الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيـــــةالـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques etInformatique
Filière: Mathématiques
Option: AnalyseMathématique

Par:
MELIK Khedidja

THEME

Feuilletage et Théorème de Frobenius

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. Y. Belabassi	*M.C.A*	*Président*
Mr. I. Ismail	*M.C.B*	*Examinateur*
Mr. A. Belacel	*M.C.A*	*Examinateur*
M. Y. Boukhatem	*M.C.A*	*Encadreur*

Année Universitaire 2017/2018

Remerciements

*En premier lieu, mes remerciements s'adressent à **ALLAH** le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Madame **Boukhatem Yamna** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

*Un remerciement particulier va aux Mr. **Rahmoune Abdelaziz** .*

*Un très grand merci aux professeurs : **Y. Belabassi**, **A. Belacel**, et **I. Ismail** qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, .

A mes chères sœurs (Mebarka,Saida,Rebiha,Ryme) pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A mes chers frères(Lakhdar ,Khaled) pour leur appui et leur encouragement.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis...

الملخص

تعطي نظرية فروبينيوس شرطًا ضروريًا وكافيا للتكامل المحلي لنظام معادلات تفاضلية جزئية من الدرجة الأولى التي يعتمد جانبها الأيمن على المتغيرات المجهولة، ولكنها لا تعتمد على المشتقات الجزئية لهذه المجهولات. هذه النظرية تؤدي إلى النظر في "المنوعات التكاملية " التي تتطلب مفهوم التورق.
ولمعالجتها نقدم أولاً تذكيرًا بالتعريفات الأساسية من الهندسة التفاضلية .ثم نناقش مفهوم التوزيع لمنوعة مورقة وخصائصها، ثم نعطي البرهان لنظرية فروبينيوس.

الكلمات المفتاحية: نظرية فروبينيوس، المنوعات التكاملية، التورق، التوزيع.

Résumé :

Le théorème de Frobenius donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité locale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dont le membre de droite dépend des variables, des inconnues, mais ne dépend pas de dérivées partielles de ces inconnues. Ce théorème conduit à considérer les « variétés intégrales » qui nécessite la notion de feuilletage. Pour le traité, on donne premièrement un rappel de définitions de base de la géométrie différentielle. En suite, on aborde la notion d'une distribution(champ de p-plans), d'une variété feuilleté et leurs propriétés. Puis, on donne la preuve détailler du théorème de Frobenius.

Mots clés : Champ de p-plans ; Feuilletage ; Variété feuilleté ; Théorème de Frobenius.

Abstract :

Frobenius' theorem gives a necessary and sufficient condition of local integrability of a system of partial differential equations of the first order whose right-hand side depends on variables, unknowns, but does not depend on partial derivatives of these unknowns. This theorem leads to consider the "integral varieties" which requires the notion of foliation. For the treatise, we first give a reminder of basic definitions of differential geometry. Next, we discuss the notion of a distribution (field of p-plane), a foliated variety and their properties. Then, we gives the detailed proof of the theorem of Frobenius.

Key-words : Field of p-plane ; Foliated variety ; Foliation ; Frobenius's theorem.

Table des matières

Introduction **3**

1 Variété différentiable **4**
1.1 Rappels de topologie 4
1.2 Variété topologique 6
1.3 Cartes locales et atlas 7
1.4 Variétés différentiables 8
1.5 Applications différentiables 9
1.6 Espace tangent 11
1.7 Dérivations 12
1.8 Applicaion tangente 14
1.9 Rang -Immersion -Submersion 16
1.10 Sous-variétés 16
1.10.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 17
1.10.2 Sous variétés d'une variété 19

2 Champ de vecteurs **20**
2.1 Fibrés vectoriels 20
2.2 Opérations sur les fibrés vectoriels 21
2.2.1 Produit 21
2.2.2 Somme directe 22
2.3 Fibré tangent 22
2.4 Application tangente entre les fibrés tangents 23
2.5 Champ de vecteurs 24
2.6 Crochet de lie 25
2.7 Groupe à un paramétre de difféomorphisme et flot 28
2.8 Redressement d'un champ de vecteur 31

3 Théorème de Frobenius et feuilletages **32**
3.1 Champs de p-plans 32
3.2 Feuilletages 34
3.3 Théorème de Frobenius 38

Conclusion **44**

Bibliographie **45**

Introduction

Le **théorème de Frobenius** donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité locale d'un système d'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont le membre de droite dépend des variables, des inconnues, mais ne dépend pas de dérivées partielles de ces inconnues : un tel système d'équation aux dérivées partielles est appelé un " système de Pfaff ".

Le théorème de Frobenius conduit à considérer les "variétés intégrables" de la géométrie différentielle et peut s'exprimer dans ce langage. Ces variétés intégrables conduisent à la notion de feuilletage.

Ce travail se compose de trois chapitres. Le premier chapitre contient des rappels et les définitions de base de la géométrie différentielle (les variétés différentiable, les espaces tangents, dérivation, application tangente,...), et on cite les propriétés élémentaires et nécessaires pour la suite.
Dans le seconde chapitre : Pour étudier un mouvement sur une variété, nous avons besoin de quelques définitions comme : équation différentielle sur une variété M de la forme

$$\dot{c}(t) = X(c(t))$$

où X est un champ de vecteurs sur M et c est une courbe sur M. Tout champ de vecteurs sur M définit donc une équation différentielle, dont l'inconnue est la courbe $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$. En chacun de ces points, cette courbe doit avoir pour vecteur tangent le vecteur associé à X en ce point. En physique, ce type d'équation différentielle est très connue. Comme dans les espaces vectoriels normés, on peut parler dans ce cas à l'existence et l'unicité de solutions. L'unique solution avec des conditions initiales de cette équation est appelée le flot de X. On parle de quelques propriétés du flot local.

Dans le troisième chapitre, on aborde la notion de distribution (champ de p-plans), et d'une variété feuilleté et leurs propriétés. Puis, on donne la preuve détailler du théorème de Frobenius.

On termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Variété différentiable

1.1 Rappels de topologie

Définition 1.1. Un espace topologique est un ensemble M muni d'une famille de sous-ensembles de M, appellés ouverts, telle que :

i) l'ensemble vide $\emptyset$ et M sont des ouverts ;

ii) l'intersection $\cap_r U_r$ d'un nombre fini d'ouverts est un ensemble ouvert ;

iii) l'union $\cup_r U_r$ d'ouverts est un ensemble ouvert.

La famille d'ensembles choisis comme ouverts s'appelle topologie de M. Un ensemble s'appelle fermé si son complément est ouvert. (En particulier, $\emptyset$ et M sont au même temps ouverts et fermés.)

Définition 1.2. Une base B pour une topologie est un ensemble d'ouverts telle que tout ouvert peut s'écrire comme une union d'ouverts.

Définition 1.3. La topologie induite sur $A \subset M$ est l'ensemble d'ouverts de la forme $A \cap O$ où O est un ouvert de M.

Définition 1.4. Un ensemble ouvert contenant un point $x \in M$ s'appelle voisinage de M. Un espace topologique M est de Hausdorff, ou T_2 - separé, si pour tous les points distincts x et y de M il existe des voisinages U_x et U_y qui ne s'intersectent pas, i.e. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Définition 1.5. Une application $\varphi : M \longrightarrow N$ entre deux espaces topologiques est continue si pour tout ouvert $V \subset N$ l'image réciproque $\varphi^{-1}(V) \subset M$ est un ouvert.
Une application continue $\varphi : M \longrightarrow N$ est un homéomorphisme si elle est bijective et sa réciproque $\varphi^{-1} : N \longrightarrow M$ est aussi continue.

Définition 1.6. Un espace topologique M est dit à base dénombrable s'il existe une famille dénombrable B d'ouverts de M constituant une base de la topologie de M.

Définition 1.7. Un espace topologique M est dit connexe si pour tous les ouverts disjoints U, V de M avec $U \cap V = M$, on a soit $U = \emptyset$, soit $V = \emptyset$.

Définition 1.8. Une fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) = f_t(x). \end{aligned}$$

est dite k-lipschitzienne de costante $k > 0$ en x si :

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U \qquad \|f_t(x_1) - f_t(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dfrac{d}{dt}\Big(X(t)\Big) = f\Big(t, X(t)\Big) \\ X(t_0) = x_0 \qquad\qquad \text{avec} \quad (t_0, x_0) \in U; \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorème 1.1. ***(Théorème de Cauchy)***

Soit $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction k-lipschitzienne en x, et continue.

alors :

1. ***(existence)*** *pour tout $(t_0, x_0) \in U$, $\exists \varepsilon > 0$ et il existe $x :] - \varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 satisfaisant le problème de Cauchy (1.1) ;*
2. ***(unicité)*** *si x_1 $:] - \varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, x_2 $:] - \eta, +\eta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des solution de problème (1.1) telle que :*

   $\exists t_1 \in] - \varepsilon, +\varepsilon[\bigcap] - \eta, +\eta[\qquad x_1(t_1) = x_2(t_2)$ *alors :*

   $\forall t \in] - \varepsilon, +\varepsilon[\bigcap] - \eta, +\eta[\quad x_1(t) = x_2(t)$ *;*
3. ***(régularité)*** *si $f \in C^k$ $\quad 1 \leq k \leq \infty$ alors toute solution $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^{k+1}.*

1.2 Variété topologique

Définition 1.9. Soit M un espace topologique, on dit que M est une variété topologique de dimension n, $(n \in \mathbb{N}^*)$, si le trois proprietés sont vérifies :

— M est T_2 -séparé.

