République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ammar Thélidji - Laghouat
Faculté des Sciences

Département de mathématique et informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de licence

Domaine ; mathématique et informatique

Filière: mathématique

Spécialité : mathématique

Thème

Application de la transformation de Fourier pour la résolution des équations aux dérivées partielles

Proposé et Encadré par :
Mr. Boukhila Ahcene

Examinateur :
- Mr. Rahmoun Abdelaziz
- M. Abd Esslam Naoual

Présenté par :
-Nouari Amina
-Bouhennek Imene

Année Universitaire 2013/2014

Remerciements

Avant touts nous remercions le dieu le plus puissant

qui nous a donné la force,

la santé et la volonté pour terminer ce travail.

Nous représentons nos sincères remerciements à
notre encadreur *M Ahcene .Boukhila* qui nous à aidé et

bien dirigé pour orienter et réaliser ce travail,
ainsi nous tenons à remercier tous Les enseignants,
spécialement *M AbdelkaderMoukhtari* qui nous ont
dirigés et conseillés durant notre formation.

Un grand merci à toute notre promotion 2013/2014,
pour leur aide et leur soutien, ainsi que leurs
encouragements chaleureux et réconfortants .
En fin on remercier touts les personnes ayant contribué
de prés ou de loin à cette réalisation

Résumé.

Ce travail est consacré à l'application de l'analyse de Fourier pour la résolution de certains problèmes aux limites.
Pour les domaines finis cette application revient à l'application des séries de Fourier.
Pour les domaines infinis l'application consiste en l'utilisation des propriétés de la transformée de Fourier.
Les méthodes utilisées pour résoudre ces problèmes aux limites, dites méthodes de Fourier ou encore méthodes de séparation des variables, permettent de ramener la résolution des équations aux dérivées partielles à la résolution des équations différentielles ordinaires.

Sommaire

Introduction :

La Transformation de Fourier intervient dans la résolution d'équations et des systèmes différentielles. Aujourd'hui en électronique, cette transformation peut intervenir dans la théorie de la chaleur et au traitement du signal.

Si f est une fonction numérique réelle sur $\mathbb{R}$, sa transformée Fourier est la fonction , d'une variable réelle , définie par

$$\tilde{f}(\lambda) = F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-i\lambda x}\ \ dt$$

La résolution d'une équation différentielle $F(y, y', y", \dots) = 0$ consistera alors à savoir inverser la transformée Fourier de f.

Ce travail est composé , de trios chapitres. Le premier chapitre porte sur la mise en équation de certains phénomènes physiques :

propagation de la chaleur le long d'une tige, et propagation de la chaleur travers une plaque et un rappel sur les série de Fourier . Le deuxième chapitre porte sur la transformation de Fourier et transformation double. Le dernier chapitre est consacré aux applications de series de Fourier et la transformation de Fourier.

I. Mise en équation

Dans ce chapitre nous mettons en équation les différents phénomènes physiques abordés.
Les lois fondamentales de la physique sont essentielles et systématiquement utilisées.

I.1 Mise en équation de la propagation de la chaleur le long d'une tige

On considère une tige mince, homogène de longueur l isolée thermiquement de façon à négliger tout échange de chaleur avec le milieu environnant.
La tige est soumise initialement à une certaine température.
Selon les lois de la physique, notamment la loi de Fourier, la chaleur passe d'un point plus chaud vers un point moins chaud.
On se propose d'étudier la propagation de la chaleur le long de cette tige. La tige étant mince tous les points d'une section de la tige, en, point, sont alors à la même température.
Notons par $u(x,t)$la température du point x à l'instant t.

Définition

La quantité de chaleur par unité de temps et par unité d'aire est appelée densité de chaleur et sera notée par q.
Si s désigne l'aire de la section, le flux de chaleur moyen ΔQtraversant le point x dans un intervalle de temps est donné expérimentalement par la formule :
$\Delta Q = qs\Delta t$. D'autre part, $q = -k(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}$ où $k(x)$ est une caractéristique physique du matériau de la tige. Elle représente la conductibilité thermique.
Comme la tige est supposée être homogène $k(x)$est une constante
$k(x) = k$
Faisons tendre Δt et Δx vers 0. Alors$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \to \frac{\partial Q}{\partial t}$ et $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x}$. Par suite
$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dt = \int_{t_1}^{t_2} -ks\frac{\partial u}{\partial x} dt$.
D'où $Q = \int_{t_1}^{t_2} -ks\frac{\partial u}{\partial x} dt$.

Ceci représente la quantité de chaleur qui traverse le point x durant l'intervalle de temps $[t_1\ t_2]$.
Notons par ρla densité de masse de la tige et par $c$la densité spécifique de la chaleur.
La quantité de chaleur nécessaire pour faire augmenter la température de Δu est alors $\Delta Q = c\rho s\Delta x\Delta u$ avec $s\Delta x = v$ et $\rho v = m$ (v est le volume, et m désigne la masse). Donc $\Delta Q = cm\Delta u$. La quantité de chaleur traversant le segment $[x_1\ x_2]$ de la tige est alors $Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho s dx$.

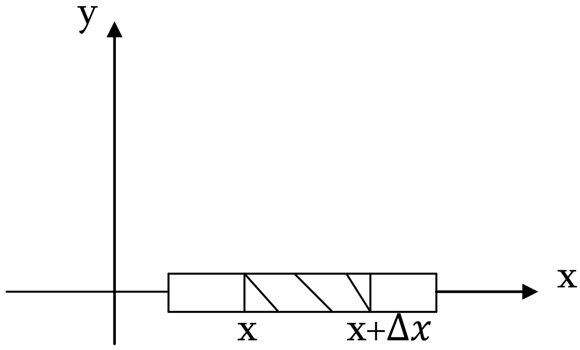


Fig. 1

Calculons la balance thermique sur le segment $[x_1\ x_2]$ durant l'intervalle de temps $[t_1\ t_2]$. D'après le principe de la conservation de l'énergie on a $I_1 = I_2$
avec

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)dt$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} c\rho(u(x, t_1) - u(x, t_2))dt$$

D'après la formule de la moyenne $I_1 = k(t_2 - t_1)\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau)\right\}$
Pour un, $\tau \in [t_1,\ t_2]$. De même $I_2 = c\rho(x_2 - x_1)\{u(\bar{x}, t_2) - u(\bar{x}, t_1)\}$où $\bar{x} \in [x_1,\ x_2]$.
Divisons les deux membres de l'égalité $I_1 = I_2$ par la quantité $(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)$.
On obtient alors

$$k\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)}{x_2-x_1}=c\rho\frac{u(\bar{x},t_2)-u(\bar{x},t_1)}{t_2-t_1}$$

Faisons tendre $x_2$vers $x_1$et $t_2$vers t_1 . Par conséquent $\bar{x}\to x_1$ et $\tau\to t_1$ on obtient alors l'équation $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1,t_1)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t_1)$

C'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $a^2=\frac{k}{c\rho}$. C'est l'équation qui gouverne le phénomène de la propagation de la chaleur le long de la tige.

Pour une tige infinie (mince et homogène) la même équation décrit la propagation de la chaleur le long de cette tige car, pour l'établir, nous n'avons pas utilisé la longueur totale de la tige. La propagation de la chaleur dans le plan (ou l'espace) ou dans le domaine borné du plan (ou de l'espace) est donnée par un raisonnement analogue.

