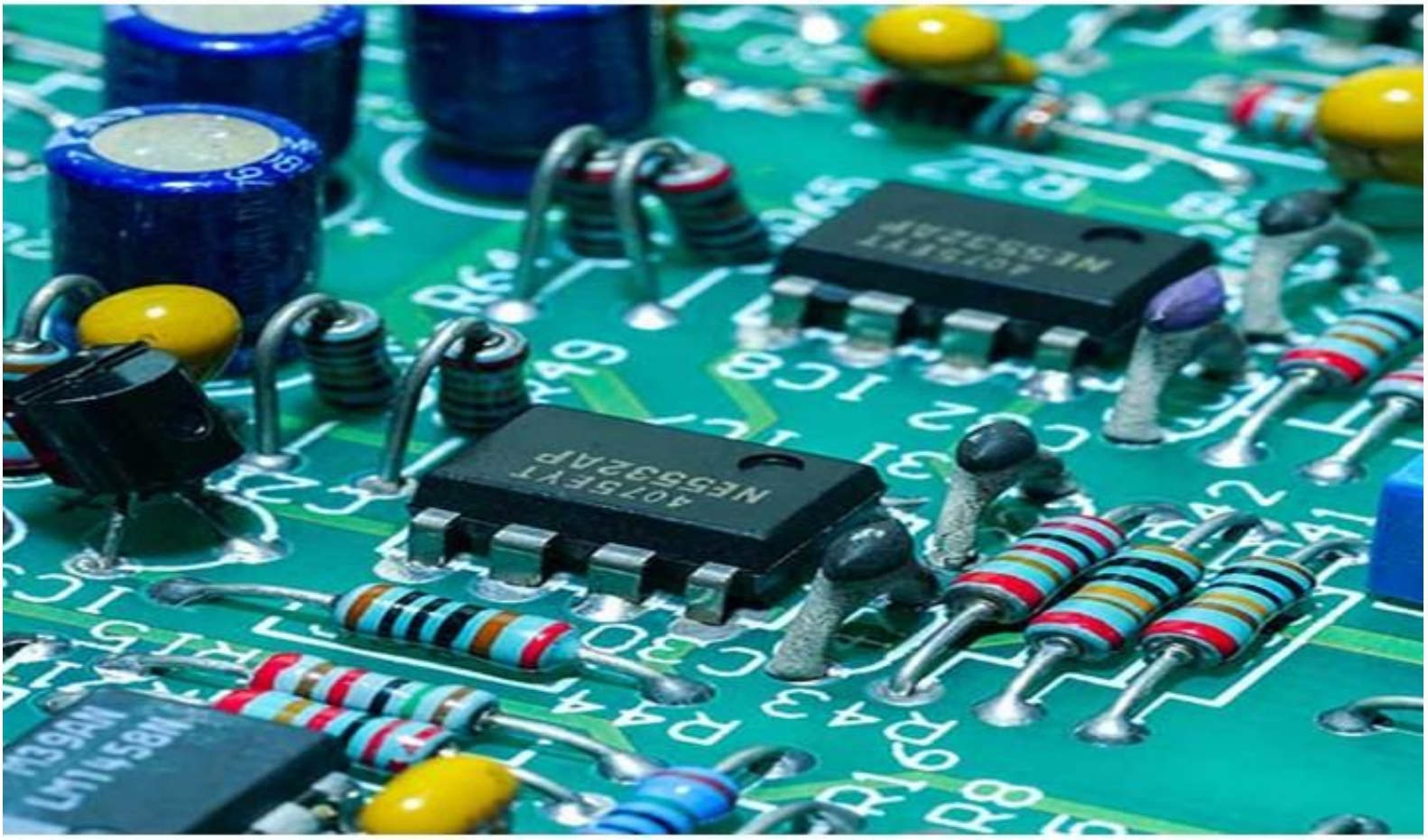
الفيزياء التطبيقية

دروس و تمارين محلولة

ليسانس-السنة الثانية

علوم و تكنولوجيا



الإلكترونيك الأساسية -1-

الطبعة الأولى

د. قدّوح أحمد

2022-2023

جامعة عمار ثليجي الأغواط
Université Amar Telidji - Laghouat

كلّية التكنولوجيا
قسم الجذع المشترك
عـــــلوم و تكنولوجيا

الالكترونيك الأساسية -1-
دروس و تمارين
الجزء الأوّل

انجاز:
د. قدّوح أحمد

السنة الجـــــــــــــــــامعية
2023/2022

فهرس المحتويات

مقــدّمــة..... 1
المصفوفـــــــات..... 2
1 تمهيد..... 3
2 حل جملة معادلات.. 3
3 كتابة جملة معادلات بواسطة المصفوفات..... 4
4 حل المعادلات المصفوفاتية..... 5
1.4 جمع المصفوفات 5
2.4 طرح المصفوفات 6
3.4 ضرب المصفوفات..... 6
1.3.4 ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو مركب 6
2.3.4 ضرب المصفوفات في بعضها..... 7
4.4 محدد المصفوفة..... 8
5.4 مقلوب المصفوفة..... 10
6.4 حل جملة المعادلات بواسطة المصفوفات..... 11

الفصل الأوّل

التيّار المستمر -الدارات الكهربائية ثنائية الأقطاب- قوانين كيرشوف

1 تمهيد..... 14
2 مفاهيم كهربائية..... 14
3 عناصر الدارة الكهربائية..... 14
4 العناصر الخاملة..... 14
1.4 أجهزة الإستقبال 15
2.4 المقاومات..... 15
1.2.4 المقاومات الكربونية..... 15
3.4 الذاتيات 17
4.4 المكثفات..... 18
5 العناصر النشطة..... 19
1.5 مصادر الجهد الصرفة..... 20
2.5 مصادر التيّار الصرفة..... 20

6. الكمون بين طرفي العناصر الخاملة 20
7. المصادر الكهربائية للجهد... 21
1.7 مصدر الجهد إذا دخله التيّار من القطب السالب 21
2.7 مصدر الجهد إذا دخله التيّار من القطب الموجب 22
3.7 أجهزة الإستقبال 22
8. قوانين تجميع العناصر الخاملة والنشطة 23
1.8 تجميع العناصر الخاملة 23
2.8 تجميع مصادر الجهد 24
1.2.8 التجميع على التسلسل 24
2.2.8 التجميع على التفرع 24
9. تعريف الدارات الكهربائية 24
10. قانون كيرشوف للعقدة 25
11. قانون كيرشوف للعروة 25
12. دراسة مصدر للجهد بحمولة 26
13. دراسة مصدر للتيّار بحمولة 26
14. مفهوم نقطة التشغيل 29
نظريات تحليل الدارات الكهربائية 34
1. تمهيد 35
2. طريقة التيّارات الوهمية (طريقة ماكسويل) 35
1.2 طريقة التيّارات الوهمية مباشرة باستعمال المصفوفات 35
2.2 طريقة التيّارات الوهمية دون مصفوفات 37
3. نظرية التركيب (التبديل) 38
4. نظرية تيفنين (THEOREME DE THEVENIN) 40
5. نظرية نورتن (THEOREME DE NORTON) 43
6. نظرية كينيلي 45
1.6 التحويل المثلثي-النجمي 45
1.1.6 المثلثي إلى النجمي 46
2.6 التحويل النجمي-المثلثي 48
7. نظرية ميلمان 49
8. نظرية التعويض (SUBSTITUTION) 51
9. نظرية التنضيد (RECIPROCITE) 51

10. نظرية التحويل الأعظمي للطاقة 52
النظام المتغير- الإشارة الكهربائية 73
1. تمهيد 74
2. أنواع من الإشارات75
1.2 الإشارات الفريدة اللادورية 75
2.2 الإشارات العشوائية 75
3.2 الإشارات الدورية 75
3. الأنظمة الإلكترونية 75
1.3 الأنظمة ذات الثوابت المحددة 75
2.3 الأنظمة ذات الثوابت الموزعة 75
3.3 الأنظمة السببية 75
4.3 الأنظمة الثابتة 76
5.3 الأنظمة المستقرة 76
6.3 النظام الخطي 76
4. مراحل إستجابة الشبكات 76
5. أمثلة عن الإشارات 77
1.5 الإشارات اللادورية 77
1.1.5 الإشارات الثابتة زمنيا 77
2.5 الدوال الدورية 78
1.2.5 الدّالة الجيبية 78
6. تحويلات فوريه (FOURIER) 79
التيّار المتناوب الجيبي-الدارات الكهربائية 88
1. تمهيد 89
2. طريقة الحل الجبرية 90
1.2 طريقة تمثيل فرينل FRESNEL 90
2.2 طريقة الأعداد المركبة 91
3. القيم المنتجة 93
4. تجميع الممانعات 93
5. الاستطاعة في التيّار المتناوب الجيبي 93
1.5 الاستطاعة اللحظية 93
، لا يمكن قياسها في المخبر 93

2.5 الاستطاعة المتوسطة..... 93
3.5 الاستطاعة الإرتكاسية (PUISSANCE REACTIVE) : 94
خصائص رباعي الأقطاب..... 101
1. تمهيد 102
دراسة إستجابة شبكة كهربائية لإثارة متناوبة جيبية أو مستمرة..... 102
2. رباعي الأقطاب باستعمال وسائط الممانعات Z..... 102
1.2 التعريف..... 102
2.2 الشبكات التقابلية وغير التقابلية : (RECIPROQUE OU NON)..... 103
3.2 الشبكات T المكافئة لرباعي الأقطاب التقابلي..... 104
3. وسائط المسامحات Y(PARAMETRES ADMITTANCE) 105
1.3 تعريف 105
2.3 الشبكات Π المكافئة لرباعي الأقطاب التقابلي..... 107
4. الوسائط الهجينة H(PARAMETRES HYBRIDES)..... 107
5. الوسائط الهجينة العكسية G(PARAMETRES HYBRIDES INVERSES) 108
6. مصفوفة الأنّ تقال T(MATRICE DE TRANSFERT)..... 109
7. تجميع رباعي الأقطاب على التسلسل..... 110
8. تجميع رباعي الأقطاب على التفرع..... 111
9. تجميع رباعي الأقطاب على الطابور (CHAINE) 111
الاستجابة الترددية والمرشحات..... 118
1- تمهيد **ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.**
2- دالة التحويل لرباعيات الأقطاب (FONCTION DE TRANSFERT) :..... 119
1.2 دراسة التضخيم في الجهد: 121
2.2 القياس التجريبي للكسب في الجهد..... 121
3.2 دراسة$\varphi(X)$ 122
4.2 دراسة الجهد عند المقاومة الكهربائية R..... 122
3- مرشح اهتزازات شريطي 123
4- بيان بود للمرشح..... 123
5- أنواع المرشحات 123
الخاتمة 135

مقــدّمــة

يبدو لي مُنذ وقت طويل كأستاذ وليس كمهندس أنّه ينبغي أن نسعى إلى أن نُقدّم للطالب (ة) ليس فقط أكبر قدر ممكن من المعلومات، فتكنولوجيا الإنترنت والشبكة العالمية الآن تسمح لنا بذلك، لكن يجب أن نسعى جاهدين لجعل هذه المعلومات تصل بشكل مبسط و مفهوم لتكون في متناول القارئ العادي. إسهاما منّي في نشر المعرفة (المعلومة) و مشاركة الآخرين في هذا العطاء إرتأيت أن أساهم أنا كذلك في هذا الفعل و لو على مستوى محدود للطلبة الذّين أدّرسهم هذا المقياس، وآمل أن يُقدّم هذا المرجع إضافة من الناحية البيداغوجية في عالم الإلكترونيك الأساسية.

الإلكترونيك علم من العلوم التقنية، أو العلوم الهندسية، التي تشكل واحدة من أهم فروع الفيزياء التطبيقية، وهي كلمة مشتقة من الإلكترون ولهذا غالبا ما ارتبطت بمعالجة الإشارة الكهربائية الضعيفة **الحاملة للمعلومة،** كالتيّار، الكمون أو الإستطاعة الكهربائية.

في هذا التعريف، مفهوم المعلومة بأوسع معانيه: يُحدّد أيّ مقدار فيزيائي قابل للقياس، مثل درجة الحرارة، الصوت أو السرعة، أو مجرد، مثل الصورة، الرمز...إلخ و الذي يُمكن أن يتطوّر مع الزمن وفقا للقوانين الفيزيائية المعروفة.

إنّ عالم الإلكترونيك تطوّر في محورين أساسين:

1. خفض حجم العناصر الإلكترونية (الترانزستورات وغيرها من الهياكل المماثلة) ممّا يتيح التكامل أكثر وبأكثر فعّالية، والذي أدّى إلى تقدّم كبير في عالم الإلكترونيات.

2. التطور التدريجي للطرق والمبادئ المستخدمة في معالجة الإشارة، في البداية الإشارة التماثلية ، ثم الرقمية، إلى أن أصبحت تُقدم في شكل برامج متكاملة حيث تم دمج الوظائف الإلكترونية المتزايدة التعقيد والكفاءة في معظم الميادين التقنية داخل عناصر إلكترونية (المتحكمات الدقيقة، المعالج الدقيق، بطاقة الأردوينو...إلخ).

كتاب الإلكترونيك الأساسية (الجزء الأوّل) هذا مُقدم لطلاب الجامعة في الطور الأوّل، وفيه مجموعة من المحاور حيث ابتدأته بالمصفوفات و هي مقدّمة رياضية بحتة لما لهذا المحور من أهمّية و خاصة في المحور المتعلق بتحليل الدارات الكهربائية، بعد ذلك انتقلت إلى محور الدارات الكهربائية ثنائية القطب أين عرّفت ثنائي القطب الخامل و النشط و أسردت بعض القواعد الإصطلاحية التي ينبغي التقيّد بها لفهم باقي محتوى الكتاب، ثمّ دخلتُ في صلب الكتاب و هذا بالتعرُّف على كيفية تحليل الدارات الكهربائية في النظام المستمر إعتمادا على عدّة نظريات، بعدها النظام المتغيّر و المتمثّل في التيّار المتناوب الجيبي و نمط التحليل في هذا النظام، أمّا رباعيات الأقطاب فجاءت كمحور رياضي بِنسق كهربائي مكمّل لدراسة الدارات الكهربائية في اطار بيداغوجي أكاديمي لتسهيل الدراسة و قد انْعكس ذلك في المحور الأخير لهذا الجزء من الكتاب و المتمثّل في المرشّحات الخاملة أيْن تطرقنا إلى مختلف أنواعها و كذا أهمّيتها و بهذا نعتقد أنّ الطالب (ة) يكون قد تمكّن من إدراك المفاهيم الأساسية في الإلكترونيك.

المصفوفـــــــات

1. تمهيد

هي مجموعة مستطيلة من الأعداد أو الرموز أو من التعبيرات منتظمة بشكل أعمدة وسطور. يُدعى كل عنصر من هذه المجموعة بالخلّية.

مثال1:

مصفوفة تحتوي على ثلاثة أسطر وعلى ثلاثة أعمدة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

فالأعداد 2، 1، 3، 5، 6، 7، 4، 8-، 9 تمثل الخلايا أمّا الأعداد: 2، 1، 3 تمثّل السطر الأوّل و الأعداد: 2، 5، 4 تمثل العمود الأوّل.

يمكن تعريف المصفوفة عامة على أنّها دالة رياضية خطّية

2. حل جملة معادلات

قبل أن نعرّف المصفوفات، ننطلق من حل جملة من المعادلات.

لتكن جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 2x + y = 4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2) \end{cases}$$

- يمكن حل هذه الجملة بالطرق "العادية"، أي نستخرج من المعادلة (2): $\boldsymbol{y = 4 - 2x}$ ونعوضها في المعادلة الأولى، فنجد $\boldsymbol{11x - 12 = -1}$ ، ومنه $\boldsymbol{y = 2}$ $\boldsymbol{x = 1,}$.
- كما يمكن حل الجملة السابقة بطريقة محددات كرامر (déterminants de Cramer) . ويكون ذلك كما يلي:

1) نقوم أوّلا بحساب محدّد الجملة: $\boldsymbol{\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11}$

2) نحسب المحدد الذي سيُستعمل لإيجاد x ، ونحصل عليه بتعويض عناصر Δ الموجودة في العمود الأوّل والتي تمثّل معاملات x بالثوابت الموجودة في الطرف الثّاني للمعادلتين فنحصل على: $\boldsymbol{\Delta_x =}$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11}$$ ومنه $\boldsymbol{x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1}$.

3) نعيد العملية نفسها معy ، فنحسب المحدد الذي يُستعمل لإيجاد y، ونحصل عليه بتعويض عناصر Δ الموجودة في العمود الثّاني والتي تمثل معاملات y بالعناصر الموجودة في الطرف الثّاني للمعادلتين فنحصل على: $\boldsymbol{\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22}$ ومنه $\boldsymbol{y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2}$.

المثال 1

- أوجد حلول الجملة التالية بالطريقة "العادية" ثم بطريقة محددات كرامر:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \dots\dots\dots\dots (1) \\ x - y = -2 \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

الحل

$$\boldsymbol{x = 2 \quad , \quad y = 4}$$

المثال 2

- أوجد حلول الجملة التالية بالطريقة "العادية":

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \dots\dots\dots\dots (1) \\ x - y + z = 2 \dots\dots\dots\dots (2) \\ 2x + 3y = 8 \dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

الحل

$$\boldsymbol{x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 3}$$

3. كتابة جملة معادلات بواسطة المصفوفات

يمكن إعادة أمثلة الفقرة السابقة كلّها بواسطة المصفوفات. فلنوضح أكثر: لنأخذ الجملة السابقة:

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

هذه الأخيرة يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

حيث لدينا في أقصى اليسار ما يسمى بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ المكونة من سطرين وعمودين. العمود الأوّل يحتوي على معاملات x والعمود الثّاني على معاملات y. هذه المصفوفة مضروبة في مصفوفة أخرى $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ فيها عمود واحد وسطرين اثنين يوجد x في أوّلهما وy في ثانيهما. هذه الأخيرة تسمى بالمصفوفة "العمود" وتسمى أيضا بالشعاع "العمود" (الأشعة هي حالة خاصة من المصفوفات). أخيرا، الطرف الثّاني من المعادلة هو عبارة عن مصفوفة عمود: $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ يختلف كل سطر منها عن الطرف الثّاني من كلتي المعادلتين المكونتين للجملة. عند كتابة الجملة بواسطة المصفوفات، يجب مراعاة الترتيب.

المثال 3

- أكتب الجمل المبيّنة في المثالين 1 و 2 على شكل معادلات مصفوفة.

الحل

- معادلة المثال 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$
- معادلة المثال 2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

تذكّر:

المصفوفات هي "كائنات" رياضية لها عدد من الأسطر m وعدد من الأعمدة n ويرمز لها بالمصفوفات m x n.

- الأشعة على الأسطر تمثّل حالة خاصة من المصفوفات وتسمى أيضا بالمصفوفات "السطر" وهي التي لها سطر واحد فقط، على عكس الأشعة على العمود التي تكلّمنا عنها أعلاه.
- كل سطر أو عمود يتشكل من مجموعة من **الخلايا**.

حالات خاصة أخرى:

- المصفوفات المربعة هي التي عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها $m=n$،
- المصفوفات المستطيلة هي التي عدد أسطرها لا يساوي عدد أعمدتها $m\neq n$
- المصفوفات المعدومة هي التي كل عناصرها معدومة (تساوي الصفر).

4. حل المعادلات المصفوفاتية

للإجابة على هذا السؤال، يجب أن نذّكر أوّلا كيف تتم العمليات في مجموعة المصفوفات:

1.4 جمع المصفوفات

تجمع عناصر المصفوفات حسب موضعها. فالعناصر الموجودة في نفس السطر ونفس العمود تجمع فيما بينها. العنصر الذي في السطر 1 والعمود 1 يجمع مع العنصر الذي في نفس السطر ونفس العمود وهكذا. مثلا، لتكن المصفوفتان $A(2x2)$ و $B(2x2)$، فجمعهما تنتج عنه المصفوفة الآتية:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

العنصر الحيادي لعملية جمع المصفوفات هي المصفوفة المعدومة وهي التي كل عناصرها تساوي الصفر. مثلا المصفوفة المعدومة 2x2 هي: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.4 طرح المصفوفات

تطرح عناصر المصفوفات حسب موضعها من بعضهاو تتم بنفس طريقة الجمع.