— M posséde une base dénombrable.

— Pour tout $x \in M$, $\exists U \in V_x$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1. *La dimension d'une variété topologique est un invariant topologique. Deux variétés homéomorphe ont la méme dimension.*

Proposition 1.2. *Toute partie ouverte d'une variété topologique de dimension n, est elle méme une variété topologique de méme dimension.*

1.3 Cartes locales et atlas

Soit M une variété topologique de dimension n.

Définition 1.10. Une carte sur M est le couple (U, φ) formé d'un ouvert $U \subset M$, appelé domaine de la care et d'un homéomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1.

Chaque point de M posséde au moins une carte locale.

Pour $p \in U \in M$, on a $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ est appelée fonction de coordonnées.

Notons par :

$$\begin{array}{rcl} \pi_i = Pr_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

$\forall i = 1, \dots, n$ *la $i^{\text{éme}}$ projection, l'application $x_i : U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R}$ est appelée $i^{\text{éme}}$ coordonnées locale sur U.*

Définition 1.11. Soit M une variété topologique de dimension n, (U, φ) et (V, ψ) deux cartes locales sur M, avec $U \cap V \neq \emptyset$, elles sont dites différentiablement compatibles si l'application de transition $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ est différentiable (ou de classe $C^k \quad 1 \leq k \leq +\infty$).

Remarques :

- Si $k = \infty$, on dit que l'application de transition est lisse.
- La relation " être différentiablement compatible" est une relation d'équivalence.

Définition 1.12. Un atlas topologique sur une variété topologique M de dimension n est une famille de cartes locales $\{(U_i, \varphi_i), i \in I(I \subset \mathbb{N})\}$, avec :

$$M \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

.

Définition 1.13. Un atlas différentiable ($C^k, 1 \leq k \leq \infty$) sur une variété topologique M de dimension n est une famille de cartes locales $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ telle que :

i/ $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

ii/ $\forall i, j \in I$, les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont différentiablement compatibles (les applications de transition $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont différentiables (de classe C^k)).

1.4 Variétés différentiables

Définition 1.14. Un atlas différentiable $\overline{\mathcal{A}}$ (de classe C^k) pour une variété topologique M de dimension n, est dit maximal s'il n'est pas inclus strictement dans aucun autre atlas différentiable (de classe C^k) sur M.

Lemme 1.1. *Toute atlas $\mathcal{A}$ pour M est contenu dans un atlas maximal $\overline{\mathcal{A}}$ de M.*

Définition 1.15. Une variété différentiable (de classe C^k) de dimension n est une variété topologique de dimension n, muni d'un atlas différentiable maximale (de classe C^k).

Définition 1.16. Une structure différentiable (de classe C^k) de dimension n est le choix d'un atlas différentiable sur cette variété.

D'après Lemme 1.1, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *Si M est une variété topologique qui a une structure différentiable alors M est une variété différentiable.*

Exemple 1.1. Sphère unité S^n

La sphère unité $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ est une variété différentiable de dimension n. S^n muni de la toplogie induite par la topologie de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $N = (0, \ldots, 1)$ et $S = (0, \ldots, -1)$ le pôle nord et le pôle sud respectivement.

Soit $U_N = S^n \backslash \{N\}$ et $U_S = S^n \backslash \{S\}$ avec :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_N : U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \dfrac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_S : U_S & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \Big(x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & (\dfrac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \dfrac{x_n}{1 + x_{n+1}}\Big) \end{array}$$

$\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ un atlas différentiable (de classe C^k).

Les variétés grassmanniennes

Définition 1.17. Soient $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

La variété grassmannienne, notée, par $\mathcal{G}_r(V)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension r.

Remarques :

i) $\mathcal{G}_0(V)$ et $\mathcal{G}_n(V)$ sont réduits à un point.

ii) $\mathcal{G}_r(V)$ est vide si $r > n$.

iii) $\mathcal{G}_1(V)$ est l'ensemble des droites vectorielles de V.

1.5 Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension n et m respectivement et soit $f : M \to N$ une application.

Définition 1.18. Soit (U, φ) une carte de M en p, et (V, ψ) une carte en $f(p)$ de N avec $f(U) \subset V$. On dit que l'application $\overline{f}$ définie par :

$$\overline{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m,$$

est l'expression locale de f lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ).

Définition 1.19. L'application f est différentiable (ou de classe $C^k \quad 1 \leq k \leq +\infty$) au point $p \in M$, si pour toute carte (U, φ) en p de M, et pour tout carte (V, ψ) de N contenent $f(p)$ avec $f(U) \subset V$, telles que $\overline{f}$ l'expression locale de f est différentiable au p (ou de classe C^k).

Définition 1.20. On dit que f est une application différentiable sur M, si elle est différentiable en tout point $p \in M$.

Remarque 1.2. *Cette définition a un sens car la notion de différentiabilité ne dépend pas des cartes choisies dans les variétés.*
En effet, si on choisit (U', φ') une autre carte en p sur M, et (V', ψ') une autre carte en $f(p)$ sur N avec $f(U') \subset V'$. On a :

$$\begin{aligned} \psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} &= \psi' \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi')^{-1} \\ &= \psi' \circ \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \circ (\varphi')^{-1} \end{aligned}$$

Puisque les applications des changement de cartes $\psi' \circ \psi^{-1}$ et $\varphi \circ \varphi^{-1}$ sur N et M respectivement sont de classes C^∞ alors $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ est de classe C^∞.

Propriétés :

i) Toute application différentiable est continue.

ii) $Id_M : M \longrightarrow M$ est une application différentiable.

iii) La composition de deux applications différentiables est différentiable.

Définition 1.21. Une application $f : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme de M sur N, si f est une bijection et si f et f^{-1} sont différentiables, on a alors nécessairement $dimM = dimN$.

1.6 Espace tangent

Vecteur tangent

Définition 1.22. Soit M une variété différentiable de dimension n, ($n \in \mathbb{N}^*$), et p un point de M, on s'intéresse aux courbes qui sont différentiables et qui passent par p :

$$\begin{aligned} c :]-\varepsilon, +\varepsilon[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c(t) \quad \text{avec} \quad c(0) = p. \end{aligned}$$

Définition 1.23. Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes en point p, si $c_1(0) = c_2(0) = p$, et si pour toute carte locale (U, φ) tel que $p \in U$ on a :

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0). \tag{1.2}$$

Remarque 1.3.

i) La définition est indépendante de la carte choisie.

En effet, si (V, ψ_1) une autre carte autour de p, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\psi_1 \circ c_1\Big)(0) &= \frac{d}{dt}\Big(\psi_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1\Big)(0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big((\psi_1 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)\Big)(0) \\
&= D_{\varphi(x)}\Big(\psi_1 \circ \varphi^{-1}\Big) \circ \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ c_1\Big)(0) \\
&= D_{\varphi(x)}\Big(\psi_1 \circ \varphi^{-1}\Big) \circ \frac{d}{dt}\Big(\varphi \circ c_2\Big)(0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\psi_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_2\Big)(0) \\
\frac{d}{dt}\Big(\psi_1 \circ c_1\Big)(0) &= \frac{d}{dt}\Big(\psi_1 \circ c_2\Big)(0).
\end{aligned}$$

ii) On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble de courbes qui passant par p : $c_1 \mathcal{R} c_2$, si elles sont tangentes en p.

Définition 1.24. Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p. L'espace tangent à M en p, noté, T_pM est l'ensemble des vecteures tangents à M en p.

1.7 Dérivations

Notation :

Considérons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, de classe C^∞ , définies sur un ouvert de M contenant un voisinage de p, dans lequel on identifie les fonctions qui sont égales sur un voisinage de p. On note $C^\infty(p)$ ou $C_p^\infty(U)$ ou $C_p^\infty(M)$ cet ensemble. Notons que c'est une algèbre.

Définition 1.25. Une dérivation en p est un opérateur linéaire $D_p : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la régle de leibniz. Autrement dit : D_p est une dérivation si, pour tous réels α, β et toutes fonctions f, g dans $C_p^\infty(M)$,

i) $D_p(\alpha f + \beta g) = \alpha D_p f + \beta D_p g$

ii) $D_p(fg) = g(p)D_p f + f(p)D_p g.$

Remarque 1.4. *Toute dérivation vérifie $D_p c = 0$ où c est une constante.*

Lemme 1.2. *Soit (U, φ), $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, une carte centrée en p ($\varphi(p) = 0$). Pour toute fonction $g \in C_p^\infty(M)$, il existe des fonctions $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in C_p^\infty(M)$ telles que :*

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \chi_i.$$

Autremnt dit, $\forall q \in U : g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q)\chi_i(q)$.