I.2. Mise en équation de la propagation de la chaleur à travers une plaque

Considérons une plaque finie, mince et homogène. Notons par $u(x,t)$ la température du point (x,y) de la plaque (on suppose donné un système de repérage), à l'instant t.Désignons par k,σ,et μ la conductibilité thermique, la chaleur spécifique et la masse spécifique respectivement.

Soit Δs un élément de surface de la plaque. Le flux de chaleur entrant par le coté AB (voir fig.1) est égale à $-k\left.\frac{du}{dx}\right|_x$

La quantité totale de chaleur entrant par le coté AB, entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$, est égale à $-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \Delta y \Delta t$. De même la quantité de chaleur quittant la surface par le coté $A'B'$ est égale à $-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta t$.

La quantité de chaleur qui demeure dans l'élément de surface est donnée par la différence et est égale à $\left\{-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \Delta y \Delta t + k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta t\right\}$.

De la même manière, on peut montrer que la quantité de chaleur qui demeure dans l'élément de surface, dans la direction verticale,

est égale à

$$\left\{-k\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_y \Delta x \Delta t + k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta t\right\}.$$

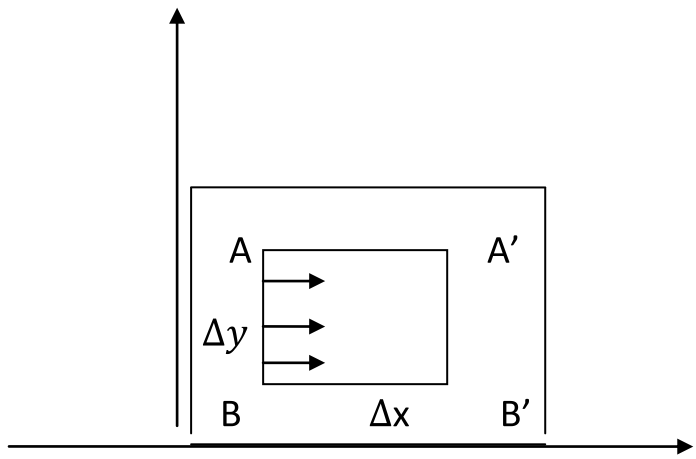


Fig.2

La quantité totale de chaleur reçue par l'élément est donc la somme des quantités précédentes. Elle sert à faire augmenter la température de l'élément de Δu.

Par ailleurs, la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter la température de l'élément, de masse m est de Δu vaut $m\sigma\Delta u = \mu\Delta x\Delta y\sigma\Delta u$.

Egalisons et divisons par $\Delta x\Delta y\Delta t$. On obtient alors

$$\frac{\left\{-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x + k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}\right\}}{\Delta x} + \frac{\left\{-k\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_y + k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y+\Delta y}\right\}}{\Delta y} = \sigma\mu\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Par passage à la limite pour $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0\ et\ \Delta t \to 0$

on obtient $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sigma\mu\frac{\partial u}{\partial t}$

C'est-à- dire, k, étant une constante, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\sigma\mu}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$, ou encore

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = a\frac{\partial u}{\partial t}$ avec $a = \frac{\sigma u}{k}$. Cette équation décrit donc la propagation de la chaleur à travers la plaque.

I. 3.Rappels

I.3.1. DEFINITION DES SERIES DE FOURIER

Soit f une fonction définie dans l'intervalle $(-L,L)$ et déterminée à l'extérieur de cet intervalle par $f(x+2L) = f(x)$,

C'est-à-dire que $f(x)$ présente une période $2L$.La série de Fourier

Ou le développement de Fourier, qui correspond à $f(x)$ est défini

Par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

où les coefficients de Fourier a_n et $b_n$sont

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ \\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases} \quad n=0,1,2\ldots \quad (2)$$

Les raisons de cette définition sont exposées dans le problème1. 4.

Puisque $f(x)$ est de période $2L$, les coefficients $a_n$et b_n peuvent également être définis par les expressions

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ \\ b_n=\frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases} \quad n=0,1,2\ldots \quad (3)$$

Où c est un nombre entier quelconque .Dans le cas particulier

où $c=-L$, l'expression (3) devient identique à l'expression (2).

Il faut également noter que le terme constant dans l'expression (1)

A pour valeur :$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$, qui est la moyenne de $f(x)$

Sur une période.

Si $L=\pi$, la série (1) et les coefficients (2) et(3) ont des expressions particulièrement simples. Dons ce cas la fonction a 2π pour période.

Il faut insister sur le fait que la série (1) est seulement la série qui

Correspond à $f(x)$. Nous ne savons rien sur sa convergence, et même si elle converge, nous ne savons pas si elle converge vers $f(x)$.

Ce problème de convergence a été étudié par le mathématicien DIRICHLET qui a établi les conditions de convergence des séries de Fourier, conditions que nous allons examiner dans le paragraphe suivant.

I.3.2. LES CONDITIONS DE DIRICHLET

Théorème1. Soit une fonction f supposée :

i. Définie et continue dans l'intervalle $(-L, L)$, à l'exception d'un nombre fini de points,
ii. Périodique de période $2L$,
iii. Telle que $f(x)$ et $f'(x)$ sont régulières par morceaux dans $(-L, L)$. Dans ces conditions la série (1), de coefficients(2)

et (3), converge vers :

a) $f(x)$ si x est un point de continuité,
b) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x est un point de discontinuité.

Il en résulte que nous pouvons écrire

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (4)$$

en tout point de continuité. Cependant, si x est un point de discontinuité, le membre de gauche est remplacé par

$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, de façon que la série converge vers la valeur moyenne de $f(x+0)$ et de $f(x-0)$.

Les conditions i, ii et iii imposées à $f(x)$ sont suffisantes, elles ne sont pas nécessaires, c'est-à-dire que si elles sont satisfaites la convergence est assurée .Si elles ne le sont pas, la série est ou n'est pas convergente.

Les conditions précédentes sont, en fait, généralement satisfaites dans les cas qui se présentent en physique et en ingénierie.

Nous ne connaissons pas, à présent, de conditions nécessaires et suffisantes de convergence des série de Fourier .Il est intéressant de noter que la continuité seule de $f(x)$ n'assure pas la convergence d'une série de Fourier.

I.3.3. SERIES DE FOURIER EN COSINUS OU EN SINUS

Un développement en série de Fourier en cosinus ou en sinus, est un développement où seuls sont présents, respectivement, les termes en cosinus ou en sinus. Quand on désire obtenir se genre de développement correspondant à une fonction donnée, celle-ci est généralement définie dans l'intervalle $(0, L)$ qui représente la moitié de l'intervalle $(-L, L)$ et la symétrie de la fonction, paire ou impaire, est alors spécifiée de façon à ce que l'autre moitié de l'intervalle, $(-L, 0)$, soit parfaitement définie .Nous avons dans ce cas :

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ Pour les développements en sinus} \\ \\ b_n = 0,\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ Pour les développements en cosinus} \end{array}\right. \tag{5}$$

I.3.4.L'IDENTITE DE PARSEVAL

L'identité de Parseval traduit le fait que :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{{a_2}^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) \tag{6}$$

Si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier correspondant à $f(x)$ satisfait aux conditions de Dirichlet.