جمع المصفوفات عملية تجميعية و تبديليه، أمّا طرح المصفوفات فهي عملية غير تبديليه.

المثال 4

أحسب $A+B$ ، $A-B$ ، في الحالات التالية:

الحالة 1

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}10 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

الحالة 2

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}10 & 9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ -2 & -3 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

في الحالتين السابقتين، أوجدالمصفوفة C بحيث: $A-C=A-B$

الحل

في الحالة 1

$$A+B=\begin{pmatrix}15 & 7\\ 2 & 2\end{pmatrix} A-B=\begin{pmatrix}-5 & -13\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

في الحالة 2

$$A+B=\begin{pmatrix}15 & 10 & 9 & 8\\ 8 & 6 & 7 & 3\\ 6 & 2 & -1 & 1\\ -2 & -2 & -2 & -2\end{pmatrix} A-B=\begin{pmatrix}-5 & -8 & -7 & -6\\ -4 & -4 & -1 & -3\\ 2 & 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 6 & 8\end{pmatrix}$$

وفي كلتي الحالتين $A-A$

$$A-C=A-B \quad \Rightarrow \quad A-(A-C)=A-(A-B) \quad \Rightarrow \quad C=A-A+B \quad \Rightarrow \quad C=B$$

3.4 ضرب المصفوفات

1.3.4 ضرب المصفوفة في عدد حقيقي أو مركب

ليكن α عدد حقيقي أو مرّكب و A مصفوفة عشوائية. بعد ضرب α في A ، نحصل على مصفوفة لها نفس عدد الأسطر و عدد الأعمدة وذلك بعد ضرب كل عناصر المصفوفة في العدد α. مثلا:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha.A=\begin{pmatrix}\alpha.a_{11} & \alpha.a_{12}\\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22}\end{pmatrix}$$

المثال 5

لتكن المصفوفة A . أوجد المصفوفة $10.A$ ثم $A/10$.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3.5 & 9 \\ 4 & 10 & 11 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل

$$10.A=\begin{pmatrix} -10 & 20 & 35 & 90 \\ 40 & 100 & 110 & -40 \\ 30 & 20 & 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \frac{A}{10}=\begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & 0.35 & 0.9 \\ 0.4 & 1.0 & 1.1 & -0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

إنّ قسمة A على 10 تكافئ ضربها في $\frac{1}{10}$.

2.3.4 ضرب المصفوفات في بعضها

- ضرب المصفوفات عملية تجميعية ولكنها غير تبديليه، لذلك يجب مراعاة الترتيب.
- عند ضرب مصفوفتين A و B في بعضهما كما يلي $A.B$، يشترط أن يكون عدد أعمدة المصفوفة التي على اليسار A يساوي عدد أسطر المصفوفة التي على اليمين B. يعني إذا كانت A على شكل $A(m,n)$ عدد أعمدتها n ، فيجب أن تكون B على شكل B(n,k) عدد أسطرها n ، ولا تهم كل من m و k أثناء عملية الضرب. وفي الأخير نجد مصفوفة C من الشكل $C(m,k)$ عدد أسطرها m وعدد أعمدتها k: $C=A.B$.
- يتم ضرب المصفوفات بالطريقة الآتية : نضرب كل سطر من A في كل عمود من B ، ولكن بصفة غير عادية، العنصر الأوّل من سطر A في العنصر الأوّل من عمود B والعنصر الثّاني من سطر A في العنصر الثّاني من عمود B وهكذا حتى يتم ضرب كل العناصر من الجانبين ثم نجمع جميع محاصيل الضرب لنحصل في النهاية على العنصر الذي ينتمي إلى المصفوفة C. للحصول مثلا على العنصر C_{ij} الموجود على السطر i وفي العمود j ، نضرب السطر i من A في العمود j من B .

المثال 6

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) أضرب A.B.

2) هل يمكن حساب B.A ؟

الحل

1) حساب A.B:

$$A.B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&1\\4&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\9&2\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2)(1)+(1)(9)+(3)(-4) & (2)(3)+(1)(2)+(3)(1)\\(1)(1)+(2)(9)+(1)(-4) & (1)(3)+(2)(2)+(1)(1)\\(4)(1)+(1)(9)+(-1)(-4)\ 1 & (4)(3)+(1)(2)+(-1)(1)\end{pmatrix}$$

نلاحظ أنّنا حصلنا على مصفوفة لها نفس عدد أسطر A ونفس عدد أعمدة B. فمثلا العنصر الموجود في السطر 1 وفي العمود 1 هو حاصل ضرب السطر الأوّل من A في العمود الأوّل من B عنصرا بعنصر: 2 في 1، ثم 1 في 9 ثم 3 في (-4) وذلك بمراعاة ترتيب كل عنصر، وفي آخر الأمر نجمع كل الجداءات كما هو مبيّن أعلاه، ومنه:

$$A.B=\begin{pmatrix}-1&11\\15&8\\17&13\end{pmatrix}$$

2) لا يمكن حساب B.A لأنّ عدد أعمدة B يختلف عن عدد أسطر A.

3) العنصر الحيادي لعملية ضرب المصفوفات هي المصفوفة الوحدة وهي التي كل عناصرها تساوي الصفر إلاّ تلك التي توجد في قطرها الرئيسي والتي تساوي 1 بالضرورة. نذكر أنّ مصفوفة الوحدة تكون دائما مربعة أي أنّ عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها. مثلا المصفوفة الوحدة 4x4 هي :

$$Ide=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

المثال7

خذ المصفوفة A التي في المثال السابق وبرهن أن $A.Ide=A$ و $Ide.A=A$.

مساعدة

بما أنّ A من الشكل A(3,3) فإنّ Ide يكون لها الشكل التالي:

$$Ide=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4.4 محدد المصفوفة

لا يمكن تعريف محدد المصفوفة إلاّ إذا كانت هذه الأخيرة مربعة NxN.

مثلامحدد المصفوفة المربعة 2 x 2 : $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ هو $\Delta=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$

أمّا في حالة المصفوفة 3 x 3 : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

نحسب المحدد عبر مرحلة واحدة:

$$\Delta = (-1)^{1+1}.a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يمكن تلخيص طريقة الحساب كما يلي: مهما كان عدد أسطر وأعمدة المصفوفة، نختار أحد أسطر أو أحد أعمدة تلك المصفوفة (في المثال السابق اخترنا السطر الأوّل ولكن كان بالإمكان اختيّار سطر آخر أو عمود آخر). بعد ذلك، ،نأخذ كل خلايا السطر (أو العمود) الذي اخترناه ونضربها في $(-1)^{i+j}$ حيث i هو رقم السطر و j هو رقم العمود الذي يتواجد فيه العنصر (في المثال السابق، ضربنا a_{11} في $(-1)^{1+1}$ لأنّه يوجد في السطر 1 وفي العمود 1). وأخيرا، نضربها أيضا في المحدد الذي نحصل عليه بعد "حذف" السطر والعمود الذي يتواجد فيه العنصر المعني بالحساب (في المثال السابق، ضربنا a_{11} في $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ وهو المحدد الذي نحصل عليه بعد حذف السطر 1 والعمود 1 الذين يحتويان a_{11}).

المثال 8

- أوجد محدد كلاّ من المصفوفتين: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ و $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

الحل

$$\Delta_A = (-1)^{1+1}.(1).\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(2).\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.(3).\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A = (1).(-5) - (2).(-6) + (3).(3) = 16 \text{ أي}$$

ثم

$$\Delta_B = (-1)^{1+1}.(1).\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(1).\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.(7).\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}.(5).\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

ومنه: $\Delta_B = (1).(-5) - .(1).(-11) + (7).(-56) - (5).(-34) = -216$

5.4 مقلوب المصفوفة

لا يمكن تعريف مقلوب المصفوفة إلّا إذا كانت هذه الأخيرة مربعة NxN ومحددها غير معدوم.

إذا كانت لدينا مصفوفة مربعة A محددها غير معدوم، فإنّ مصفوفتها المقلوبة B هي $B=A^{-1}$ حيث $A.B=B.A=Ide$.

المثال 9

- أوجد المصفوفة المقلوبة للمصفوفة A: $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 5\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

من أجل ذلك، نتّبع المراحل التالية:

أ) نحسب Δ_A محدد A ونتحقق أنّه غير معدوم. نجد بسهولة:

$$\Delta_A = +(4).\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} - (7).\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} + (5).\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix} =$$

$$+(4).(-1) - (7).(-6) + (5).(3) = -4 + 42 + 15 = 53$$

ب) نحسب المصفوفة المكوّنة من المحددات الصغرى. وتكمن هذه العملية في أنّنا نعوّض كل عنصر من المصفوفة A بالمحدد الذي نحصل عليه بعد "حذف" السطر والعمود الذي يتواجد فيه العنصر المعني بالحساب. مثلا، نقوم بتعويض 4 بالمحدد $\begin{vmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{vmatrix}$ وهو ما يتبقى لدينا بعد حذف السطر الأوّل والعمود الأوّل الذين يحتويان على العنصر 4. وهكذا مع بقية العناصر فينتج عن ذلك المصفوفة التالية:

$$A_1 = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}7 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 7\\ 3 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}7 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4 & 7\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -6 & 3\\ 7 & -11 & -21\\ 19 & 8 & -4\end{pmatrix}$$

ت) نضرب كل عنصر من المصفوفة الجديدة A_1 في $\boldsymbol{(-1)^{i+j}}$ حيث i هو رقم السطر و j هو رقم العمود الذي يتواجد فيه العنصر، فينتج عن ذلك المصفوفة الآتية:

$$A_2 = \begin{pmatrix}(-1)^{1+1}x(-1) & (-1)^{1+2}x(-6) & (-1)^{1+3}x(3)\\ (-1)^{2+1}x(7) & (-1)^{2+2}x(-11) & (-1)^{2+3}x(-21)\\ (-1)^{3+1}x(19) & (-1)^{3+2}x(8) & (-1)^{3+3}x(-4)\end{pmatrix}$$

أي $A_2 = \begin{pmatrix} (-1)^2 x(-1) & (-1)^3 x(-6) & (-1)^4 x(3) \\ (-1)^3 x(7) & (-1)^4 x(-11) & (-1)^5 x(-21) \\ (-1)^4 x(19) & (-1)^5 x(8) & (-1)^6 x(-4) \end{pmatrix}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} (-1) & -(-6) & (3) \\ -(7) & (-11) & -(-21) \\ (19) & -(8) & (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -7 & -11 & 21 \\ 19 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

و أخيرا:

ث) نحسب منقولة المصفوفة الجديدة A_2 وذلك بتعويض كل سطر بالعمود الذي يناسبه في الترتيب.

السطر الأوّل بالعمود بالأوّل والثّاني بالثّاني،... الخ. فينتج عن ذلك المصفوفة التالية:

$$A_3 = T(A_2) = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 19 \\ 6 & -11 & -8 \\ 3 & 21 & -4 \end{pmatrix}$$

ج) وأخيرا، نقسم المصفوفة الجديدة A_3 على المحدد Δ_A لنحصل على الحل النهائي.

$$B = A^{-1} = \frac{A_3}{\Delta_A} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} -1 & -7 & 19 \\ 6 & -11 & -8 \\ 3 & 21 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{53} & \frac{-7}{53} & \frac{19}{53} \\ \frac{6}{53} & \frac{-11}{53} & \frac{-8}{53} \\ \frac{3}{53} & \frac{21}{53} & \frac{-4}{53} \end{pmatrix}$$

يمكن أنّ نتحقّق بسهولة أنّ $A.B = B.A = Ide$.

6.4 حل جملة المعادلات بواسطة المصفوفات

الان، وبعد أن راجعنا المصفوفات، يمكننا الإجابة على السؤال الذي طرحناه في الفقرة 3 حول كيفية حل المعادلات المصفوفاتية، حيث سنقوم أوّلا بحل المعادلة المصفوفية التالية (من الفقرة 2):

$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ التي يمكن كتابتها على شكل $A.u = v$ حيث $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ،

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

إذن $A.u = v$ معناه $A^{-1}.(A.u) = A^{-1}.v$ حيث ضربنا مقلوب A في طرفي المساواة وكلاهما من جهة اليسار لأنّ الترتيب مهم مادام ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية.

فنجد: $(A^{-1}.A).u = A^{-1}.v$ ، بماأنّ ضرب المصفوفات عملية تجميعية، أي: إذن$u = A^{-1}.v$

يجب البحث عن مقلوب A:

أ) أوّلا، نحسب محدد A فنجد: $\Delta_A = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ فهو غير معدوم.

ب) ثانيا، نحسب المصفوفة المكوّنة من المحددات الصغرى: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. نلاحظ أنّنا حصلنا مباشرة على أعداد ولم نكن مضطرين إلى حساب المحددات لأنّ المصفوفة A من الشكل A(2x2).

ت) ثالثا، نضرب كل عنصر من المصفوفة الجديدة A_1 في $(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i+j}}$ حيث i هو رقم السطر و j هو رقم العمود الذي يتواجد فيه العنصر، فينتج عن ذلك المصفوفة الآتية:

$$A_2 = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}.(1) & (-1)^{1+2}.(2) \\ (-1)^{2+1}.(-3) & (-1)^{2+2}.(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +.(1) & -.(2) \\ -.(-3) & +.(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ث) رابعا، نحسب منقولة المصفوفة الجديدة A_2. فينتج عن ذلك المصفوفة الآتية:

$$A_3 = T(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ج) خامسا وأخيرا، نقسم المصفوفة A_3على المحدد Δ_A لنحصل على:

$$A^{-1} = \frac{A_3}{\Delta_A} = \begin{pmatrix} 1/11 & 3/11 \\ -2/11 & 5/11 \end{pmatrix}$$

ح) سادسا وأخيرا، نعوض في المعادلة المصفوفية $\boldsymbol{u = A^{-1}.v}$ أي :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 & 3/11 \\ -2/11 & 5/11 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/11).(-1) + (3/11).(4) \\ (-2/11).(-1) + (5/11).(4) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1/11) + (12/11). \\ (2/11). + (20/11). \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/11. \\ 22/11. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 2. \end{pmatrix}$$

خ) إذن $\boldsymbol{x = 1, y = 2}$

وبنفس الطريقة، يتم حل المعادلات المصفوفاتية المكتوبة في أمثلة الفقرة 2.

التيّار المستمر -الدارات الكهربائية ثنائية الأقطاب- قوانين كيرشوف

1. تمهيد

الدارة الكهربائية عبارة عن مجموعة بسيطة أو معقدة من النواقل والعناصر الكهربائية أو الإلكترونية التي يتم اجتيازها بواسطة تيّار كهربائي.

2. مفاهيم كهربائية.

- الشحنة الكهربائية $q=1C$ هي كمية الكهرباء التي ينقلها تيّار شدته 1 A (Ampère) في ظرف زمني قدره 1s. ولدينا القانون $q=I.t$ حيث q وحدته الكولون، I وحدته الأمبير، t وحدته الثّانية. شحنة الالكترون هي $e=1,6.10^{-19}\ C$.
- الجهد الكهربائي (المسمى أيضا فرق الكمون الكهربائي) وحدته الفولط. هذه الوحدة (1V) هو فرق الجهد بين نقطتين من سلك ناقل يسري فيه تيّار شدته ($I=1A$) عندما تكون الاستطاعة هي ($P=1W$). ولدينا القانون $\boldsymbol{V = P/I}$.
- الويبر ($\Phi=1Wb$) هو التدفق المغناطيسي الذي يخترق حلقة مغلقة، حيث يُنشئُ جهدا قدره 1V في مدّة زمنية قدرها واحد ثانية (بصفة منتظمة).ويُعبر عنه بـ: $\boldsymbol{\Phi = V.t}$.
- التسلا ($B=1T$) هو الحقل المغناطيسي الناتج عن تدفق 1 ويبر عبر مساحة 1 متر مربع. ولدينا القانون $\boldsymbol{\Phi = \int \vec{B}.d\vec{S}}$ الذي يتحول في الحالات البسيطة إلى $\boldsymbol{\Phi = \vec{B}.\vec{S}}$.
- الحقل الكهربائي هو عبارة عن تغير(تدرج) جهد مقسوم على تغير(تدرج) في الطول $\boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(v)}$ ، وفي حالة ما إذا كان التغير وفق تغيُّر الموضع r يصبح $\boldsymbol{\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{r}}$ الذي يتحول في الحالات البسيطة إلى $\boldsymbol{E \equiv \frac{V}{r}}$.

3. عناصر الدارة الكهربائية

تتكون الدارة الكهربائية من عناصر نشطة (مصادر الطاقة) و أخرى خاملة (مُستهلكة للطاقة). إذا كانت هذه العناصر الخاملة تستهلك كل الطاقة فهي مقاومات R، أمّا إذا كانت تخزن الطاقة على شكل حقل مغناطيسي فهي الوشائع التي تتميز بذاتيتها L، وإذا كانت تخزنها على شكل حقل كهربائي فهي المكثفات ذات السعات C. بعض العناصر لها أكثر من خاصية (مثلا، يمكن للمكثفة أن تكون لها سعة وفي نفس الوقت مقاومة داخلية). العناصر التي ليس لها إلاّ خاصية واحدة تسمى بالعناصر الصرفة (pures). هذه العناصر ثنائية القطبية وهي متناظرة أي ليست لها إستقطابية (ليس لها قطب موجب أو سالب إلاّ إذا كانت تحت تأثير مصدر للطاقة).

4. العناصر الخاملة

العناصر الخاملة لا تكون مستقطبة إلاّ إذا كانت تحت تأثير مصدر من مصادر الطاقة (مولد جهد أو مولد تيّار)، و اذا كانت كذلك . فإنّ التيّار عندما يجتازها يستقطبها (تصبح لها إستقطابية أي قطب

موجب و قطب سالب) و يترتب بين طرفيها فرق في الكمون (أي جهد)و يكون إجتياز التيّار لها من النقطة التي يكون كمونها الأكبر(القطب الموجب) ويغادرها من النقطة التي يكون كمونها الأصغر(القطب السالب).

1.4 أجهزة الإستقبال

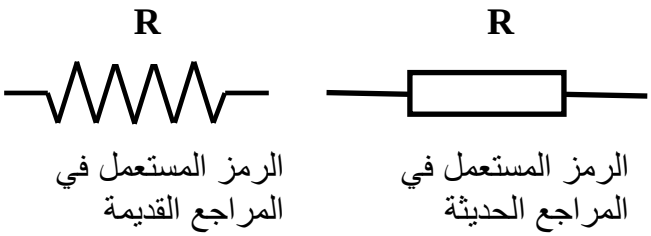
هي أجهزة تستهلك الطاقة عند مرور التيّار بها ويكون لها عندئذ جهد بين قطبيها يسمى بالقوّة الكهرومحركة المضادة (force contre électro- motrice) .

2.4 المقاومات

المقاومة الكهربائية هي عنصر إلكتروني أو كهربائي له خاصية رئيسية هي مقاومة تدفق التيّار الكهربائي عبرها ووحدتها هي الأوم *(Ω)*.

المقاومات المستخدمة في الالكترونيات تنقسم إلى فئتين رئيسيتين: المقاومات الكربونية والمقاومات المعدنية.

يرمز للمقاومة الكهربائية بـ:



الرمز المستعمل في المراجع الحديثة — الرمز المستعمل في المراجع القديمة

1.2.4 المقاومات الكربونية

تصنع من مادة الكربون المسحوق الذي يُرش على مادة عازلة (عجينة) مثل السيراميك (الخزف، الفخّار...) و الذي يُحدد قيمتها نسبة الرش لمادة الكربون و نجد فيها المقاومات الكربونية الثابتة و المتغيرة خطّيا و لوغارتميا. يتم تحديد قيمتها بالألوان التي تُطبع على ظهرها (أنظر الجدول) فكل لون له معنى.