Proposition 1.3. *Chaque dérivation de $C_p^\infty(M)$ est localement de la forme*

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \quad \text{où} \quad v_i = D_p \varphi_i = D_p(\pi_i \circ \varphi).$$

<u>**Notation :**</u>

On note $Der(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) = Der(C_p^\infty(M))$ l'ensemble de toutes les dérivations sur $C_p^\infty(M)$.

Proposition 1.4. *L'ensemble des dérivations $Der(C_p^\infty(M))$ est un espace vectoriel de dimension $n = dimM$. Si (U, φ) est une carte locale en p avec coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ alors $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ est une base dans $Der(C_p^\infty(M))$.*

Lien entre dérivation et vecteur tangent.

Proposition 1.5. *Soient $g \in C_p^\infty(M)$ et X_p un vecteur tangent en p. Alors la dérivée $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$ est la méme pour toutes les courbes $c : s \mapsto c(s)$ passant par p est appartenant à la classe d'équivalence X_p.*

Démonstration. Soit (U, φ) une carte locale au voisinage de p, c et b deux courbes tangentes en p. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g \circ b)(0) &= D_{\varphi(x)}(g \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(g \circ b)(0) \\
&= D_{\varphi(x)}(g \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(g \circ c)(0) \\
&= \frac{d}{dt}(g \circ c)(0).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.6. *L'application $g \longmapsto X_p.g$ est une dérivation.*

Théorème 1.2. *L'ensemble des vecteurs tangents T_pM s'identifie à $Der(C_p^\infty(M))$.*

Démonstration.

Soit $\Psi : T_pM \longrightarrow Der(C_p^\infty(M))$ qui à une vecteur tangent X_p fait correspondre la dérivation définie par X_pg. d'aprés la proposition 1.4, l'application Ψ est bien définie, si c est un représentant de la classe d'équivalence $X_p = [c]$, $\Psi(X_p)$ est la dérivation $X_pg = \frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$. Il suffit montrer que Ψ est bijective. □

Proposition 1.7. ***(Changement de coordonnées)***

Soit (U, φ) une carte locale de M en p, des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$, et (V, ψ) une autre carte en p de coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_n)$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^{n} v_i \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y_j}|_{\psi(p)}.$$

où $X_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}$

Démonstration. Soit $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ deux bases dans T_pM.

Les coordonnées y_j peuvent s'écrire en fonction des coordonnées x_i sur $U \cap V$ au moyen l'application de changement de cartes :

$$y_j(x_1,\dots,x_n) = (\psi\circ\varphi^{-1})_j(x_1,\dots,x_n),$$

où $(\psi\circ\varphi^{-1})$ est la $j^{éme}$ coordonnées de l'application $\psi\circ\varphi^{-1}$.

Un vecteur $X_p \in T_pM$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire dans les deux bases :

$$X_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial y_j}|_{\psi(p)}.$$

Faison agir X_p sur la fonction $y_k \in C^\infty(V,\mathbb{R})$:

$$X_p(y_k) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial y_k}{\partial y_j}|_{\psi(p)}.$$

Comme $\frac{\partial y_k}{\partial y_j} = \delta_{kj}$, on en déduit

$$w_k = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})_k}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}.$$

En d'autre termes, le changement de coordonnées pour les vecteur tangents est donné par la différentielle de l'application de changement de cartes, c'est-à-dire l'application linéaire dont la matrice est la jaccobienne $J(\psi\circ\varphi^{-1})$. en remplasant w_j par cette valeur dans la double écriture de X_p, on voit aussi que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^n v_i \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})_j}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial y_j}|_{\psi(p)}.$$

□

1.8 Applicaion tangente

Soient M, N deux variétés différentiables de dimension n, m respectivement $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable et p un point de M.

Remarque 1.5. *Puisque le vecteur tangent est définie comme dérivation ou classe d'équivalence des chemins. Alors on définie aussi l'application tangent de deux façon équivalente.*

Définition 1.26. L'aplication $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ définie par :

$$d_pf(X_p)(h) = X_p(h\circ f), \quad \text{pour tout} \quad X_p \in T_pM \quad \text{et} \quad h \in C^\infty_{f(p)}(N)$$

est appelée différentielle de f en p ou l'application tangente en p induite par f.

Définition 1.27. On définit aussi d_pf par :

$$d_pf([c]) = [f \circ c]; \quad [c] \in T_pM.$$

pour tout chemin $c :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow M$ avec $c(0) = p$. $f \circ c$ est un chemin sur N et $(f \circ c)(0) = f(p)$.

Proposition 1.8.

i) L'application tangente d_pf en p est $\mathbb{R}$-linéaire.

ii) Soient $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$ et $g : N \longrightarrow N_1$ une application différentiable en $f(p) \in N$. Alors $g \circ f$ est une application différentiable en p et

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_pf.$$

iii) Si $f : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme alors, pour tout $p \in M$, d_pf est un isomorphisme. De plus

$$d_{f(p)}(f)^{-1} = (d_pf)^{-1}$$

.

Remarque 1.6. *L'inverse de iii) n'est pas vérifié localement.*

Définition 1.28. Une application $f : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme local en p s'il existe un voisinage $U \subset M$ de p et un voisinage $V \subset N$ de $f(p)$ tels que l'application $f_{|U} : U \longrightarrow V$ soit un difféomorphisme.

Théorème 1.3. ***(Théorème d'inversion locale)***

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$ telle que $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ soit un isomorphisme. Alors f est un difféomorphisme local en p .De plus :

$$d_{f(p)}(f_{|U})^{-1} = (d_pf)^{-1}$$

.

1.9 Rang -Immersion -Submersion

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable entre les variétés différentiables de dimension n et m respectivement.

Définition 1.29. Le rang de f en $x \in M$ est le rang de l'application linéaire tangente $d_x f$ c'est -à-dire :

$$rg_x f = rg(d_x f) = dim Im(d_x f).$$

Si le rang est constant pour tout $x \in M$, alors on le note par $rg(d_x f)$.

Définition 1.30. On dit que f est une :

i) Immersion en $x \in U \subset M$, si l'application linéaire $d_x f : T_x M \longrightarrow T_x N$ est injective dans ce cas on a :$rg_x f = rgf = dim M = n$.

   On dit que f est une immersion sur $U \in M$, si pour tout $x \in U$, l'application tangent est injective.

ii) Submersion en $x \in U \subset M$, si l'application linéaire $d_x f : T_x M \longrightarrow T_x N$ est surjective dans ce cas on a : $rg_x f = rgf = dim N = m$.

   On dit que f est une submersion sur $U \subset M$, si pour tout $x \in U$, l'application tangent est surjective.

Définition 1.31. On dit que f est un plongement si :

i) $f : M \longrightarrow f(M) \subset N$ est un homéomorphisme (où f(M) est muni de la topologie induite par celle de N).

ii) l'application f est une immersion.

1.10 Sous-variétés

Les sous-variétés apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Elles peuvent être considérées selon différents points de vue qui constituent la richesse et la difficulté même de la théorie. Une première étape va donc être de dégager des définitions équivalentes correspondant à ces différents points de vue, pour pouvoir choisir le plus adapté.

1.10.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.32. Un sous-ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p \leq n$ si, pour tout point x de N, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphismes $f : U \longrightarrow V$ tels que

$$f(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}) .$$

On dit alors que la codimension de N dans $\mathbb{R}^n$ est $n-p$. Si $p = 1,\ 2,\ n-1$, on dit que N est une courbe, surface, hypersurface (différentiable) de $\mathbb{R}^n$ respectivement.
On appellera f redressement local en x de N sur $\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$.
En d'autres termes, une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble que l'on peut localement redresser en un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^p$. Il est clair qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété, les $(U \cap N, f_{/U\cap N})$ formant un atlas pour N. La structure différentiable et la topologie sont induites par celles de $\mathbb{R}^n$. Si $r = \infty$, on dit N est une sous-variété lisse.

Exemple 1.2. 1- Une sous-variété de dimension 0 est le sous-ensemble discret et une sous-variété de codimension 0 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2- Soit $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable, son graphe $Gr(f) = \{(x, g(x))/x \in U\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+m}$. En effet, l'application $f(x, y) = (x, y - g(x))$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{n+m}$ qui envoie $Gr(f)$ sur $(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap (U \times \mathbb{R}^m)$.