I.3.5. CONVERGENCE UNIFORME

Soit une série infinie dont l'expression est $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Notons par $\mathrm{S_m(x)} = \sum_{n=1}^{m} \mathrm{u_n}\,(x)$ la somme partielle de cette série,

par définition, nous dirons que la série infinie converge vers $f(x)$ sur un intervalle donné si, étant donné un nombre positif quelconque ϵ,

Il existe pour chaque x appartenant à l'intervalle, un nombre positif N,

tel que :

$|S_R(x) - f(x)| < \epsilon$ Chaque fois que $R > N$ (8)

En générale le nombre N ne dépend pas seulement de ϵ mais aussi de x. Nous appellerons$f(x)$, la somme de la série.

Dans le cas particulier où N ne dépend que de ϵ (N est alors indépendant de la valeur de$x$), la série est dite converge uniformément, ou uniformément convergente vers$f(x)$.

Les deux théorèmes suivants résument deux propriétés importantes des séries uniformément convergentes.

Théorème 2 . Si chaque terme d'une série infinie est continu dans un intervalle (a, b)et si la série infinie est uniformément convergente vers la somme f, alors :

1. $f$est aussi continue dans l'intervalle,

2. La série peut être intégrée terme à terme,

c'est-à-dire

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n\,(x) dx \qquad (9)$$

Théorème Si chaque terme d'une série infinie possède une dérivée et si la série des dérivées est uniformément convergente, alors la sérés peut être dérivée terme à terme,

C'est-à-dire :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x) dx \quad . \qquad (10)$$

La convergence uniforme d'une série peut être établie de plusieurs manières. La plus évidente consiste à calculer directement la somme $S_m(x)$ et d'appliquer directement, en suite la définition. Une autre méthode, de loin la plus puissante, est d'utiliser le théorème M de Weierstrass :

Théorème 4 (***Le teste M de Weierstrass)***

S'il existe un ensemble de constantes M_n, $(n = 1,2, \dots,)$telles que pour tout x dans un intervalle, $|u_n(x)| \leq M_n$ et si, de plus,

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ est convergente, alors $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$ est uniformément convergente dans l'intervalle considéré. Dans ces conditions, et par ailleurs, la série est aussi absolument convergente, c'est-à-dire

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ (C.N).

Exemple.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ converge uniformément dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, (ou, en fait, dans tout intervalle), puisqu'on peut trouver un ensemble de constantes $M_{n=1/n^2}$ telles que

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ convergent}$$

I.3.6. INTEGRATION ET DERIVATION DES SERIE DE FOURIER

L'intégration et la dérivation des séries de Fourier peuvent être justifiées par application des théorèmes 3 et 4, qui sont valables pour toute série. Il faut insister sur le fait, que ces théorèmes conduisent à des conditions suffisantes mais non nécessaires. Le théorème suivent est particulièrement utile dans le cas de l'intégration :

Théorème 5 La série de Fourier correspondant à $f(x)$peut être intégrée terme de α à x, et la série résultante convergera uniformément vers$\int_{\alpha}^{x} f(u)du$, si $f(x)$est régulière par morceaux dans $-L \leq x \leq L$ et si $\alpha\ et\ x$ appartiennent à cet intervalle.

I.4. SERIER DE FOURIER DE DEUX VARIABLES

L'idée du développement en série de Fourier d'une fonction d'une variable peut être étendue au cas des fonctions de deux variables $xet\ \ y, c'est -$ à $-$dire $f(x, y)$.Nous pouvons, par exemple, développer $f(x, y)$ en une double série de Fourier en sinus :

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m_\pi x}{L1} \sin \frac{m_\pi y}{L2}$$

Où $$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L2} \int_0^{L1} \int_0^{L2} f(x, y) \sin \frac{m_\pi x}{L1} \sin \frac{m_\pi y}{L2} dx$$

II.Transformation de Fourier

Dans ce chapitre nous étudions les proprietiés fondamentales des transformées de Fourier.

II.*1. Transformée de Fourier.*

II.1.1. Cas classique.

Considérons une function f numérique réelle continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire qu'elle n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuités de première espèce sur tout intervalle fini et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ $i.e$ $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$.

La fonction $F(\lambda)$ suivante, définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x} dx$ est alors correctement définie car l'intégrale est absolument convergente.

Définition 1. La fonction $F(\lambda)$est appelée transformée de Fourier de la fonction $f(x)$. Elle est aussi note $\tilde{f}(\lambda)$ par fois.

Remarque. Il existe plusieurs variantes de la définition de la transformée de Fourier.

Proposition 1. La fonction $F(\lambda)$ est bornée, continue sur $\mathbb{R}$. De plus $F(\lambda)\to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$.

Preuve.

(i) La fonction $F(\lambda)$ est bornée car $|\, F(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ et la fonction $f(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $\lambda_0 \in\mathbb{R}$ quelconque . Considérons $F(\lambda_0 + h) - F(\lambda_0)$.

On a $F(\lambda_0 + h) - F(\lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(e^{-i(\lambda_0+h)x} - e^{-i(\lambda_0)x})dx.$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2i)(e^{-i(\lambda_0+\frac{h}{2})x}\sin\frac{hx}{2})dx$$

Par suite $F(\lambda_0 + h) - F(\lambda_0) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\left|\sin\frac{hx}{2}\right|dx.$

Ecrivons $\quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx.$

$$= \int_{-\infty}^{-R} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx + \int_{R}^{+\infty} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx + \int_{-R}^{+R} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx$$

On a:

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx \le \int_{-\infty}^{-R} |f(x)| dx$$

et
$$\int_{R}^{+\infty} |f(x)| dx \le \int_{R}^{+\infty} |f(x)| dx$$

$$\int_{-R}^{+R} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx \le \mathrm{R}\frac{h}{2} \int_{-R}^{+R} |f(x)| dx\ .$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente les intégrales $\int_{R}^{+\infty} |f(x)| dx\ et \int_{-\infty}^{-R} |f(x)| dx$ tendent vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. Quant à l'autre terme, comme $\int_{-R}^{+R} |f(x)| \left|\sin\frac{hx}{2}\right| dx \le \mathrm{R}\frac{h}{2} \int_{-R}^{+R} |f(x)| dx \le R\frac{h}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, il tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$, pour tout R. On voit donc que $I \rightarrow 0$ avec h , ce qui traduitla continuité de $F(\lambda)$.

(iii) Pour = n , on a

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-B} f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{+\infty} f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{A} f(x) e^{-inx} dx$$

Comme $\left|\int_{-\infty}^{-B} f(x) e^{-inx} dx\right| \le \int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx\ et\ f(x)$ est absolument intégrable alors le membre de gauche tend vers 0 quand $B \rightarrow +\infty$.

De la même manière $\int_{A}^{+\infty} f(x)\, e^{-inx} dx \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$.

Quant à l'intégrale $\int_{-B}^{A} f(x)e^{-inx}dx$, elle représente le coefficient c_{-n} de la série de Fourier de la fonction $f(x)$sur les egment$[-B, A]$.
Or ces coefficients tendent vers 0, d'après l'inégalité deBessel.
Pour λ quelconque , $|\lambda| \to +\infty$,
on a :

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-B} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{A}^{+\infty} e^{-i\lambda x}f(x)dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-B}^{A} e^{-i\lambda x}f(x)dx$$ et, comme

précédemment les deux premières integrals tendent vers 0 lorsque A et B tendent vers $+\infty$.
Prouvons donc que $\int_{-B}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx \to 0$ si $|\lambda| \to +\infty$.
Par hypothèse, $f(x)$ est continue par morceaux et ne présente donc qu'un nombre fini des points de discontinuités de première espèce sur $[-B, A]$. Soit $c_1, c_2, \ldots, c_m$. ces points, et donc en dehors de ces points est $f(x)$ continue sur $[-B, A]$. Par suite

$$\int_{-B}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-B}^{c_1} e^{-i\lambda x}f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_1} f(x)e^{-i\lambda x}dx + \cdots$$
$$+ \int_{c_m}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

.

