : \alpha .(x . \beta) = (\alpha . \beta) . x$$

$$d) \forall x \in E : 1_K . x = x$$

حيث: 1_K : العنصر الحيادي بالنسبة للحقل K .

ملاحظات:

1 - تسمى عناصر E بالأشعة . فيما تسمى عناصر K بالسلميات.

2 - يسمى التطبيق: $(\alpha, u) \longrightarrow \alpha . u$ بضرب الشعاع u بالسلمي α. و يسمى أيضا عملية خارجية على المجموعة E , أو قانون تشكيل خارجي على E.

3 - يدعى العنصر الحيادي 0_E بالشعاع المعدوم.

4 - يرمز عادة للفضاء الشعاعي E بالثلاثية $(E, +, .)$ للتذكير بالقانونين.

أمثلة:

1 - نعتبر مجموعة الأشعة الطلقة في المستوي , مزودة بعملية جمع شعاعين طلقين وفق قاعدة متوازي الأضلاع . و نعرف عملية ضرب شعاع طلق بعدد حقيقي λ بأنه التطبيق الذي يرفق الثنائية (λ, u) بالشعاع λu.

- يمكننا التحقق من أن المجموعة E بنية فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. و لدينا الأمر ذاته بالنسبة إلى الأشعة الطلقة في الفضاء.

ملاحظة: نشير إلى أن هذين المثالين يعدان المرجعية الأصلية في تسمية اصطلاح الفضاء الشعاعي.

2 - مجموعة الأعداد العقدية $(\mathbb{C}, +, .)$:هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{C}$.

3 - مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R}, +, .)$: هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. و على العموم كل حقل هو فضاء شعاعي على نفسه .

4 - مجموعة الأزواج $(\mathbb{R}^2, +, .)$: هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. حيث:

$$\begin{aligned} &\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \\ &1/ \ (x+y) + (x', y') = (x+x', y+y'), \\ &2/ \ \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y). \end{aligned}$$

5 - المجموعة $(\mathbb{R}^3, +, .)$: هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. حيث:

$$\begin{aligned} &\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \\ &1/ \ (x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z'), \\ &2/ \ \lambda.(x, y, z) = (\lambda.x, \lambda.y, \lambda.z). \end{aligned}$$

ذلك أن $(\mathbb{R}^3, +)$ لها بنية زمرة تبديلية. و الضرب بمقدار سلمي يحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي .

تعميم: إذا كان K حقلا تبديليا , فيمكننا أن نتحقق من أن K^n حيث $(n \geq 1)$ فضاء شعاعي على الحقل K. فيكون إذن: $\mathbb{R}^n$ حيث $(n \geq 1)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

13.5 - قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K. عندئذ من اجل كل سلمي λ و كل شعاعين u , v لدينا:

$$\begin{aligned} &1) \ \lambda.u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_K \ \vee \ u = 0_E . \\ &2) \ \lambda.(-u) = (-\lambda).u = -(\lambda.u) . \\ &3) \ \lambda.(u-v) = \lambda.u - \lambda.v \end{aligned}$$

نستخلص من هذا أن: $\forall u \in E : \ 0_E . u = 0_E \quad ; \quad \forall \lambda \in K : \ \lambda . 0_E = 0_E$.

ملاحظة: في كل ما سيأتي نستخدم الرمز 0 بدلا من 0_K أو 0_E وعلى الطالب أن يميز بين الوضع السلمي و الوضع الشعاعي.

ملاحظة هامة: إذا كان E فضاءا شعاعيا على الحقل K فانه سيكون كذلك على كل حقل جزئي K' من K. و إذا كان $K' \neq K$ فنعتبر هذين الفضائيين الشعاعين مختلفين.

فمثلا: □ فضاء شعاعي على الحقل □ وعلى الحقل □.

14.5 - التركيبة الخطية آو المزج الخطي :

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و لتكن $(u_i)_{i\in I}$ عائلة أشعة من E و $(\lambda_i)_{i\in I}$ عائلة سلميات غير معدومة كليا من K . نسمي الجمع $\sum_{i\in I}\lambda_i\, .u_i$ مزجا خطيا في الأشعة u_i .

وعلى العموم إذا كانت: $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ جملة أشعة من الفضاء E , فنسمي مزجا خطيا (عبارة خطية) في هذه الجملة كل كتابة من الشكل :

$\lambda_1 .u_1 + \lambda_2 .u_2 + \lambda_3 .u_3 + \lambda_4 .u_4 + ... + \lambda_\mu .u_\mu$. حيث:

$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4 , ... , \lambda_\mu$ جملة سلميات من الحقل تحتوي عدد منته من العناصر- الفضاءات الشعاعية .

15.5 - قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K. عندئذ من اجل كل سلمي λ و كل شعاعين u , v لدينا:

$$1)\ \ \lambda .u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0_K \ \vee\ u = 0_E \ .$$

$$2)\ \ \lambda .(-u) = (-\lambda).u = -(\lambda .u) \ .$$

$$3)\ \ \lambda .(u - v) = \lambda .u - \lambda .v$$

نستخلص من هذا أن: $\forall u \in E :\ 0_E .u = 0_E \quad ; \quad \forall \lambda \in K :\ \lambda .0_E = 0_E$.

ملاحظة: في كل ما سيأتي نستخدم الرمز 0 بدلا من 0_K أو 0_E و على الطالب أن يميز بين الوضع السلمي و الوضع الشعاعي .

ملاحظة هامة: إذا كان E فضاءا شعاعيا على الحقل K فانه سيكون كذلك على كل حقل جزئي K' من K. و إذا كان $K' \neq K$ فنعتبر هذين الفضائيين الشعاعين مختلفين.

فمثلا: □ فضاء شعاعي على الحقل □ و على الحقل □.

16.5 - التركيبة الخطية آو المزج الخطي:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و لتكن $(u_i)_{i\in I}$ عائلة أشعة من E و $(\lambda_i)_{i\in I}$ عائلة سلميات غير معدومة كليا من K . نسمي الجمع $\sum_{i\in I}\lambda_i\, .u_i$ مزجا خطيا في الأشعة u_i .

وعلى العموم إذا كانت: $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ جملة أشعة من الفضاء E , فنسمي مزجا خطيا (عبارة خطية) في هذه الجملة كل كتابة من الشكل:

$\lambda_1 .u_1 + \lambda_2 .u_2 + \lambda_3 .u_3 + \lambda_4 .u_4 + ... + \lambda_\mu .u_\mu$. حيث:

$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4 , ... , \lambda_\mu$ جملة سلميات من الحقل تحتوي عدد منته من العناصر غير المعدومة .

17.5 - الفضاء الشعاعي الجداء:

ليكن K حقلا تبديليا , و لتكن $E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , ... , E_\mu$ فضاءات شعاعية على الحقل K , و لنعتبر المجموعة : $E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \times ...... \times E_\mu$, ولنعرف عليها عمليتي الجمع و الضرب بسلمي من الحقل K كما يلي:

$\forall U=(u_1,u_2,u_3,......,u_\mu)\in E \;,\; \forall V=(v_1,v_2,v_3,......,v_\mu)\in E \;,\; \forall \lambda\in K\;;$

$$\begin{cases} 1)\; U+V=(u_1+v_1,u_2+v_2\;,\;u_3+v_3,......,\;u_\mu+v_\mu) \\ 2)\; \lambda.U=(\lambda.u_1,\lambda.u_2,\lambda.u_3,......,\lambda.u_\mu) \end{cases}$$

- إن المجموعة $E = E_1\times E_2\times E_3\times E_4\times ......\times E_\mu$ لها بنية فضاء شعاعي على الحقل K .
يدعي الفضاء الشعاعي الـجـداء .

18.5 - الفضاء الشعاعي الـجـزئي:

تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن $F\subset E$ جزءا من E. نقول عن F انه فضاء شعاعي جـزئـي من E إذا كان:

1. F مستقرة بالنسبة إلى القانونين:

$$.\forall(u,v)\in F^2\;,\;\forall\lambda\in K\;:\begin{cases} u+v\in F\;.....(1) \\ \lambda.u\in F\;......(2) \end{cases}$$

2. F مـزودة بالقانونين المستخرجين لـــه بنية فضاء شعاعي.

ملاحظة:

إذا كان E فضاءا شعاعيا على الحقل K , فـان: $\{0_E\}$ و E فضاءان شعاعيان جـزئـيان من E , يدعيان : الفضاءان الشعاعيان الجـزئـيان الـتـافـهـان.

مبرهنة 1:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن $F\subset E$ جزءا من E. يكون: F انه فضاء شعاعي جـزئـي من E إذا كان:

$$.\;\forall(u,v)\in F^2\;,\;\forall\lambda\in K\;:\begin{cases} F\neq\phi\;\left(0_E\overset{?}{\in}F\right).....(1) \\ u+v\in F\;.....(2) \\ \lambda.u\in F\;......(3) \end{cases}$$

مبرهنة 2:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , وليكن $F\subset E$ جزءا من E. يكون: F انه فضاء شعاعي جـزئـي من E إذا كان:

$$.\;\forall(u,v)\in F^2\;,\;\forall(\lambda,\mu)\in K^2\;:\begin{cases} F\neq\phi\;\left(0_E\overset{?}{\in}F\right).....(1) \\ \lambda.u+\mu.v\in F\;.........(2) \end{cases}$$

ملاحظات و خواص:

1 - بالنسبة إلى الشرط : $F\neq\phi$ يكفي التحقق من أن: $0_E\overset{?}{\in}F$. ذلك ا ن إي فضاء شعاعي E يحوي على الأقل العنصر الحيادي 0_E.

2 - إذا كان F فضاءا شعاعيا جزئيا من E , فانه من اجل كل عائلة أشعة $(u_i)_{i\in I}$ من F و كل عائلة سلميات $(\lambda_i)_{i\in I}$ من K يـكـون: المزج الخطي $\sum_{i\in I}\lambda_i\,.u_i$ عـنـصـرا من F . نعبر عن هذه الخاصية بان: F مـسـتـقـر بالنسبة إلى المزج الخطي.

3 - إذا كان F فضاءا شعاعيا جزئيا من E , و $G \subset F$ فضاءا شعاعيا جزئيا من F فـان:
G فضاء شعاعي جـزئـي من E.
4 - إذا كان E , F فضائين شعاعيين على الحقل K بالنسبة إلى نفس القانونين , و كان $F \subset E$
فـان: F فضاءا شعاعيا جــزئيا من E.

مثال 1:

- ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$, و لنعتبر $E = F(I, \mathbb{R})$:
" مجموعة التطبيقات الحقيقية المعرفة على I " . مزودة بعملية جمع التطبيقات و ضرب تطبيق f بسلمي λ من $\mathbb{R}$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E \; ; \; (f+g)(x) = f(x) + g(x) \; , \; (\lambda . f)(x) = \lambda . f(x).$$

- إن المجموعة $E = F(I, \mathbb{R})$ هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. و يدعى $E = F(I, \mathbb{R})$:
" فضاء التوابع الحقيقية المعرفة على المجال I " .
- و لنعتبر المجموعتان: $F = C(I, \mathbb{R})$ هي " مجموعة التوابع المستمرة و المعرفة على I "
و $H = C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ هي :
" مجموعة التوابع القابلة للاشتقاق بالاستمرار n مرة و المعرفة على I ".
- إن: $F = C(I, \mathbb{R})$ و $H = C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ فضاءان شعاعيان جـزئـيان من E .

مثال 2:

ليكن K حقلا تبديليا , و لنعتبر $K[X]$ فضاء كثيرات الحدود بمعاملات من الحقل K. و لتكن $K_n[X]$ هي " مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة اقل أو تساوي n ".
- إن المجموعة $K_n[X]$ هي فضاء شعاعي جـزئـي من الفضاء $K[X]$ على الحقل K.