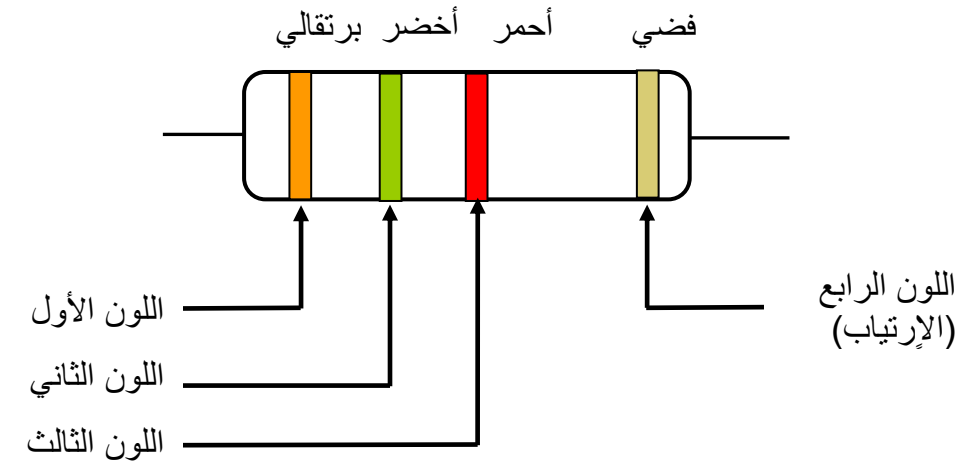
"لغة" الألوان المستعملة مبيّنة في الجدول الآتي :

اللون	الشريط 1 الرقم 1	الشريط 2 الرقم 2	الشريط 3 المعامل	الشريط 4 الارتياب = القابلية
فضي			10^{-2}	±10 %
ذهبي			10^{-1}	±5 %
أسود	0	0	10^{0}	
بني	1	1	10	±1 %
أحمر	2	2	10^{2}	±2 %
برتقالي	3	3	10^{3}	
أصفر	4	4	10^{4}	
أخضر	5	5	10^{5}	
أزرق	6	6	10^{6}	
بنفسجي	7	7	10^{7}	
رمادي	8	8	10^{8}	
أبيض	9	9	10^{9}	
لا شيئ				±20 %

و يمكن حفظها على شكل بيت شِعر

الأسّود يا بُنّي حُمرٌ و البرتقال أصْفر خضرٌ

و السماء زرقاءُ بنفسجية و الغيم رماديٌ أبيضُ



اللون الأوّل البرتقالي يمثل رقم العشرات وهو 3، اللون الثّاني الأخضر يمثل رقم الوحدات وهو 5، إذن هذان الرقمين يشكلانّ العدد 35، اللون الثالث الأحمر يمثّل المعامل وهو 10^2، إذن أصبح لدينا الأنّ العدد $35x10^2=3500$. اللون الرابع الفضي يمثل الإرتياب وهو 10% من العدد السابق أي يساوي 350. إذن مقاومتنا قيمتها: $R=(3500\pm350)\Omega$

هناك خاصيات أخرى تعرف بها المقاومة الكهربائية مثل معامل الحرارة ومعامل الجهد لأنّ قيمتها تتأثر بهما.

نلفت انتباه القارئ أثناء إستعمال المقاومة الكهربائية في الأعمال التطبيقية *(TP)* أن يراعي قيمة الجهد الإسمي أو التيّارالإسمي للإستعمال، فالمقاومات التي تُستعمل في المخابر مكتوب عليها الاستطاعة القصوى التي يمكن تحملها ومن ثمّ يمكن للطالب أن يحسب بنفسه الجهد أو التيّار الذي لا يجب أن يتعداه باستعمال القانون الآتي: $P = V.I = V.\frac{V}{R} = \frac{V^2}{R}$ لأنّ $V = \sqrt{P.R}$

$$P = V.I = RI.I = R.I^2 \text{ ومنه } I^2 = \frac{P}{R} I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

الإستطاعة المستهلكة بمفعول جول $P=V.I=R.I^2$ أمّا الطاقة المستهلكة خلال مدّة زمنية t هي $W=R.I^2.t=V.I.t$. ويجدر الإشارة أنّ الاستطاعة الكهربائية تحسب بالقانون العام الآتي: $P = \frac{dW}{dt}$ مع $W = \int P.dt$ حيث P تمثل الاستطاعة اللحظية: $P = V.I$.

3.4 الذاتيات

يعرف تدفق الحقل المغناطيسي عبر وشيعة بالعلاقة $\Phi=L.I$ ، حيث L ذاتية الوشيعة التي وحدتها الهنري *(Henry, H)*.في الوشيعة اللاأنّهائية: $B=\mu_0.n.I$ ، n هو عدد الحلقات في وحدة الطول أي في المتر الواحد و $\mu_0=4\pi10^{-7}$ H.m^{-1}. هي السماحية.

وحسب قانون التدفق عبرحلقة سطحها S: $\Phi_1=B.S=\mu_0.n.I.S$

وعبر العدد الاجمالي للحلقات $N=n.d$

d: طول الوشيعة اللاأنّهائية)، ومنه :

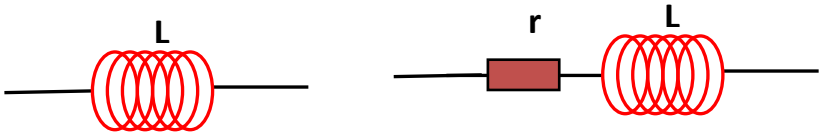
$$\Phi=N.\Phi_1=n.d.\Phi_1=\mu_0.n^2.d.I.S$$

وبعد المقارنة بين هذه المعادلة والمعادلة المكتوبة في بداية الفقرة، نستنتج عبارة الذاتية: $L=\mu_0.n^2.d.S$.

أمّا الجهد عند قطبي الوشيعة فهو : $e=-d\Phi/dt=-L.dI/dt$ والجهد V هو $V=-e$.

إذن: $V=L.dI/dt$ والطاقة المخزنة على شكل حقل مغناطيسي هي : $W=L.I^2/2$ويبرهن عليها كما يلي:

$$W = \int p.dt = \int V.I.dt = \int L\frac{dI}{dt}.I.dt = \int L.I.dI = \frac{L.I^2}{2}$$



وشيعة صرفة ذاتيتها L وشيعة ذاتيتها L و مقاومتها الداخلية r

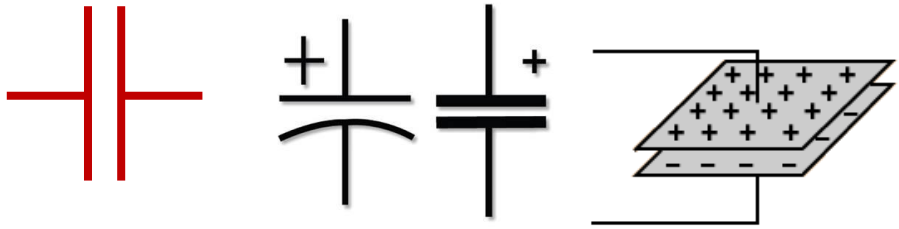
4.4 المكثفات

عنصر إلكتروني أو كهربائي يُستخدم فى تخزين الشحنات الكهربائية. وله استخدامات واسعة مثل ضبط تردد اجهزة الإستقبال الاذاعي، مُرشح فى مصادر الامدادات الكهربائية، تخزين الطاقة في الأجهزة للتحكم فى الوحدات الالكترونية...إلخ.

المكثفة تتكون من صفيحتين يفصل بينهما عازل وتميزها سعتها C حيث : $q=C.V$ ، C وحدتها الفاراد F. وفي حالة المكثفة المسطحة: $C=\varepsilon.S/e$. e البعد بين الصفيحتين، S : السطح، ε الشفافية.

ولدينا القوانين الآتية :

$$I=\frac{dq}{dt}=\frac{d(CV)}{dt}=C.\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad V=\frac{1}{C}\int i.dt$$



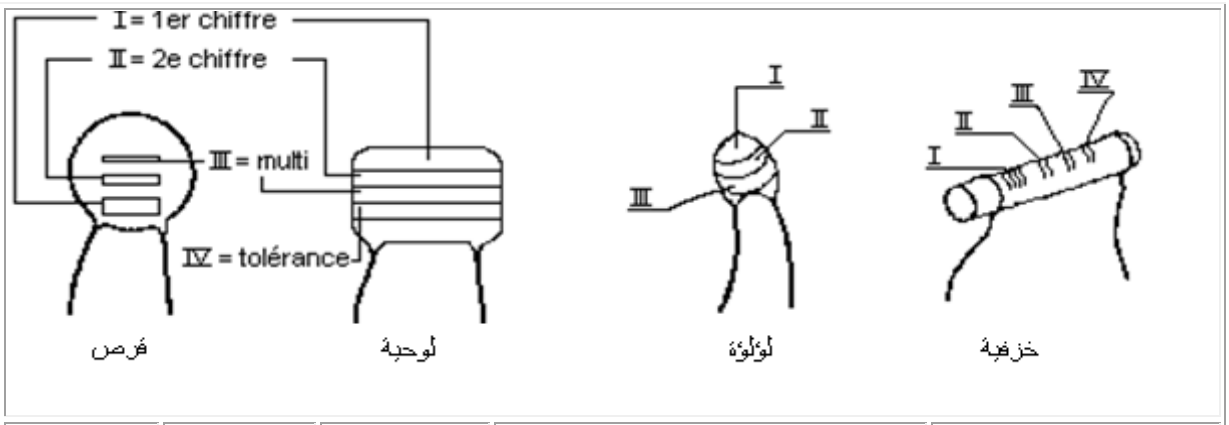
مكثفة غيرمستقطبة مكثفات مستقطبة

هناك خاصيات أخرى تُعرف بها المكثفة مثل: مقاومة العزل أو ما يسمى بالتيّار المتسرب (في حقيقة الأمر أنّ للمكثفة ناقلية ضعيفة تتسبب في تسرب التيّار من صفيحة إلى أخرى وهذا يُنقص من جودتها). هناك أيضا قيمة للجهد الأقصى عند الاستعمال، إذا تمّ تجاوزه تُتْلف المكثفة. أخيرا، نشير أنّ قيمة السعة تُكتب على المكثفة ولكن هناك أيضا نظاما للألوان يحدّد قيمتها.

تقوم المكثفة بتخزين الطاقة على شكل حقل كهربائي وتُحسب هذه الطاقة المخزّنة بالطريقة التالية:

$$W=\int p.dt=\int V.I.dt=\int \frac{q}{C}.I.dt=\int \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt}.dt=\frac{1}{C}\int q.dq=\frac{q^2}{2C}$$

المكثفات ذات الألوان تقرأ كما يلي



Couleur	I (valeur)	II (valeur)	III (coeff. multiplicateur)	IV (tolérance) pour C > 10 pF
Noir	-	0	x 1 (pF)	20%
Marron	1	1	x 10 (pF)	1%
Rouge	2	2	x 100 (pF)	2%
Orange	3	3	x 1 000 (ou x 1 nF)	-
Jaune	4		x 10 000 (ou x 10 nF)	-
Vert	5	5	x 100 000 (ou x 100 nF)	5%
Bleu	6	6	x 1 000 000 (ou x 1 uF)	-
Violet	7	7	x 10 000 000 (ou x 10 uF)	-
Gris	8	8	x 0,01 (pF)	-
Blanc	9	9	x 0,01 (pF)	10%
Or	-	-	-	-

ملاحظة

القيمة دوما بالبيكوفاراد

5. العناصر النشطة

نخص بالذكر مصادر التيّار ومصادر الجهد.

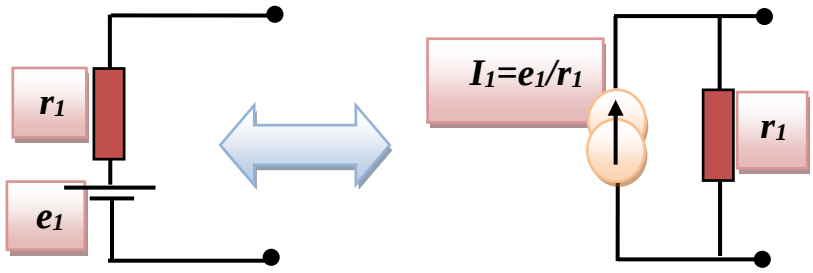
1.5 مصادر الجهد الصرفة

هي التي لا يتغير الجهد عند قطبيها إذا تغير التيّار، ولكن مصادر الجهد الحقيقية لا تخلو من مقاومة داخلية تُغير الجهد مع التيّار.

2.5 مصادر التيّار الصرفة

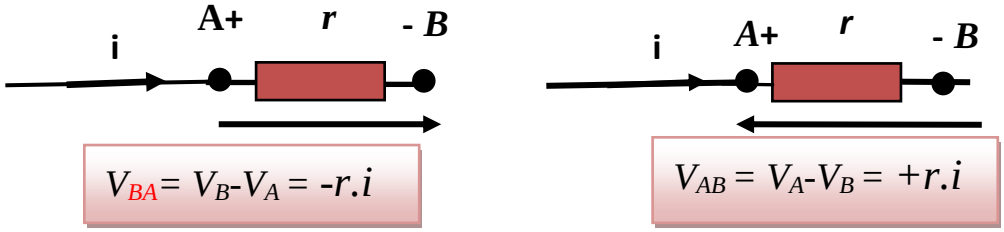
هي التي لا يتغير التيّار الذي تنتجه إذا تغيّر الجهد المطبق عليها، ولكن مصادر التيّار الحقيقية لا تخلو من مقاومة داخلية تغير التيّار مع الجهد.

هناك تكافؤ بين مصادر التيّار الحقيقية ومصادر الجهد الحقيقية كما هو مبيّن في الشكل الآتي:



حيث بيّنا كيف أنّ مصدر الجهد e_1 الذي له مقاومة داخلية r_1 موضوعة معه على التسلسل يمكن تحويله إلى مصدر تيّار I_1 بحيث أن $I_1 = \frac{e_1}{r_1}$ والمقاومة الكهربائية الداخلية لمصدر التيّار هي نفسها المقاومة الكهربائية الداخلية لمصدر الجهد ولكنها في هذه المرة موضوعة على التفرع.

6. الكمون بين طرفي العناصر الخاملة

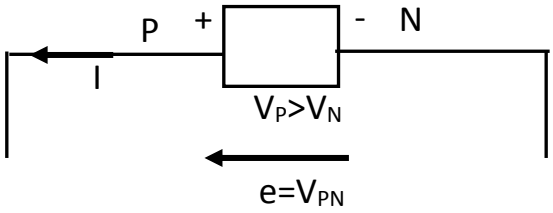


قد شرحنا سابقا أن التيّار يجتاز العناصر الخاملة من القطب الأكبر كمونا إلى القطب الأصغر كمونا. وفي الشكلين السابقين لدينا إذن $V_A > V_B$ ونقول أيضا أن A موجب وB سالب. ففي الشكل الذي على اليمين، نريد حساب V_{AB} وهو سهم إتّجاهه من $B(-)$ إلى $A(+)$ إذن فهو موجب ونكتب $V_{AB}=+r.i$. بينما في الشكل الذي على اليسار، نريد حساب V_{BA} وهو سهم إتّجاهه من $A(+)$ إلى $B(-)$ إذن فهو سالب ونكتب $V_{BA}=-r.i$.

تنبيه:

نفس الطريقة لتعيين الكمون تطبق على الذاتيات (الوشائع) والسعات (المكثفات).

7. المصادر الكهربائية للجهد



يوجد حقل كهرومحرك داخل مصدر الجهد يُنشئ فرق كمون بين قطبيه يسمى بالقوّة المحركة الكهربائية أو القوّة الكهرومحركة e واتّجاهها من N إلى P. نقول أن N تمثل القطب السالب و P تمثل القطب الموجب.الاستطاعة التي يُنتجها المصدر هي:

$$P=e.I=(V_P-V_N).I$$

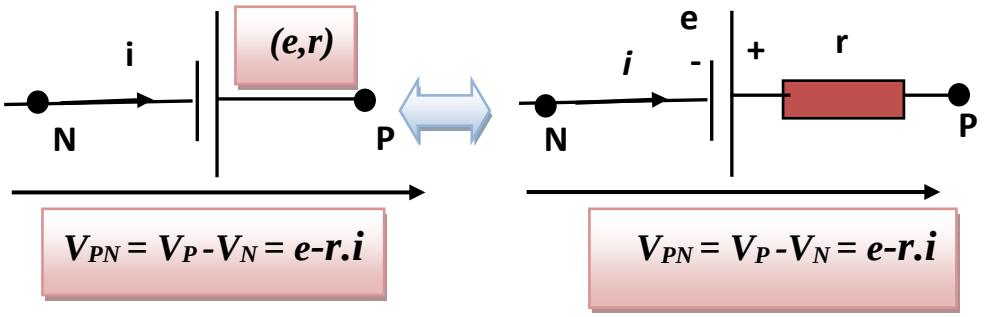
عندما يجتاز التيّار مصادر الجهد، فأنّه يدخلها من النقطة N التي يكون كمونها الأصغر ويغادرها من النقطة P التي يكون كمونها الأكبر، وهذا على عكس العناصر الخاملة.

أحيانا، يحدث أنّ التيّار يدخل إلى مصدر الجهد من قطبه الموجب ويخرج من القطب السالب فعندئذ يتحول المصدر إلى عنصر مُستهلك للطاقة بدلا من انتاجها.

في حالة وجود مقاومة داخلية للمصدر فانّ فرق الكمون بين طرفي هذا المصدر يُعطى بالعلاقة:

$V_{PN} = e - r.I$ ، حيث r هي المقاومة الكهربائية الداخلية للمصدر.