Posons $c_0 = -B, c_{m+1} = A$, et $J = \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x)e^{-i\lambda x}dx$.

Montrons que$J \to 0$.
Notant que $f(x)$ est continue sur$]c_j, c_{j+1}[$divisons le segment$[c_j, c_{j+1}]$ en segments de longueur $\frac{2\pi}{\lambda}$ en posant$a_0 = c_j$, $a_1 = a_0 + \frac{2\pi}{\lambda}, a_2 = a_1 + \frac{2\pi}{\lambda}, \ldots, a_k = a_{k-1} + \frac{2\pi}{\lambda} = a_0 + k\frac{2\pi}{\lambda}$.

Le segment $[c_j, c_{j+1}]$ne contient qu'un nombre fini de points a_j , disons $p + 1$points. Par suite

$J == \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)e^{-i\lambda x}dx + \sum_{i=1}^{i=p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ $+\ldots+\int_{a_p}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx$. On notera que $f(a_0{}^{+})$ et $f(a_P{}^{-})$ existent.

Posons

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_0{}^{+}) & sur\ [a_0, a_1[\\ f(a_1) & sur\ [a_1, a_2[\\ f(a_{p-1}) & sur\ [a_{p-1}, a_P[\\ f(a_P{}^{-}) & sur\ [a_P, a_{P+1}[\end{cases}$$

On a alors, pour tout $x \in [-B, A]$
$|f(x) - \varphi(x)| \leq sup_{|x-x'| \leq \frac{2\pi}{\lambda}} |f(x) - f(x')|$
Par suite $\int_{a_j}^{a_{j+1}} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx = f(a_j) \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)e^{-i\lambda x}dx = 0$ car $\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)e^{-i\lambda x} = 0$.
D'où $\left|\int_{-B}^{A} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx\right| = \left|\int_{a_p}^{A} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \leq \int_{a_p}^{A} |f(a_p)| dx$

$$\leq \frac{2\pi}{\lambda} \sup_{|x-x'| \leq \frac{2\pi}{\lambda}} |f(x))|$$

car $A - a_p \leq \frac{2\pi}{\lambda}$. Donc $\int_{-B}^{A} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx \to 0$ si $|\lambda| \to +\infty$.
En écrivant $\int_{-B}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx$ sous la forme
$\int_{-B}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-B}^{A} (f(x) - \varphi(x))e^{-i\lambda x}dx + \int_{-B}^{A} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx$, en remarquant que $\int_{-B}^{A} |(f(x) - \varphi(x)| dx \leq (A + B)\, sup_{|x-x'| \leq \frac{2\pi}{\lambda}} |f(x) - f(x')|$, en se rappelant que la fonction $f(x)$ est continue sur $]c_j, c_{j+1}[$. et donc ce dernier terme tend vers 0 quand $|\lambda| \to +\infty$, on voit que $\int_{-B}^{A} f(x)e^{-i\lambda x}dx \to 0$ si $|\lambda| \to +\infty$.

Remarque. La demonstration faite montre, en fait, que la fonction$F(\lambda)$ est uniformément continue .

Proposition 2. Si, autre les hypotheses faites $f(x)$ sur la fonction est $xf(x)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $F(\lambda)$est dérivable et $F'(\lambda) = \frac{1}{i}F[xf(x)]$.

Remarque. En notant que la transformée de Fourir est une opération linéaire, la proposition 2 signifie que la transformée de Fourier transforme la multiplication par la variable x en $i\frac{d}{d\lambda}$.

Corollaire 1. Si $f(x), xf(x)$, $x^2f(x), \ldots, x^kf(x)$ sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ alors $F(\lambda)$ est dérivable jusqu'à l'ordre k et $i^mF^{(m)}(\lambda) = F[x^m\, f(x)]$, pour tout $m, m = 0,1, \ldots, k$

Preuve de la proposition 2. On se ramène au théorème de la dérivation sous le signe d'intégration en remarquant que

$\int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x)e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x)e^{-i\lambda x}dx$

est uniformément convergente en λ car la fonction à intégrer admet la fonction absolument intégrable $xf(x)$ comme fonction majorante.

Proposition 3. Soit f une fonction continue et lisse par morceaux, c'est-à-dire que sa dérivée est continue par morceaux.

On suppose $f$et f'absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

Alors $F[f'(x)] = (i\lambda)F[f(x)]]$.

Preuve. Comme $f(x)$ est une fonction continue et $f'(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Par suite, puisque$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\ dx$ converge absolument, $\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ existe c'est-à-dire que la limite suivante existe $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f'(x)dx$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) \equiv\ \alpha$ existe. Montrons que $\alpha = 0$. Comme$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge absolument alors, pour toute suite X_n qui tend vers $+\infty$la série de terme général

$\int_{X_n}^{X_{n+1}} f(x)\,dx$ est absolument convergente et donc son terme général $\int_{X_n}^{X_{n+1}} f(x)\,dx$ tend vers 0 $si\ n \to +\infty$. En particulier, en prenant $X_n = n$, on voit que $\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ tendvers 0 si $n \to +\infty$. Par consequent $\alpha = 0$ puisque $f(x) \to \alpha$. On prouve de la même manière que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.Une intégration par parties donne alors le résultat.

Corollaire 2. Si $f(x)$ et toutes ses derives jusqu'àl'ordre m sont absolument intégrables alors $F[f^k(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)], \forall k, k = 0,1, \dots, m$.

Remarque. Sous les hypothèses précédentes on a

$F[f^{(k)}(x)] = (i\lambda)^k F[f(x)]$] et donc $|F[f(x)]|= \left|\frac{F[f^k(x)]}{(i\lambda)^k}\right| \leq \frac{C}{|\lambda|^k}$ car $F[g(x)]$ est bornée (prop.1).

Par conséquent $F(\lambda)$ tend vers 0, à l'infini, plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|\lambda|}$.

Passons à la formule d'inversion de la transformée de Fourier. Soit $f(x)$ une fonction continue par morceaux et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

Définition. On dit que la fonction f vérifie la condition de Dini au point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que$\int_{|t|\leq\delta} \left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}\right| dt < +\infty$.

On a alors le résultat suivant pour les fonctions vérifie la condition de Dini.

Théorème 1. Soit f une fonction continue par morceaux et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition de Dini en x_0. Alors

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x_0}\,d\lambda = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to+\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{+A} F(\lambda) e^{i\lambda x_0}\,d\lambda.$$

Preuve. Posons $f_{A,B}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^{+A} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda(x_0-x)} dx$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda(x_0-x)} dx$ converge uniformément et absolument par rapport à λ car $\left|f(x)e^{i\lambda(x_0-x)}\right| \leq |f(x)|$ et $f(x)$ est absolument intégrable. On peut donc intervertir l'ordre d'intégration

$$f_{A,B}(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-B}^{+A} f(x) e^{i\lambda(x_0-x)} d\lambda \,.$$

Comme on a $\int_{-B}^{+A} e^{i\lambda(x_0-x)} d\lambda = \frac{1}{i(x_0-x)}\left[e^{iA(x_0-x)} - e^{-iB(x_0-x)}\right]$ alors,

par changement de variable $(t = x - x_0)$, on obtient la relation

suivante :

$$f_{A,B}(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t} dt.$$

D'autre part, comme on peut le vérifier facilement

$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t} dt = 1$, et donc

$$f_{A,B}(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t) - f(x_0)\frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t} dt.$$

Montrons que $f_{A,B}(x_0) \to f(x_0)$ lorsque $A et\ B$ tendent vers $+\infty$.