Propriétés :
1- Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et N est une sous-variété de dimension p alors $N \cap U$ est une sous-variété de dimension p. Tout ouvert d'une sous-variété est une variété.
2- Soit $f : U \longrightarrow U'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement. Si N est une sous-variété de U alors $f(N)$ est une sous-variété de U' de même dimension et de même classe. On dit que N et $f(N)$ sont difféomorphes.
3- Soit $N_1,\ N_2$ deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de dimensions p_1 et p_2 resp. Alors $N_1 \times N_2$ est une sous-variété de dimension $p_1 + p_2$ de $\mathbb{R}^{n+m}$. De même pour un produit fini.

Sous-variétés définies par des équations

Proposition 1.9. *(Définition locale par fonction implicite) Une partie N de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variétés différentiable de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p \leq n$ si et seulement si, pour tout x de N, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ différentiable qui est une submersion en x, tels que*

$$U \cap N = g^{-1}(0).$$

On dit que g est une équation locale régulière de N au voisinage de x.

Exemple 1.3. 1- $S^n = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, considérons l'application f de classe C^∞ définie par : $x \in \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \|x\|^2 - 1 \in \mathbb{R}$. L'application tangente de f en x est $d_x f = \nabla_x f = 2x$. Donc $d_x f$ est surjective sauf si $x = 0$. Comme $0 \notin S^n$, f fournit une équation régulière en tout point de S^n (i.e. une équation régulière globale).

2-Plus généralement, toutes les quadriques de $\mathbb{R}^n$, définies par une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon x_i^2 = 1, \quad \varepsilon = \pm 1$$

sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 1.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable et $y \in \mathbb{R}^p$. Si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété différentiable de dimension $n - p$ de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 1.10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application différentiable et de rang constant r sur U. Alors, pour tout y dans $f(U)$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$.*

Sous-variétés définies par un paramétrage

Proposition 1.11. *N une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$, de dimension $p \leq n$ si et seulement si, pour tout x dans N, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une application $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable tels que $h(0) = x$, h soit une immersion en 0, et h soit un homéomorphisme de V sur $U \cap N$.*

(V, h) est alors appelée paramétrisation locale régulière de N au voisinage de x.

1.10.2 Sous variétés d'une variété

Soit M une variété différentiable de dimension n.

Définition 1.33. Une partie N de M est une sous-variété différentiavle de dimension p ($p \leq n$) de M si pour tout x dans N et pour toute carte locale (U, ϕ) de M en x, le sous-espace $\phi(U \cap N)$ est une sous-variété (au sens de la section 1.10.1) différentiable (de classe C^q) et de dimension p de $\phi(U)$ au voisinage de $\phi(x)$.

Si M est de dimension n, on dit alors que la sous-variété N est de codimension $n - p$. Les couples $(U \cap N, \phi|_{U \cap N})$, avec U un ouvert de M et ϕ une carte de M telle que $\phi(U \cap N)$ soit contenu dans $\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$, forment alors un atlas différentiable de N à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (après identification évidente de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$. Notons qu'un sous-espace topologique d'un espace topologique séparé et à base dénombrable l'est encore.
Si $M = \mathbb{R}^n$ et si $\{(U_i, \phi_i)\ i \in I\}$ est l'ensemble des paramétrages locaux C^q de N, alors $\{(U_i \cap N, \phi_i|_{U_i \cap N}),\ i \in I\}$ est un atlas de cartes sur N, qui est compatible avec le précédent, donc définit la même structure de variété sur N.

Définition 1.34. Un sous-ensemble W d'une variété M est une sous-variété immergée de M de dimension $p \leq n$ si il existe une immersion injective $f : M \longrightarrow N$ ou N est une variété de dimension p , dont l'image $f(N)$ est égale à W .

Chapitre 2

Champ de vecteurs

2.1 Fibrés vectoriels

Définition 2.1. Un fibré vectoriel réel de rang n est un triplet (E, B, π) où E, B sont deux espaces topologiques et $\pi : E \longrightarrow B$ est une application continue, vérifiant :

i) Pour tout $b \in B$, $E_b = \pi^{-1}(b)$ est un espace vectoriel réel de dimension n appelé le fibré au dessus de b.

ii) Pour tout $b \in B$, il existe une trivialisation locale, c'est à dire un voisinage ouvert U_b de b et un homéomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times \mathbb{R}^n$, qui commute avec les projections sur U_b et est linéaire sur chaque fibré $E_x, x \in U_b$.

Définition 2.2. On dit que E est un espace totale, et B la base .

Définition 2.3. Lorsque E et B sont des variétés différentiables (de classe C^k), le fibré vectoriel (E, B, π) est de classe différentiable (de classe C^k) si et seulement si π est différentiable, et il existe des trivialisations locales différentiables(de classe C^k).

Soient $\xi = (E, B, \pi)$ et $\xi' = (E', B', \pi')$ des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) différentiables(de classe C^k), d'applications $\pi : E \longrightarrow B$ et $\pi' : E' \longrightarrow B'$ respectivement.

Définition 2.4. Un morphisme différentiable (de fibrés vectoriels) de ξ dans ξ' est un couple d'applications (f, f_1) de classe différentiables qui commute avec les projections et est linéaire sur la fibré . Pour tout x dans B, l'application f induise un morphisme d'espaces vectoriels réels (resp. complexes) de $E_x = \pi^{-1}(x)$ dans $E'_{f_1(x)} = (\pi')^{-1}(f(x))$.

Propriétés :

i) Si $\pi : E \to B$ est un fibré vectoriel, alors le couple (id, id) est un morphisme du fibré vectoriel π dans lui-même, appelé le morphisme identité .

ii) Si (f, f_1) et (g, g_1) sont deux morphismes de $\pi : E \to B$ sur $\pi' : E' \to B'$ et de $\pi' : E' \to B'$ sur $\pi'' : E'' \to B''$ respectivement, alors le couple $(g \circ f, g_1 \circ f_1)$ est un morphisme de fibrés vectoriels, appelé composition de (f, f_1) et (g, g_1).

Définition 2.5. Un isomorphisme C^k (de fibrés vectoriels) de ξ dans ξ' est un morphisme (f, f_1) de ξ dans ξ' tel qu'il existe un morphisme (g, g_1) de ξ' dans ξ qui vérifie : $g \circ f = id$, $f \circ g = id$, $f_1 \circ g_1 = id$, $g_1 \circ f_1 = id$.

Deux fibrés vectoriels sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux.

Définition 2.6. Une section (resp. section de classe $C^{k_1}, k_1 \leq k$) d'un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow B$ (de classe C^k) est une application s (resp. application s de classe C^{k_1}) de B dans E telle que $\pi \circ s = id_B$.

Définition 2.7. Le fibré trivial de rang n sur B est $B \times \mathbb{R}^n$ avec la structure d'espace vectoriel constante sur $\mathbb{R}^n$. Les sections du fibré trivial s'identifient aux applications :
$B \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition 2.8. Tout fibré vectoriel isomorphe à un fibré vectoriel trivial est dit trivialisable.

2.2 Opérations sur les fibrés vectoriels

2.2.1 Produit

Définition 2.9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de classe C^k, d'applications $\pi : E \longrightarrow B$ et $\pi' : E' \longrightarrow B'$ respectivement.

Le fibré vectoriel produit de ξ et de ξ' est le fibré vectoriel, noté, $\xi \times \xi^{'}$, de base la variété produit $B\times B'$, d'espace total la variété produit $E\times E'$, de projection l'application produit $\pi \times \pi' : E \times E' \longrightarrow B \times B'$ définie par $(x,x') \longrightarrow (\pi(x), \pi'(x))$, de structure vectorielle sur la fibré de (b,b') la structure d'espace vectoriel produit sur $E_b \times E'_{b'}$.

2.2.2 Somme directe

Définition 2.10. Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur B. Leur somme directe $\xi \oplus \xi'$ est le fibré sur B dont le fibré en b est $E_b \oplus E'_b$. Son espace total est :

$$\{(b,x,x') \in B \times E \times E' : b = \pi(x) = \pi'(x)\},$$

On peut le voir comme le fibré induit

$$\xi \oplus \xi' = \delta^*(\xi \times \xi')$$

où $\delta : B \to B \times B$ est la diagonale. Toute section σ de $\xi \oplus \xi'$ s'écrit uniquement $\sigma = s + s'$ où s et s' sont des sections de ξ et ξ'.

2.3 Fibré tangent

Soit M une varieté différetiable de dimension n.

Définition 2.11. L'ensemble :

$$\begin{aligned} TM &= \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_xM \\ &= \{(x, X_x)/x \in M, X_x \in T_xM\} \end{aligned}$$

est appelé le fibré tangent à la varieté M.

Théorème 2.1. *Le fibré tangent TM à un structure naturelle de variété différentiable de dimension $2n$.*

Démonstration. On a la projection canonique définie comme :

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (x, X_x) &\longmapsto x, \end{aligned}$$

donc les ouvert définie sur TM sont $\pi^{-1}(U)$, tel que U ouvert de M.

Soit (U,φ) carte locale de $x \in M$ et $\pi^{-1}(U)$ l'ensemble des fibrés au dessus d'un point de U.