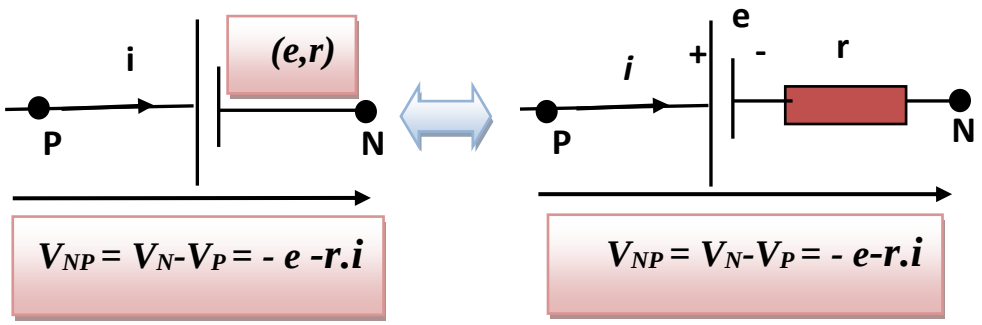
1.7 مصدر الجهد إذا دخله التيّار من القطب السالب



نلاحظ في الشكل أعلاه أن التيّار يقطع المقاومة الكهربائية من القطب + إلى القطب – لأنّها عنصر خامل وأنّ المصدر يلعب دور العنصر النشط لأنّ التيّار يجتازه من القطب – إلى القطب + ومن هذا نلاحظ أنّ السهم V_{PN} له نفس الاستقطابية مع المصدر ولكنه معاكس مع استقطابية المقاومة الكهربائية لذلك نكتب $+e$ و $-ri$ فنحصل على $V_{PN} = e - r.i$

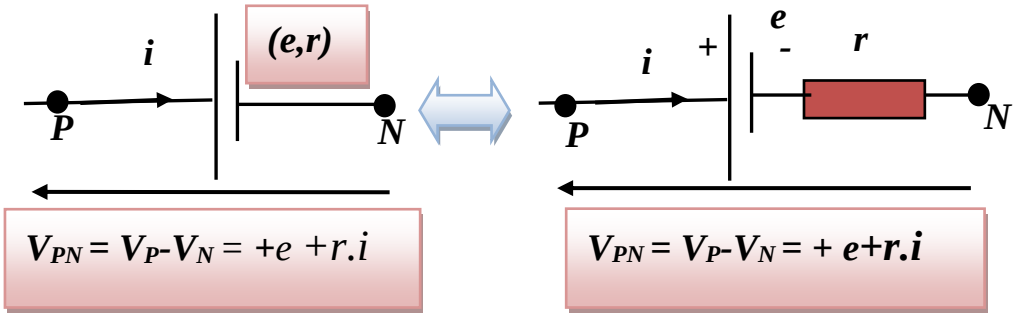
2.7 مصدر الجهد إذا دخله التيّار من القطب الموجب

إذا دخل التيّار من القطب الموجب لمصدر الجهد يصبح يعمل عمل جهاز إستقبال ولكن يبقى الإستقطاب ثابتا. فنلاحظ في الشكل الموالي أن التيّار يقطع المقاومة الكهربائية دائما من القطب+إلى القطب – لأنّها عنصر خامل وأنّ المصدرأصبح الآنّ يلعب دور العنصر الخامل (كأنّه جهاز إستقبال) لأنّ التيّار يجتازه من القطب + إلى القطب - ومن هذا نلاحظ أن سهم V_{NP} له عكس الإستقطاب مع المصدر و أيضا عكس الإستقطاب مع المقاومة الكهربائية لذلك نكتب $-e$ و $-ri$ فنحصل على: $V_{NP} = -e - r.I$

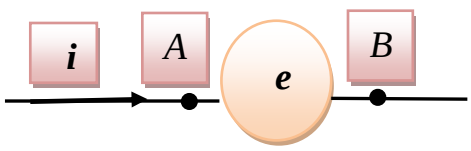


أمّا لو أردنا أن نبحث عن V_{PN} فنقوم بنفس عملية المقارنة ونحصل هذه المرة على:

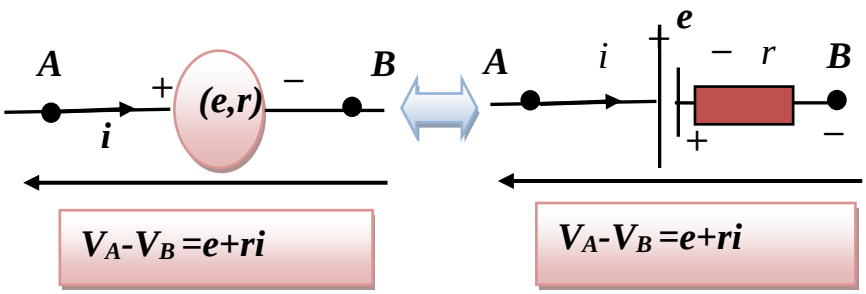
$$V_{PN} = V_p - V_N = e + r.i$$



3.7 أجهزة الإستقبال



الاختلاف بينه وبين الحالة السابقة هو أنّ جهاز الإستقبال ليس مستقطبا من البداية ويقطعه التيّار من النقطة التي يكون كمونها أكبر إلى النقطة التي يكون كمونها أكبر لأنّه عنصر خامل هو أيضا. مثلا في الشكل الموالي يكون $V_A > V_B$ ومنه نرسم e من B إلى A. ولدينا باستعمال نفس المصطلحات السابقة:



جهاز الإستقبال هو جهاز بإمكانّه تحويل الطاقة الكهربائية إلى طاقة من نوع آخر (حرارية أو غير حرارية).

في حالة وجود مقاومة داخلية، لدينا:

$$V_A - V_B = e + r.i$$

في حالة غياب مقاومة داخلية، لدينا:

$$V_A - V_B = e$$

الاستطاعة المستهلكة داخل جهاز الإستقبال هي:

$$P = e.I$$

8. قوانين تجميع العناصر الخاملة والنشطة

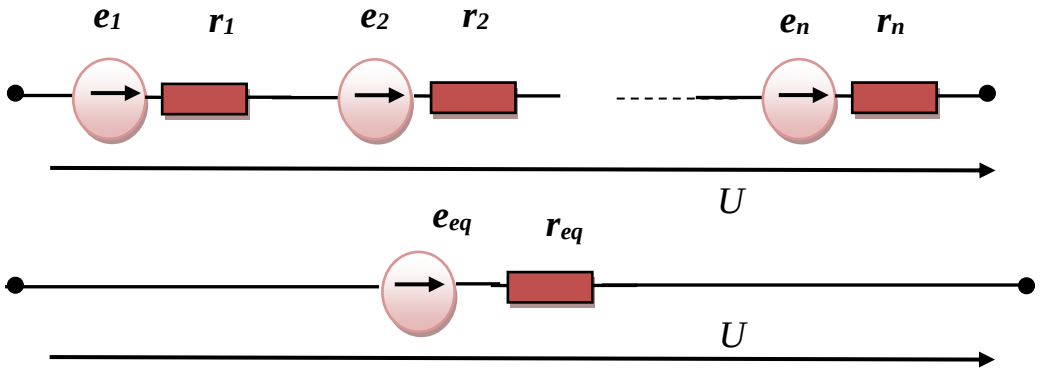
1.8 تجميع العناصر الخاملة

نكتفي بالتذكير بالقوانين المستعملة عند جمع العناصر الخاملة و هي من المكتسبات السابقة.

	المقاومات	الذاتيات	السعات
على التسلسل	$R_{eq}=\Sigma (R_i)$	$L_{eq}=\Sigma (L_i)$	$1/C_{eq}=\Sigma(1/C_i)$
على التفرع	$1/R_{eq}=\Sigma (1/R_i)$	$1/L_{eq}=\Sigma (1/L_i)$	$C_{eq}=\Sigma (C_i)$

2.8 تجميع مصادر الجهد

1.2.8 التجميع على التسلسل

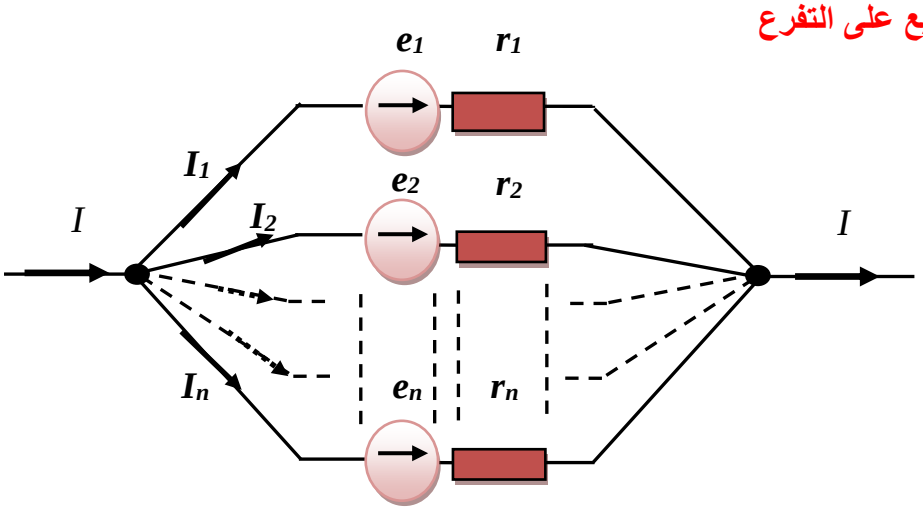


$$U = e_1 - r_1.I + e_2 - r_2.I + \ldots\ldots + e_N - r_N.I$$

أي بعبارة أخرى: $U = \sum_{i=1}^{N} e_i - \left(\sum_{i=1}^{N} r_i\right).I$ ومنه $\boldsymbol{U = e_{eq} - r_{eq}.I}$

المصدر المكافئ هو (e_{eq}, r_{eq}) بحيث : $e_{eq} = \sum_{i=1}^{N} e_i$ و $r_{eq} = \sum_{i=1}^{N} r_i$

2.2.8 التجميع على التفرع



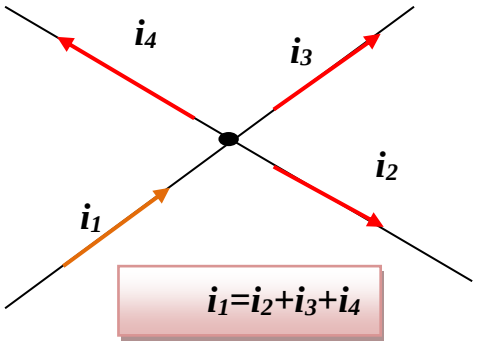
في هذه الحالة، نلاحظ أن التيّار I المكافئ والإجمالي هو : $I = \sum_{i=1}^{N} I_i$ و $\frac{1}{r_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i}$

9. تعريف الدارات الكهربائية

الدارة الكهربائية هي مجموعة من العناصر ثنائية القطب متصلة فيما بينها. يمكن للدارة أن تحتوي على مصادر جهد ومصادر التيّار (عناصر نشطة) كما يمكن أن تحتوي على عناصر خاملة. نعرف العقدة على أنّها نقطة تقاطع أكثر من ناقلين. كما نعرف الفرع على أنّه الجزء الواقع بين عقدتين، بينما نطلق اسم العروة على كل حلقة مغلقة (في الدارة) ويمكن أن تكون مكونة من مجموعة "مغلقة" من الفروع.

10. قانون كيرشوف للعقدة

حسب هذا القانون، فإن مجموع التيّارات الداخلة إلى العقدة يساوي مجموع التيّارات الخارجة منها.



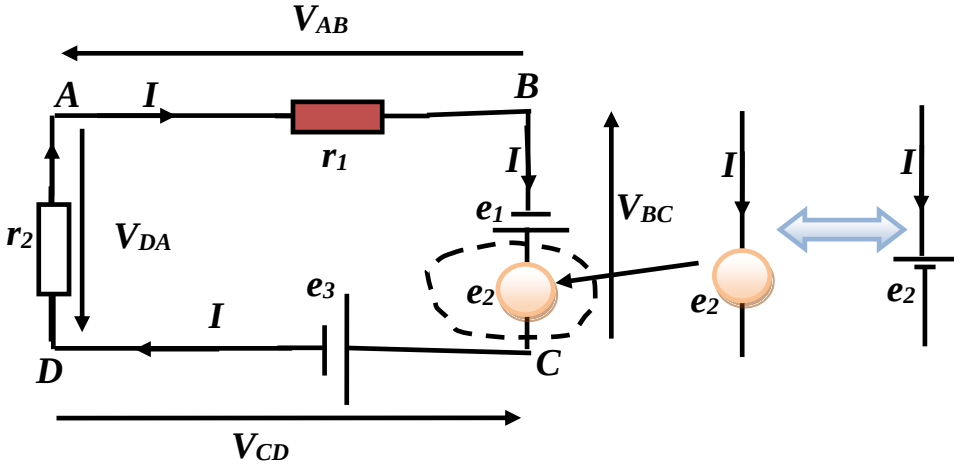
مثلا في الشكل أعلاه:

i_1 داخل، i_2، i_3 و i_4 خارجة، إذن $\boldsymbol{i_1 = i_2 + i_3 + i_4}$

11. قانون كيرشوف للعروة

إذا اخترنا إتّجاها مُعينا لحساب فروق الكمون في العروة، فإنّ مجموع فروق الكمون في العروة المغلقة يساوي صفرا. $V_{AA} = 0$

المثال 2



$V_{AA} = 0$: يمكن كتابته أيضا باستعمال قانون كيرشوف للعروة :

$$V_{AB} + V_{DA} + V_{CD} + V_{BC} = 0$$

حيث:

$$V_{AB} = r_1.I, V_{BC} = -e_1 + e_2, V_{CD} = e_3, V_{DA} = r_2.I$$

وبعد التعويض:

$I = \frac{e_1 - e_2 - e_3}{r_1 + r_2}$ أي $(r_1 + r_2).I + (-e_1 + e_2 + e_3) = 0$

إذا وجدنا بأنّ $i < 0$ فنغيّر إتّجاه $\boldsymbol{i}$ في الرسم و لكن لا نعيد الحسابات إلاّ في حالة وجود جهاز إستقبال غير مستقطب.

إذا وجدنا بأنّ $i < 0$ ويمر بجهاز إستقبال غير مستقطب فعندئذ نغيّر إتّجاه $\boldsymbol{i}$ في الرسم ونعيد الحسابات. وإذا فعلنا ذلك وعثرنا على تيّار سالب مرة أخرى فمعناه أنّ جهاز الإستقبال لا يعمل ويجب إزالته من الشبكة.

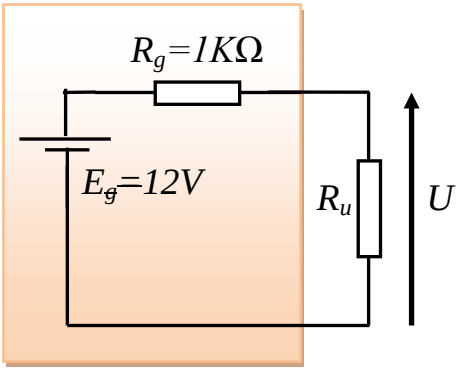
12. دراسة مصدر للجهد بحمولة

لتكن دارة الشكل-1- المحمّلة بالمقاومة الكهربائية R_u

حيث تعطى عبارة الجهد U بالعلاقة:

$$U = E_g - R_g.I$$

من أجل قيم المقاومة الكهربائية : $R_U = R_g$



الشكل-1-

$$R_U = 2R_g$$

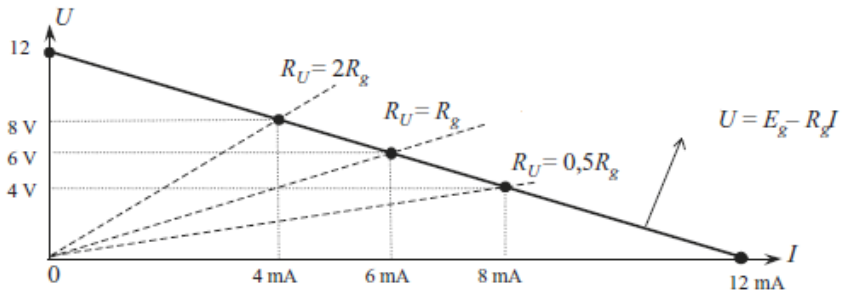
$$R_U = 0.5R_g$$

$$P = UI = 36mW; (6V; 6mA)$$

$$P = UI = 32mW; (8V; 4mA)$$

$$P = UI = 32mW; (4V; 8mA)$$

نجد الإحداثيات التالية للجهد و التيّار و كذا الإستطاعة :



الشكل-2-

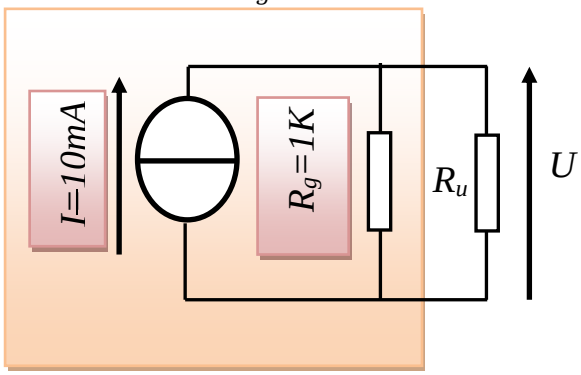
1. نلاحظ أنّه من أجل $R_U = R_g$ تكون الإستطاعة المقدمة من طرف المولد أعظمية ممّا يدل على أهمّية الملائمة أثناء دراسة الدارات الكهربائية.

13. دراسة مصدر للتيّار بحمولة

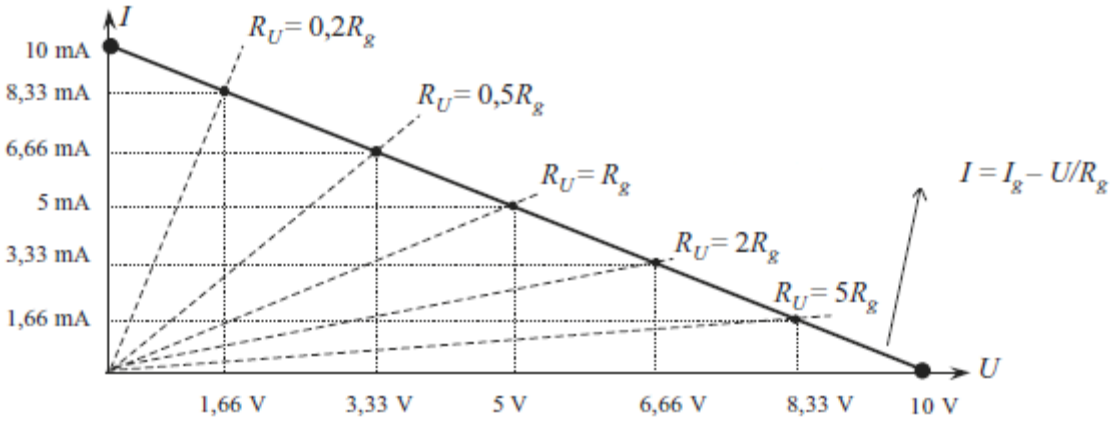
لتكن دارة الشكل-2- المحملة بالمقاومة الكهربائية R_u

$$R_U = 1 \ K\Omega \ R_U = 2K\Omega \ R_U = 5K\Omega \ R_U = 0.5K\Omega R_U = 0.2K\Omega$$

حيث: $I = I_g - \frac{U}{R_g} = 10mA - \frac{U}{1K\Omega} = 10mA - \frac{U}{10^3}$

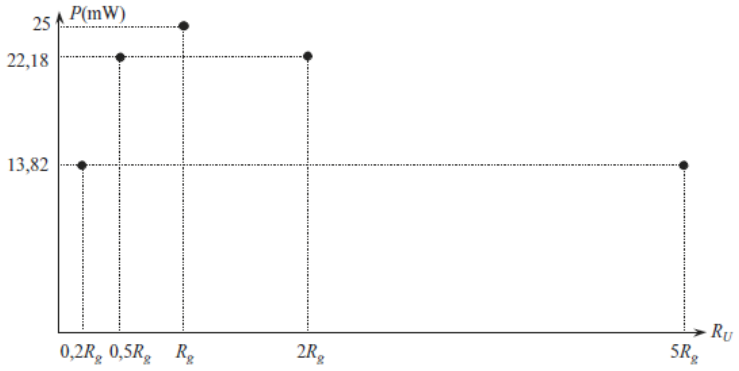


الشكل-3-



الشكل-4-

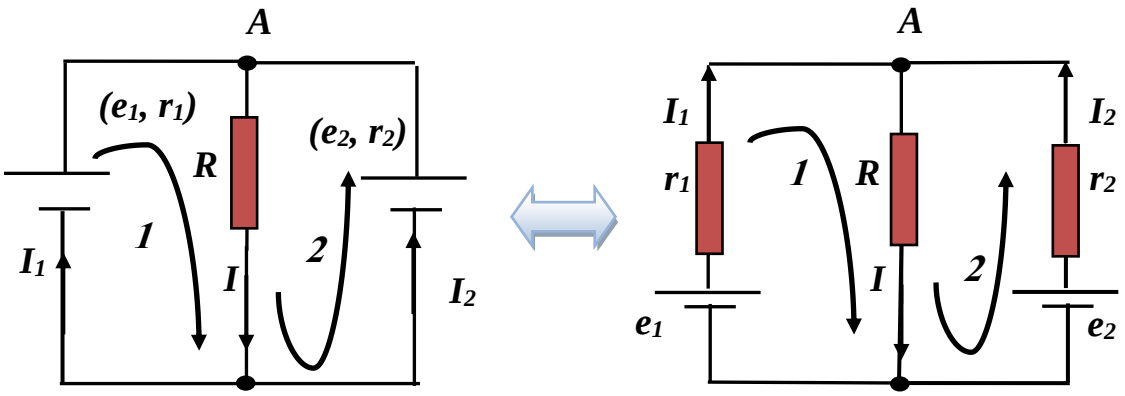
يمكن تمثيل منحنى الإستطاعة بدلالة المقاومة الكهربائية R_U بالمنحنى الممثّل في الشكل-3-



الشكل-5-

نلاحظ أنّه من أجل $R_U = R_g$ تكون الإستطاعة المقدمة من طرف المولد أعظمية مما يدل على أهمية الملائمة أثناء دراسة الدارات الكهربائية.