Décomposons l'intégral comme suit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t) - f(x_0)\frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t} dt = \left\{\int_{-\infty}^{-T} + \int_{-T}^{T} + \int_{T}^{+\infty}\right\} f(x_0+t) - f(x_0)\frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t} dt, \text{ où } T \geq 1.$$

Comme la fonction $f(x_0+t)$ est absolument intégrable et

$\left|\frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t}\right| \leq \frac{2}{|t|} \leq \frac{2}{T} \leq 2$ et dès que $|t| \geq T$ alors, si $T \to +\infty$, la première et la dernière intégrales tendent vers 0 : Dans chacune de deux expressions $\left\{\int_{-\infty}^{-T} + \int_{-T}^{T} + \int_{T}^{+\infty}\right\} f(x_0+t)\frac{\left[e^{iBt} - e^{-iAt}\right]}{t} dt$

et $\left\{\int_{-\infty}^{-T} + \int_{-T}^{T} + \int_{T}^{+\infty}\right\} f(x_0)\frac{[e^{iBt}-e^{-iAt}]}{t}\, dt$ la première et la dernière intégrales tendent vers 0 quand $T \to +\infty \forall A\,, B$. Le dernier terme $\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}(f(x_0+t)-f(x_0))\frac{[e^{iBt}-e^{-iAt}]}{t} dt$ s'écrit sous la forme $\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T} \varphi(t)\,(e^{iBt}-e^{-iAt})dt$ ou $\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ est absolument intégrable car la fonction $f(x)$ vérifie la condition de Dini au point x_0 Cette dernière intégrable est la somme de deux intégrales de type $\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T} \varphi(t)\, e^{ivt} dt$ qui, au coefficient près, représente le coefficient c_v

de la série de Fourier sous forme complexe de la fonction $\varphi(t)$.

On sait que $c_v \to 0$ quand $v \to \pm\infty$.

Par conséquent, on a bien le résultat voulu : $f_{A,B}(x_0) \to f(x_0)$

II .1.2. Convolution et transformée de Fourier.

Soient deux fonctions numériques $f(x)$ et $g(x)$.

Définition. La fonction h définie par $h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x)dx$, Lorsqu'elle existe, est appelée convolution de f et g.

On note $h(y) = f(y) * g(y)$.

Théorème 2. Si les fonctions f et g sont continués, bornées, et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors leur convolution h existe. De plus cette convolution est continue, bornée, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$.

Preuve. On a $|g(x-y)| \leq c$ et donc $|f(y)g(x-y)| \leq c|f(y)|$. Par conséquent l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x)dx$ converge uniformément par rapport à y. Par suite $h(y)$existe et $|h(y)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x)dx\right| \leq c\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|dy$ c'est-à-dire que $h(y)$ est bornée. Elle est aussi continue car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y-x)dx$ converge uniformément et la

fonction $f(x)g(y-x)$ est continue du couple (x,y) sur tout rectangle $[a,b]\times[c,d]$.
Par suite, on peut aussi intégrer et changer l'ordre des intégrations :
$\int_{-\alpha}^{\alpha} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||g(x-y)|dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\propto}^{+\propto} |f(y)||g(x-y)|dx$.
Comme $|h(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x-y)|dy$ alors
$\int_{-\propto}^{+\propto} |h(x)|dx \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||g(x-y)|dy$. D'où
$\int_{-\propto}^{+\propto} |h(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\propto}^{+\propto} |f(y)||g(x-y)|dx$ c'est-à-dire
$\int_{-\propto}^{+\propto} |h(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|dy \int_{-\propto-y}^{+\propto-y} |g(t)|dt \leq$
$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|dy \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt$.
Par conséquent $\lim_{\propto\to+\infty} \int_{-\propto}^{+\propto} |h(x)|\, dx$ existe. La fonction h est donc absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour les mêmes raisons

$\int_{-\propto}^{+\propto} h(x)dx = \int_{-\propto}^{+\propto} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy\, dx =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\propto-y}^{+\propto-y} g(t)dtdy =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dtdy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{|t+y|>\propto} g(t)dtdy.$
On peut montrer que cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque $\propto\to +\infty$.
Par conséquent on a $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$.

II.2 .Transformation de Fourier d'une fonction radiale `a deux dimensions

On a:

$$f(k) = \int_{R^2} f(r)e^{-ik.r}dr\,.$$

En utilisant dans le plan des coordonn´ees polaires r et θ d´efinies en prenant comme axe polaire la direction du vecteur k, on a :

$\mathrm{f(k)} = \int_0^{\infty} \mathrm{dr\, r\, f(r)} \int_0^{2\pi} \mathrm{d(\theta)e^{-ikr\cos\theta}}$.

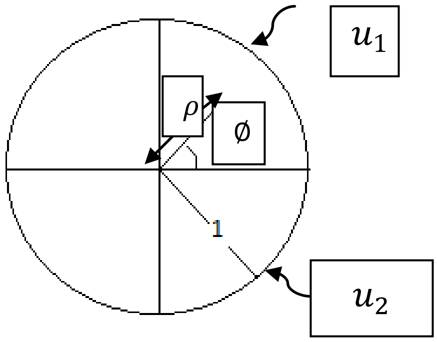
La fonction F(k) ne d´epend en rèalit´e que du module k de k. C'est donc aussi une fonction radiale. En utilisant la repr´esentation int´egrale de la fonction de Bessel d'ordre zéro[3] $J_0(x)$ on obtient le résultat suivant :

$$f(k) = 2\pi \int_0^{\infty} r j_0(kr) f(r) dr$$

III. Application de la propagation de la chaleur

III.1. Cas d'une plaque circulaire

Une plaque circulaire de rayon unité et dont les faces sont isolées est placée dans une situation tell qu'une de ses moitiés est maintenue à la température constante u_1 et l'autre à la température constante u_2 .



Trouver la température d'état stationnaire de cette plaque.