On considére l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \Big(x, X_x\Big) &\longmapsto \Big(\varphi(x), v\Big). \end{aligned}$$

1) Il suffit de montrer que Φ est homéomorphisme.

2) Soit (V,ψ) une autre carte au voiinage de x et

$$\begin{aligned} \Psi : \pi^{-1}(V) &\longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n \\ \Big(y, X_y\Big) &\longmapsto \Big(\psi(y), w\Big). \end{aligned}$$

avec $U \cap V \neq \emptyset$.

Il suffit de montrer que $\Psi \circ \Phi^{-1}$ est différentiable.

□

2.4 Application tangente entre les fibrés tangents

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable entre deux variétés différetiables de dimension n, m respectivement .

Définition 2.12. L'application tangente, noté, *df* (ou Tf) est définie par :

$$\begin{aligned} df : TM &\longrightarrow TN \\ \Big(x, X_x\Big) &\longmapsto \Big(f(x), d_x f\Big). \end{aligned}$$

Proprietés :

1. L'application *df* n'est pas linéaire, elle est juste linéaire par rapport à la deuxime composante.
2. L'application *df* est difféetiable.
3. $d(Id_M) = Id_M$.

4. Soit $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow N_1$, deux applications differentiales entre les deux varietés difféetiables, alors $g \circ f : M \longrightarrow N_1$ est une application difféetiable, de plus :

$$\begin{array}{rcl} d(g \circ f) : TM & \longrightarrow & TN_1 \\ (x, X_x) & \longmapsto & ((g \circ f)(x), d_x(g \circ f)(X_x)) \end{array}$$

$d(g \circ f) = dg \circ df.$

2.5 Champ de vecteurs

Soit M une varieté difféetiable de dimension n, et TM son fibré tangent.

Définition 2.13. Un champ de vecteurs (tangent) sur M est une application

$X : M \to TM$, qui associe un point x de M un couple $(x, X_x) \in TM$.

Définition 2.14. Un champ de vecteurs sur M est la section du fibré tangent.

On note $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des champ de vecteurs sur M.

Proposition 2.1. *Le fibré tangent est un fibré vectoriel de rang n, avec projection* $\pi : TM \to M$, $\pi(X_x) = x$.

Proposition 2.2. *Tout champ de vecteur s'exprime localement comme combinaison* $C^\infty(U)-$ *linéaire* $X(.) = \sum_{i=1}^{n} v_i(.) \frac{\partial}{\partial x_i}/_\varphi()$, *avec* $v_i \in C^\infty(U)$.

Proposition 2.3. *Un champ de vecteur difféetiable sur M , définit une dérivation sur* $C^\infty(M)$, *c'est à dire :*

$$\begin{array}{rcl} X : C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ g & \longmapsto & X(g) = X.g. \end{array}$$

Elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) Linéairité : $\forall g, h \in C^\infty(U), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$X(\alpha g + \beta h) = \alpha X(g) + \beta X(h).$$

ii) Le régle de leibniz :$\forall g, h \in C^\infty(U)$ *:*

$$X(gh) = gX(h) + hX(g).$$

Proposition 2.4. *L'ensemble de champ de vecteur sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(U)$, définie par les lois :*

i) L'addition :$\forall x \in M$

$$(X+Y)(x) = X(x) + Y(x).\forall X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

ii) $\forall h \in C^\infty(M), \forall x \in M$

$$(hX)(x) = h(x)X(x).$$

Exemple 2.1.

i) Un champ de vecteur sur S^1 est de la forme :

$$X = f\frac{\partial}{\partial x}$$

avec $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, si $x \in S^1, X(x) = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ et $f \in C^\infty(S^1)$.

ii) Un champ de vecteur sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$X = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}$$

si $(x,y,z) \in S^2$, on a $X(x,y,z) = f(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + h(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$; avec $xf(x,y,z) + yg(x,y,z) + zh(x,y,z) = 0$.

2.6 Crochet de lie

Définition 2.15. Soit X, Y deux champs de vecteurs sur M,on définie le crochet de lie, noté, [.,.] entre X, Y par :

$$[X,Y] = XY - YX$$

telle que $[X,Y]f = X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big)$.

Proposition 2.5. *Le crochet de lie est un champ de vecteur c'est- à -dire :*

$[.,.] : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$.

Démonstration.

i) Linéairité : $\forall f, g \in C^\infty(M), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[X,Y]\Big(\alpha f + \beta g\Big) &= X\Big(Y(\alpha f + \beta g)\Big) - Y\Big(X(\alpha f + \beta g)\Big) \\
&= X\Big(\alpha Y(f) + \beta Y(g)\Big) - Y\Big(\alpha X(f) + \beta X(g)\Big). \\
&= \alpha X\Big(Y(f)\Big) + \beta X\Big(Y(g)\Big) - \alpha Y\Big(X(f)\Big) - \beta Y\Big(X(g)\Big). \\
&= \alpha\Big(X\Big(Y(f)\Big) - Y\Big(X(f)\Big)\Big) + \beta\Big(X\Big(Y(g)\Big) - Y\Big(X(g)\Big)\Big). \\
&= \alpha[X,Y]f + \beta[X,Y]g.
\end{aligned}$$

ii) Régle de leibniz,$\forall f, g \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
[X,Y](f.g) &= X\Big(Y(fg)\Big) - Y\Big(X(fg)\Big) \\
&= X\Big(fY(g) + gY(f)\Big) - Y\Big(fX(g) + gX(f)\Big) \\
&= X\Big(fY(g)\Big) + X\Big(gY(f)\Big) - Y\Big(fX(g)\Big) - Y\Big(gX(f)\Big) \\
&= fX\Big(Y(g)\Big) + Y(g)X(f) + gX\Big(Y(f)\Big) + Y(f)X(g) - fY\Big(X(g)\Big) \\
&- X(g)Y(f) - gY\Big(X(f)\Big) - X(f)Y(g). \\
&= f\Big(X\Big(Y(g)\Big) - Y\Big(X(g)\Big)\Big) + g\Big(X\Big(Y(f)\Big) - Y\Big(X(f)\Big)\Big) \\
&= f[X,Y](g) + g[X,Y](f).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. ***(Expression locale d'un crochet de lie)***

Soit $(U, \varphi$ une carte locale en $x \in M$, et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ avec :

$$\begin{aligned}
X(.) &= \sum_{i=1}^{n} v_i(.)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad v_i \in C^\infty(M); \\
Y(.) &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j(.)\frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad \omega_j \in C^\infty(M);
\end{aligned}$$

alors $[X,Y] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \omega_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\theta_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ *avec* $\theta_j \in C^\infty(M)$.

Démonstration. Soit $X, Y \in \mathcal{H}(M)$, $\forall f \in C^\infty(M)$ on a :

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j(.)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - Y\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(.)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} X\left(\omega_j(.)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} Y\left(v_i(.)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(.)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\omega_j(.)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j(.)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(v_i(.)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} v_i\omega_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \omega_j v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} - \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \omega_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{i \rightsquigarrow j}
\end{aligned}$$

Faisant un changement d'indice, on obtint :

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= \sum_{i,j=1}^{n} v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \omega_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \omega_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\theta_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

□

Définition 2.16. On dit que deux champs de vecteurs X, Y commute ; si et seulment si :

$$[X,Y] = 0.$$

En particulier : $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0.$

Tansport d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme

Soit $f : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme entre les variétés différentiable ($dimM = dimN = n$), soit X un champ de vecteur sur M.

Définition 2.17. Le transport de X par f, noté, f_*X est un champ de vecteurs sur N, défine par :

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ X &\longmapsto f_*X \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} \forall h \in C^\infty(N) \qquad f_*(X)h &= X(h \circ f) \\ &= X(h \circ f) \circ f^{-1}(.) \end{aligned}$$

où

$$\forall y \in N \qquad (f_*(X))_{y=f(x)} = df(X) \circ f^{-1}(y).$$

Proposition 2.7. *Soit X, Y deux champ de vecteurs sur M, alors*

$$f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$$

2.7 Groupe à un paramétre de difféomorphisme et flot

Soit M une variété différenntiable de dimension n, et $X \in \mathcal{H}(M)$.

Définition 2.18. (Groupe locale à un paramétre de difféomorphisme)
Un groupe locale à un paramétre sur M est un couple (U, Φ), où U est un ouvert de M et l'application Φ de classe C^∞ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi :]-\varepsilon, +\varepsilon[\times U &\longrightarrow M \\ (t,x) &\longmapsto \Phi(t,x) = \Phi_t(x) \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\forall x \in U : \Phi(0,x) = \Phi_0(x) = x$.