مثال عن تطبيق قوانين كيرشوف



الشكل-6- الشكل-7-

تطبيق قانون كيرشوف عند العقدة A:

$$\boldsymbol{i = i_1 + i_2}$$

تطبيق قانون كيرشوف للعروة:

في العروة 1 وحسب إتّجاه التيّار المبيّن:

$$e_1 - r_1.i_1 - R.i = 0$$

في العروة 2 وحسب إتّجاه التيّار المبيّن:

$$e_2 - r_2.i_2 - R.i = 0$$

$$\begin{cases} (r_1 + R).i_1 + R.i_2. = e_1 \\ R.i_1 + (r_2 + R).i_2. = e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} e_1 - r_1.i_1 - R..(i_1 + i_2) = 0 \\ e_2 - r_2.i_2 - R..(i_1 + i_2) = 0 \end{cases}$$

وباستعمال طريقة **محددات كرامر**:

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R+r_1 & e_1 \\ R & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & +R \\ +R & R+r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{R.(e_1-e_2)+r_1.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2} \quad \text{و} \quad i_1 = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & R \\ e_2 & R+r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & +R \\ +R & R+r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{R.(e_1-e_2)+r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$$

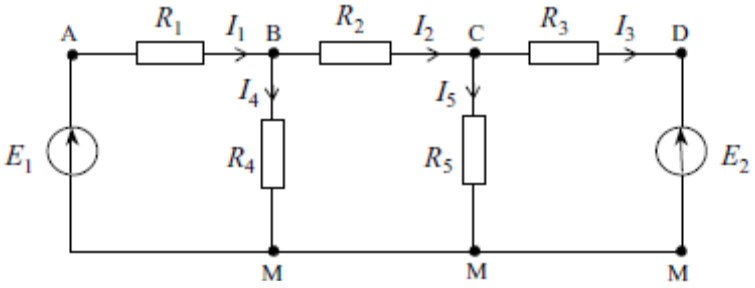
التطبيق العددي

إذا كان: $e_1=6V, e_2=12V, r_1=1\Omega, r_2=2\Omega, R=10\Omega$

في هذه الحالة، نجد:

$$\boldsymbol{i_1=-1.5A, i_2=2.25A, i=0.75A}$$

بعد الإنْتهاء من كل الحسابات، نلاحظ أنّ i_1 سالب وهو يمر بمصدر جهد مستقطب إذن لا نعيد الحسابات بل نكتفي بتغيير إتّجاه التيّار في الرسم.



الشكل-8-

مثال-2-

تطبيق قوانين كيرشوف:

1) أحسب التيّارات المارة في كل الفروع

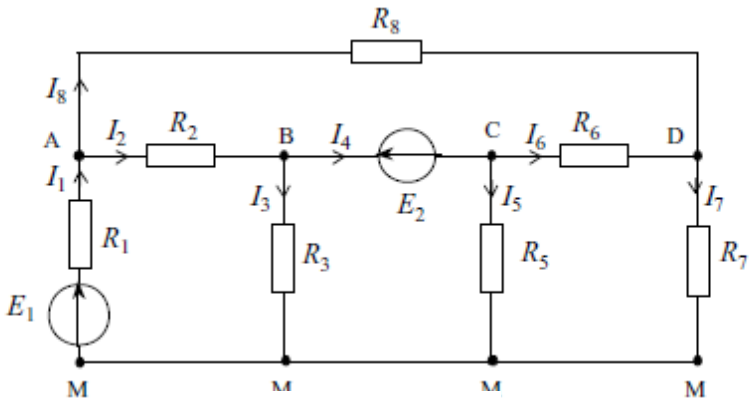
المعطيات:

$$E_1 = 10V, E_2 = 20V, R_1 = R_2 = R_3 = 1K\Omega, R_4 = R_5 = 2K\Omega$$

بعد الحساب نجد: $I_1 = 0.66mA, I_2 = -1.33mA, I_3 = -7.55mA, I_4 = 2mA, I_5 = 6.22mA$

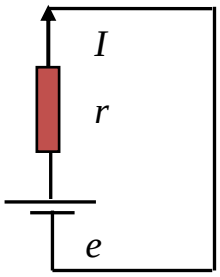
مثال-2- عن تطبيق قوانين كيرشوف:

1) أحسب التيّارات المارة في كل الفروع



الشكل-9-

14. مفهوم نقطة التشغيل



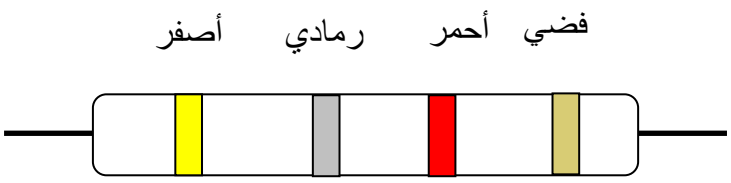
يجب أن نعلم أنّ الدارة لا تشتغل من أجل أيّة قيمة للجهد أو التيّار وهذا ما تدل عليه قوانين كيرشوف، إذ أنّ حلّها يؤدي إلى قيم محددة. ويمكن لنا أنْ نوضّح ذلك ببساطة من خلال المثال البسيط الذي نراه في الدارة المبيّنة أعلاه، حيث لدينا مصدرا e يغذي المقاومة الكهربائية r التي يمر فيها التيّار I وبالتالي

فالجهد عند قطبيها هو $V=r.I$ ولكي تشتغل الدارة يجب أن يتساوى الجهدان $V=e$ ويمكن حل هذه المعادلة بيانيا كما يمكن حلها حسابيا (لأنّ المثال بسيط) فنجد: $e = r.I$ أي $I = e/R$.

التمارين

التمرين الأوّل:

- أحسب قيمة المقاومة الكهربائية المبينة في الشكل التالي.



الحل

كما بيّنا في الدرس. الحل هو: R=(4800±480) Ω

التمرين الثّاني:

ماهي الطاقة الكهربائية المستهلكة:

1) داخل المقاومة الكهربائية ؟

2) المخزنة داخل الوشيعة؟

3) المخزنة داخل المكثفة؟

الحل

1) لدينا في المقاومة الكهربائية: $\boldsymbol{W = \int p.dt = \int V.I.dt = \int RI.I.dt = \int R.I^2.dt = R.\int I^2.dt}$

حيث p و V و I يمثلون القيم اللحظية لكل من الإستطاعة والجهد والتيّار. إذا كان التيّار يتغير زمنيا فيجب تعويضه بدالته الزمنية قبل إتمام حساب التكامل. أمّا إذا كان التيّار لا يتغير زمنيا مثل التيّار المستمر فعندئذ نخرجه من التكامل: $W = R..I^2.t$

2) لدينا في الوشيعة: $\boldsymbol{W = \int p.dt = \int V.I.dt = \int L\frac{dI}{dt}.I.dt = \int L.I.dI = \frac{L.I^2}{2}}$

3) لدينا في المكثفة: $\boldsymbol{W = \int p.dt = \int V.I.dt = \int \frac{q}{C}.I.dt = \int \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt}.dt = \frac{1}{C}\int q.dq = \frac{q^2}{2C}}$

$$W = \int \left(L_1\frac{dI}{dt}.I + L_2\frac{dI}{dt}I\right).dt = \int (L_1+L_2).I.\frac{dI}{dt}dt = \int (L_1+L_2).I.dI$$

$$= \frac{1}{2}.(L_1+L_2).I^2$$

التمرين الثالث:

نريد قياس الجهد والمقاومة الكهربائية الداخلية عند قطبي مصدرين للجهد (e_1,r_1) و (e_2,r_2). عندما نربط المصدر الأوّل على التسلسل مع أمبيرمتر لديه مقاومة داخلية مهملة نجد تيّارا شدّته $1A$ ، وعندما نعيد نفس العملية مع المصدر الثّاني ، نجد نفس التيّار. أمّا إذا ربطنا هذين المصدرين على التسلسل (بحيث أنّ أقطابهما موضوعة في نفس الإتّجاه الموجب) ونربط معهما فولط متر بدلا من أمبرمتر فنحصل على جهد قدره $3V$ أمّا إذا وضعناهما متعاكسين فنحصل على جهد قدره $1V$.

1) أحسب القوّة الكهرومحركة والمقاومة الكهربائية الداخلية للمصدرين.

2) أرسم المنحنيات توتر- تيّار للمصدرين.

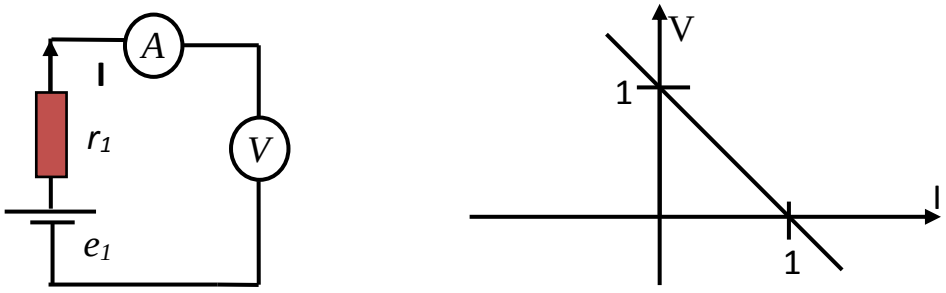
مساعدة

كل هذه القياسات تكافئ دارة نقوم برسمها ونطبق عليها قوانين كيرشوف (أنظر الشكل-10-)

1) بعد كتابة جملة من أربعة معادلات بأربعة مجاهيل نجد بعد الحساب:

$e_1=1V$ ، $e_2=2V$ ،$r_1=1\Omega$ ، $r_2=2\Omega$.

2) يكتب الجهد عند قطبي المصدر الأوّل كما يلي: $\boldsymbol{V = e_1 - r_1.I = 1 - I}$ ، فنرسم المنحنى توتر -تيّار لهذا المصدر وهو عبارة عن مستقيم لا يمر بالمبدأ (أنظر الشكل-10-).



الشكل-10-

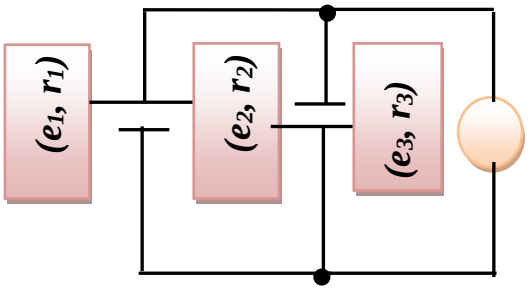
يكتب الجهد عند قطبي المصدر الثّاني كما يلي: $V = e_2 - r_2.I = 2 - 4I$ فنرسم المنحنى توتر- تيّار لهذا المصدر بنفس الطريقة السابقة.

التمرين الرابع:

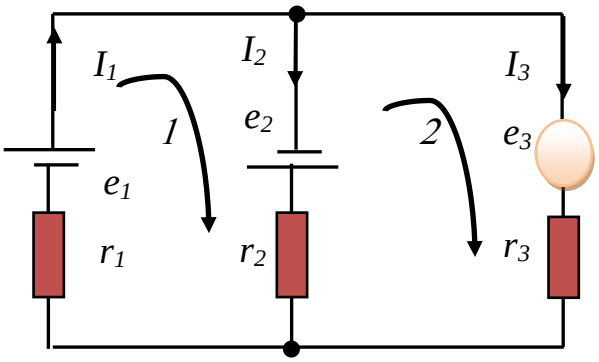
باستعمال قوانين كيرشوف، أوجد التيّارات في كل الفروع.

$e_1=2V, e_2=1V, e_3=3V, r_1=1\ \Omega, r_2=2\ \Omega, r_3=3\ \Omega$

الحل



الشكل-11-



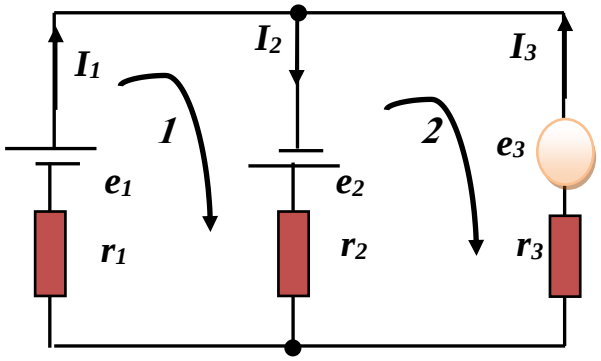
الشكل-12-

في البداية، نفترض أنّ التيّار I_3 يجتاز جهاز الإستقبال من "أعلى" إلى "أسفل"، أمّا بقية التيّارات فنختار إتّجاه التيّار كما نشاء فلن يُشكل ذلك مشكلا. فيكون إستقطاب العناصر الخاملة كما هو مبيّن في الشكل-12 -

عندنا إذن 3 مجاهيل، فنحتاج إلى عقدة وعروتين (نأخذ التي على اليمين والتي على اليسار مثلا)، ونكتب معادلات كيرشوف، وقد بيّنا الإتّجاهات التي اعتمدناها بالأسهم:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ e_1 - r_1.I_1 + e_2 - r_2.I_2 = 0 \\ -e_2 + r_2.I_2 - r_3.I_3 - e_3 = 0 \end{cases}$$

وبعد التعويض والحساب، نجد أنّ $I_3 = -\frac{6}{11} < 0$ وهو التيّار الذي يجتاز جهاز الإستقبال. ولذلك، يتعين علينا تغيير إتّجاهه وإعادة الحسابات. لو لم يكن يمر هذا التيّار بجهاز الإستقبال لإكتفينا بتغيير إتّجاهه في الرسم ولكن هذا لا يكفي في الحالة الراهنة. إذن، نعيد كل شيء بداية من الرسم، حيث نغيّر إتّجاه I_3 فيتغير الاستقطاب في الفرع الذي يسري فيه:



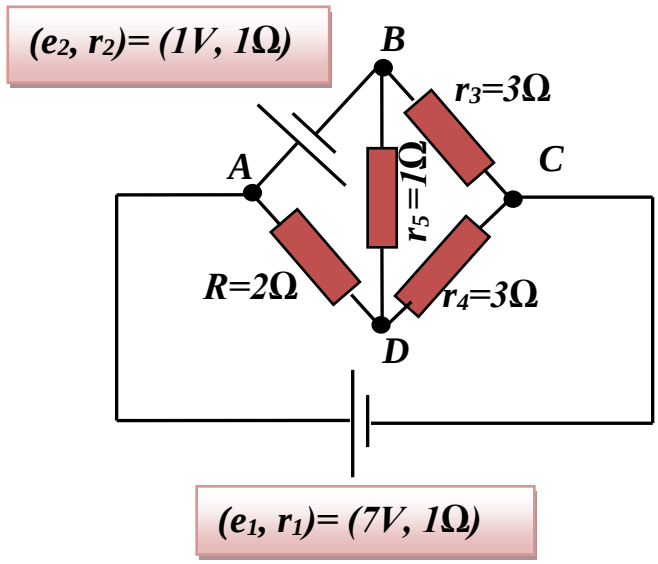
فتصبح المعادلات كما يلي:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ e_1 - r_1.I_1 + e_2 - r_2.I_2 = 0 \\ -e_2 + r_2.I_2 + r_3.I_3 + e_3 = 0 \end{cases}$$

ولكن بعد الحساب، سنجد مرة أخرى قيمة سالبة للتيّار i_3 الذي يجتاز جهاز الإستقبال، فنستنتج أنّه **معطل**.

التمرين الخامس

باستعمال قوانين كيرشوف، أوجد التيّارات السارية في هذه الشبكة (الشكل-13-).



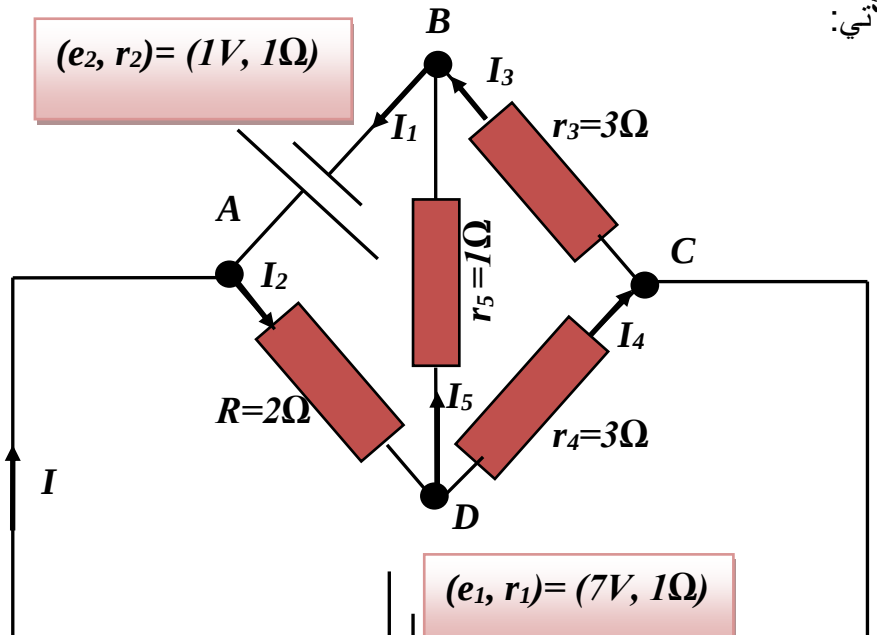
الشكل-13-

مساعدة

الجملة التي يجب حلّها هي:

$$\begin{cases} i + i_1 = i_2 \\ i_4 = i + i_3 \\ i_2 = i_5 + i_4 \\ e_1 - r_1.i_1 - r_2.i_2 - r_5.i_5 = 0 \\ r_5.i_5 - r_4.i_4 - r_3.i_3 = 0 \\ e - R.i - r_2.i_2 - r_4.i_4 = 0 \end{cases}$$

التيّارات مبيّنة في الشكل الآتي:



نظريات تحليل الدارات الكهربائية

1. تمهيد

لقد تطرقنا في الدرس السابق إلى طريقة كيرشوف التي تُمكننا من حساب مختلف الجهود والتيّارات داخل الدارات. ولكن هناك بعض الحالات يكون استعمالها معقدا ممّا يُؤدي إلى حسابات طويلة نحن في غنى عنها. لذلك سنتطرق من خلال هذا الدرس إلى نظريات وطرق أخرى لتحليل الدارات الكهربائية والتي تسمح لنا بتعيين مختلف التيّارات والجهود بطرق تكون أقل تكلفة في غالب الأحيان.

2. طريقة التيّارات الوهمية (طريقة ماكسويل)

1.2 طريقة التيّارات الوهمية مباشرة باستعمال المصفوفات

في هذه الطريقة، نقسّم العمل إلى مرحلتين:

في المرحلة الأولى، نعتبر وجود تيّار وهمي في كل عروة مستقلة عن بقية الحلقات (العروات)، ثم نقوم باستنتاج التيّارات الحقيقية انطلاقا من النتائج السابقة.

طريقة العمل

1) نختار إتّجاها معينا للتيّارات الوهمية ونحرص على أن نتخذ نفس الإتّجاه في كل الحلقات (إمّا نفس إتّجاه عقارب الساعة أو عكسه)، هذه التيّارات يجب أن تكون مستقلة (غير متداخلة).

2) نكتب المصفوفة الخاصة بالمقاومات بحيث نملأ قطر المصفوفة بمجموع المقاومات داخل كل عروة وأمّا بقية عناصر المصفوفة فنملؤها بمجموع المقاومات المشتركة بين كل عروتين. وفي الأخير، نترك عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة على حالها بينما نسبق بقية العناصر بإشارة ناقص (-).