En coordonnées polaires$(\rho, \emptyset)$, l'équation aux dérivées partielles représentant la propagation de la chaleur dans l'état stationnaire est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \emptyset^2} = 0 \qquad (1)$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1, \emptyset) = \begin{cases} u_1 & 0 < \emptyset < \pi \\ u_2 & \pi < \emptyset < 2\pi \end{cases} \qquad (2)$$

$|u(\rho, \emptyset)| < M$, C'est-à-dire u est limité dans la région (3)

Posons$u(\rho, \emptyset) = p\phi$, où p n'est fonction que de ρ, et ϕ une fonction de $\emptyset$ seulement .Il vient alors

$$P''\phi + \frac{1}{\rho}P'\phi + \frac{1}{\rho^2}P\phi'' = 0$$

En divisant par$P\phi$, multipliant par ρ^2et en réarrangeant les termes,

$$\frac{\rho^2 P''}{P}+\frac{\rho P'}{P}=-\frac{\phi''}{\phi}$$

En posant chaque membre égal à λ^2

$$\phi''+\lambda^2\phi=0 \qquad\qquad \rho^2 P''+\rho P'-\lambda^2 P=0 \qquad\qquad (4)$$

La première équation de(4) a pour solution générale

$$\phi=A_1\cos\lambda\emptyset+B_1\sin\lambda\emptyset$$

La deuxième équation de (4) est une équation d'Euler ou de Cauchy. En posant $P=\rho^K$ il vient $K=\pm\lambda$, $\rho^\lambda\, et \rho^{-\lambda}$ sont solutions. D'où la solution générale

$$P=A_{2\rho^\lambda}+B_{2\rho^{-\lambda}}$$

Puisque $u(\rho,\emptyset)$ doit avoir une période 2π en $\emptyset$, nous devons avoir $\lambda=m=1,2,3,\ldots$

Et puisque u doit être borné à $\rho=0, B_2=0$, d'où

$$u=P\phi=A_{2\rho^m}(A_1\cos m\emptyset+B_1\sin m\emptyset)=\rho^m(A\cos m\emptyset+B\sin m\emptyset)$$

Et par superposition

$$u(\rho,\emptyset)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\emptyset+B_m\sin m\emptyset)$$

$$u(1,\emptyset)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\ (A_m\cos m\emptyset+B_m\sin m\emptyset)$$

est une solution.

Dans ces conditions d'après la théorie

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\emptyset)\cos m\emptyset \, d\emptyset$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{u}_1 \cos m\emptyset d\emptyset$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} u_2 \cos m\emptyset d\emptyset = \begin{cases} 0 & si\ m > 0 \\ u_1 + u_2 & si\ m = 0 \end{cases}$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\emptyset)\sin m\emptyset d\emptyset$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{u}_1 \sin m\emptyset d\emptyset + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} u_2 \sin m\emptyset d\emptyset = \frac{(u_1 - u_2)}{m\pi}(1 - \cos m\pi)$$

D'où :

$$u(\rho,\emptyset) = \frac{(u_1 + u_2)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u_1 - u_2)(1 - \cos m\pi)}{m\pi} \rho^m \sin m\emptyset$$

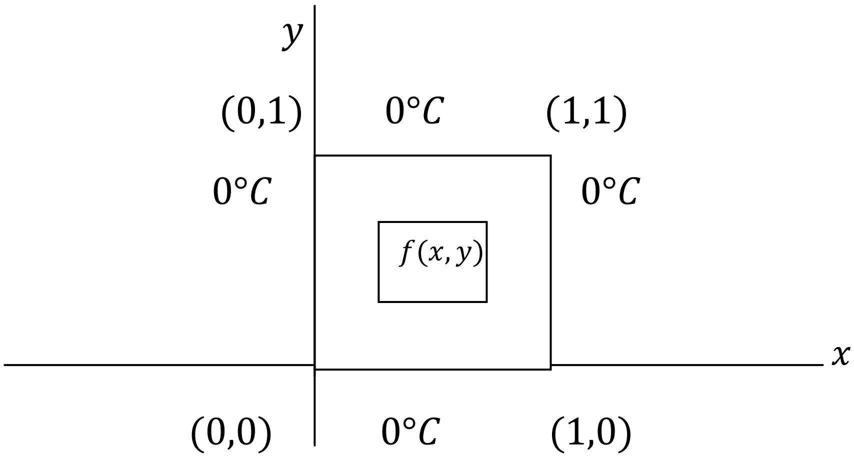
$$= \frac{(u_1 + u_2)}{2} + \frac{2(u_1 - u_2)}{\pi}\left(\rho \sin\emptyset + \frac{1}{3}\rho^3 \sin 3\emptyset + \frac{1}{5}\rho^5 \sin 5\emptyset + \cdots\right)$$

$$= \frac{(u_1 + u_2)}{2} + \frac{u_1 - u_2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2\rho\sin\emptyset}{1 - \rho^2}\right)$$

III.2. Cas d'une plaque carrée

Soit une plaque carrée dont les côté ont la longueur unité. Les faces de cette plaque sont isolées et ses côté sont maintenus à $0\,℃$.

Si sa température initiale est spécifiée, déterminer l'évolution de la température en tout point de cette plaque.



Choisissons un système de coordonnées comme celui de la Fig.

L'équation qui donne la température $u(x, y, t)$ en un point (x, y)au tempst t est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) (1)$$

Les conditions aux limites sont :

$$|u(x, y, t)| < M$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 1, t) = 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

Où $\quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, t > 0.$

Pour résoudre le problème posons $u = XYT$, Où $X, Y et\ T$ sont des fonctions de $x, y\ et\ t$, respectivement.(1) devient alors :

$$XYT' = \kappa(X''YT + XY''T)$$

La division par πXYT donne

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

Le membre de gauche est une fonction de t seulement, tandis que le membre de droite n'est fonction que de $x et\ y$.

Chacun de cas membres doit donc être constant, disons$-\lambda^2$.

D'où $\quad T' + \kappa\lambda^2 T = 0 \qquad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \qquad$ (2)

La deuxième équation peut s'écrire

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2$$

De nouveau, et pour des raisons analogues, chacun des membres doit être constant, disons$= -\mu^2$.

D'où $\quad X'' + \mu^2 X = 0 \qquad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0 \qquad$ (3)

Les solutions des deux équations (3) et de la première équation (2)

S'expriment par $\quad X = a_1 \cos \mu x \ + b_1 \sin \mu x$

$$Y = a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y, \quad T = a_3 e^{-\kappa\lambda^2 t}$$

Il en résulte qu'une solution pour (1) est

$$u(x,y,t) = (a_1 \cos \mu x + b_{1 \sin \mu x})\left(a_2 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y + b_2 \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y\right)(a_3 e^{-\kappa\lambda^2 t})$$

D'après la condition aux limites $u(0,y,t) = 0$, il vient $a_1 = 0$.

De $u(x,0,t) = 0$, il vient $a_2 = 0$, et la solution satisfaisant ces deux conditions est

$$u(x,y,t) = Be^{-\kappa\lambda^2 t} \sin \mu x \ \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y$$

Où nous avons posé $B = b_1 b_2 a_3$.

D'après la condition aux limites $u(1,y,t) = 0, \mu = m\pi, m = 1, 2, 3, \ldots$et d'après $u(x,1,t) = 0$,

$\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = n\pi, n = 1,2,3, \ldots$, Or $\lambda = \sqrt{m^2 + n^2}\pi$.

Dans ces conditions

$$u(x,y,t) = Be^{-\kappa(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin m\pi x \ \sin n\pi y$$

est une solution qui satisfait à toutes les conditions exceptée $u(x,y,0) = f(x,y)$.

Maintenant par superposition nous pouvons arriver à une solution possible

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} e^{-\kappa(m^2+n^2)\pi^2 t} \sin m\pi x \ \sin n\pi y \qquad (4)$$

En posant $t = 0$, et en utilisant la condition $u(x,y,0) = f(x,y)$, il vient

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi x \ \sin n\pi y$$

Et, $$B_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin m\pi x \sin n\pi y \, dxdy \qquad (5)$$

La solution formelle de notre problème est alors donnée par(4) où les B_{mn} sont déterminées par (5).