2. $\forall t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$: l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_t : U &\longrightarrow \Phi(t, U) = \Phi_t(U) \\ x &\longmapsto \Phi(t, x) = \Phi_t(x) \quad \text{est un difféomorphisme.} \end{aligned}$$

3. $\forall s, t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\quad , \quad \text{avec} \quad t + s \in]-\varepsilon, +\varepsilon[, \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{t+s}.$

Définition 2.19. On appelle équation différentielle sur la variété M une équation de la forme :

$$\dot{q} = X(q), \quad q \in M,$$

où X est un champ de vecteurs sur M.

Définition 2.20. Une courbe $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ s'appelle courbe intégrale d'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(M)$ si

$$c'(t) = X_{c(t)}, \quad \text{pour tout} \quad t \in I$$

En coordonnés locales, si on pose $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, ceci est équivalent aux équation différentielle du 1^{er} ordre

$$\dot{x}_i(t) = X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Proposition 2.8. *Pour tout $x \in M$, il existe une unique courbe intégrale maximale de $X \in \mathcal{H}(M)$ qui passe par x.*

En appliquant le théorème de Cauchy 1.1, on trouve :

Théorème 2.2. *(Existence et unicité des solutions).*
Soit $\dot{q} = X(q), q \in M$, une équation différentielle sur M. Pour tout point $p \in M$, si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit il existe une unique courbe intégrale $c_p(t)$ de X , définie pour $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$, satisfaisant la condition initiale $c_p(0) = p$.

Proposition 2.9. *Le groupe locale à un paramétre de difféomorphisme engedrie un champ de vecteur X telle que :*

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi_t(x)\Big) = X\Big(\phi_t(x)\Big).$$

En particulier $X_x = \frac{d}{dt}\Big(\phi_t(x)\Big)_{|t=0}$ *avec* $x = \phi_0(x)$, *la courbe* $\phi_t(x)$ $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ *est la courbe intégrale du champ X.*

Définition 2.21. (Flot)

Le flot d'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(M)$ est l'application

$$\phi^X : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff(M)} \tag{2.1}$$

$$t \longmapsto \phi_t^X \tag{2.2}$$

définie sur $x \in M$ par

$$\phi_t^X(x) = c(t) \in M,$$

où c est la courbe intégrale maximale de X qui passe par x. Le flot ϕ_t^X a donc le mème domaine I de c.

Remarque 2.1. *Le flot de X est défini par l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt}\phi_t^X(x) = X_{\phi_t^X}(x) \quad , \quad \phi_0^X(x) = x$$

Groupe globale à un paramétre de difféomorphisme :

Définition 2.22. Considérons l'application ϕ de classe C^∞ :

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_1 = \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \phi_t(x) \end{aligned}$$

sur Ω_1 où les difféomorphisme ϕ_t de M , $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \phi_t : M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \phi_t(x) = \phi(t, x). \end{aligned}$$

sont tels que :

1. ϕ_0 est l'identite sur M.

2. $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

3. $\forall s, t \in \mathbb{R}$, avec $t + s \in \mathbb{R}$, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$.

Dans ce cas, on dit que (Ω_1, ϕ_t) est un groupe globale à un paramétre de difféomorphisme

Proposition 2.10. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme et X un champ de vecteur sur M, si ϕ_t est le flot de X, celui f_*X est :*

$$f \circ \phi_t \circ f^{-1}.$$

2.8 Redressement d'un champ de vecteur

Théorème 2.3. *Soit X un champ de vecteurs sur une variété M. Pour tout point x_0 de M tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe une carte locale (U, φ) de classe C^k en x_0, telle que :*

$$\varphi_*(X_{|U}) = (X_{e_1})_{|\varphi(U)} \quad .$$

où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. **:**

Comme le problème est local, et par les propriétés des champs de vecteurs,nous pouvons supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, que $x_0 = 0$ et que $X(x_0) = e_1$.

Notons (ϕ_t) le flot local de X en 0. Considérons l'application :

$$\theta : (t, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \phi_t(0, x_2, \ldots, x_n)$$

qui est de classe C^k et définie sur un voisinage de 0.

Comme $\phi_0 = id$ et $\frac{d\phi_t(0)}{dt}_{|0} = X(0) = e_{|1}$, on a la différentielle de θ en 0 est l'identité.

Donc par le théorème d'inversion locale, θ est un C^k- difféomorphisme local en 0. Pour tout $x = (x_1; \ldots; x_n)$ suffisamment proche de 0, on a :

$$\begin{aligned} d\theta_x(e_1) &= \frac{d}{dt}_{|t=x_1} \theta(t, x_2, \ldots, x_n) \\ &= X(\phi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)) \\ &= X(\theta(x)) \end{aligned}$$

Donc $\theta_*(X_{|e_1}) = X$ sur un voisinage de 0, ce qui montre le résultat. $\square$

Chapitre 3

Théorème de Frobenius et feuilletages

3.1 Champs de p-plans

On introduit maintenant les champs de p-plans , objets que l'on peut penser comme généralisation des champs de vecteurs . Ils seront utilisés dans la suite pour donner la définition de feuilletage .

Soit M une variété de dimension n .

Définition 3.1. On appelle fibration grassmannienne de M de rang p la fibration grassmannienne de rang p , $p \leq n$ du $\pi : TM \to M$ de M, qui est de classe C^k.

comme le fibré tangent TM de M s'identifie avec $M \times \mathbb{R}^n$, alors la fibration grassmannienne de rang p de TM est isomorphe à la fibration triviale $pr_1 : M \times \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n) \to M$.

Définition 3.2. Un champ de p-plans Δ de classe C^k sur M est une section différentiable (de classe C^k) de la fibration grassmannienne de rang p de M.

Remarque 3.1. *Un champ de p-plans C^k sur M est la donnée, pour tout point x de M, d'un sous-espace vectoriel Δ_x de T_xM, qui « dépend de manière C^k de x. » c'est -à -dire :*
$\Delta : x \longrightarrow \Delta_x$

Définition 3.3. Un champ de vecteurs X sur M est dit tangent à un champ de p-plans Δ si pour tout x dans X, le vecteur $X(x)$ appartient au sous-espace Δ_x de T_xM.

Proposition 3.1. *Si Δ est un champ de p-plans C^k sur M, et si U est un ouvert de M, alors, en identifiant TU avec son image canonique dans TM, la rectriction $\Delta_{|U}$ de Δ à U est un champ de p-plans C^k sur U.*

Proposition 3.2. *soient N une variété de dimension n et de classe C^{k+1}, $f : M \to N$ un C^{k+1}-difféomorphisme local et Δ un champ de p-plans C^k sur N. Posons, pour tout x dans M,*

$$f^*\Delta(x) = (d_xf)^{-1}(\Delta_{f(x)}).$$

Alors $x \longmapsto f^*\Delta(x)$ est un champ de p-plans C^k sur M, appelé transport de Δ par le diféomorphisme f.

Propriétes :

1. $id_*\Delta = \Delta$
2. $(g \circ f)_*\Delta = f_*(g^*\Delta)$.
3. De plus, si U est un ouvert de N et $i : U \to N$ l'inclusion, alors $i^*\Delta = \Delta_{|U}$ et
$$(f^*\Delta)_{|f^{-1}(U)} = (f_{|f^{-1}(U)})^*(\Delta_{|U}).$$
4. Si f est un C^{k+1}-difféomorphisme et si Δ est un champ de p-plans C^k sur M, alors on note $f_*\Delta = (f^{-1})^*\Delta$, i.e. pour tout $y \in N$,
$$f_*\Delta(y) = d_{f^{-1}(y)}f(\Delta_{f^{-1}(y)}).$$

On peut aussi définir un champ de p-plan de classe C^k par la proposition suivante :

Proposition 3.3. *Un champ de p-plans $\Delta : x \to \Delta(x)$ de M est de classe C^k si et seulement si, pour tout point x_0 de M, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et p champs de vecteurs X^1, ..., X^p sur U, de classe C^k, tels que, en tout point x de U, le p-champ de vecteurs $(X^1(x), \ldots, X^p(x))$ soit une base de Δ_x.*

Exemple 3.1. Considérons le champ de plans Δ de classe C^∞ sur la variété $\mathbb{R}^3$ munie des coordonnées $u = (x, y, z)$, qui est engendré par les champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants en tout point

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

i.e. qui est défini par $u \mapsto \Delta_u = \langle X(u), Y(u)\rangle$. Ce champ de plans est invariant par les translations dans les directions y et z. Le long de l'axe de coordonnée des x, il est horizontal en l'origine, et devient de plus en plus vertical quand on va vers l'infini (voir figure ci-dessous). Notons que :

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \notin \langle X, Y\rangle
\end{aligned}$$

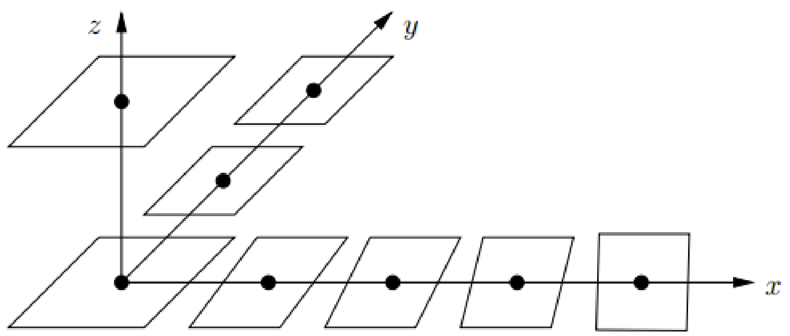

FIGURE 3.1 – Exmple de champ de p-plans

3.2 Feuilletages

Soit M une variété différentiable (de classe C^r) de dimension n.