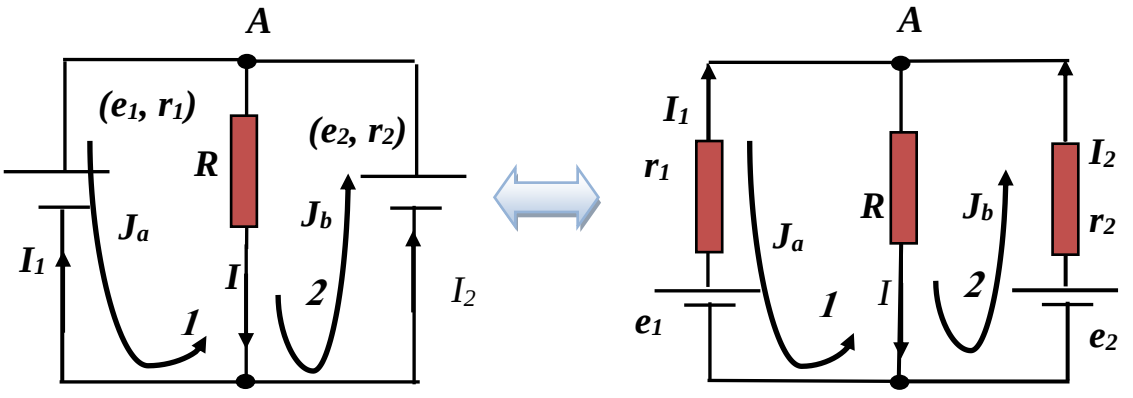
3) نكتب المصفوفة الخاصة بالتيّارات الوهمية (تيّارات ماكسويل) بمراعاة الترتيب.

4) نكتب المصفوفة الخاصة بالقوى الكهرومحركة والكهرومحركة المعاكسة على شكل عمود باستخدام اصطلاحات الإشارة المبيّنة آنفا.

5) نتحصل في الأخير على معادلة مصفوفية نقوم بحلها كما هو مبيّن في الملحق الرياضي.

المثال 1

لتكن الدارة المبيّنة قي الشكل-1-



الشكل-14- أ

الشكل-14- ب

نختار العروتين 1 و 2 ونسمي التيّارين الوهميين J_a و J_bعلى التوالي وإتّجاهيهما المبيّنين على الشكل- 14-

1) نكتب مصفوفة المقاومات: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{R+r_1} & \boldsymbol{-R} \\ \boldsymbol{-R} & \boldsymbol{R+r_2} \end{pmatrix}$

2) نكتب مصفوفة الجهود: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{-e_1} \\ \boldsymbol{e_2} \end{pmatrix}$

إذن:

$$\begin{pmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

ويأتي:

$$\begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

إذن يجب البحث عن مقلوب مصفوفة المقاومات. لأجل ذلك، نحسب أوّلا محدد هذه المصفوفة فنجد: $\Delta = (r_1+r_2).R + r_1.r_2$ وهو غير معدوم. ثم نحسب مصفوفة المحددات الصغرى آخذين الإشارة بعين الاعتبار، فنجد: $\begin{pmatrix} R+r_2 & +R \\ +R & R+r_1 \end{pmatrix}$ ثم نحسب منقولة هذه المصفوفة فنجدها هي نفسها، وفي الأخير نقسمها على المحدد لنحصل على المصفوفة المقلوبة:

$$\begin{pmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}\begin{pmatrix} R+r_2 & +R \\ +R & R+r_1 \end{pmatrix}،$$

ومن ثم:

$$\begin{pmatrix} J_a \\ J_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}\begin{pmatrix} R+r_2 & +R \\ +R & R+r_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

فنجد التيّارات الوهمية:

$$J_a = -\frac{R.(e_1-e_2)+r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2} \text{ و } J_b = \frac{R.(e_2-e_1)+r_1.e_2}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$$

وعندئذ يمكن استنتاج التيّارات الحقيقية بسهولة:

$$I_1 = -J_a \text{ ، } I_2 = +J_b \text{ و } I_1 = -J_a, I_2 = +J_b, I = -J_a + J_b$$

بعد التطبيق العددي باستعمال نفس القيم (الشكل-6 والشكل-7 للمحور السابق)، نحصل على نفس النتائج.

تطبيق عددي:

إذا كان: $e_1=6V, e_2=12V, r_1=1\Omega, r_2=2\Omega, R=10\Omega$

في هذه الحالة، نجد : i_1=-1,5A, i_2=2,25A, i=0,75A

ملاحظة

لعل القارئ يظن أنّ هذه الطريقة صعبة بالمقارنة مع طريقة كيرشوف السابقة. هذا غير صحيح، بل هذه الطريقة تمكننا من الحل السريع متجنّبين الأخطاء وتبدو أهميتها خاصة في الشبكات التي تحتوي على عدد كبير من الحلقات. ومن جهة أخرى فأنّه يمكن عدم إستعمال المصفوفات كما سنبيّن ذلك فيما يلي.

2.2 طريقة التيّارات الوهمية دون مصفوفات

في هذه الحالة أيضا نختار إتّجاها معينا للتيّارات الوهمية ولكن ليس ضروري أن نتّخذ نفس الإتّجاه في كل الحلقات بل يمكن اختيّار إتّجاهات مختلفة. بعد ذلك، نكتب المعادلات باستعمال التيّارات الوهمية بدلا من التيّارات الحقيقية. نأخذ نفس المثال السابق (الشكل-14-أ و الشكل-14-ب) و باستعمال التيّارات الوهمية نجد:

$$\begin{cases} -e_1 - r_1.J_a - R.(J_a - J_b) = 0 \\ -e_2 - r_2.J_b - R.(J_b - J_a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(r_1 + R).J_a + R.J_b = e_1 \\ -R.J_a + (r_2 + R).J_b = e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (r_1 + R).J_a - R.J_b = -e_1 \\ -R.J_a + (r_2 + R).J_b = e_2 \end{cases}$$

وباستعمال طريقة محددات كرامر:

$$J_a = \frac{\begin{vmatrix} -e_1 & -R \\ e_2 & R+r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{R.(e_1-e_2)+r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2} \quad \text{و} \quad J_b = \frac{\begin{vmatrix} R+r_1 & -e_1 \\ -R & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R+r_1 & -R \\ -R & R+r_2 \end{vmatrix}} = \frac{R.(e_2-e_1)+r_1.e_2}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$$

و هي نفس النتائج السابقة حيث:

$$\boldsymbol{i_1 = -J_a \text{ ، } i_2 = +J_b \text{ و } i = -J_a + J_b}$$

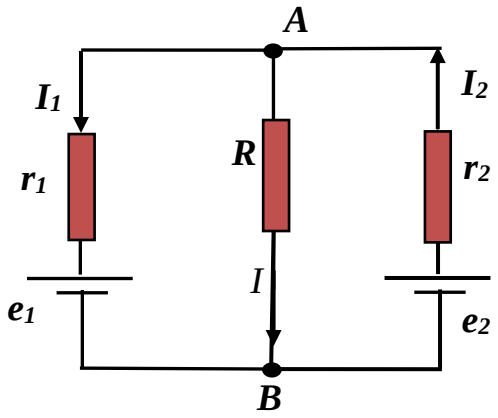
تطبيق عددي:

إذا كان: e_1=6V, e_2=12V, r_1=1Ω, r_2=2Ω, R=10Ω

في هذه الحالة، نجد : i_1=-1,5A, i_2=2,25A, i=0,75A

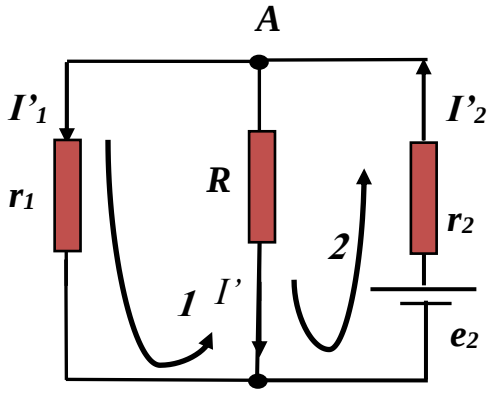
3. نظرية التركيب (التبديل)

نظرية التركيب صالحة للإستعمال مادام النظام خطّيا وهي تنص على أنّ مختلف المصادر تُنشئ جهودا وتيّارات بصفة مستقلة تماما وتكون الجهود والتيّارات النهائية عبارة عن الجمع الجبري لتلك الجهود والتيّارات المستقلة. مثلا، لنأخذ دارة الشكل-14- السابقة من جديد.



لاحظ بأنّنا اتّخذنا إتّجاها للتيّار I_1 نحو الأسفل على عكس ما فعلنا في الفقرة السابقة.

سنستعمل نظرية التركيب من أجل إيجاد مختلف التيّارات السارية في الشبكة، من أجل ذلك، نحذف أوّلا المصدر e_1 ونبقي المصدر e_2 ، نلاحظ أنّ اتجاه التيّارات قد تغيّر:



من العروة (1) لدينا المعادلة:

$$-r_1.I_1' + R.I' = 0 \ldots\ldots (1)$$

أمّا من العروة (2) التي على اليمين، لدينا:

$$e_2 - r_2.I_2' - R.I' = 0 \ldots\ldots (2)$$

عند العقدة (A) :

$$I_2' = I' + I_1' \ldots . (3)$$

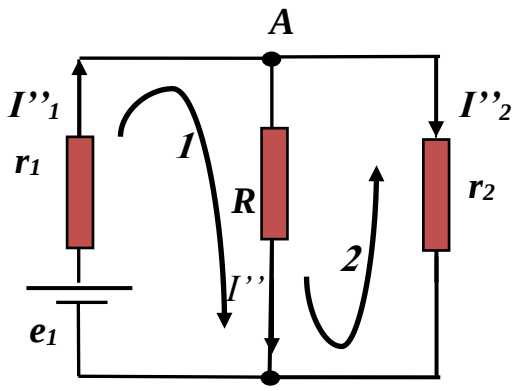
وبعد تعويض المعادلة الثالثة في الثّانية، نجد:

$(r_2 + R).I' + r_2.I_1' = e_2$ أي $e_2 - r_2.(I' + I_1') - R.I' = 0$ ، ومنه $I_1' = \frac{e_2 - (r_2+R).I'}{r_2}$.

وبعد التعويض في المعادلة الأوّلى ، نجد: $I' = \frac{r_1.e_2}{r_1.r_2 + r_1.R + r_2.R}$ ومن المعادلتين الأوّلى والثالثة: $I_1' =$

$\frac{R.e_2}{r_1.r_2 + r_1.R + r_2.R}$ و $I_2' = \frac{(R+r_1).e_2}{r_1.r_2 + r_1.R + r_2.R}$.

- بعد ذلك، نحذف المصدر $\mathbf{e_2}$ ونبقي المصدر $\mathbf{e_1}$ ، نلاحظ أنّ اتجاه التيّارات قد تغيّر:



من العروة (1) لدينا المعادلة: $e_1 - r_1.I_1'' - R.I'' = 0$، أمّا من العروة (2) التي على اليمين، لدينا

$$r_2.I_2'' - R.I'' = 0$$

عند العقدة A لدينا:

$$I_1'' = I'' + I_2''$$

وبعد القيام بعمليات مشابهة للتي في الفقرة السابقة، نجد :

$I'' = \frac{r_2.e_1}{r_1.r_2 + r_1.R + r_2.R}$ وأيضا: $I_2'' = \frac{R.e_1}{r_1.r_2 + r_1.R + r_2.R}$

وأخيرا:

$$I_1'' = \frac{(R + r_2).e_1}{r_1.r_2 + r_1.R + r_2.R}$$

في المرحلة الأخيرة وهي القيام بالجمع الجبري للتيّارات. نلاحظ أنّ I_1' له نفس إتّجاه I_1 ، بينما I_1'' له عكس إتّجاهه، إذن :

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{-[R.(e_1 - e_2) + r_2.e_1]}{(r_1 + r_2).R + r_1.r_2}$$

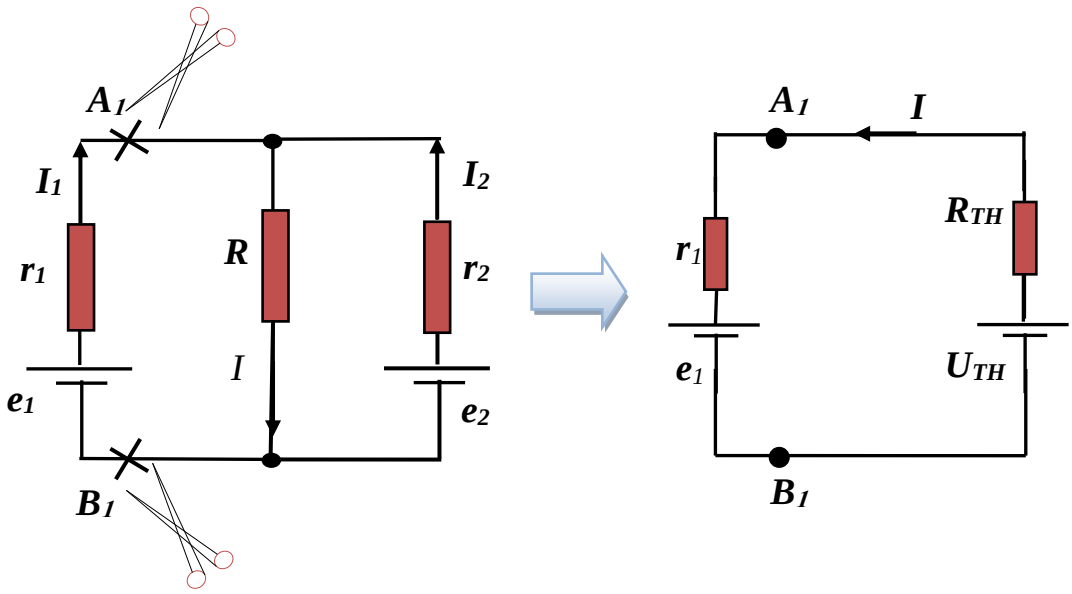
ونلاحظ أن I_2' له نفس إتّجاه I_2 ، بينما I_2'' له عكس إتّجاهه، إذن :

$$I_2 = I_2' - I_2'' = \frac{R.(e_2 - e_1) + r_1.e_2}{(r_1 + r_2).R + r_1.r_2}$$

تنبيه: لم نجد نفس الإشارة للتيّار I_1 في الفقرة السابقة لأنّنا غيّرنا الإتّجاه في الرسم.

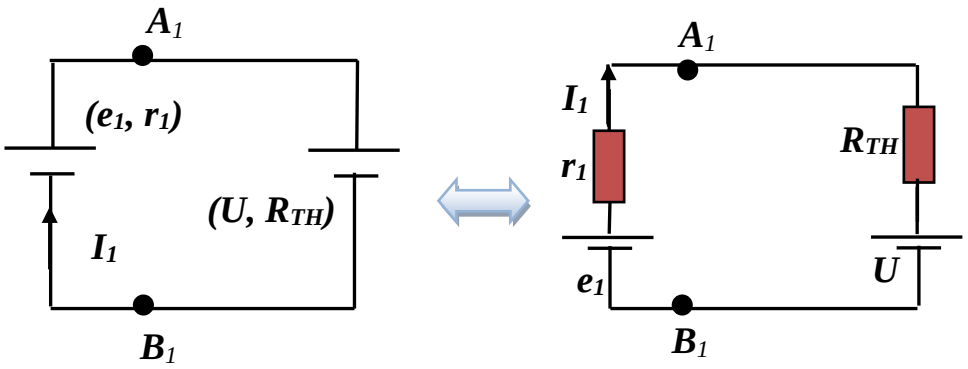
4. نظرية تيفنين (Théorème de Thévenin)

نظرية تيفنين تُمكننا من تعويض العناصر النشطة أو الخاملة بين نقطتين A و B بمصدر جهد مكافئ قوته الكهرومحركة $U_{TH}=V_{AB}$ تساوي فرق الكمون بين هاتين النقطتين في حالة فراغ (دارة مفتوحة) ومقاومته الداخلية R_{TH} تساوي المقاومة الكهربائية الداخلية المنظورة بين النقطتين A و B عندما نقْصر كل القوى الكهرومحركة (مولدات الجهد) و نفتح مولدات التيّار (دارة مفتوحة).



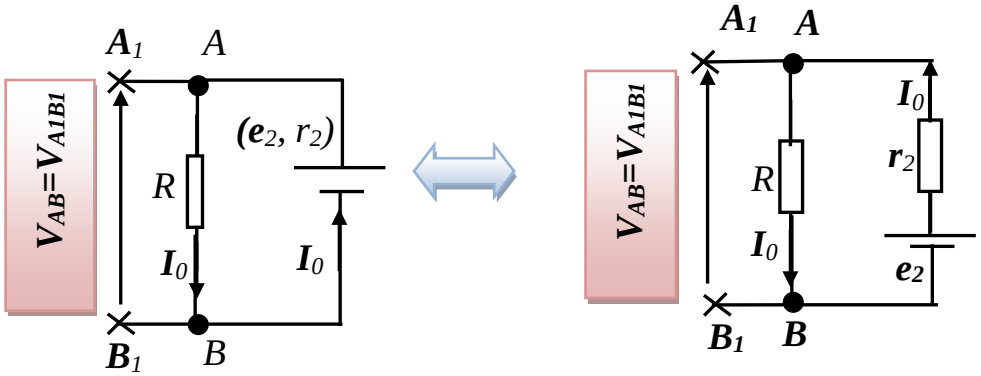
المثال 2

نريد أن نطبّق نظرية تيفنين على العناصر الموجودة في الفرع بين النقطتين A_1 و B_1 من أجل الحصول على الشكل المكافئ التالي:



1) حساب U

نفتح الدارة السابقة كما هو مبيّن في الشكل الموالي (التيّار يتغير إلى I_0): $I_0 = \frac{e_2}{R+r_2}$



ومنه: $V_{AB} = RI_0 = \frac{R.e_2}{R+r_2}$

إذن:

$$U_{TH} = V_{AB} = RI_0 = \frac{R.e_2}{R+r_2}$$

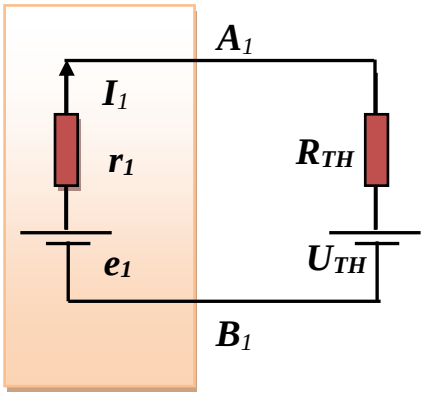
2) حساب R_{TH}

إذا قصرنا (أي قمنا بقصره) e_2 فنلاحظ أنّ R و r_2 يُصبحان على التفرع ومنه:

$$R_{TH} = R_{eq} = \frac{R.r_2}{R+r_2}$$

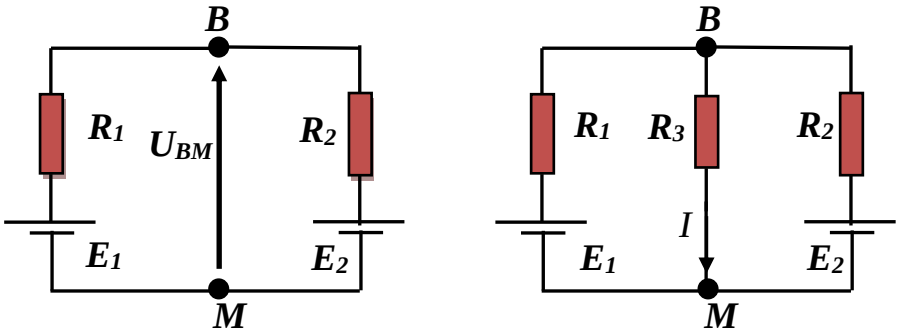
حساب I_1

إذا عرفنا الآن قيمتي U_{TH} و R_{TH} ، نقوم برسم الدارة المكافئة (الشكل الموالي) بحساب I_1(التيّار الحقيقي): $I_1 = -\frac{U_{TH}-e_1}{R_{TH}+r_1}$ وبعد تعويض U_{TH} و R_{TH} بقيمتيهما فنجد: $\boldsymbol{I_1 = \frac{R.(e_1-e_2)+r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}}$