مثال 3:

لنعتبر الفضاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$, و لتكن المجموعة:

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x + y = 0 \}.$$

- إن المجموعة F هي فضاء شعاعي جـزئـي من $\mathbb{R}^2$.

19.5 - الفضاء الشعاعي الـجزئي الـمولـد :

مبرهنة وتعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و $\Omega \subset E$ جملة أشعة من الفضاء E غير خالية , ولتكن F مجموعة المزوج الخطية في عناصر الجملة Ω. - إن المجموعة F هي فضاء شعاعي جـزئـي من E , يدعى " الفضاء الشعاعي الـجزئي الـمولـد بالجملة Ω " , و نرمز له بالرمز:

$$F = \langle \Omega \rangle = [\Omega].$$

فمثلا: إذا كانت $\Omega = \{u_i \; ; \; 1 \le i \le n\}$ فيـكـون:

$$F = \langle \Omega \rangle = [\Omega] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

20.5 - العمليات بين الفضاءات الشعاعية:

مبرهنة 1: (تقاطع فضائين شعاعيين جـزئـيـين) . ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F , H جزئيين من E. إذا كان F , H فضائين شعاعيين جـزئـيـين من E فـان:
$F \cap H$ فضاء شعاعي جـزئـي من E. و إذا كانت $\{F_i\}_{i \in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جـزئـيـة من E
فـان: $\bigcap_{i \in I} F_i$ فضاء شعاعي جـزئـي من E.

ملاحظة 1:

لتكن Ω مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الشعاعي E على الحقل K.

- إن: $[\ \Omega\ ] = \langle\ \Omega\ \rangle$ هو اصغر فضاء شعاعي جزئي (بمعيار الاحتواء) من E يحتوي على Ω.
وهو تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من E التي تحوي Ω.

ملاحظة 2:

نشير انه حسب ما بينا في موضوع الزمر الجزئية , يكون اتحاد فضائين شعاعيين جزئيين $F \cup H$ " ليس فضاءا شعاعيا جزئيا على العموم ".

- يكون $F \cup H$ فضاء شعاعي جزئي من E إذا كان: $H \subset F$ أو $F \subset H$.

مبرهنة2 : (جمع فضائين شعاعيين جزئيين)

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F , H فضائين شعاعيين جزئيين من E. و

لنعتبر المجموعة : $F + H = \{\ u + v\ \ ,\ u \in F\ , v \in H\ \}$.

- إن المجموعة : $F + H$ هي فضاء شعاعي جزئي من E . يدعى:
" مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين F و H " .

- و إذا كانت $\{\ F_i\ \}_{i \in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من E فان: $\sum\limits_{i \in I} F_i$ هو فضاء شعاعي جزئي من E. يدعى " الفضاء الشعاعي الجزئي المجموع " وهو اصغر فضاء شعاعي جزئي من E يحوي جميع الأجزاء F_i. فهو إذن: الفضاء الشعاعي الجزئي من E المولد باتحاد الأجزاء F_i.

21.5 - الجمع المباشر:

تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F , H فضائين شعاعيين جزئيين من E.

- نقول عن فضاء شعاعي جزئي G من E انه: " جمع مباشر للفضائين الشعاعيين الجزئيين F و H " إذا كان:

$$\begin{cases} \forall u \in G, \exists x \in F, \exists y \in H:\ u = x + y\ \ .....(*) \\ u \in F \cap H \Rightarrow u \overset{?}{=} 0_E\ \ ......(**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F + H = G\ \ \ .....(1) \\ F \cap H = \{0_E\}\ ...(2) \end{cases} .$$

وعندها نكتب: $G\ =\ F\ \oplus\ H$.

تعميم:

لتكن $\{\ F_i\ \}_{i \in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من E , نقول عن الجمع $G\ =\ \sum\limits_{i \in I} F_i$ انه مباشر اذا كان كل شعاع u من G يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $u\ =\ \sum\limits_{i \in I} u_i$. حيث: $u_i\ \in\ F_i$ من اجل كل $i\ \in I$. وعندها نكتب: $G\ =\ \bigoplus\limits_{i \in I} F_i$.

ملاحظات:

1- إذا كان الجمع $\sum\limits_{i \in I} F_i$ مباشرا و كان $J \subset I$ جزءا من I فان: الجمع $\sum\limits_{i \in J} F_i$ يكون مباشرا .

و على الخصوص من اجل كل i , j حيث: $i \neq j$ يكون: $F_i \cap F_j\ =\ \{\ 0_E\ \}$.

2 - ان عكس الوضعية 1 غير صحيح . فالإثبات أن: $F_1\ , F_2\ , F_3\ , F_4\ , ...\ , F_n$ حيث $n \geq 3$ هي في جمع مباشر, لا يكفي التحقق من انه من اجل كل دليلين i , j مختلفين لدينا $F_i \cap F_j\ =\ \{\ 0_E\ \}$. بل يجب التحقق من أن: $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap .... \cap F_n\ \ =\ \{\ 0_E\ \}$.

22.5 - الفضاءات الشعاعية الجزئية الإضافية:

تعريف:

ليكن F , H فضائين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E.

- نقول عن F , H أنهما " فضاءان إضافيان " في E إذا كان: $E = F \oplus H$.

و هذا يعني أن كل شعاع u من E يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $u = v + w$ حيث: $v \in F$ و $w \in H$.

نظرية:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F فضاء شعاعي جزئي من E. عندئذ: الفضاء F يملك على الأقل فضاءا اضافيا H في E.

ملاحظات:

1 - يجب عدم الخلط بين مفهوم الإضافي و مفهوم المتمم . فمتمم فضاء شعاعي جزئي F من E هو مجموعة ليست لها فائدة كبيرة , فهي ليست فضاءا شعاعيا جزئيا من E , لأنها لا تحتوي العنصر الحيادي.

2 - إن للفضاء الشعاعي الجزئي F من E على العموم عدد لا نهائي من الإضافيات في E. و توجد حالتان فقط يكون فيها الإضافي و حيدا .

- فإذا كان: $F = E$ فـان: الإضافي الو حيد لـ F في E هو: $\{ 0_E \}$.
- وإذا كان: $F = \{ 0_E \}$ فـان: الإضافي الو حيد لـ F في E هو: نفسه E.

مثال:

- في الفضاء الشعاعي $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ للتوابع من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.
- الفضاءان الشعاعيان الجزئيان $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ للتوابع الزوجية و $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ للتوابع الفردية فضاءان اضافيان في $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

23.5 - الارتباط و الاستقلال الخطيان:

تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , ولتكن $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ جملة أشعة من الفضاء E.

- نقول عن الأشعة: $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ أنها " مرتبطة خطيا " إذا وجد " n سلميا $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4 , ... , \lambda_\mu$ من الحقل K غير معدومة كليا بحيث:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2 + \lambda_3 . u_3 + ... + \lambda_n . u_n = 0 .$$

- و نقول عن الأشعة: $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ أنها " مستقلة خطيا " إذا لم تكن مرتبطة خطيا. بمعنى إذا تحقق:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2 + \lambda_3 . u_3 + ... + \lambda_n . u_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0 .$$

ملاحظات ونتائج:

1- يجب عدم الخلط بين " ليست معدومة كليا " و " ليست كلها معدومة " .

2 - كل جملة مقتصرة على شعاع واحد $\{ u \}$ تكون: مستقلة خطيا إذاا كان: $u \neq 0$.

3 - كل جملة أشعة مكونة من شعاعين $\{ u , v \}$ تكون: مـرتـبـطـة خـطـيـا اذاا كان: u , v على استقامة واحدة (متسامتين) أو كانا متناسبين . بمعنى إذا وجد: $\lambda \in K$ بحيث: $u = \lambda . v$ آو $v = \lambda . u$. و لدينا : ملاحظة : لا يمكن تعميم هذه الوضعية على جملة مكونة من أكثر شعاعين.

4 - تكون جملة من الأشعة مـرتـبـطـة خـطـيـا إذا أمـكـن كـتـابـة احـدها كـمـزج خـطـي (عبارة خطية , تركيبة خطية) في الأشعة المتبقية.

5 - كل جـمـلـة جـزئـية من جملة أشعة مـسـتـقـلـة خـطـيـا هي: مـسـتـقـلـة خـطـيـا.

6 - كل جـمـلـة تـحـوي جملة مـرتـبـطـة خـطـيـا هي: مـرتـبـطـة خـطـيـا.

وعلى الخصوص كل جملة تحوي الشعاع المعدوم أو شعاعين متسامتين هي مـرتـبـطـة خـطـيـا.

أمثلة:

1 - في الفضاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$. الجملة : $\{ e_1 , e_2 \}$, حيث: $e_1 = (1 , 0) \ , \ e_2 = (0 , 1)$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا. ذلك أن:

$$\alpha . e_1 + \beta . e_2 = (0 , 0) \Rightarrow \alpha . (1 , 0) + \beta . (0 , 1) = (0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha . 1 + \beta . 0 = 0 \ ...(1) \\ \alpha . 0 + \beta . 1 = 0 \ ...(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \ ...(1) \\ \beta = 0 \ ...(2) \end{cases} .$$

2 - في الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. لنعتبر الأشعة: $u_1 = (1 , 3 , 1)$ ، $u_2 = (2 , -1 , 0)$ ، $u_3 = (4 , -5 , -2)$.

- الجملة: $\{ u_1 , u_2 , u_3 \}$ مـرتـبـطـة خـطـيـا. ذلك أن:

أي أن: $(+2) . u_1 + (+1) . u_2 + (-1) . u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$(+2) . (1 , 3 , 1) + (+1) . (2 , -1 , 0) + (-1) . (4 , -5 , -2) = (0 , 0 , 0) .$$

3 - في الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. لنعتبر الأشعة: $u_1 = (1 , -1 , 0)$ ، $u_2 = (2 , 0 , -3)$ ، $v_1 = (0 , -2 , 3)$ ، $v_2 = (3 , 1 , -3)$.

- الجملتان: $\{ u_1 , u_2 \}$ و $\{ v_1 , v_2 \}$ مـسـتـقـلـتان خـطـيـا. ذلك أن:

أي أن: $\alpha . u_1 + \beta . u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\alpha . (1 , -1 , 0) + \beta . (2 , 0 , -3) = (0 , 0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2 . \beta = 0 \ .....(1) \\ -\alpha + 0 = 0 \ ....(2) \\ 0 + -3 . \beta = 0 \ ...(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \ .....(1) \\ \beta = 0 \ .....(2) \end{cases} .$$

- و كذلك أن:

$$\alpha . (0 , -2 , 3) + \beta . (3 , 1 , -3) = (0 , 0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + 3 . \beta = 0 \ ....(1) \\ \alpha . -2 + \beta . 1 = 0 \ ....(2) \\ \alpha . 3 + -3 . \beta = 0 \ ....(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \ .....(1) \\ \alpha = 0 \ .....(2) \end{cases} .$$

4 - في الفضاء $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$. لدينا: $1 , i$ مـسـتـقـلان خـطـيـا. ذلك أن:

$$\alpha . (1) + \beta . (i) = (0) \Rightarrow \alpha + i . \beta = 0 + i . 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \ , \ \beta = 0 .$$

24.5 - **الجملـة المولـدة:**

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ جملة أشعة من الفضاء E.

- نقول عن هذه الجملة: $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أنها تـولـد الفضاء E إذا كان كـل شعاع من E يكتب كـمـزج خـطـي في أشعة هذه الجملة . بمعنى:

$$\forall w \in E \; , \; \exists \lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \quad ; \quad w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, . u_i \; .$$

ملاحظة: كل جملة أشعة من الفضاء E تحوي مـولـدة لـ E هـي أيضا مـولـدة لـ E .