III .3 Cas d'une tige fini

Nous examinons les deux problèmes, fondamentalement différents, suivants :

1. Etude de la propagation de la chaleur le long d'une tige finie, sans perte de chaleur. Les extrémités de la tige sont maintenues à une température nulle. La température initiale est une fonction donnée du point de la tige. Il s'agit du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty, \\ U(0,t) = u(l,t) = 0 \quad 0 < t < +\infty, \\ U(x,0) = f(x) \qquad\qquad 0 < x < l \end{cases}$$

Cas particulier où $f(x) = u_{0,}$ est constante.

2. Etude de la propagation de la chaleur le long d'une tige fine, sans perte de chaleur. Les extrémités de la tige sont thermiquement isolées. La température initiale est une fonction donnée du point de la tige. Il s'agit du problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = f(x) \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

Nous résolvons, en détails, le problème 1 et indiquons la solution du problème 2 et comment la trouver.

Utilisons la méthode de Fourier et cherchons une solution $u(x,t)$sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$.

L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s'écrit alors $XT' = a^2 TX''$.

D'où $\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T}$.

Le membre de gauche est une fonction de$x$ seulement tandis que celui de droite ne dépend que de t. Par conséquent chacun d'eux est une constante c : $\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = c$.

On a donc $\frac{X''}{X} = c$ ou encore $X'' = cX$ dont l'équation caractéristique s'écrit $r^2 - c = 0$.

Si $c > 0$l'équation caractéristique admet les racines $\pm\sqrt{c}$ et la solution $X(x)$est donnée sous la forme $X(x) = a_1 e^{\sqrt{c}x} + a_2 e^{-\sqrt{c}x}$. L'équation $\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = c$ donne $T(t) = ke^{a^2 ct}$.

Par conséquent $u(x,t) = ke^{a^2 ct}\left[a_1 e^{\sqrt{c}x} + a_2 e^{-\sqrt{c}x}\right]$.

La constante k est, évidemment, non nulle sinon $T(t)$est identiquement nulle, et par suite, $u(x,t)$est aussi identiquement nulle ce qui est exclu et contredit la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. Par suite, les conditions au bord $u(0,t) = u(l,t) = 0$ s'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} ke^{a^2 ct}[a_1 + a_2] = 0 \\ ke^{a^2 ct}\left[a_1 e^{\sqrt{c}l} + a_2 e^{-\sqrt{c}l}\right] = 0 \end{cases}$$

Donnent lien au système

$$\begin{cases} [a_1 + a_2] = 0 \\ \left[a_1 e^{\sqrt{cl}} + a_2 e^{-\sqrt{cl}}\right] = 0. \end{cases}$$

Qui se réduit alors à l'équation $a_1\left[e^{\sqrt{cl}} + e^{-\sqrt{cl}}\right] = 0.$

Par conséquent $a_1 = a_2 = 0$ et donc $u(x,t)$ est aussi identiquement nulle ! Le cas $c > 0$ ne peut avoir lieu, et donc $c \leq 0$.

Posons alors $c = \lambda^2$.

L'équation caractéristique s'écrit donc solution s'écrit donc $r^2 + \lambda^2 = 0$ et admet $\pm\lambda i$ comme racines.

La solution $X(x)$s'écrit alors sous la forme $X(x) = a_1 \cos \lambda x + a_2 \sin \lambda x$, et $T(t)$ sous la forme $T(t) = ke^{-\lambda^2 a^2 t}$.Trouvons les différentes constantes à partir des données. Les conditions $u(0,t) = u(l,t) = 0$ se traduisent en $X(0) = X(l) = 0$ et donnent lieu au système suivant :

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_1 \cos \lambda l + a_2 \sin \lambda l = 0 \end{cases}$$

qui se réduit à l'équation$a_2 \sin \lambda l = 0$. Comme nécessairement

$a_2 \neq 0$ alors $\sin \lambda l = 0$. Par conséquent $\lambda l = k\pi$, où$k \in \mathbb{Z}$. La condition initiale s'exprime par $T(0) = f(x) = k$. On a donc des solutions$u_k(x,t)$sous la forme $u_k(x,t) = b_k \left\{exp\left(-k^2 \frac{\pi^2}{l^2} a^2\right) t\right\} sin \frac{k\pi x}{l}$ (ici on a posé $b_k = ka_2$). La somme de solutions du problème 1 étant encore une solution trouvons, conformément au principe de superposition, la solution $u(x,t)$

sous la forme

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\left\{exp\left(-k^2\frac{\pi^2}{l^2}a^2\right)t\right\}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

La condition initiale $u(x,0)=f(x)$ se traduit par

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Ceci exprime que $f(x)$ se décompose en série de Fourier sinus sur $[0,l]$ et donc

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Conséquences

i. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\left\{exp\left(-k^2\frac{\pi^2}{l^2}a^2\right)t\right\}\sin\frac{k\pi x}{l}$ est convergente uniformément et absolument car $b_k\to 0$ et la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{exp\left(-k^2\frac{\pi^2}{l^2}a^2\right)t\right\}$ converge et représente une série majorante pour la série précédente.

ii. On peut vérifier que la série peut être dérivée terme à terme car les séries obtenues par dérivation formelle convergent aussi uniformément et absolument.

iii. Montrons que $u(x,t)\to f(x)$ quand $t\to 0^+$. La somme partielle de la série $S_N(x,t)$ est continue et converge uniformément vers $u(x,t)$. Par conséquent $u(x,t)\to u(x,t_0)$ quand $t\to t_0$.
En particulier pour $t_0=0$, on voit que $u(x,t)\to f(x)$ c'est-à-dire que $u(x,0)=f(x)$.

En conclusion la solution du problème 1 est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \left\{ exp\left(-k^2 \frac{\pi^2}{l^2} a^2\right) t \right\} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Où les b_k représentent les coefficients de Fourier sinus, sur les segment $[0, l]$, de la fonction donnée$f(x)$.

Pour le deuxième problème on suit la même démarche : Si $c > 0$ alors

$X(x) = a_1 e^{\sqrt{c}x} + a_2 e^{-\sqrt{c}x}$, $T(t) = ke^{a^2 ct}$, et comme précédemment,

$$u(x,t) = ke^{a^2 ct}\left[a_1 e^{\sqrt{c}x} + a_2 e^{-\sqrt{c}x}\right].$$

Par suite $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = X'T$.

Les conditions au bord $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$ S'écrivent

$X'(0) = X'(l) = 0$ et donnent lieu au système suivant :

$$\begin{cases} a_1\sqrt{c} - a_2\sqrt{c} = 0 \\ a_1\sqrt{c}e^{\sqrt{c}l} - a_2\sqrt{c}e^{-\sqrt{c}l} = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $a_1 = a_2$. Si $a_1 = 0\ alors\ a_2 = 0$ et par

Conséquent $u(x,t)$est identiquement nulle car $X(x)$ s'annule identiquement. Ce cas est exclu. Si $a_1 \neq 0$, la seconde équation donne $2\sqrt{c}l = 0$, ce qui aussi exclu. Donc $c = -\lambda^2 \leq 0$. Par suite

$X(x) = a_1 \cos \lambda x + a_2 \sin \lambda x$, et $T(t) = ke^{-\lambda^2 a^2 t}$.

Trouvons les différentes constantes à partir des équations

$X'(0) = X'(l) = 0$. De la première $X'(0) = 0$, on obtient $a_2 = 0$ et

Donc $X(x) = a_1 \cos \lambda x$.

La seconde équation $X'(l) = 0$ permet alors de calculer a_1 :on trouve $\lambda l = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.Par conséquent $X(x) = a_1 cos\frac{k\pi x}{l}$et

$T(t) = k\left\{\exp\left(-k^2\frac{\pi^2}{l^2}a^2\right)t\right\}$.