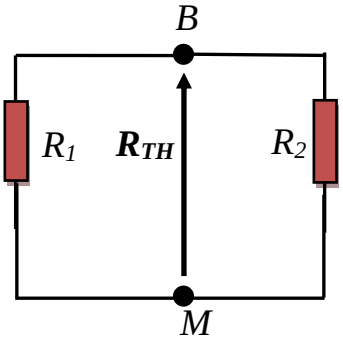


المثال 3

أوجد الشكل المكافئ لتفنين بين BM



تطبيق عددي

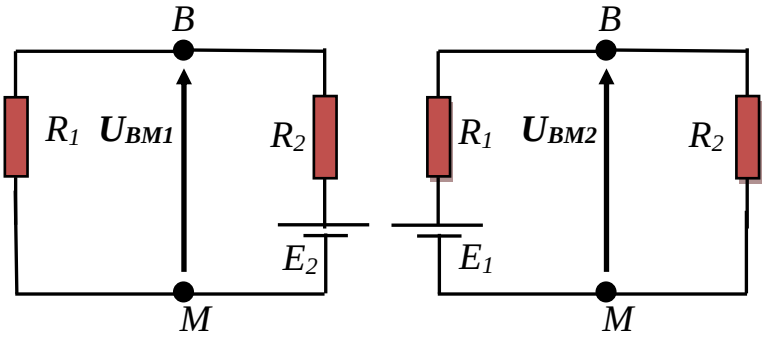


$R_1 = 3K\Omega, R_2 = 6K\Omega, R_3 = 10K\Omega, E_1 = 20V, E_2 = 10V$

بتطبيق نظرية التركيب نجد:

$$U_{BM1} = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2}, U_{BM2} = E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

يصبح جهد تفنين كالتالي:



$$E_{TH} = U_{BM1} + U_{BM2} = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2} = 16.66V$$

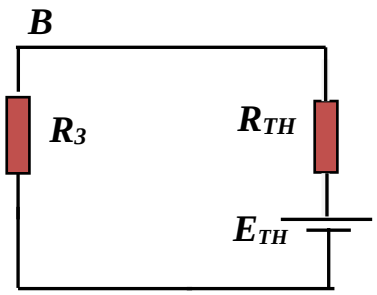
بعدما نقصر مُولدي الجهد:

$$E_1 = E_2 = 0$$

نجد المقاومة الكهربائية المكافئة لتفنين:

$$R_{TH} = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2} = 2K\Omega$$

يكون شكل تفنين المكافئ كالتالي:



الشكل المكافئ لتفنين

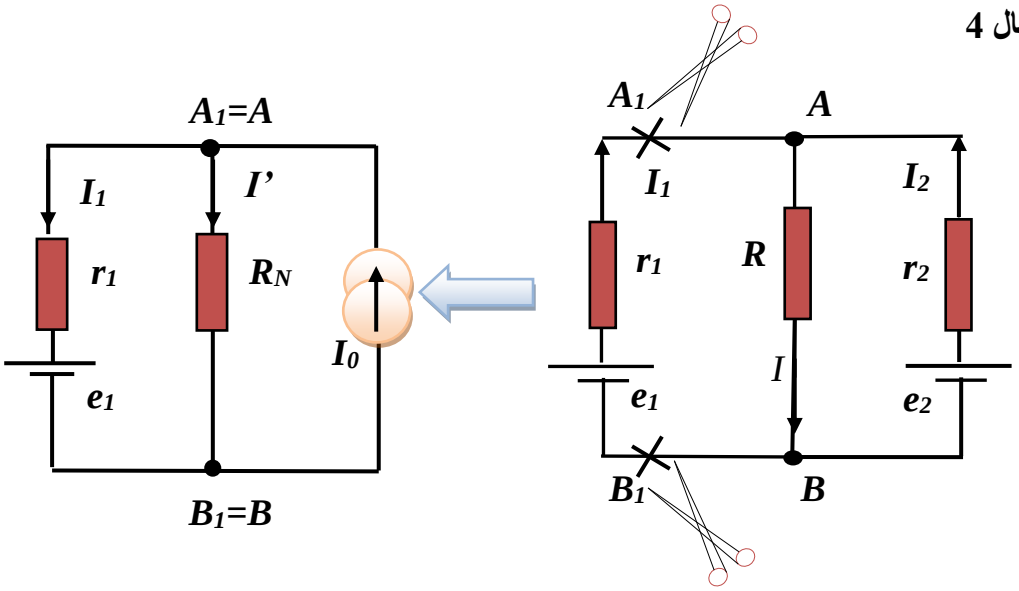
5. نظرية نورتن (Théorème de Norton)

نظرية نورتن تُمكننا من تعويض العناصر النشطة أو الخاملة بين نقطتين A و B بمصدر تيّار مكافئ بحيث أنّ التيّار الذي يولده يكون مساويا للتيّار الذي نحصل عليه إذا صنعنا دارة قصيرة بين النقطتين A و B . أمّا المقاومة الكهربائية الداخلية لمصدر التيّار هذا فتُحسب بنفس الطريقة التي رأيناها في نظرية تيفنين السابقة.

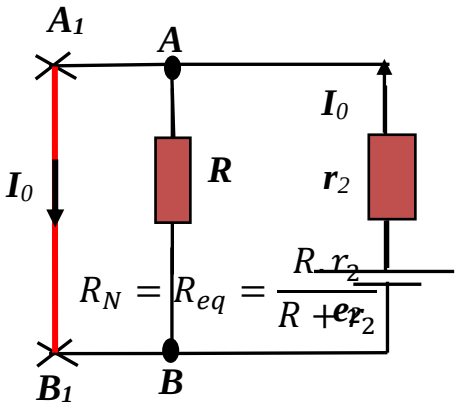
ملاحظة

المقاومة الكهربائية الداخلية لمصدر التيّار في نظرية نورتن ، تُربط على التفرع مع مصدر التيّار وليس على التسلسل كما هو الحال في نظرية تفنيين.

المثال 4



نحسب المقاومة الكهربائية المكافئة R_N بنفس طريقة تيفنين فنجد نفس النتيجة:

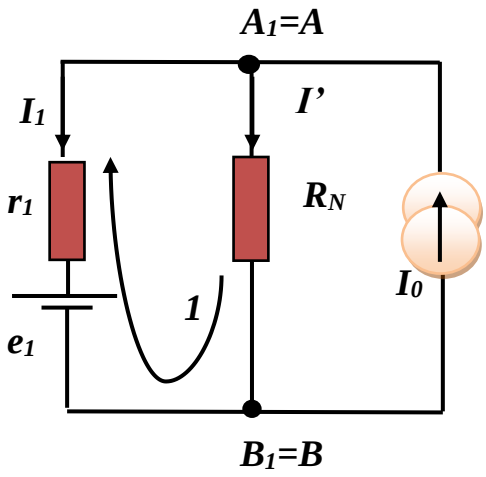


نحسب الأنّ تيّار الدارة القصيرة :

الدارة القصيرة بين A_1B_1 تحجب المقاومة الكهربائية R فلا يُمرفيها أيُ تيّار ويصبح لدينا:

$$e_2 - r_2.I_0 = 0$$ و منه: $$I_0 = \frac{e_2}{r_2}$$

نُكْمل الآنّ كل الحسابات بعد رسم الدارة المكافئة التي تحتوي مصدر نورتن:



لدينا: $$I_0 = I_1 + I'$$

ومنه: $$I' = I_0 - I_1$$

ومنه: $$e_1 + r_1.i_1 - R_N.I' = 0$$

من العروة (1) نكتب:

$$e_1 + r_1.I_1 + R_N.(I_1 - I_0) = 0$$ و بترتيب التيّارات مع بعضها:

$$e_1 + (r_1 + R_N).I_1 - R_N.I_0 = 0$$ فنجد:

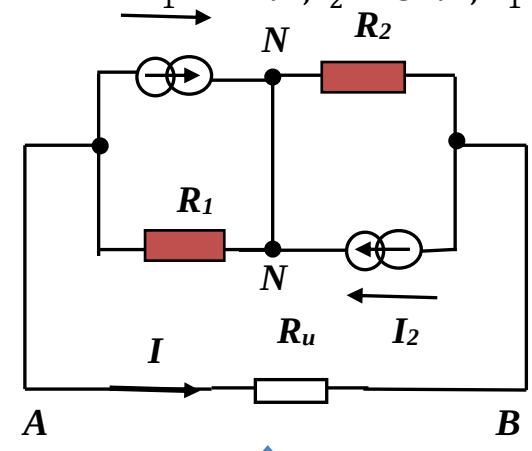
$$I_1 = \frac{-e_1 + R_N.i_0}{r_1 + R_N} = \frac{-e_1 + R_N.\frac{e_2}{r_2}}{r_1 + R_N}$$

وبما أن $R_N = \frac{R.r_2}{R+r_2}$ فيأتي: $I_1 = \frac{R.(e_2-e_1)-r_2.e_1}{(r_1+r_2).R+r_1.r_2}$

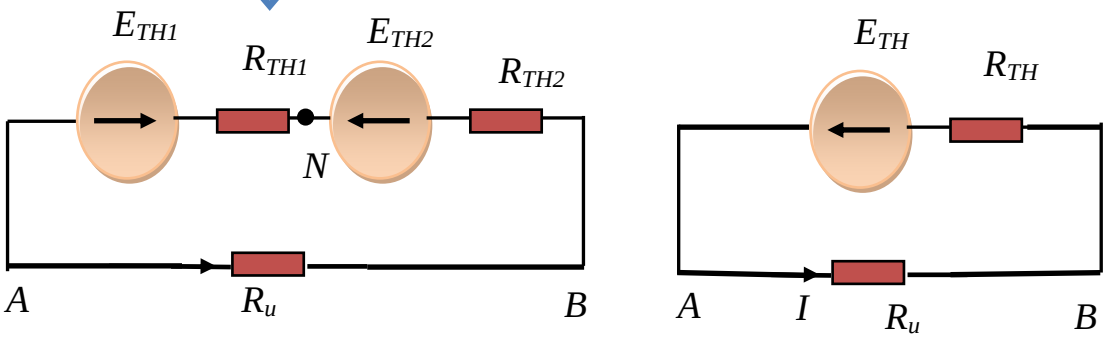
المثال 5

- أحسب التيّار المار في مقاومة الإستعمال R_u

$I_1 = 2mA, I_2 = 5mA, R_1 = 10K\Omega, R_2 = 5K\Omega$



يمكن تبسيط الشكل السابق الى:



بعد الحساب نجد بالنسبة للشكل- 2-:

$$E_{TH1} = I_1R_1 = 20V, E_{TH2} = I_2R_2 = 25V, R_{TH1} = R_1, R_{TH2} = R_2$$

$$E_{TH} = E_{TH2} - E_{TH1} = 5V, R_{TH} = R_{TH1} + R_{TH2} = R_1 + R_2 = 15K\Omega$$

6. نظرية كينيلي

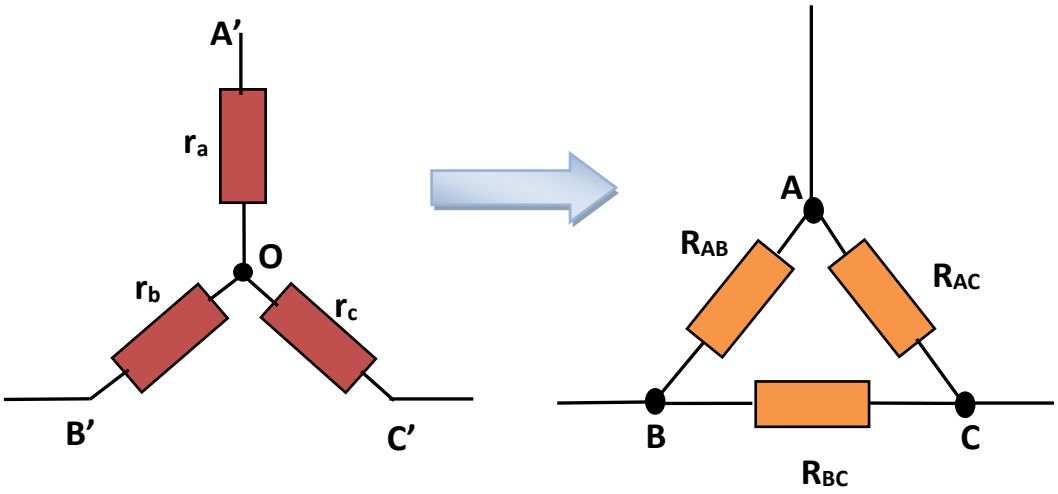
1.6 التحويل المثلثي-النجمي

حسب نظرية كينيلي، يمكن تحويل المثلث ABC إلى شكل نجمة كما يوضحه الشكل-15-،

وفق القوانين الآتية:

$$r_a = \frac{R_{AC}.R_{AB}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}}, r_b = \frac{R_{BC}.R_{AB}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}}, r_c = \frac{R_{BC}.R_{AC}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}}$$

A، B و C عُقد (أنظر الشكل-15-أ).



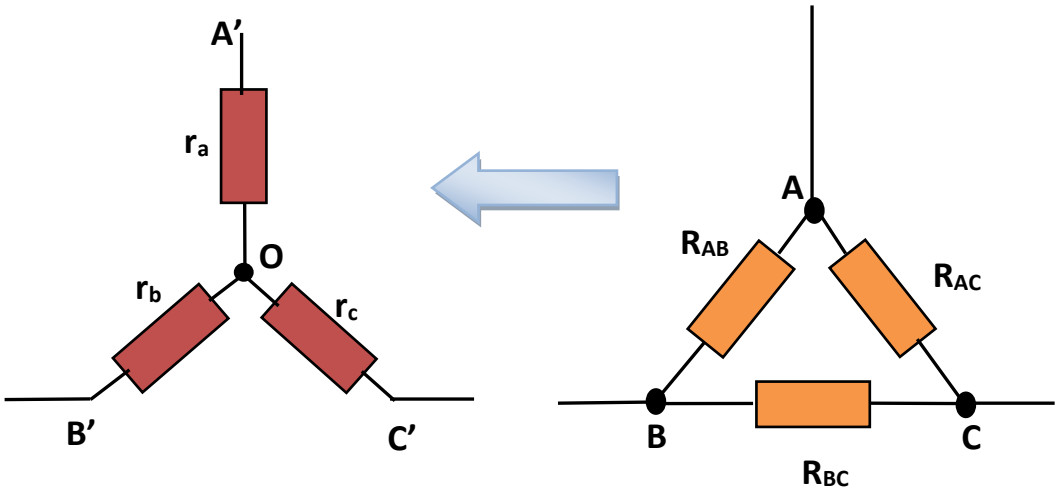
الشكل-15-ب الشكل-15-أ

يمكن تحويل الشكل نجمي(A'B'C') إلى الشكل المثلثي ABC كما يوضحه الشكل-3-، وفق العلاقات التالية:

$$R_{AB} = \frac{r_a.r_b+r_a.r_c+r_b.r_c}{r_c}, R_{AC} = \frac{r_a.r_b+r_a.r_c+r_b.r_c}{r_b}, R_{BC} = \frac{r_a.r_b+r_a.r_c+r_b.r_c}{r_a}$$

إن تحويل النجمي إلى المثلثي أو العكس يستند إلى نظرية التراكيب في الدارات الكهربائية.

1.1.6 المثلثي إلى النجمي



الشكل-16-ب الشكل-16-أ

1) نعتبر (C و C') قطبين معلقين في الهواء $R_{AB} = R_{A'B'} \Leftrightarrow r_a + r_b = (R_{AB})//$

$$(R_{AC} + R_{BC}) = \frac{(R_{AB}).(R_{AC}+R_{BC})}{R_{AB}+R_{AC}+R_{BC}} (1)$$

2) نعتبر (B و B') قطبين معلقين في الهواء

$$R_{AC} = R_{A'C'} \Leftrightarrow r_a + r_c = (R_{AC})//(R_{AB} + R_{BC}) = \frac{(R_{AC}).(R_{AB}+R_{BC})}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}} \quad (2)$$

3) نعتبر (A و A') قطبين معلقين في الهواء

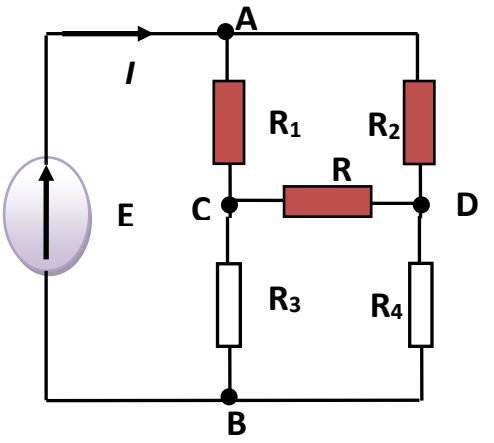
$$R_{BC} = R_{A'C'} \Leftrightarrow r_b + r_c = (R_{BC})//(R_{AB} + R_{AC}) = \frac{(R_{BC}).(R_{AB}+R_{AC})}{R_{BC}+R_{AB}+R_{AC}} \quad (3)$$

إنطلاقا من المعادلات (1)، (2) و (3) نحصل على:

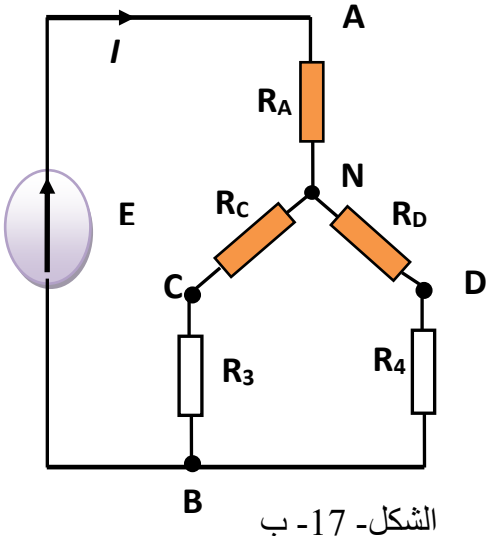
$$r_c = \frac{R_{BC}.R_{AC}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}} \quad r_b = \frac{R_{BC}.R_{AB}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}} \quad r_a = \frac{R_{AC}.R_{AB}}{R_{AC}+R_{AB}+R_{BC}}$$

المثال 6

اوجد المقاومة الكهربائية المكافئة للدارة المبيّنة في الشكل-17-أ ثم أحسب التيّار I



الشكل- 17-أ



الشكل- 17- ب

- يتم تعويض الشكل -17-أ بالشكل-17- ب

بحساب قيم المقاومات المكافئة:

R_A, R_B, R_C

$$R_A = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2+R} = \frac{R}{3}, \; R_C = \frac{R_1.R}{R_1+R_2+R} = \frac{R}{3}, R_D = \frac{R \;.R_2}{R_1+R_2+R} = \frac{R}{3}$$

و تكون نتيجة المقاومة الكهربائية المكافئة :

$$R_{eq} = R_A + [(R_C + R_3)//(R_D + R_4)] = \ldots = R$$

التيّار المار في R:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R}$$

المثال 7

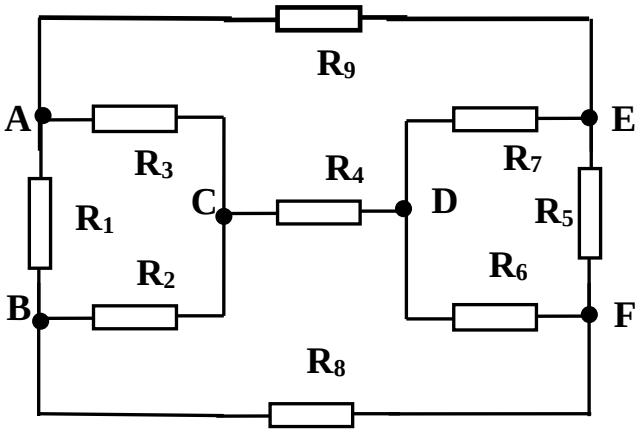
أحسب المقاومة الكهربائية المكافئة للدارةالممثلة في الشكل-18- بين طرفي AE