25.5 - **الأسـاس و الـبـعـد:**

تعريف01 :

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و لتكن $(u_i)_{i \in I}$ جملة أشعة من E .

- نقول عن الجملة $(u_i)_{i \in I}$ أنها تـشـكـل " أسـاسـا " للفضاء E إذا كان:

1 - الجملة $(u_i)_{i \in I}$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا .

2 - كـل شعاع من E يكتب كـمـزج خـطـي في أشعة الجملة $(u_i)_{i \in I}$.

بمعنى: تـكـون الجملة $(u_i)_{i \in I}$ " أسـاسـا " للفضاء E إذا كانت: مـسـتـقـلـة خـطـيـا و تـولـد الفضاء E.

تعريف02:

- لنفرض ان الفضاء E ذو بعد منتهي (مثلا $\dim_{\mathbb{K}} E = n$) ، و لتكن Ω جملة اشعة من E .

(ا)- حتى تكون الجملة Ω اساسا للفضاء E يكفي ان يكون عدد اشعتها "n" و مستقلة خطيا.

(ب)- حتى تكون الجملة Ω اساسا للفضاء E يكفي ان يكون عدد اشعتها "n" و تولـد الفضاء E .

- نسمي " عـدد أشعة أسـاس الفضاء " أو ' عـدد الأشعة المـسـتـقـلـة خـطـيـا سواء من الأسطر أو من الأعمدة و الغير معدومة التي تشكل أسـاس للفضاء " هـو " بـعـد الفضاء E " .

فإذا كان عدد أشعة الأساس الفضاء منتهيا و ليكن n , فـنـقـول أن الفضاء الشعاعي E ذو بـعـد منته و نكتب: $\dim E = n$. و نعتبر اصطلاحا أن بـعـد الفضاء المعدوم $\{ 0 \}$ هـو: $\dim \{ 0 \} = 0$. و إذا لم يكن للفضاء E أساس منتهي , فـنـقـول أن بـعـد الفضاء الشعاعي E غير منتهي و نكتب: $\dim E = +\infty$.

26.5 - <u>تعريف الاساس و البعد للفضاء الشعاعي</u> E :

1 - نسمي <u>اساسا</u> للفضاء الشعاعي E كل جملة اشعة $\Omega = \{u_1 , u_2 , u_3 , ... , u_n\}$ من E <u>مستقلة خطيا</u> و مولدة للفضاء E .

2 - ونسمي بعد الفضاء E هو <u>عدد اشعة</u> الاساس الفضاء E ، اي <u>عدد الاشعة المستقلة خطيا والغير معدومة</u> لـ E .

27.5 - مركبات شعاع:

ليكن E فضاءا شعاعيا ببعد منته على الحقل K ، و ليكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أساس له.

إذا كان w شعاعا من الفضاء E حيث: $w = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2 + \lambda_3 . u_3 + ... + \lambda_n . u_n$ مع

$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , ..., \lambda_n$ سلميات من الحقل K. فنسمي السلميات $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , ..., \lambda_n$ مركبات الشعاع w في الأساس $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$.

مبرهنة:

- لـكـل فضاء شعاعي E على الحقل K أسـاس.
- لـكـل فضاء ذو بـعـد منته غير مختزل إلى $\{ 0 \}$ أسـاس.

أمثلة:

1 - في الفضاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$. الجملة : $\{ e_1 , e_2 \}$ ، حيث:
$e_1 = (1 , 0)$ ، $e_2 = (0 , 1)$ تشكل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^2$ إذن: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

2 - في الفضاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. الجملة: $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ ، حيث:
$e_1 = (1 , 0 , 0)$ ، $e_2 = (0 , 1 , 0)$ ، $e_3 = (0 , 0 , 1)$. تشكل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ إذن : $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

3 - في الفضاء $\mathbb{R}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$. الجملة: $\{ e_1 , e_2 , e_3 , ..., e_n \}$ ، حيث:
$e_1 = (1 , 0 , 0 ,...., 0)$ ، $e_2 = (0 , 1 , 0 ,...., 0)$ ، $e_3 = (0 , 0 , 1 ,...., 0)$ ، ...... ، $e_n = (0 , 0 , 0 ,...., 1)$. تشكل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^n$. ذلك أنها مـسـتـقـلـة خـطـيـا ، و من كل شعاع $X = (x_1 , x_2 , x_3 ,...., x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ لدينا:
$X = x_1 . e_1 + x_2 . e_2 + x_3 . e_3 + ... + x_n . e_n$. تدعى الجملة:
$\{ e_1 , e_2 , e_3 , ..., e_n \}$ الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^n$. إذن: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

4 - في الفضاء $K [X]$ فضاء لـكثيرات الحدود بمعاملات من الحقل K . لدينا الجملة :
$\{ 1 , x^1 , x^2 , x^3 ,...., x^n ,.....\}$ تشكل أساسا للفضاء $K [X]$. و هي غير منتهية.
فالفضاء $K [X]$ ذو بـعـد غـيـر منته . إذن : $\dim K [X] = + \infty$.

5 - في الفضاء $K_n [X]$ " لـكـثـيـرات الحدود من الدرجة اقل أو تساوي n " و بمعاملات من الحقل K . لدينا الجملة : $\{ 1 , x^1 , x^2 , x^3 ,...., x^n \}$ تشكل أساسا للفضاء $K_n [X]$. و هي منتهية . فالفضاء $K_n [X]$ ذو بـعـد منته . إذن: $\dim K_n [X] = n + 1$.

6 - في الفضاء الشعاعي $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$. لدينا : $\{ 1 , i \}$ أساس للفضاء $\mathbb{C}$ لأنها مـسـتـقـلـة خـطـيـا . و من اجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا: $z = a + i . b$ ، حيث : a و b من $\mathbb{R}$.
إذن: $\dim \mathbb{C} = 2$.

28.5 - الفضاءات الشعاعية بـبـعـد منته :

مفهوم البعد المنتهي:

تعريف: ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K .
- نقول عن الفضاء E انه ذو بعد منته إذا كان يـمـلـك جملة مـولـدة منتهية.

ملاحظة: من هذا التعريف ينتج أن الفضاء $\{ 0 \}$ ذو بـعـد منته.

29.5 - الـنـظـريـات الأساسية:

نظرية 1:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K . و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ جملة أشعة من الفضاء E.

- تكون الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أساسا للفضاء E اذاا كان كل شعاع من E يكتب بطريقة وحيـدة كـمـزج خـطـي في أشعة الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$.

نظرية 2:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K . و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ جملة من n شعاع من الفضاء E.

1 - إذا كانت الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ مـولـدة للفضاء E فان: كل جملة من E عدد عناصرها اكبر من n تكون: مـرتـبـطـة خـطـيـا.

2 - إذا كانت الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا فـانه: لا توجد أية جملة مـولـدة للفضاء E عدد عناصرها اقـل من n .

نظرية 3:

كل فضاء شعاعي مـولـد بعدد منته من الأشعة يحتوي على أساس منتهي .

نظرية 4:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K . و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu \}$ جملة مـولـدة للفضاء E عـنـدئـذ: الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu \}$ تـحـوي أساسا للفضاء E .

هذا الأساس مكون من اكـبـر عـدد من الأشعة المـسـتـقـلـة خـطـيـا من الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu \}$.

نظرية 5:

إذا كان E فضاءا شعاعيا ببعـد منته على الحقل K فان: جميع أساساته مكونة من نفس العدد من العناصر. نسميه بـعـد الفضاء E.

نظرية 6:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته $n \geq 1$ على الحقل K. و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ جملة أشعة من الفضاء E من n عنصرا عـنـدئـذ:

$\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أساس $\Leftrightarrow$ $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا

$\Leftrightarrow$ $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ مـولـدة .

ملاحظات:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته $n \geq 1$ على الحقل K , عـنـدئـذ :

1 - كل جملة مـسـتـقـلـة خـطـيـا تشمل على الأكثر n شعاعا . و كل جملة مشكلة من أكثر من n شعاع تـكـون مـرتـبـطـة خـطـيـا .

2 - كل جملة مـولـدة مكونة على الأقل من n شعاعا . و كل جملة مشكلة من اقل من n شعاع ليست مـولـدة للفضاء E .

3 - عـنـدئـذ : البعد n للفضاء E هو العدد المساوي لأقل عدد من الأشعة المولدة (اصغر جملة مولدة) وهو العدد المساوي لا كبر عدد من العناصر لجملة (اكبر جملة مـسـتـقـلـة خـطـيـا) بمعنى:

إذا كانت $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ جملة أشعة من الفضاء E فــان:

* $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أساس $\Leftrightarrow \{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ اقل جملة مـولـدة .

* $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أساس $\Leftrightarrow$ $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أقصـى جملة مـسـتـقـلـة خـطـيـا.

نظرية 7 : (نظرية الأساس الناقص)

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K ، حيث: $\dim E = n$. و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_p \}$ جملة أشعة من الفضاء E حيث : $p < n$.

- إذا كانت الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_p \}$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا ، فـيـمكن تـكـمـلـتـهـا بـأشـعـة $u_{p+1} , u_{p+2} , u_{p+3} , ... , u_n$ بحيث تـكـون الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_p , \; u_{p+1} , u_{p+2} , u_{p+3} , ... , u_n \}$ تـشـكـل أساسا للفضاء E.

نـتـائـج:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ و لتكن $\{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , ... , v_m \}$ جملتين أشعة من الفضاء E.

1 - إذا كانت الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ تـولـد الفضاء E ، و $\{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , ... , v_m \}$ تـشـكـل أساسا للفضاء E فــان: $m \le n$.

2 - إذا كانت الجملة $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ تـولـد الفضاء E ، و $\{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , ... , v_m \}$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا فــان: $m \le n$.

3 - إذا كانت الجملتين $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ ، $\{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , ... , v_m \}$ أساسين للفضاء E فــان: $m = n$.

4 - إذا كان الفضاء E بـعـده n فــان: كل جملة مستقلة خـطـيـا من n شعاع تـشـكـل أساسا للفضـاء E . و كل جملة مـولـدة من n شعاع تـشـكـل أساس للفضاء E .

ملاحظات:

1 - نسمي " مستقيم شعاعي " كل فضاء شعاعي E بـعـده 1 . و في هذه الحالة كل شعاع غير معدوم u يـشـكـل أساسا للفضاء E . و لدينا: $E = \{ \lambda . u \;\; ; \;\; \lambda \in K \}$.

2 - نسمي " مستوي شعاعي " كل فضاء شعاعي E بـعـده 2 . و في هذه الحالة كل الشعاعين غير متناسبين u ، v يـشـكـلان أساسا للفضاء E . و لدينا:

$$E = \{ \lambda . u + \mu . v \;\; ; \;\; \lambda , \mu \in K \}$$

3 - إن بـعـد الفضاء E مرتبط بالحقول الأساسية . فـإذا كان E بـعـده n على الحقل □ ، فـهـو فضاء بـبـعـد $2n$ على الحقل □. فمثلا: □ هو " مستقيم شعاعي " على الحقل □ ، و هـو" مستوي شعاعي " على الحقل □. و لتفادي الالتباس نكتب دائما: $\dim_K E$.

30.5 - الفضاءات الشعاعية الجزئية بـبـعـد منته:

مبرهنة 1:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K و ليكن $F \subset E$ فضاءا شعاعيا جـزئـيا من E. عـنـدئـذ : الفضاء الشعاعي الجزئي F ذو بعد منته . و لدينا:

$$F \subset E \;\; \Leftrightarrow \;\; \dim F \le \dim E .$$

و تحصل المساواة: $\dim F = \dim E \;\; \Leftrightarrow \;\; F = E$.