On a donc des solutions $u_k(x,t)$ sous la forme $u_k(x,t) = a_k\left\{exp\left(-k^2\frac{\pi^2}{l^2}a^2\right)t\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}$(en posant $a_k = ka_1$). On continue, comme précédemment, pour aboutir à la conclusion suivante : La solution du problème 2 est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\left\{exp\left(-k^2\frac{\pi^2}{l^2}a^2\right)t\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}$$

Où les a_k représentent les coefficients de Fourier cosinus, sur le segment $[0,l]$, de la fonction donnée $f(x)$ c'est-à-dire

$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \ (k = 0,1,2,\dots)$.

IV. Cas d'une tige infinie

La propagation de la chaleur le long d'une tige infinie est modélisée par le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \qquad 0 \leq t < +\infty, \\ U(x,0) = u_0(x) \quad donnèe\ en\ tout\ \ x\,. \end{cases}$$

On suppose que pour tout $t \geq 0$,

1. les fonctions $U(x,t), \frac{\partial u}{\partial x}, et \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sont continues et absolument intégrables, comme fonctions de x, sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$.
2. $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ admet une fonction majorante intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$: $\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \leq \varphi(x)$avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$.

Désignons par $V(\lambda,t) et\ V_0(\lambda)$ les transformées de Fourier de $u(x,t)$et de $u_0(x)$respectivement. Appliquons la transformation de Fourier aux deux membres de l'équation aux dérivées partielles. On obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-i\lambda x}\, dx = F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

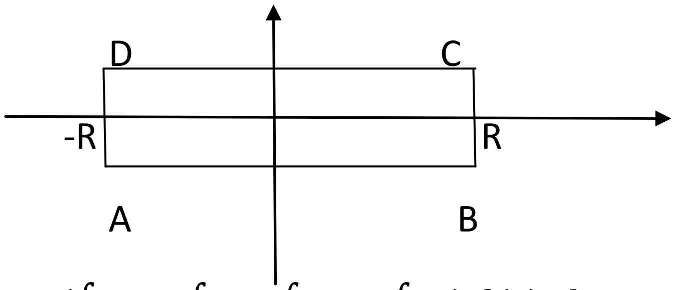
Notons d'abord que l'intégrale converge uniformément en λ, d'après la condition 2, et que $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-i\lambda x}$ est une fonction continue du couple (x,t) sur tout rectangle. Par conséquent on peut faire sortir $\frac{\partial}{\partial t}$. On obtient donc $\frac{\partial V(\lambda,t)}{\partial t} = F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$. En utilisant les deux propositions précédentes on voit que le problème initial devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(\lambda,t)}{\partial t} = -\lambda^2 V(\lambda,t) \\ V(\lambda,0) = V_0(\lambda). \end{cases}$$

qui admet pour solution la fonction $V(\lambda,t) = V_0(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$. Ainsi $V(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[u_0(x) * f(x,t)]$ avec $[f(x,t)] = e^{-\lambda^2 t}$. Trouvons donc la fonction $f(x,t)$. Comme conséquence on aura
$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_0(x) * f(x,t)$.

Lemme. Soit $a > 0$. Alors $F\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$.

Preuve. On a $F\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x} dx$ .Considérons
$I = \oint_{C^+} e^{-az^2} e^{-i\lambda z} dz$ où C^+est le contour $ABCD, z = x + iy$ (voir fig.)



On a $0 = I = (\oint_{AB} + \oint_{BC} + \oint_{CD} + \oint_{DA}) f(z)\, dz$ avec

$f(z) = e^{-az^2} e^{-i\lambda z}$. Sur BC $z = R + iy$ et donc, par un calcul direct, on obtient $|f(z)| = e^{-a(z^2-y^2)} e^{\lambda y} = e^{ay^2} e^{\lambda y} e^{-aR^2}$.

Par suite $\left|\oint_{BC} f(Z) dz\right| \leq \int_{y_1}^{y_2} e^{ay^2} e^{\lambda y} e^{-aR^2} dy$, et donc $\oint_{BC} f(z) dz \to 0$ quand $R \to +\infty$. De même $\oint_{DA} f(Z) dz \to 0$ quand $R \to +\infty$.

Par conséquent $\oint_{AB} f(z) dz = \oint_{DC} f(Z) dz$, et donc en faisant $R \to +\infty$ on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + iy_1) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + iy_2) dx$ (y_1, y_2désignent respectivement les ordonnées des points $B et\ C$) c'est-à-dire qu'on peut intégrer de $-\infty$ à $+\infty$ le long de toute droite parallèle à l'axe des abscisses. En particulier, en prenant $y_1 = y$ quelconque et $y_2 = 0$ on obtient

$$F\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + iy) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ay^2 + \lambda y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ix(2ay+\lambda)} dx\ .$$

Prenons, en particulier, y tel que $2ay + \lambda = 0$ i.e. $y = -\frac{\lambda}{2a}$.

Donc $y^2 = \frac{\lambda^2}{4a}, ay^2 + \lambda y = -\frac{\lambda^2}{4a}$. On obtient ainsi

$F\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$. posons $x\sqrt{a} = t$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$ .Par conséquent

$$F\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}\ .$$

En prenant $t = \frac{1}{4a}$ on obtient :

Corollaire. On a

$$F\left[e^{-\frac{x^2}{4t}}\right] = \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\sqrt{\frac{1}{2t}}}.$$

On voit donc que $f(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2t}}$. .

En conclusion, la solution $u(x,t)$ est donnée, sous forme d'intégrale appelée intégrale de Poisson, par la formule suivante :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} u_0(x-y)dy\,.$$

Remarque. Nous avons utilisé la formule bien connue

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Voici une démonstration assez brève. Soit Δ le carré centré à l'origine d'arête $2R, D_1, D_2$, les disques centrés à l'origine et de rayons R et $R\sqrt{2}$ respectivement. Les inégalités suivantes sont triviales :

$$\int\int_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{\Delta} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

Le passage en coordonnées polaires donne immédiatement

$\int\int_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi(1-e^{-R^2}), \int\int_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi(1-e^{-2R^2})$.
Un calcul simple et direct montre
que$\int\int_{\Delta} e^{-x^2-y^2} dxdy = (\int_{-R}^{+R} e^{-t^2} dt\,)^2$.

Il suffit de passer à la limite lorsque $R \to +\infty$.

Conclusion

En conclusion, résumons les different résultats de ce travail :

1. Comme application des séries de Fourier, nous avons résolu le probleme de la propagation de la chaleur le long d'une tige finie, sans perte de chaleur. Les extrémités de la tige étant à temperature constante .
2. Comme application des séries de Fourier, nous avons résolu le probleme de la propagation de la chaleur à travers une plaque.
3. Nous avons étudié les propriétés des transformées de Fourier .
4. Enfin Comme application des transformées de Fourier, nous avons résolu le problème de la propagation de la chaleur à travers une tige infinie.

.

Bibliographie

1.Komogorov A.Fomine S . Eléments de la théorie des fonctions et de l 'analyse fonctionnelle . Edition Mir . Moscou (seconde èdition) 1977.

2.Chilov G. Analyse mathématique . Fonctions d’une variable. Vol.3 Edition Mir . Moscou .

3.Murray R . Spiegel . Analyse de fourier . Série Schaum . Mc Grawhill. Paris .1980.