Définition 3.4. Un atlas de cartes feuilletées de dimension p et de classe C^k, $k \leq r$, sur M est un sous-atlas de cartes $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I\}$ de classe C^k de M, tel que :

i) pour chaque carte (U, φ) de $\mathcal{A}$, on a $\varphi(U) = V \times T$ avec V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et T un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$,

ii) pour toutes les cartes $\varphi : U \to V \times T$ et $\varphi' : U' \to V' \times T'$ dans $\mathcal{A}$, le changement de cartes est localement de la forme : $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$

$$(x, y) \longmapsto (f(x, y), g(y)),$$

où f, g sont des fonctions des classes C^k.

Définition 3.5. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p, et différentiable(de classe C^k) sur M est un atlas maximal de cartes feuilletées différentiable(de classe C^k) de dimension p. Si M est de dimension n, on appelle l'entier $(n - p)$ la codimension du feuilletage.

Définition 3.6. Une variété feuilletée $(M; \mathcal{F})$ différentiable (de classe C^k)est une variété M de classe C^k munie d'un feuilletage différentiable(de classe C^k).

Propriété :

i) Si $\varphi : U \to V \times T$ est une carte feuilletée de classe C^k alors $\varphi^{-1} : V \times \{y\} \to U$ est un plongement pour tout $y \in T$; de même pour $\varphi^{-1} : \{x\} \times T \to U$, $x \in V$.

ii) Si $\varphi : U \to V \times T$ est une carte locale d'un feuilletage $\mathcal{F}$ alors les sous-variétés de classe C^k de U données par $\varphi^{-1}(V \times \{y\})$ sont appelés les feuilles locales, ou plaques locales, de $\mathcal{F}$ dans cette carte. Les sous-variétés $\varphi^{-1}(\{x\} \times T)$ sont les transverses locales de $\mathcal{F}$.

Remarque 3.2. *Les feuilles locales sont indépendantes des cartes.*

En effet, si (U, φ) ; (U', φ') sont deux cartes feuilletées de $\mathcal{F}$ et si $(x, y) \in U \cap U'$, alors x, y sont dans une même feuille locale pour la carte (U, φ) si et seulement s'ils le sont pour la carte (U', φ').

On peut dire que la définition du feuilletage $\mathcal{F}$ est donnée afin que les feuilles locales soient bien définie, c'est -á -dire indépendantes de la carte locale choisie. On remarque que deux feuilles locales différentes sont disjointes.

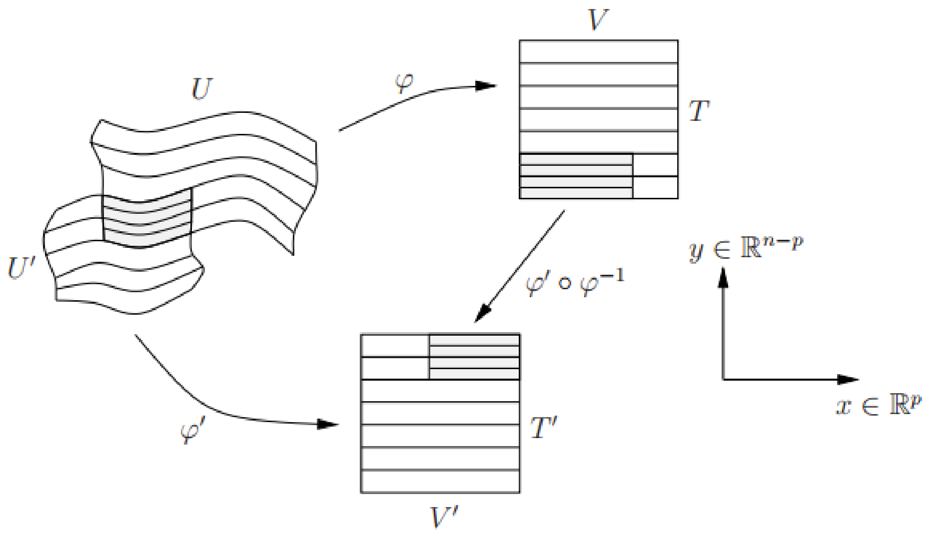

FIGURE 3.2 –

Propriétes :

L'espace topologique $\mathbb{R}^n$ est identifié de manière usuelle à l'espace topologique produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Munissons l'ensemble $\mathbb{R}^n$ d'une nouvelle topologie produit de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^p$ et de la topologie discrète sur $\mathbb{R}^{n-p}$, qui est plus fine (plus faible) que la topologie usuelle. Comme les homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$(x, y) \longmapsto (f(x, y), g(y)),$$

sont aussi des homéomorphismes locaux pour cette nouvelle topologie sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.4. *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. La variété M admet une seule topologie telle que les cartes feuilletées de $\mathcal{F}$ soient des homéomorphismes entre des ouverts de M et des ouverts de $\mathbb{R}^n$, muni de la nouvelle topologie qu'on vient d'introduire.*

Définition 3.7. On appelle topologie des feuilles cette nouvelle topologie sur M.

Définition 3.8. Si $A \subseteq M$ est une partie de M, on appelle encore topologie des feuilles sur A la topologie induite sur A par la topologie des feuilles sur M.

Proposition 3.5. *La topologie des feuilles est plus fine de la topologie originelle sur M ; de plus, si $0 < p < n$ alors elle est strictement plus fine.*

Comme la topologie originelle de M est séparée, la topologie des feuilles l'est aussi. Les feuilles locales sont ouvertes pour la topologie des feuilles.

Définition 3.9. Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée, et $x \in M$ un point. On appelle feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ passant pour x la composante connexe de x dans la topologie des feuilles de M. On la note $\mathcal{F}_x$.

Propriétés

Proposition 3.6. *les feuilles de $\mathcal{F}$ forment une partition de M. En général, l'ensemble des feuilles est non dénombrable .*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_x$ une feuille locale de $\mathcal{F}$, muni de la topologie induit par la topologie des feuilles.
Montrons que $\mathcal{F}_x$ est un espace topologique séparé et à base dénombrable ?.
Puisque M est une variété feuilleté donc $\mathcal{F}_x$ est séparé.
Comme M est dénombrable, on peut recouvrir M par un ensemble dénombrable de cartes feuilletées $(U_i, \varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que U_i soit relativement compact, et telle que,

$$\{\forall i \in \mathbb{N} : j \in I : U_j \cap U_i \neq \emptyset\} \quad \text{soit fini.}$$

Soit x un élément de M. Alors la feuille $\mathcal{F}_x$ est réunion d'un ensemble dénombrable de feuilles locales : si $x \in U_{i_0}$, prendre la feuille locale de x dans U_{i_0}, puis pour tout i tel que $U_{i_0} \cap U_i \neq \emptyset$, prendre la feuille locale dans U_i d'un point fixé quelconque de $U_{i_0} \cap U_i$. Donc $\mathcal{F}_x$ est à base dénombrable. □

Proposition 3.7. *Les feuilles locales de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés différentiable(de classe C^k), chaque feuille $\mathcal{F}_x$, munie de sa topologie des feuilles et de son atlas des feuilles locales est une variété différentiable(de classe C^k). De plus, si on munit $\mathcal{F}_x$ de la topologie induite par la topologie originelle de M, alors elle résulte en une sous-variété immergée de M, avec l'inclusion canonique.*

On peut définir le quotient d'une variété feuilletée par son feuilletage.
Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée, avec $\mathcal{F}$ de codimension $n-p$. Supposons que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient fermées dans M.

Définition 3.10. On définit l'espace des feuilles de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ comme l'espace topologique quotient $M \backslash \mathcal{R}$, par la relation d'équivalence où : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$: on identifie les point de M dans la même feuille de $\mathcal{F}$.

Définition 3.11. Un isomorphisme (de feuilletages C^k) d'une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ de classe C^k dans une autre $(M^{'}, \mathcal{F}^{'})$ est un C^k-difféomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ tel que $f^*(\mathcal{F}^{'}) = \mathcal{F}$ (ou de manière équivalente, telle que les applications f et f^{-1}, lues dans des cartes locales feuilletées.

3.3 Théorème de Frobenius

Dans la suite on travaille avec des variétés lisse (ou de classe C^∞), et on donne une définition qui généralise le fait qu'un champ de vecteurs dans une variété soit intégrable.