مبرهنة 2:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K حيث : $\dim E = n$. و ليكن $F \subset E$ و $G \subset E$ فضائين شعاعيين جزئيين من E ، عـنـدئـذ لدينا:

. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ ......(*)

- و إذا كان: الجمع $F+G$ " جـمـعـا مـبـاشـرا " فـيـكـون:

. $E = F \oplus G \Leftrightarrow \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ ....(**)

- تعميم:

- إذا كانت: $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots\dots, F_n$ فضاءات شعاعية جزئية من E فـان:

. $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} \dim F_i\right)$

- و تحصل المساواة: $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \dim F_i\right)$ اذاا كان الجمع: $\sum_{i=1}^{n} F_i$ " جمعا مـبـاشرا ".

مبرهنة 3:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K حيث: $\dim E = n$. وليكن $F \subset E$ و $G \subset E$ فضائين شعاعيين جزئيين من E . بحيث: $E = F \oplus G$ فـان:

. $\dim E = \dim F + \dim G$

مبرهنة 4:

ليكن E فضاءا شعاعيا ذو بعد منته على الحقل K حيث: $\dim E = n$. و ليكن $F \subset E$ و $G \subset E$ فضائين شعاعيين جزئيين من E بـبـعـدين: $\dim F = p$ ، $\dim G = q$ فـان:

حيث. $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ ......(***)

. $F \times G = \{ (x, y) : x \in F, y \in G \}$

البرهان:

لنعتبر الجملة $\{ u_1, u_2, u_3, u_4, \dots\dots, u_n \}$ أساسا للفضاء F و

$\{ v_1, v_2, v_3, v_4, \dots\dots, v_m \}$ أساسا للفضاء G ولنعتبر الجملة:

. $\Omega = \{ (u_1, 0), (u_2, 0), (u_3, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), (0, v_2), \dots, (0, v_m) \}$

- فيكفي التحقق من أن: الجملة Ω تشكل أساسا للفضاء $F \times G$.

ملاحظة:

- نعلم تعريفا أن بعد الفضاء الشعاعي الجزئي التقاطع $F \cap H$:

. $0 \le \dim(F \cap H) \le Min(\dim F, \dim H)$

<u>قضية</u> : (هـــامـــة)

ليكن E ، F فضائين شعاعيين ذو بعد منتهين على الحقل K حيث: $\dim E = n < +\infty$ ، $\dim F = m < +\infty$. وليكن التطبيق الخطي $f : E \longrightarrow F$ و نعرف رتبة التطبيق f بـ: $rang(f) = \dim(f(E))$ ، <u>فـــان</u>:

(1 - (يكون f متباين على E Injective) $\Leftrightarrow$ ($Ker(f) = \{e_E\} = \{0_E\}$) .

(2 - (يكون f متباين على E Injective) $\Leftrightarrow$ ($rang(f) = \dim(E)$) .

(3 - (يكون f غـــامـــر على E Surjective) $\Leftrightarrow$ ($rang(f) = \dim(F)$) .

(4 - (يكون f تـقـــابـلـي على E Bijective) $\Leftrightarrow$ ($rang(f) = \dim(E) = \dim(F)$) .

31.5 - الفضاء الشعاعي الـجداء:

ليكن K حقلا تبديليا , و لتكن $E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , ... , E_\mu$ فضاءات شعاعية على الحقل K , و لنعتبر المجموعة: $E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \times ...... \times E_\mu$, ولنعرف عليها عمليتي الجمع و الضرب بسلمي من الحقل K كما يلي:

$$\forall U = \left(u_1 , u_2 , u_3 , ... , u_\mu \right) \in E \ , \ \forall V = \left(v_1 , v_2 , v_3 , ... , v_\mu \right) \in E \ , \ \forall \lambda \in K \ ;$$

$$\begin{cases} 1) \ U + V = \left(u_1 + v_1 , u_2 + v_2 \ , \ u_3 + v_3 , ... , \ u_\mu + v_\mu \right) \\ 2) \ \lambda . U = \left(\lambda . u_1 , \lambda . u_2 , \lambda . u_3 , ... , \lambda . u_\mu \right) \end{cases} .$$

- إن المجموعة $E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 \times ...... \times E_\mu$ لها بنية فضاء شعاعي على الحقل K . يدعي الفضاء الشعاعي الـجداء .

32.5 - الفضاء الشعاعي الـجزئي:

تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن $F \subset E$ جزءا من E. نقول عن F انه فضاء شعاعي جـزئـي من E إذا كان:

1 - F مستقرة بالنسبة إلى القانونين:

$$.\forall \left(u , v \right) \in F^2 \ , \ \forall \lambda \in K \ : \begin{cases} u + v \in F \ \ .....(1) \\ \lambda . u \in F \ \ ......(2) \end{cases}$$

2 - F مـزودة بالقانونين المستخرجين لــه بنية فضاء شعاعي .

ملاحظة :

- إذا كان E فضاءا شعاعيا على الحقل K , فـان: $\{ 0_E \}$ و E فضاءان شعاعيان جـزئـيان من E , يدعيان : الفضاءان الشعاعيان الجـزئـيان الـتـافـهـان.

مبرهنة 1 :

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن $F \subset E$ جزءا من E.

- يكون: F انه فضاء شعاعي جـزئـي من E إذا كان:

$$. \ \forall \left(u , v \right) \in F^2 \ , \ \forall \lambda \in K \ : \begin{cases} F \neq \phi \ \left(0_E \overset{?}{\in} F \right) .....(1) \\ u + v \in F \ \ .....(2) \\ \lambda . u \in F \ \ ......(3) \end{cases}$$

مبرهنة 2:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن $F \subset E$ جزءا من E.

- يكون: F انه فضاء شعاعي جـزئـي من E إذا كان:

$$.\forall \left(u , v \right) \in F^2 \ , \ \forall \left(\lambda , \mu \right) \in K^2 \ : \begin{cases} F \neq \phi \ \left(0_E \overset{?}{\in} F \right) .....(1) \\ \lambda . u + \mu . v \in F \ \ ....(2) \end{cases}$$

ملاحظات وخواص:

1 - بالنسبة إلى الشرط : $F \neq \phi$ يكفي التحقق من أن : $0_E \overset{?}{\in} F$. ذلك ان الفضاء شعاعي F يحوي على الأقل العنصر الحيادي 0_E .

2 - إذا كان F فضاءا شعاعيا جزئيا من E , فانه من اجل كل عائلة أشعة $(u_i)_{i \in I}$ من F و كل عائلة سلميات $(\lambda_i)_{i \in I}$ من K يـكـون: المزج الخطي $\sum_{i \in I} \lambda_i . u_i$ عـنـصـرا من F .

نعبر عن هذه الخاصية بان: F مـسـتـقـر بالنسبة إلى المزج الخطي.

3 - إذا كان F فضاءا شعاعيا جزئيا من E , و $G \subset F$ فضاءا شعاعيا جزئيا من F فـان: G فضاء شعاعي جـزئـي من E.

4 - إذا كان E , F فضائين شعاعيين على الحقل K بالنسبة إلى نفس القانونين , و كان $F \subset E$ فـان: F فضاءا شعاعيا جــزئيا من E.

مثال 1:

- ليكن I مجالا من $\mathbb{R}$, ولنعتبر $E = F(I, \mathbb{R})$: " مجموعة التطبيقات الحقيقية المعرفة على I " . مزودة بعملية جمع التطبيقات و ضرب تطبيق f بسلمي λ من $\mathbb{R}$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E :$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

- إن المجموعة $E = F(I, \mathbb{R})$ هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. و يدعى $E = F(I, \mathbb{R})$: " فضاء التوابع الحقيقية المعرفة على المجال I " .

- و لنعتبر المجموعتان: $F = C(I, \mathbb{R})$ هي " مجموعة التوابع المستمرة و المعرفة على I " و $H = C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ هي " مجموعة التوابع القابلة للاشتقاق بالاستمرار n مرة والمعرفة على I " .

إن: $F = C(I, \mathbb{R})$ و $H = C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ فضاءان شعاعيان جـزئـيان من E.

مثال 2:

ليكن K حقلا تبديليا , و لنعتبر $K[X]$ فضاء كثيرات الحدود بمعاملات من الحقل K.

و لتكن $K_n[X]$ هي " مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة اقل أو تساوي n "

- إن المجموعة $K_n[X]$ هي فضاء شعاعي جـزئـي من الفضاء $K[X]$ على الحقل K .

مثال 3:

لنعتبر الفضاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$, ولتكن المجموعة:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; 2x + y = 0\}.$$

- إن المجموعة F هي فضاء شعاعي جـزئـي من $\mathbb{R}^2$.

33.5 - الفضاء الشعاعي الـجـزئي الـمـولـد:

مبرهنة و تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و $\Omega \subset E$ جملة أشعة من الفضاء E غير خالية , ولتكن F مجموعة المزوج الخطية في عناصر الجملة Ω.

- إن المجموعة F هي فضاء شعاعي جـزئـي من E, يدعى " الفضاء الشعاعي الـجـزئي الـمـولـد بالجملة Ω " , و نرمز له بالرمز: $F = \langle \Omega \rangle = [\Omega]$.

فمثلا : إذا كانت: $\Omega = \{ u_i \quad ; \quad 1 \le u_i \le n \}$ فيكون:

$$F = \langle \Omega \rangle = [\Omega] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i \quad ; \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

34.5 - العمليات بين الفضاءات الشعاعية:

مبرهنة 1: (تقاطع فضائين شعاعيين جزئيين)

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , وليكن F , H جزئين من E.

إذا كان F , H فضائين شعاعيين جزئيين من E فان : $F \cap H$ فضاء شعاعي جزئي من E. و إذا كانت $\{ F_i \}_{i \in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من E فان: $\bigcap_{i \in I} F_i$ فضاء شعاعي جزئي من E.

ملاحظة 1:

لتكن Ω مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الشعاعي E على الحقل K.

- إن: $[\Omega] = \langle \Omega \rangle$ هو اصغر فضاء شعاعي جزئي (بمعيار الاحتواء) من E يحتوي على Ω وهو تقاطع جميع الفضاءات الشعاعية الجزئية من E التي تحوي Ω.

ملاحظة 2:

نشير انه حسب ما بينا في موضوع الزمر الجزئية , يكون اتحاد فضائين شعاعيين جزئيين $F \cup H$ " ليس فضاءا شعاعيا جزئيا على العموم ".

- يكون $F \cup H$ فضاء شعاعي جزئي من E إذا كان: $H \subset F$ أو $F \subset H$.

مبرهنة1: (جمع فضائين شعاعيين جزئيين)

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F , H فضائين شعاعيين جزئيين من E.

و لنعتبر المجموعة: $F + H = \{ u + v \ , \ u \in F , v \in H \}$.

- إن المجموعة: $F + H$ هي فضاء شعاعي جزئي من E . يدعى " مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين F و H ".
- و إذا كانت $\{ F_i \}_{i \in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من E فان: $\sum_{i \in I} F_i$ هو فضاء شعاعي جزئي من E. يدعى " الفضاء الشعاعي الجزئي المجموع " و هو اصغر فضاء شعاعي جزئي من E يحوي جميع الأجزاء F_i . فهو إذن: الفضاء الشعاعي الجزئي من E المولد باتحاد الأجزاء F_i.

35.5 - الجمع المباشر:

تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F , H فضائين شعاعيين جزئيين من E.

- نقول عن فضاء شعاعي جزئي G من E انه : " جمع مباشر للفضائين الشعاعيين الجزئيين F و H " إذا كان:

$$\begin{cases} F + H = G \text{ ....}(1) \\ F \cap H = \{ 0_E \} \text{....}(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u \in G \ , \ \exists x \in F \ , \ \exists y \in H \ ; \ u = x + y \ \text{...}(*) \\ u \in F \cap H \ \Rightarrow \ u \overset{?}{=} 0_E \ \text{............}(**) \end{cases}$$

وعندها نكتب: $G = F \oplus H$.

تعميم:

لتكن $\{ F_i \}_{i \in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جـزئـيـة من E , نقول عن الجمع $G = \sum_{i \in I} F_i$ انه مباشر اذا كان كل شعاع u من G يكتب بطريقة وحـيـدة على الشكل: $u = \sum_{i \in I} u_i$. حيث: $u_i \in F_i$ من اجل كل $i \in I$. وعندها نكتب: $G = \bigoplus_{i \in I} F_i$.

ملاحظات:

1 - إذا كان الجمع $\sum_{i \in I} F_i$ مباشرا و كان $J \subset I$ جـزءا من I فـان: الجمع $\sum_{i \in J} F_i$ يكون مباشرا.

وعلى الخصوص من اجل كل i , j حيث: $i \neq j$ يكون: $F_i \cap F_j = \{ 0_E \}$.

2 - ان عكس الوضعية 1 غير صحيح . فالإثبات أن: $F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , ... , F_n$ حيث $n \geq 3$ هي في جمع مباشر , لا يكفي التحقق من انه من اجل كل دليلين i , j مختلفين لدينا $F_i \cap F_j = \{ 0_E \}$. بل يجب التحقق من أن: $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap .... \cap F_n = \{ 0_E \}$.

36.5 - الفضاءات الشعاعية الـجـزئية الإضافية:

تعريف:

ليكن F , H فضائين شعاعيين جـزئـيـين من فضـاء شعاعي E.

- نقول عن F , H أنهما " فضاءان إضافيان " في E إذا كان: $E = F \oplus H$.

وهذا يعني أن كل شعاع u من E يكتب بطريقة وحـيـدة على الشكل: $u = v + w$ حيث: $v \in F$ و $w \in H$.

نظرية:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K , و ليكن F فضاء شعاعي جـزئـي من E. عندئذ:

الفضاء F يـمـلـك على الأقل فضاءا إضـافـيـا H في E.

ملاحظات:

1 - يجب عدم الخلط بين مفهوم الإضافي ومفهوم المتمم . فمتمم فضاء شعاعي جـزئـي F من E هو مجموعة ليست لها فائدة كبيرة , فهي لـيـسـت فضاءا شعاعيا جـزئـيـا من E , لأنها لا تحتوي العنصر الحيادي.

2 - إن للفضاء الشعاعي الجـزئـي F من E على العموم عدد لا نهائي من الإضافيات في E. و توجد حـالـتـان فقط يكون فيها الإضافي و حـيـدا.

- فإذا كان $F = E$: فـان: الإضافي الو حـيـد لـ F في E هـو: $\{ 0_E \}$.

- و إذا كان: $F = \{ 0_E \}$ فـان: الإضافي الو حـيـد لـ F في E هـو: نفسه E.

مثال:

في الفضاء الشعاعي $E = F (\mathbb{R} , \mathbb{R})$ للتوابع من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

- الفضاءان الشعاعيان الجزئيان $P (\mathbb{R} , \mathbb{R})$ للتوابع الزوجية و $A (\mathbb{R} , \mathbb{R})$ للتوابع الفردية فضاءان اضـافـيـان في $E = F (\mathbb{R} , \mathbb{R})$.

37.5 - الارتباط و الاستقلال الخطيان:

تعريف:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K ، و لتكن $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ جملة أشعة من الفضاء E.

- نقول عن الأشعة: $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ أنها " مـرتـبـطـة خـطـيـا " إذا وجد " n سلميا $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4 , ... , \lambda_\mu$ من الحقل K غيـر معدومة كليا بحيث:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + ... + \lambda_n \cdot u_n = 0 .$$

- ونقول عن الأشعة: $u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_\mu$ أنها " مـسـتـقـلـة خـطـيـا " إذا لـم تـكـن مـرتـبـطـة خـطـيـا. بمعنى إذا تحقق:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + ... + \lambda_n \cdot u_n = 0 .$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0$$

ملاحظات و نتائج:

1 - يجب عدم الخلط بين " ليست معدومة كليا " و " ليست كلها معدومة " .

2 - كل جملة مقتصرة على شعاع واحـد $\{ u \}$ تكون: مـسـتـقـلـة خـطـيـا إذاا كان: $u \neq 0$.

3 - كل جملة أشعة مكونة من شعاعين $\{ u , v \}$ تكون: مـرتـبـطـة خـطـيـا اذاا كان: u , v على استقامة واحدة (متسامتين) أو كانا متناسبين. بمعنى إذا وجد: $\lambda \in K$ بحيث: $u = \lambda . v$ أو $v = \lambda . u$. و لدينا :ملاحظة: لا يمكن تعميم هذه الوضعية على جملة مكونة من أكثر شعاعين.

4 - تكون جملة من الأشعة مـرتـبـطـة خـطـيـا إذا أمـكـن كـتـابة احدها كـمـزج خـطـي (عبارة خطية , تركيبة خطية) في الأشعة المتبقية.

5 - كل جـمـلـة جـزئـية من جملة أشعة مـسـتـقـلـة خـطـيـا هي: مـسـتـقـلـة خـطـيـا.

6 - كل جـمـلـة تـحـوي جملة مـرتـبـطـة خـطـيـا هي: مـرتـبـطـة خـطـيـا. وعلى الخـصـوص كل جملة تحوي الشعاع المعدوم أو شعاعين متسامتين هي مـرتـبـطـة خـطـيـا.

أمثلة:

1 - في الفضـاء $\mathbb{R}^2$ على الحقل $\mathbb{R}$. الجملة: $\{ e_1 , e_2 \}$ ، حيث: $e_1 = (1 , 0) , e_2 = (0 , 1)$ مـسـتـقـلـة خـطـيـا. ذلك أن:

$$\alpha . e_1 + \beta . e_2 = (0 , 0) \Rightarrow \alpha . (1 , 0) + \beta . (0 , 1) = (0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha . 1 + \beta . 0 = 0 \; ...(1) \\ \alpha . 0 + \beta . 1 = 0 \; ...(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \; ...(1) \\ \beta = 0 \; ...(2) \end{cases} .$$

2 - في الفضـاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. لنعتبر الأشعة: $u_1 = (1 , 3 , 1)$ ، $u_2 = (2 , -1 , 0)$ ، $u_3 = (4 , -5 , -2)$.

- الجملة: $\{ u_1 , u_2 , u_3 \}$ مـرتـبـطـة خـطـيـا. ذلك أن:

أي أن: $(+2) . u_1 + (+1) . u_2 + (-1) . u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$(+2) . (1 , 3 , 1) + (+1) . (2 , -1 , 0) + (-1) . (4 , -5 , -2) = (0 , 0 , 0) .$$

3 - في الفضـاء $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$. لنعتبر الأشعة: $u_1 = (1 , -1 , 0)$ ، $u_2 = (2 , 0 , -3)$ ، $v_1 = (0 , -2 , 3)$ ، $v_2 = (3 , 1 , -3)$.

- الجملتان: $\{ u_1 , u_2 \}$ و $\{ v_1 , v_2 \}$ مستقلتان خطيا. ذلك أن:

أي أن: $\alpha . u_1 + \beta . u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\alpha . (1 , -1 , 0) + \beta . (2 , 0 , -3) = (0 , 0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2 . \beta = 0 \; .....(1) \\ -\alpha + 0 = 0 \; ....(2) \\ 0 + -3 . \beta = 0 \; ...(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \; .....(1) \\ \beta = 0 \; .....(2) \end{cases} .$$

- و كذلك أن:

$$\alpha . (0 , -2 , 3) + \beta . (3 , 1 , -3) = (0 , 0 , 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + 3 . \beta = 0 \; ....(1) \\ \alpha . -2 + \beta . 1 = 0 \; ....(2) \\ \alpha . 3 + -3 . \beta = 0 \; ....(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \; .....(1) \\ \alpha = 0 \; .....(2) \end{cases} .$$

4 - في الفضاء $\mathbb{C}$ على الحقل $\mathbb{R}$. لدينا: 1 , i مستقلان خطيا. ذلك أن:

$$\alpha . (1) + \beta . (i) = (0) \Rightarrow \alpha + i . \beta = 0 + i . 0$$
$$\Rightarrow \alpha = 0 \; , \; \beta = 0 \; .$$

38.5 - الجملة المولدة:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K ، و لتكن $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ جملة أشعة من الفضاء E.

- نقول عن هذه الجملة: $\{ u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , ... , u_n \}$ أنها تولد الفضاء E إذا كان كل شعاع من E يكتب كمزج خطي في أشعة هذه الجملة. بمعنى:

$$\forall w \in E \; , \; \exists \lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \; ; \; w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i \; .$$

ملاحظة: كل جملة أشعة من الفضاء E تحوي مولدة لـ E هي أيضا مولدة لـ E.

39.5 - الأساس و البعد:

تعريف01:

ليكن E فضاءا شعاعيا على الحقل K ، و لتكن $(u_i)_{i \in I}$ جملة أشعة من E.

- نقول عن الجملة $(u_i)_{i \in I}$ أنها تشكل " أساسا " للفضاء E إذا كان:

1 - الجملة $(u_i)_{i \in I}$ مستقلة خطيا.

2 - كل شعاع من E يكتب كمزج خطي في أشعة الجملة $(u_i)_{i \in I}$.

بمعنى: تكون الجملة $(u_i)_{i \in I}$ " أساسا " للفضاء E إذا كانت: مستقلة خطيا و تولد الفضاء E.

تعريف02:

- لنفرض ان الفضاء E ذو بعد منتهي (مثلا $\dim_{\mathbb{R}} E = n$) ، و لتكن Ω جملة اشعة من E.

(ا)- حتى تكون الجملة Ω اساسا للفضاء E يكفي ان يكون عدد اشعتها "n" و مستقلة خطيا.

(ب)- حتى تكون الجملة Ω اساسا للفضاء E يكفي ان يكون عدد اشعتها "n" و تولد الفضاء E.

- نسمي " عدد أشعة أساس الفضاء " أو ' عدد الأشعة المستقلة خطيا سواء من الأسطر أو من الأعمدة و الغير معدومة التي تشكل أساس للفضاء " هو " بعد الفضاء E ".

فإذا كان عدد أشعة الأساس الفضاء منتهيا و ليكن n , فنقول أن الفضاء الشعاعي E ذو بعد منته و نكتب: $\dim E = n$. و نعتبر اصطلاحا أن بعد الفضاء المعدوم $\{ 0 \}$ هو: $\dim \{ 0 \} = 0$. و إذا لم يكن للفضاء E أساس منتهي , فنقول أن بعد الفضاء الشعاعي E غير منتهي و نكتب: $\dim E = +\infty$.

تعريف الاساس و البعد للفضاء الشعاعي E :

1- نسمي اساسا للفضاء الشعاعي E كل جملة اشعة $\Omega=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ من E مستقلة خطيا و مولدة للفضاء E.

2- ونسمي بعد الفضاء E هو عدد اشعة الاساس الفضاء E، اي عدد الاشعة المستقلة خطيا والغير معدومة لـ E.

- التطبيقات الخطية -

40.5 - مفهوم التطبيق الخطي:

تعريف:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K ، و f تطبيقا من E نحـو F.

- نقول عن f انه تطبيق خطـي إذا كان:

$$\forall (u,v) \in E^2 , \forall \lambda \in K : \begin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) & .....(1) \\ f(\lambda.u) = \lambda.f(u) & ....(2) \end{cases} .$$

- و نقول أيضا أن التطبيق f : تـمـاثـل morphisme من E نحـو F.