Proposition 3.8. *Tout feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^k et de dimension p sur M définit un champ de p-plans de classe C^{k-1}, qui est l'application*

$$x \longmapsto T_x\mathcal{F}_x$$

qui à un point x de M associe l'espace tangent en x à la feuille $\mathcal{F}_x$ passant par x.
Cette application est bien défini, car $\mathcal{F}_x$ est une sous-variété immergée de classe C^k de M.

Définition 3.12. Un champ de p-plans Δ lisse sur M, est dit intégrable s'il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ lisse de dimension p sur M tel que $\Delta_x = T_x\mathcal{F}_x$ pour tout $x \in M$.
Cela dit qu'il existe une variété tangente au champ de p-plans en tout point, à savoir la feuille de notre feuilletage.

Définition 3.13. On dit qu'un champ de plans est involutif si étant donnés deux champs de vecteurs X et Y tels que $\forall x \in M$:

$$X(x) \quad \text{et} \quad Y(x) \in \Delta_x \quad \text{alors} \quad [X;Y](x) \in \Delta_x$$

Proposition 3.9. *Un tel feuilletage est unique.*

Démonstration. Considérons deux feuilletages $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sur M tel que $T_x\mathcal{F}_x = T_x\mathcal{F}'_x$ pour tout x dans M. Alors la composée $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ d'une carte feuilletée $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ et d'une autre $(U', \varphi') \in \mathcal{F}'$ est (localement) de la forme :

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : (z, t) \to (f(z, t), g(t))$$

car la dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ de sa seconde composante par rapport à la première variable est nulle.

Cela dit que les atlas maximal $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont compatibles, et la condition de maximalité donne $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. □

Si on se donne un p-champ de plans Δ sur M, sous quelle conditions existe-t-il un feuilletage $\mathcal{F}$, de dimension $n - p$, tal que $\forall x \in M \quad T_x\mathcal{F} = \Delta_x$?.
La réponse à cette question se trouve dans le théorème de Froebenius :

Théorème 3.1. ***(Théorème de Frobenius)***

Un champ de p-plans Δ de classe C^∞ sur M est intégrable si et seulement si, pour tous les champs de vecteurs X et Y sur M de classe C^∞ et tangents à Δ, le crochet de Lie $[X, Y]$ sur M est tangent à Δ.

Démonstration. Soit Δ est intégrable, donc il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p, c'est-à-dire : $\Delta_x = T_x\mathcal{F}_x$.

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M tangents à Δ, et $x \in M$, montrons $[X, Y](x) \in \Delta_x$.

Soit (U, φ) une carte locale en x, si on remplase X et Y par :

$X = \varphi_*(X_{|U})$,

$Y = \varphi_*(Y_{|U})$.

X, Y tangent à Δ équivaut à dire qu'il est combinaison linéaire de $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_p}$ engendre linéairement $\Delta_x \subset T_xM$.

$$[X, Y](x) = [\varphi_*(X_{|U}), \varphi_*(Y_{|U})](x) = \varphi_*[X, Y]_{|\varphi(U)}(x) \in T_x\mathcal{F} = \Delta_x.$$

Donc on a $[X,Y](x) \in \Delta_x$.

Réciproquement, supposons que la seconde propriété soit vérifiée, et montrons qu'alors Δ est intégrable.

Montrons par récurrence sur p que :

Si $(X_1,\ldots,X_p)$ est un des champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants, et commutants alors il existe un $C^\infty-$ difféomorphisme local φ en 0 tel que, au voisinage de 0.

$$\varphi_*(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i \in \{1,\ldots,p\}.$$

Ceci montrera que le champ de p-plans engendré par $\varphi_*(X_1),\ldots,\varphi_*(X_p)$ est tangent au feuilletage $\mathcal{F}$. Donc le champ de plans engendré par $X_1,\ldots,X_p$ est intégrable au voisinage de 0.

- Le cas $p=1$ découle du théorème de redressement 2.3 .
- Supposons le résultat vrai pour $(p-1)$, et montrons pour p.

On a $[X_i,X_j]=0$, pour tout $i,j \in \{1,\ldots,p\}$.

On suppose que $X_i(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(0)$ pour $i \in \{1,\ldots,p\}$, si :

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

où $(a_{ij}(x))_{1\leq i;j\leq p}$, la matrice identité en $x=0$, est inversible, d'inverse $(b_{ij}(x))_{1\leq i;j\leq p}$. Par les formules donnant l'inverse d'une matrice, les fonctions b_{ij} sont C^∞.

Posons :

$$X_i' := \sum_{j=1}^{n} b_{ij}X_j$$

Alors les $X_i'(x)$ engendrent encore Δ_x.

Par construction, on a :

$$X_i' = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^{n} c_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

utilisant le fait que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, par la linéairité de crochet de lie on a :

$$
\begin{aligned}
[X'_i, X'_j] &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=p+1}^{n} c_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=p+1}^{n} c_{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] + \sum_{k=p+1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, c_{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right] + \sum_{k=p+1}^{n}\left[c_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&+ \sum_{k=p+1}^{n}\left[c_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, c_{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right] \\
&= \sum_{k=p+1}^{n} d_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Or par l'hypothèse, il existe des fonctions e_{ijk} pour $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$ de classe C^∞ telles que

$$
\begin{aligned}
[X'_i, X'_j] &= \sum_{k=1}^{p} e_{ijk} X'_k \\
&= \sum_{k=1}^{p} e_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=p+1}^{n} c_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \qquad (3.2) \\
&= \sum_{k=1}^{p} e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{p} e_{ijk}\sum_{j=p+1}^{n} c_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

De (3.1) et (3.2), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k} = 0. \qquad (3.4)$$

ce qui, par indépendance des $\frac{\partial}{\partial x_k}$, montre que $e_{ijk} = 0$ pour $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$.

Utilisons un $C^\infty-$ difféomorphisme local en 0, que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Soit

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Comme $[X_p, X_i] = 0$, pour $i \in \{1, \ldots, p-1\}$.

$$
\begin{aligned}
[X_p, X_i] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right] &= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}
$$

Donc $[X_p, X_i] = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.
D'aprés 3.4, on a $\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0$. pour tout j et $i \in \{1, \dots, p-1\}$.
c'est-à-dire que a_j est une fonction des coordonnées $x_p, \dots, x_n$ seulement.

Par le théorème du redressement (2.3) appliqué au champ de vecteurs

$$Y = \sum_{j=p}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

on peut supposer que $Y = \frac{\partial}{\partial x_p}$, alors :

$$\begin{aligned} X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{j=p}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= Y + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ X_p &= \sum_{j=1}^{p-1} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_p}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$:
Posons $f_i(x_p, \dots, x_n) = -\int_0^{x_p} a_i(t, x_{p+1}, \dots, x_n)dt$ qui est de classe C^∞.
Posons aussi :

$$y_i = \begin{cases} x_i + f_i(x_p, \dots, x_n); & \text{pour } i \in \{1, \dots, p-1\} \\ x_i; & \text{pour } i \in \{p, \dots, n\}. \end{cases}$$

L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto y_i(x_1, \dots, x_n)$ est un $C^\infty-$ difféomorphisme local en 0. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

Donc, pour $j \in \{1, \dots, p-1\}$, on a $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_p} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=p}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial x_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=p}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_p}\frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_p} \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} -a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_p}
\end{aligned}$$

On a $\frac{\partial}{\partial x_p} = \sum_{i=1}^{p-1} -a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_p}$, donc : $\frac{\partial}{\partial x_p} + \sum_{i=1}^{p-1} a_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_p}$ d'aprés 3.5, on a $X_p = \frac{\partial}{\partial y_p}$. Donc, pour $j \in \{1, \ldots, p\}$, on a $X_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$,c'est-à-dire Δ est intégrable. $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons presentée la notion de feuilletage et ses propriétés, aprés on a enoncé et démentrer le théorème fondamental de Frobenius qui donne une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité locale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dont le membre de droite dépend des variables, des inconnues, mais ne dépend pas de dérivées partielles de ces inconnues.

Bibliographie

[1] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Maîtrise de mathématiques, Collection U. Série Mathématiques,Armand Colin (1972).

[2] Y. Boukhatem, *Cours de géométrie différentielle*, Université Laghouat, 2016.

[3] Y. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Monographies Universitaires de Mathématiques, Dunod 1968.

[4] Charles Cochet, *Généralités sur les fibrés*, Université Paris 7.

[5] F. Dillen, L. Verstraelen, *Handbook of Differential Geometry*, Volumes 1 and 2, Elsevier (2000 and 2006).

[6] Frédéric Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire , Cours de première année de mastère*, École Normale Supérieure (2006-2007).

[7] M.Karl Oeljeklaus, *RAPPORT DE STAGE : Feuilletage de variétés* , , Laurent Bruasse , (juin-juillet 1996).

[8] A.Kolmogorov,S.Fomine *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle*, Mir. Moscou , Décembre 1973.

[9] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Volumes 1 to 5, Second Edition, Publish or Perish (1979).