ملاحظات و خواص:

1 - يكون f تطبيقا خطـيـا من E نحـو F إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in IK^2 :$$
$$f(\lambda.u+\mu.v) = \lambda.f(u)+\mu.f(v) ......(**)$$

2 - إذا كان f تطبيقا خطـيـا فــانه: من اجل كل تركيبة خطية : $\sum_{i \in I} \lambda_i .u_i$ من E لدينا:

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i .u_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i .f(u_i) .$$

3 - إذا كان f تطبيقا خطـيـا فــان: " $f(0_E) = 0_F$ " . و تستعمل هذه الخاصية أحيانا لإثبات أن تطبيق مــا لـيس خـطـيــا.

4 - $\forall x \in E \; ; \; f(-x) = -f(x)$.

41.5 - تـرميزات و مصطلحات:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K .

1 - نرمز بـ $£(E,F)$ إلى " مجموعة التطبيقات الخطية المعرفة من E نحـو F ".

2 - نسمي " تـمـاثـلا ذاتـيـا لـ E " : كل تطبيق خطي من E نحـو E . و نرمز بـ " $£(E,E) = £(E)$ " لمجموعة التماثلات الذاتية لـ E ".

3 - نسمي " تـشـاكـلا " كـل تطبيق خـطـي مـتـقـابـل.

4 - و نسمي " تـشـاكـلا ذاتـيـا لـ E " كـل تـشـاكـل من E نحـو E.

5 - نسمي " شـكـلا خـطـيـا " كل تطبيق خـطـي من E نحـو K.

أمـثـلـة:

1 . " التطبيق المعدوم " من الفضاء الشعاعي E نحـو الفضاء الشعاعي F هـو تطبيق خـطـي.

لان: $f : E \xrightarrow{\;\;} F$, $x \longrightarrow f(x) = 0$

$$\forall (u,v) \in E^2 , \forall \lambda \in K : \begin{cases} f(u+v) = 0 = 0+0+f(u)+f(v) & .....(1) \\ f(\lambda.u) = 0 = \lambda.0 = \lambda.f(u) & ....(2) \end{cases} .$$

2 . ليكن $E = \mathbb{R}^3$ و $F = \mathbb{R}^2$ الفضائين الشعاعيين على الحقل $K = \mathbb{R}$. ولنعتبر التطبيق:

$$\begin{array}{l} f: E=\mathbb{R}^3 \longrightarrow F=\mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \to f(x,y,z)=(x-y\ ,y+z) \end{array}.$$

- إن التطبيق f خطي . ذلك أن:

ا - نتحقق أن:

$$\begin{array}{l} \forall u=(x_1,y_1,z_1),v=(x_2,y_2,z_2)\in E=\mathbb{R}^3: \\ f(u+v) \overset{?}{=} f(u)+f(v) \quad .....(1) \end{array}.$$

لدينا أن:

$$\begin{array}{l} f(u+v)=f(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2) \\ =((x_1+x_2)-(y_1+y_2),(y_1+y_2)+(z_1+z_2)) \\ =(x_1-y_1\ ,\ y_1+z_1)+(x_2-y_2\ ,\ y_2+z_2)=f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2) \\ =f(u)+f(v) \end{array}.$$

ب - نتحقق أن:

$$.\forall u=(x,y,z)\in E=\mathbb{R}^3,\ \forall \lambda\in K=\mathbb{R}\ : f(\lambda.u) \overset{?}{=} \lambda.f(u) \quad .....(2)$$

$$\begin{array}{l} f(\lambda.u)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=(\lambda x-\lambda y\ ,\lambda y+\lambda z) \\ =(\lambda.(x-y),\lambda.(y+z))=\lambda.((x-y),(y+z)) \\ =\lambda.f(x,y,z)=\lambda.f(u) \quad .....(2) \end{array}.$$

3 - ليكن I مجالا (لا يقتصر على نقطة) من $\mathbb{R}$. التطبيق φ الذي يرفق كل تابع f من I نحو $\mathbb{R}$ بمشتقه f' هو تطبيق خطي من $D(I,\mathbb{R})$ " مجموعة التوابع القابلة للاشتقاق على I " في $F(I,\mathbb{R})$: " مجموعة التوابع الحقيقية المعرفة على المجال I في $\mathbb{R}$ ".

$$\begin{array}{l} \varphi: D(I,\mathbb{R}) \longrightarrow F(I,\mathbb{R}) \\ \qquad f \longrightarrow f' \end{array}.$$

واقتصار التابع φ على $E=C^{(\infty)}(I,\mathbb{R})$ هو " تشاكل ذاتي لـ E ".

4 - ليكن الحقل K . و ليكن $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ عنصرا من K^n . و لنعتبر الفضاء $E=K^n$ على الحقل K . والتطبيق

$$\begin{array}{l} f: E=K^n \longrightarrow K \\ (x_1,x_2,...,x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ .x_i \end{array}.$$

- إن التطبيق f شكل خطي على الفضاء $E=K^n$.

42.5 - العمليات على التطبيقات الخطية:

- نقبل بدون برهان المبرهنات التالية:

مبرهنة 01: (بنية الفضاء الشعاعي $\pounds(E,F)$)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K . و f , g تطبيقين لـ E في F.

إذا كان f , g تطبيقين خطيين من E في F و λ , μ سلميين من K فـان: $(\lambda.f+\mu.g)$ تطبيق خطي من E في F . نستخلص من هذا أن:

$\pounds(E,F)$ فضاء شعاعي على الحقل K.

مبرهنة 02: (مركب تطبيقين خطيين)

ليكن E , F , G ثلاثة فضاءات شعاعية على الحقل K.

إذا كان f , g تطبيقين خطيين فـان: $(g \circ f)$ تطبيق خطي من E في G.

ملاحظة:

اذا كان f تماثلا ذاتيا لـ E و "n" عددا طبيعيا فـان: "f^n تماثل ذاتي للفضاء الشعاعي E.

حيث: $f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ "n" مـرة.

مبرهنة 03: (الـتـشـاكـل الـعـكـسـي)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K.

إذا كان f تـشـاكـلا من E في F فـان: تـابـعـه الـعـكـسـي " تـشـاكـل " من F نحو E.

نـتـيـجـة:

ليكن f , g تشـاكـلـين ذاتـيين للفضاء E عـنـدئـذ: f^{-1} و $(g \circ f)$ تشـاكـلـين ذاتـيين للفضاء E. ونستخلص من ذلك أن مجموعة التشاكلات الذاتية للفضاء E لها بنية زمرة بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات , هذه الزمرة غير تبديلية على العموم.

43.5 - صـورة و نـواة تطبيق خـطي:

تعريف:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K , و f تطبيقا خـطـيـا من E نحـو F.

- نسمي المجموعة: $\{ v = f(u) \; ; \; u \in E \}$ صورة التطبيق الخطي f ونرمز لها بالرمز: $\operatorname{Im}(f) \subset F$. أي أن:

$\operatorname{Im}(f) = \{ \forall v \in F \, , \exists u \in E \, : v = f(u) \} = \{ f(u) \; ; \; u \in E \}$.

- و نسمي المجموعة: $\{ u \in E \; ; \; f(u) = 0_F \}$ نـواة التطبيق الخطي f ونرمز لها بالرمز: $Ker(f) \subset E$. أي أن: $Ker(f) = \{ u \in E \; ; \; f(u) = 0_F \}$.

مبرهنة 04: (التطبيقات الخطية و الفضاءات الشعاعية الجزئية)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K. و f تطبيقا خـطـيـا من E نحـو F.

- إذا كان $E_1 \subset E$ فضاءا شعاعيا جزئيا من E فــان: $f(E_1)$ فضاءا شعاعيا جزئيا من F.
- وإذا كان $F_1 \subset F$ فضاءا شعاعيا جزئيا من F فــان: $f^{-1}(F_1)$ فضاءا شعاعيا جزئيا من E.

نـتـيـجـة:

ينتج من هذه المبرهنة أن: صورة التطبيق الخطي f هي فضاء شعاعي جزئي من F وأن:
نــواة التطبيق الخطي f هي فضاء شعاعي جزئي من E.

مبرهنة 05: (تمييز التطبيق المتباين)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K . و f تطبيقا خـطـيـا من E نحـو F.

- يكون التطبيق الخطي f مـتـبـايـنـا إذا وفقط إذا كان: $Ker(f) = \{ 0_E \}$.

و بوضع آخـر يكون:

(f مـتـبـايـنـا) إذا وفقط إذا كان: $\forall u \in E \, : f(u) = 0_F \overset{?}{\Rightarrow} u = 0_E$.

مبرهنة 06:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K . و f تطبيقا خطيا من E نحو F فان:

1) $Ker(f) \subset E$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء E.

2) $\operatorname{Im}(f) \subset F$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء F.

3) f متباينا $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{ 0_E \}$.

4) f غامر $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}(f) = F$.

43.5 - التطبيقات الخطية و الأساسات:

مبرهنة 07: (التطبيقات الخطية و الجمل المولدة)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K . و f تطبيقا خطيا من E نحو F.

ولتكن $(u_i)_{i\in I}$ جملة أشعة من E.

- إذا كانت الجملة $(u_i)_{i\in I}$ تولد الفضاء E فان: $(f(u_i))_{i\in I}$ تولد صورة f : $\operatorname{Im}(f)$.
- وإذا كان إضافة إلى ذلك: التطبيق f غامرا فان: الجملة $(f(u_i))_{i\in I}$ تولد الفضاء الشعاعي F.

توضيح: يسمح لنا هذا بالقول أن: التطبيق الغامر f ينقل جملة مولدة إلى جملة مولدة.

مبرهنة 08: (التطبيقات الخطية و الأساسات)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K . ببعد منتهي n.

ولتكن $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساسا للفضاء E و لتكن $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ جملة أشعة من الفضاء F. عندئذ: يوجد تطبيق خطي وحيد f من E نحو F بحيث يكون: $f(u_i) = v_i$ من اجل كل i حيث: $1 \le i \le n$.

نتيجة:

ينتج من هذه المبرهنة أن:

- f متباين $\Leftrightarrow$ الجملة $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مستقلة خطيا.
- f غامر $\Leftrightarrow$ الجملة $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ تولد الفضاء الشعاعي F.
- f متقابل $\Leftrightarrow$ الجملة $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ تشكل أساس للفضاء الشعاعي F.

تفسير:

تسمح لنا هذه النتيجة بالقول أن:

- التطبيق الخطي يعرف بطريقة وحيدة بواسطة صورة أساس.
- يكون تطبيق خطي من E نحو F " تشاكلا " إذا وفقط إذا نقل أساس للفضاء E إلى أساس للفضاء F. فهو ينقل كل أساس لـ E إلى أساس لـ F.

44.5 - التطبيقات الخطية و البعد المنتهي:

مبرهنة 09:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K. و E ببعد منتهي n. عندئذ: يكون الفضاءان E و F متشاكلين اذاا كان: الفضاء F ذو بعد منتهي و كان: $\dim E = \dim F$.

نتيجة : (أهمية الفضاء K^n)

- إذا كان E فضاءا شعاعيا على الحقل K . وكان E ببعد منتهي n. فانه: يشاكل الفضاء K^n. أي أن: $E \cong K^n$.

- فإذا كان $\{ u_1 , u_2 ,\dots , u_n \}$ أساسا للفضاء E. يكون التطبيق φ المعرف كما يلي:

$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i . u_i$ تشاكلا من E في K^n.

(يمكن بشكل خاص اعتماد الأساس النظامي للفضاء K^n)

مبرهنة 10: (مبرهنة البعد)

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K . و E ذو بعد منتهي n . وليكن f تطبيقا خطيا من E نحو F فانه:

- لدينا: $\mathrm{Im}(f)$ فضاء شعاعي جزئي ببعد منتهي من الفضاء F.
- و لدينا المساواة: $\dim E = \dim(Ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$ .....(*) .

تعريف:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K , و f تطبيقا خطيا من E نحو F.

- نسمي بعد صورة التطبيق f : $\mathrm{Im}(f)$ برتبة التطبيق f و نرمز لها بالرمز:

$rang(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

- و نسمي بعد نواة التطبيق f : $Ker(f)$ بصفرية التطبيق f و نرمز لها بالرمز: $nul(f)$.

مبرهنة 11:

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل K , لها نفس البعد المنتهي $\dim E = \dim F = n$. و f تطبيقا خطيا من E نحو F . عندئذ الشروط التالية متكافئة:

1 - f تشاكل.
2 - f متباين.
3 - f غامر.
4 - يوجد تطبيق خطي: $g : F \longrightarrow E$ بحيث: $(f \circ g) = Ind_F$.
5 - يوجد تطبيق خطي: $g : F \longrightarrow E$ بحيث: $(g \circ f) = Ind_E$.

مبرهنة 12:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ذو بعد منتهي n . و $f : E \longrightarrow E$ تطبيق خطي

فان: 1 - $Ker(f) = Ker(f^2) = Ker(f \circ f) \Leftrightarrow Ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{ e_E \}$.

حيث: e_E العنصر الحيادي.

2 - $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f \circ f) \Leftrightarrow E = (Ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f))$.

- امثلة:

مثال01 :

- من بين التطبيقات التالية. عين تلك الخطية من غيرها:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \qquad (x , y) \mapsto f (x , y) = (x + y , x)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \qquad (x , y) \mapsto g (x , y) = 2x + 3y - z$$

$$h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto h(x,y) = x\,.\,y \quad .$$

- **الحل:**

- من بين التطبيقات التالية. تعيين تلك الخطية من غيرها:

1 / التطبيق: $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ;\ (x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y\ ,\ x)$

- التطبيق f خطي على $\mathbb{R}^2$. لان:

ا - نتحقق أن:

$$\forall u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2) \in E=\mathbb{R}^2 :$$
$$f(u+v) \overset{?}{=} f(u)+f(v) \quad .....(1) \quad .$$

لدينا أن:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2) \\ &= \big((x_1+x_2)+(y_1+y_2)\ ,\ (x_1+x_2)\big) \\ &= (x_1+y_1\ ,\ x_1) + (x_2+y_2\ ,\ x_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned} \quad .$$

ب - نتحقق أن:

$$.\forall u=(x,y)\in E=\mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in K=\mathbb{R}\ :\ f(\lambda.u) \overset{?}{=} \lambda.f(u) \quad .....(2)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda.u) &= f(\lambda x\ ,\ \lambda y) = (\lambda x+\lambda y\ ,\ \lambda x) \\ &= \big(\lambda.(x+y)\ ,\ \lambda.(x)\big) = \lambda.\big((x+y)\ ,\ (x)\big) \\ &= \lambda\,.\,f(x,y) = \lambda\,.\,f(u) \quad .....(2) \end{aligned} \quad .$$

2 / التطبيق: $.g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = 2x+3y-z$

- التطبيق g خطي على $\mathbb{R}^3$. لان:

ا- نتحقق أن:

$$\forall u=(x_1,y_1,z_1), v=(x_2,y_2,z_2) \in E=\mathbb{R}^3 :$$
$$g(u+v) \overset{?}{=} g(u)+g(v) \quad .....(1) \quad .$$

لدينا أن:

$$\begin{aligned} g(u+v) &= g(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2) \\ &= 2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)-(z_1+z_2) \\ &= (2x_1+3y_1-z_1)+(2x_2+3y_2-z_2) = g(x_1,y_1,z_1)+g(x_2,y_2,z_2) \\ &= g(u)+g(v) \end{aligned}$$

ب - نتحقق أن:

$$.\forall u=(x,y,z)\in E=\mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in K=\mathbb{R}\ :\ g(\lambda.u) \overset{?}{=} \lambda.g(u) \quad .....(2)$$

$$\begin{aligned} g(\lambda.u) &= g(\lambda x\ ,\ \lambda y\ ,\ \lambda z) = (2\lambda x+3\lambda y-\lambda z) \\ &= \big(\lambda.(2x+3y-z)\big) = \lambda.(2x+3y-z) \\ &= \lambda\,.\,g(x,y,z) = \lambda\,.\,g(u) \quad .....(2) \end{aligned} \quad .$$

3 / التطبيق: $.h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \mapsto h(x,y) = x\,.\,y$

- التطبيق h ليس تطبيق خطي على $\mathbb{R}^2$. لان:

ا - نتحقق أن:

$$\forall u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2) \in E=\mathbb{R}^2 :$$
$$h(u+v) \overset{?}{=} h(u)+h(v) \quad .....(1) \quad .$$

- لدينا أن:

$$h(u+v) = h(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2) = (x_1+x_2).(y_1+y_2)$$
$$= (x_1.y_1+x_1.y_2+x_2.y_1+x_2.y_2) \neq (x_1+y_1).(x_2+y_2) \ .$$
$$\neq h(x_1,y_1)+h(x_2,y_2) \neq g(u)+g(v)$$

مثال02 :

ليكن f تطبيق من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ نحو الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$, و g تطبيق من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ نحو الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$. حيث:

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ,$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (-x+y+z\ ,\ x-y+z)$$

$$g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ .$$
$$(x,y) \mapsto g(x,y) = (y\ ,\ x\ ,\ x+y)$$

1) - أثبت أن: f و g خطيان . 2) - عين صورة و نواة كلا من f و g . و أبعادها.

3) - عين : $(g\circ f)$ و $(f\circ g)$.

4) - هل يوجد تطبيق خطي h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث:

$(h\circ g) = Ind_{\mathbb{R}^2}$ ؟ $(g\circ h) = Ind_{\mathbb{R}^3}$ ؟

- الحل:

1) - يمكن الإثبات أن: f و g خطيان.

2) - تعيين صورة و نواة كلا من f و g . وأبعادها:

ا - حالة التطبيق الخطي f :

- نعلم أن نواة التطبيق الخطي f : $f:E\longrightarrow E$ تطبيق خطي ,

$Ker(f) = \{u\in E \ ;\ f(u) = 0_F\} \subset E$ هي فضاء شعاعي جزئي من E.

ومنه:

$Ker(f) = \{(x,y,z)\in E=\mathbb{R}^3 \ ;\ f(x,y,z) = 0_{F=\mathbb{R}^2} = (0,0)\}$.

لذلك , نحل المعادلة:

$$f(x,y,z) = 0_{F=\mathbb{R}^2} = (0,0) \iff \begin{cases} -x+y+z=0\ ....(1) \\ +x-y+z=0\ ....(2) \end{cases} \ .$$

و بجمع (1) و (2) نجد أن: $z=0$. و بالتعويض في إحدى المعادلتين (1) أو (2) نجد أن: $y=x$. و بالتالي: $Ker(f) = \{(x,x,0)\in E=\mathbb{R}^3 \ ;\ x\in\mathbb{R}\}$. أي أن:

$Ker(f) = <\{(1,1,0)\}>$. هذا الشعاع $u=(1,1,0)$ يحقق أن:

$f(1,1,0) = 0_{F=\mathbb{R}^2}$. و كذلك هو مستقل خطيا مع أي شعاع غير معدوم. فهو يشكل أساس لنواة التطبيق الخطي f $Ker(f)$. أي أن: $Ker(f) = < u=(1,1,0) >$.

و بالتالي: $\dim Ker(f) = +1$.

<u>نتيجة</u> 1:

بما أن:

$Ker(f) = \{(1,1,0)\} \neq \{(0,0,0) = 0_{E=\mathbb{R}^3}\} \iff f$ ليس متباين.

- نعلم أن صورة التطبيق الخطي f : $f:E\longrightarrow E$ تطبيق خطي ,

$\mathrm{Im}(f) = \{v\in F \ ;\ f(u)=v\ ,u\in E\} = \{f(u) \ ;\ u\in E\} \subset F$

هي فضاء شعاعي جزئي من F . لذلك نبحث عن الأشعة المولدة لصورة التطبيق الخطي f : $\mathrm{Im}(f)$:

- نحاول الإثبات أن: صورة التطبيق الخطي f من F تكتب بطريقة وحيدة كمزج خطي في أشعة الجملة $\{ v_1 , v_2 \}$ يطلب تعيينها:

$$f(x,y,z) = (-x+y+z \ , \ x-y+z) = \big((-x+y)+z \ , \ -(-x+y)+z \big) =$$
$$= \big((-x+y) \ , \ -(-x+y) \big) + (z \ , \ z) = (-x+y).(+1,-1) + z.(+1,+1)$$
$$= \alpha.(+1,-1) + \beta.(+1,+1)$$

أي أن: $\operatorname{Im}(f) = < \{ v_1 = (+1,-1) \ , v_2 = (+1,+1) \} >$.

و بما أن الشعاعين: $v_1 = (+1,-1) \ , v_2 = (+1,+1)$ مستقلين خطيا , فهما يشكلان أساس لصورة التطبيق الخطي f : $\operatorname{Im}(f)$. أي أن:

$\operatorname{Im}(f) = < v_1 = (+1,-1) \ , v_2 = (+1,+1) >$. و بالتالي:

$\dim \operatorname{Im}(f) = +2$.

نتيجة 2:

1 - نلاحظ أن:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(f) \subset F = \mathbb{R}^2 \\ et \\ +2 = \dim \operatorname{Im}(f) \le \dim F = \dim \mathbb{R}^2 = +2 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = F = \mathbb{R}^2 \ ...(**)$$

- و بما أن: $\operatorname{Im}(f) = F = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow f$ غامر على $\mathbb{R}^3$.

2 - بما أن f تطبيق خطي على $\mathbb{R}^3$ فإن:

$\dim E = \dim \big(Ker(f) \big) + \dim \big(\operatorname{Im}(f) \big) \ .....(*)$. أي أن:

$\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = (+1) + (+2) = +3$.

نتيجة 3 :

بما أن f ليس متباين و f غامر على $\mathbb{R}^3$. إذن: f ليس تقابلي على $\mathbb{R}^3$.

ب - حالة التطبيق الخطي g :

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ (x,y) \mapsto g(x,y) = (y \ , x \ , x+y)$.

- نعلم أن نواة التطبيق الخطي g : $g : E \longrightarrow E$ تطبيق خطي ,

$Ker(g) = \{ u \in E \quad ; \quad g(u) = 0_F \} \subset E$ هي فضاء شعاعي جزئي من E.

و منه:

$Ker(g) = \{ (x,y) \in E = \mathbb{R}^2 \quad ; \quad g(x,y) = 0_{F=\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \}$.

لذلك , نحل المعادلة: $g(x,y) = 0_{F=\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = 0 \ ....(1) \\ x = 0 \ ....(2) \\ x+y = 0 \ .....(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ ....(1) \\ x = 0 \ ....(2) \end{cases} .$$

و حسب (1) و (2) نجد أن: $Ker(g) = \{ (0,0) = 0_{E=\mathbb{R}^2} \}$ و هو " الفضاء التافه المولد بالمجموعة الخالية $\varnothing$ " . و يحقق أن:

$g(0,0) = (0,0,0) = 0_{F=\mathbb{R}^3}$. و لدينا $\dim Ker(g) = 0$.

نتيجة 1:

بما أن: $Ker(g) = \{ (0,0) = 0_{E=\mathbb{R}^2} \} \Leftrightarrow g$ متباين على $\mathbb{R}^2$.

- نعلم أن صورة التطبيق الخطي g : $g : E \longrightarrow F$ تطبيق خطي ,

$\text{Im}(g)=\{\forall v\in F\ ;\ \exists u\in E\ ;\ g(u)=v\}$

$=\{\forall(X,Y,Z)\in F=\mathbb{R}^3\ \exists(x,y)\in E=\mathbb{R}^2\ :\ g(x,y)=(X,Y,Z)\}\subset F$

$=\{g(u)\ ;\ u\in E\}\subset F$

هي فضاء شعاعي جـزئي من F.

- تعيين صـورة التطبيق الخطي g : $\text{Im}(g)$

$\text{Im}(g)=\{\forall v\in F\ ;\ \exists u\in E\ ;\ g(u)=v\}$

$=\{\forall(X,Y,Z)\in F=\mathbb{R}^3\ \exists(x,y)\in E=\mathbb{R}^2\ :\ g(x,y)=(X,Y,Z)\}\subset F$

- لدينا أن: $g(x,y)=(X,Y,Z)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\quad (y,x,x+y)=(X,Y,Z)$

$$\begin{cases} y=X \ ....(1)\\ x=Y\ ....(2)\\ x+y=Z\ .....(3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=X \ ....(1)\\ x=Y\ ....(2)\\ Y+X=Z\ ....(3)\end{cases}.$$

ومنه:

$$\text{Im}(g)=\{(X,Y,Z)\in F=\mathbb{R}^3\ :\ X+Y=Z\}$$
$$=\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3\ :\ X+Y-Z=0\}\subset F.$$

او بشكل آخر: $\text{Im}(g)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+y-z=0\}\subset F$ وهو عبارة عن " مـسـتـوي في $\mathbb{R}^3$ مـار من المبدأ $(0,0,0)$ ".

لذلك نبحث عن الأشعة الـمـولـدة لصورة التطبيق الخطي g : $\text{Im}(g)$:

- نحاول الإثبات أن: صورة التطبيق الخطي g من F تكتب بطريقة وحيـدة كـمـزج خـطـي في أشعة الجملة $\{v_1,v_2\}$ يطلب تعيينها:

$g(x,y)=(y,x,x+y)=(0,x,x)+(y,0,y)=$

$.=x.(0,+1,+1)+y.(+1,0,+1)=$

$=\alpha.(0,+1,+1)+\beta.(+1,0,+1)$

- أي أن: $\text{Im}(g)=<\{v_1=(0,+1,+1),v_2=(+1,0,+1)\}>$.

و بما أن الشعاعين: $v_1=(0,+1,+1),v_2=(+1,0,+1)$ مـسـتـقـلـيـن خـطـيـا , فهما يـشـكـلان أسـاس لصورة التطبيق الخطي g : $\text{Im}(g)$. أي أن:

$\text{Im}(g)=<v_1=(0,+1,+1),v_2=(+1,0,+1)>$. وبالتالي:

$\dim\ \text{Im}(g)=+2$.

<u>نتيجة</u> 2: 1 - نـلاحـظ أن:

$$\begin{cases}\text{Im}(g)\subset F=\mathbb{R}^3\\ et\\ +2=\dim\text{Im}(g)\le\dim F=\dim\mathbb{R}^3=+3\end{cases}.\quad\Rightarrow\quad \text{Im}(g)\ne F=\mathbb{R}^3\ ...(**)$$

و بما أن: $\text{Im}(g)\ne F=\mathbb{R}^3\Leftrightarrow g$ لـيـس غـامــر على $\mathbb{R}^2$.

2 - بما أن g تطبيق خـطـي على $\mathbb{R}^3$ فـــان:

$\dim E=\dim(Ker(g))+\dim(\text{Im}(g))\ .....(*)$. أي أن:

$\dim E=\dim\mathbb{R}^2=(0)+(+2)=+2$.

<u>نتيجة</u> 3:

بما أن g مـتـبـايـن و g لـيـس غـامــر على $\mathbb{R}^2$. إذن: g لـيـس تـقـابـلــي على $\mathbb{R}^2$.

3)- تعيين التطبيقان: $(g\circ f)$ و $(f\circ g)$:

ا - التطبيق $(g\circ f)$: $(g\circ f):\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3$.

- لدينا أن:

$$(g\circ f)(x,y,z) = g\left[f(x,y,z)\right] = g\left[f(x,y,z)\right]$$

$$= g\left[\left(\overset{X}{-x+y+z}\ ,\ \overset{Y}{x-y+z}\right)\right] = (Y\ ,\ X\ ,\ X+Y) = \ .$$

$$= (x-y+z\ ,\ -x+y+z\ ,\ 2z)$$

أي أن: $(g\circ f)(x,y,z) = (x-y+z\ ,\ -x+y+z\ ,\ 2z)$....(1).

ب - التطبيق $(f\circ g)$: $(f\circ g):\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2} \mathbb{R}^2$.

- لدينا أن: $(f\circ g)(x,y) = f\left[g(x,y)\right] = f\left[\left(\overset{X}{y}, \overset{Y}{x}, \overset{Z}{x+y}\right)\right]$.

$$= (2x\ ,\ 2y) = 2.(x\ ,\ y)$$

أي أن: $(f\circ g)(x,y) = (2x\ ,\ 2y) = 2.(x\ ,\ y)$......(2).

4) - هل يـوجـد تطبيق خطي h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $(h\circ g) = Ind_{\mathbb{R}^2}$ ؟ $(g\circ h) = Ind_{\mathbb{R}^3}$؟

- لدينا: $(h\circ g) = Ind_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ;\ (x,y)\mapsto (x,y)$ و

$(g\circ h) = Ind_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ;\ (x,y,z)\mapsto (x,y,z)$.

- لدينا مما سبق إن: $(g\circ f)(x,y,z) = (x-y+z\ ,\ -x+y+z\ ,\ 2z)$....(1)

وبالـمـقـــارنـة مـع $(g\circ h) = Ind_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ;\ (x,y,z)\mapsto (x,y,z)$.

نستنتج من ذلك انه لا يـوجـد تطبيق خطي h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $(g\circ h) = Ind_{\mathbb{R}^3}$.

- و لدينا أيضا مما سبق إن: $(f\circ g)(x,y) = (2x\ ,\ 2y) = 2.(x\ ,\ y)$......(2).

أي أن: $\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right).f\right)\circ g\right)(x,y) = (x,y)$ .....(2) و بالـمـقـــارنـة مـع

$(h\circ g) = Ind_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ;\ (x,y)\mapsto (x,y)$. نستنتج من ذلك انه يـوجـد

تطبيق خطي h من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $(h\circ g) = Ind_{\mathbb{R}^2}$. حيث: $h = \left(\frac{1}{2}\right).f$.

مثال03 :

ليكن $\{e_1, e_2\}$ و $\{v_1, v_2, v_3\}$ الأساسين القانونيين للفضائين الشعاعيين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على الترتيب.

ا) - عين التطبيق الخطي f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ الذي يحقق:

$f(e_1) = 2v_2 + v_3$ ، $f(e_2) = v_2 - v_1$.

ب) - اثبت أن المجموعة: " $\mathrm{Im}(f)$ " هي مستوي شعاعي. أعط معادلة ديكارتية له.

- الحل:

ليكن $\{e_1, e_2\}$ و $\{v_1, v_2, v_3\}$ الأساسين القانونيين للفضائين الشعاعيين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على الترتيب.

ا) - تعيين التطبيق الخطي f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ الذي يحقق:

$f(e_1) = 2v_2 + v_3$ ، $f(e_2) = v_2 - v_1$:

$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3\ ;\ (x,y)\mapsto f(x,y) = (??, ??, ??)$.

لدينا أن:

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x,0)+(0,y) = x.(1,0)+y.(0,1)$$

$$= x.e_1 + y.e_2$$

وبما أن f تطبيق خطي فـان:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = f(x.e_1 + y.e_2) = x.f(e_1) + y.f(e_2)$$

$$= x.(2v_2 + v_3) + y.(v_2 - v_1).$$

$$= x.(0, +2, +1) + y.(-1, +1, 0) = (-y, 2x + y, x)$$

وبالتالي: التطبيق الخطي f من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ يكتب على الشكل:

$$.f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \; (x, y) \mapsto f(x, y) = (-y, 2x + y, x)$$

ب) - إثبات أن المجموعة: " $\mathrm{Im}(f)$ " هي مـسـتـوي شعاعي وإعـطـاء معادلة ديكارتية له:

$$\mathrm{Im}(f) = \{ \forall v \in F \; ; \; \exists u \in E \; ; \; f(u) = v \}$$

$$= \{ \forall (X, Y, Z) \in F = \mathbb{R}^3 \; \exists (x, y) \in E = \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (X, Y, Z) \} \subset F$$

- لدينا أن: $f(x, y) = (X, Y, Z) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad (-y, 2x + y, x) = (X, Y, Z)$$

$$\begin{cases} -y = X \; ....(1) \\ 2Z + -X = Y \; ....(2) \\ x = Z \; ....(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = X \; ....(1) \\ 2x + y = Y \; ......(2) \\ x = Z \; ....(3) \end{cases}.$$

و حسب المعادلة (2) نجد أن: $X + Y - 2Z = 0$.

و منه: $\mathrm{Im}(f) = \{ (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X + Y - 2Z = 0 \} \subset F$.

آو بشكل آخر: $\mathrm{Im}(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0 \} \subset F$ وهو عبارة عن " مـسـتـوي في $\mathbb{R}^3$ مـار من المبدأ $(0,0,0)$ " .

- تعيين أساس صورة التطبيق الخطي f : $\mathrm{Im}(f)$:

لذلك نبحث عن الأشعة الـمـولـدة لصورة التطبيق الخطي f : $\mathrm{Im}(f)$:

- نحاول الإثبات أن: صورة التطبيق الخطي f من F تكتب بطريقة وحـيـدة كـمـزج خـطـي في أشعة الجملة $\{v_1, v_2\}$ يطلب تعيينها:

$$f(x, y) = (-y, 2x + y, x) = (0, 2x, x) + (-y, y, 0) =$$

$$= x.(0, +2, +1) + y.(-1, +1, 0) = .$$

$$= \alpha.(0, +2, +1) + \beta.(-1, +1, 0)$$

- اي أن: $\mathrm{Im}(f) = < \{ v_1 = (0, +2, +1), v_2 = (-1, +1, 0) \} >$.

وبما أن الشعاعين: $v_1 = (0, +2, +1), v_2 = (-1, +1, 0)$ مـسـتـقـلـيـن خـطـيـا , فهما يـشـكـلان أسـاس لصورة التطبيق الخطي f : $\mathrm{Im}(f)$. أي أن:

$\mathrm{Im}(f) = < v_1 = (0, +2, +1), v_2 = (-1, +1, 0) >$. و بالتالي:

$\dim \mathrm{Im}(f) = +2$.

<u>**نتيجة 1**</u> **:** - نـلاحـظ أن:

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \subset F = \mathbb{R}^3 \\ et \\ +2 = \dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F = \dim \mathbb{R}^3 = +3 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(f) \neq F = \mathbb{R}^3 \; ...(**).$$

- و بما أن: $\mathrm{Im}(f) \neq F = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f$ لـيـس غـامــر على $\mathbb{R}^2$.

قائمة المراجع

1. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الألي ج1 المتتاليات و الدوال الوحيدة المتغير la cedraie " .2009.

2. أبوبكر خالد سعد الله " الرياضيات و الإعلام الألي ج2 التحليل، الإشتقاق و دساتير المتوسط تايلور la cedraie ". 2010.

3. بابا حامد بن حبيب " التحليل I" ديوان المطبوعات الجامعية. 2008.

4. علي حميدة و عبد الوهاب بيبي .الرياضيات في الجامعة .التحليل .الجزء الثاني و الجزء الثالث.2001. جامعة قسنطينة.

5. عبد الوهاب بيبي، .علي حميدة وفهيم لكحل .الرياضيات في الجامعة .الجبر .الجزء الأول.2001 . جامعة قسنطينة.

6. قادة علاب " عناصر من التحليل الرياضي التوابع لمتغير حقيقي واحد ". ديوان المطبوعات الجامعية. 1991.