المعطيات

$$R_1 = R_5 = 2K\Omega, R_3 = R_7 = 3K\Omega, R_2 = R_6 = 5K\Omega, R_4 = 1K\Omega, R_8 = R_9 = 8K\Omega$$

بعد الحساب نجد :

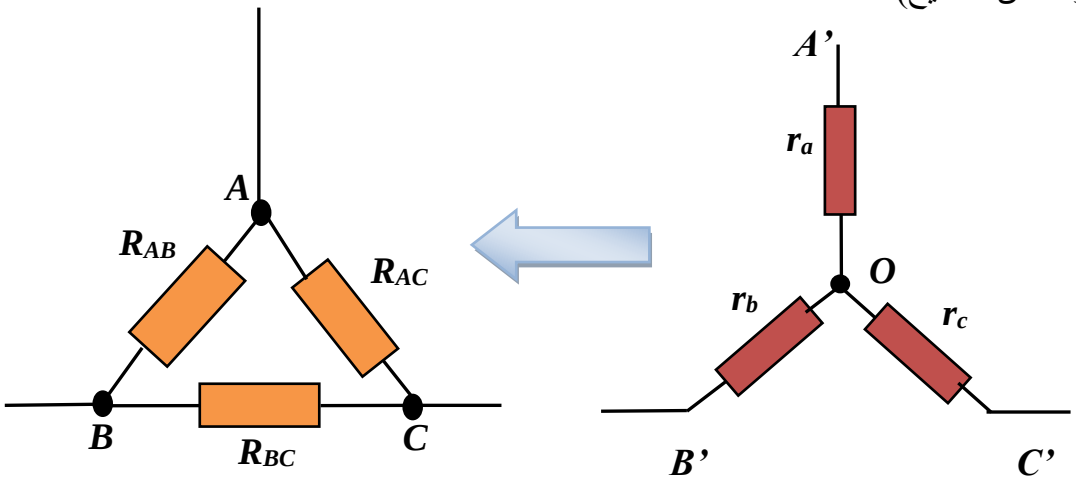
R_{AE} =3.74KΩ



الشكل- 18 -

2.6 التحويل النجمي-المثلثي

حسب نظرية كينيلي، يمكن تحويل التمثيل النجمي الممثّل في الشكل19 أ- إلى شكل مثلثي حسب الشكل-19- ب (والعكس صحيح)



الشكل- 19-أ

الشكل- 19- ب

1) نقوم بتوصيل (A=B) و(B'=A')

$$R_{BC} = R_{B'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AC}} + \frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{r_c + \frac{r_a.r_b}{r_a + r_b}} \quad (1)$$

2) نقوم بتوصيل (A=C) و(C'=A')

$$R_{AB} = R_{A'B'} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{r_b + \frac{r_a.r_c}{r_a + r_c}} \quad (2)$$

3) نقوم بتوصيل (B=C) و(C'=B')

$$R_{AC} = R_{A'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{r_a + \frac{r_b.r_c}{r_b + r_c}} \quad (3)$$

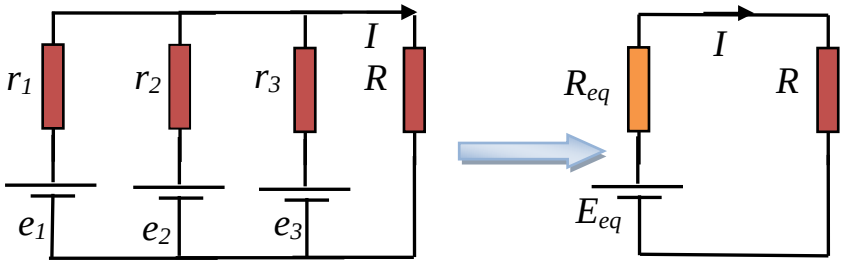
إنطلاقا من المعادلات (1)، (2) و (3) نحصل على :

$$R_{AC} = \frac{r_a.r_b + r_a.r_c + r_b.r_c}{r_b}, R_{AB} = \frac{r_a.r_b + r_a.r_c + r_b.r_c}{r_c}, R_{BC} = \frac{r_a.r_b + r_a.r_c + r_b.r_c}{r_a}$$

7. نظرية ميلمان

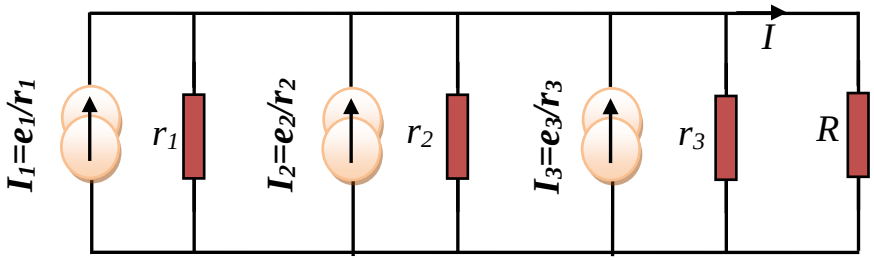
هذه النظرية تسمح بتعويض كل مصادر الجهد التي على التفرع بمصدر جهد واحد فقط.

المثال8

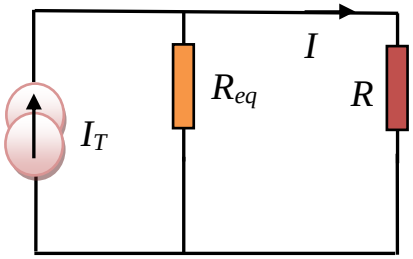


من أجل ذلك، نتّبع المراحل الثلاثة التالية:

1) نحول كل مصادر الجهد إلى مصادر تيّار يخرج منها تيّار يساوي قسمة جهد المصدر على مجموع المقاومات التي في نفس الفرع، وتكون مصادر التيّار هذه تحتوي على نفس المقاومات الداخلية ولكن موضوعة على التفرع (كما شرحنا في الدرس السابق)، كما يلي:

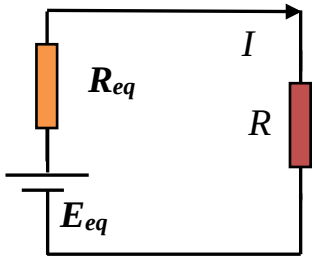


2) نركب كل مصادر التيّار التي على التفرع عملا بمبدأ كيرشوف للعقد، فنحصل على مصدر تيّار يخرج منه تيّار يساوي مجموع التيّارات،ويكون مصدر التيّار هذا يحتوي على المقاومة الكهربائية المكافئة للمقاومات على التفرع، كما يلي:



حيث: $I_T = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}$ و $R_{eq} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

3) إعادة تحويل مصدر التيّار المتحصل عليه إلى مصدر جهد بالطريقة المعاكسة التي رأيناها في المرحلة الأوّل ى، كما يلي:



$$E_{eq} = R_{eq}.I_T = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}.\left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}\right)$$

المثال9

تطبيق عددي $e_1=10V$ ، $e_2=16V$ ، $e_3=8V$ ، $r_1=5\Omega$ ، $r_2=4\Omega$ ، $r_3=2\Omega$ ، $R=3\Omega$.

$$E_{eq} = R_{eq}.I_T = 2.10V$$

وأيضا: $R_{eq} = 1{,}05\Omega$

عموما، يكون لدينا:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{r_n} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{r_n}}$$

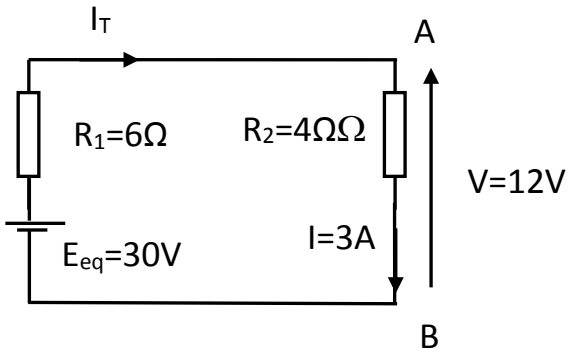
$$E_{eq} = R_{eq}.\left(\frac{e_1}{r_1} \pm \frac{e_2}{r_2} \pm \frac{e_3}{r_3} \pm \ldots\ldots\ldots \pm \frac{e_n}{r_n}\right)$$

الإشارة حسب إتّجاه المصدر.

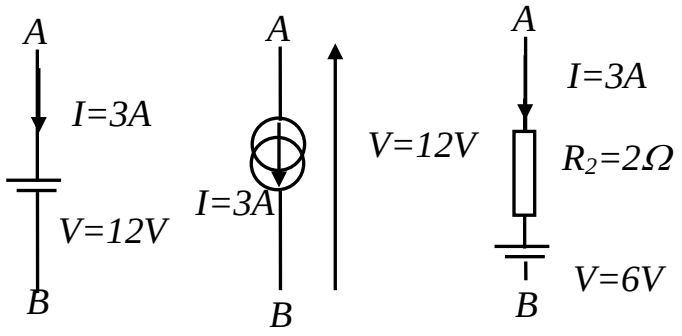
8. نظرية التعويض (Substitution)

هذه النظرية تسمح بتعويض أي فرع من الشبكة التي يكون الجهد فيها معلوم والتيّار كذلك معلوم، تسمح بتعويضهما بأي عناصر أخرى شرط أن لا تتغير قيمتا الجهد والتيّار.كنتيجة أولى لهذه النظرية، يمكن إذن تعويض الفرع الذي يسري به تيّار معلوم بمصدر تيّار صرف ويمكن أيضا إذن تعويض الفرع الذي به فرق كمون معلوم بمصدر جهد صرف.

المثال10



يمكن تعويض الفرع AB بأي من الفروع الآتية:



9. نظرية التنضيد (Réciprocité)

هذه النظرية تستعمل فقط في حالة الشبكات التي ليس فيها إلاّ مصدر جهد واحد فقط. وحسب هذه النظرية، التيّار الذي يسري في فرع معين رقم 1 والذي يتسبب فيه مصدر موجود في فرع آخر رقم 2 يساوي تمامًا التيّار الذي يسري في الفرع رقم 2 في حالة إذا ما نقلنا المصدر إلى الفرع رقم 1.

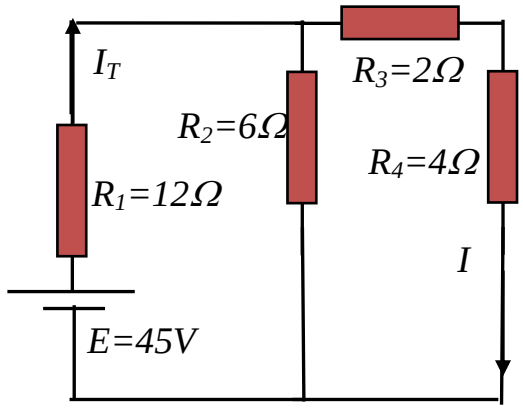
ملاحظة:

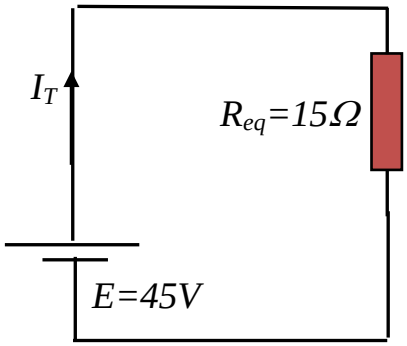
يجب الحذر عند نقل المصدر أن لا يغير التقطيب، بحيث يراعى في النقل الإتّجاه الأصلي للتيّارات.

المثال11

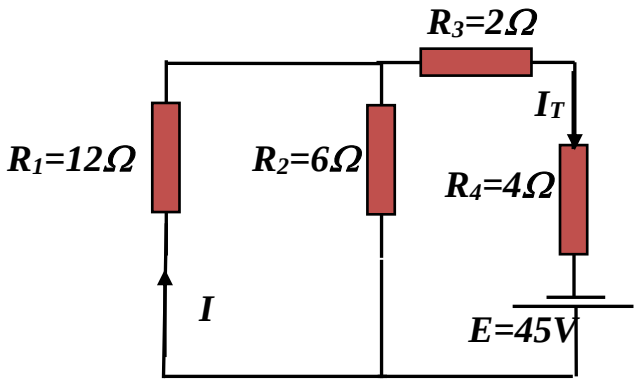
لتكن الدارة المبيّنة في الشكل المقابل:

لو أننا نقوم بالحسابات باستعمال طريقة كيرشوف مثلا، سنجد أن $I = 1{,}5A$ و $I_T = 3A$.





الأنّ ، نريد أن نتحقق من نظرية التنضيد، فلننقل المصدر إلى فرع آخر كما هو مبيّن في الشكل:

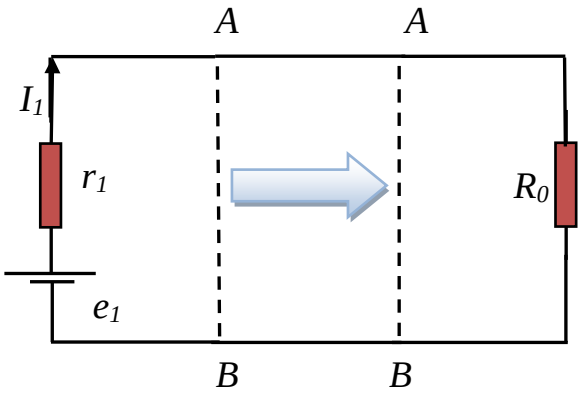


لو أنّنا نقوم بالحسابات باستعمال طريقة كيرشوف مثلا، سنجد في هذه المرة أن:$I_T = 4.5A$ والأهم أنّ: $I = 1.5A$. وهكذا تحققنا من هذه النظرية

10. نظرية التحويل الأعظمي للطاقة

أحيانا، نريد أن نغذي مقاومة ما في الشبكة بأقصى قيمة من الاستطاعة الكهربائية. فكيف يتم ذلك وماذا يحصل عند ذلك ؟

إذا كانت الشبكة خطية، يمكن تحويل جزء منها إلى شبكة مكافئة تحتوي على مقاومة فقط بحيث نعتبر أن الاستطاعة الناتجة عن الجزء الذي لم نحوله انتقلت كلها إلى الشبكة المكافئة (أي إلى المقاومة الكهربائية الموجودة فيها) للجزء الذي حولناه. مثلا، في الشكل الموالي:



عندئذ، تكون الاستطاعة المنتجة من المصدر هي : $P = e_1.I_1$ حيث يبدو جليا من جزء الشبكة على اليمين أن: $I_1 = \frac{e_1}{(r_1+R_0)}$ لأنّ $e_1 - (r_1 + R_0).I_1 = 0$، ومنه فإن الاستطاعة الناشئة عن المصدر هي: $P = \frac{e_1^2}{(r_1+R_0)}$.

أمّا الاستطاعة عند قطبي المقاومة الكهربائية فهي: $P_{R0} = R_0.I_1^2 = R_0.\frac{e_1^2}{(r_1+R_0)^2} = \frac{R_0.e_1^2}{(r_1+R_0)^2}$

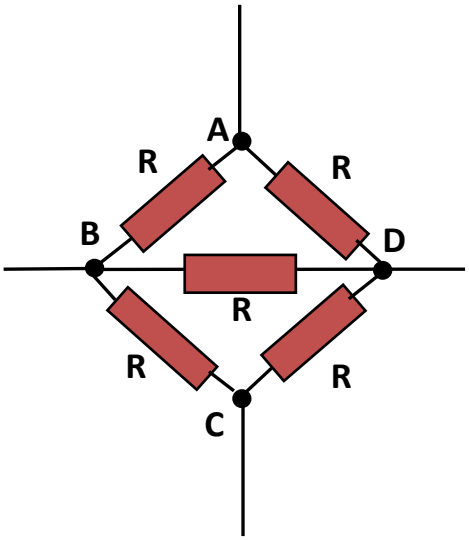
ويمكن كتابتها على الشكل الآتي: $P_{R0} = \frac{e_1^2}{4.r_1}\left[1 - \left(\frac{r_1-R_0}{r_1+R_0}\right)^2\right]$. نلاحظ أن هذه الاستطاعة تكون أعظمية عندما تتساوى المقاومتان $R_0 = r_1$ وحينها $P_{R0} = \frac{e_1^2}{4.r_1}$ وأكثر من ذلك، الاستطاعة في كلتي المقاومتين متساويتين : $P_{r1} = P_{Re\,q} = \frac{e_1^2}{4.r_1}$ بينما تصبح الاستطاعة الناشئة عن المصدر هي :$P =$ $\frac{e_1^2}{(r_1+R_0)} = \frac{e_1^2}{2.r_1}$، فنلاحظ أن المردود هو $\eta = \frac{P_{r1}}{P} = \frac{P_{R0}}{P} = \frac{1}{2} = 50\%$ وهي نتيجة عامة عند التحويل الأعظمي للاستطاعة.

يمكن الأنّ تلخيص نظرية التحويل الأعظمي للطاقة كما يلي: عندما نربط مقاومة بمصدر جهد مستمر له مقاومة داخلية، فإن الشرط اللازم للتحويل الأعظمي للاستطاعة من المصدر إلى المقاومة الكهربائية هو أن تكون هذه الأخيرة مساوية للمقاومة الداخلية للمصدر.

التمارين

التمرين الأوّل

باستعمال طريقة كينلي، أوجد المقاومة الكهربائية المكافئة المنظورة بين النقطتين C و A في الشكل-20-



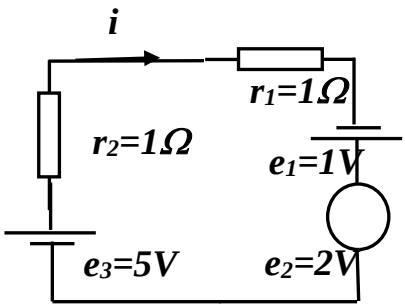
الشكل- 20-

مساعدة

ابدأ بتحويل المثلث ABD إلى نجمة.

التمرين الثّاني :

لتكن الدارة المبيّنة في الشكل-21-. أحسب شدة التيّار i بدلالة e_1، e_2 ، e_3 ، r_1 و r_2 باستعمال إتّجاه التيّار المبيّن في الشكل



الشكل- 21-

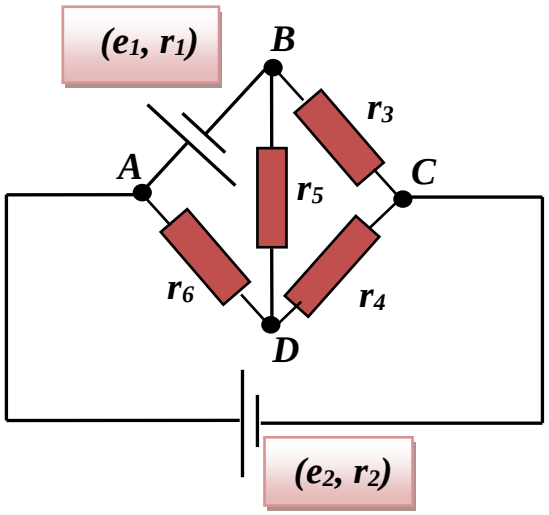
المساعدة

مثلما رأينا في الدرس ولكن يجب أن نتنبه أنّه إذا وجد تيّار سالب فعلينا تغيير إتّجاهه في الرسم وإعادة الحسابات لأنّه يمر بجهاز إستقبال.

التمرين الثالث

أحسب التيّارات السارية في الفروع AB، AD و AC للشكل-22- علما أن:

$r_1=r_2=r_5=1\Omega$ ، $r_3=r_4=3\Omega$ ، $r_6=2\Omega$ ، $e_1=1V$ ، $e_2=7V$. وذلك باستعمال طريقة التيّارات الوهمية.



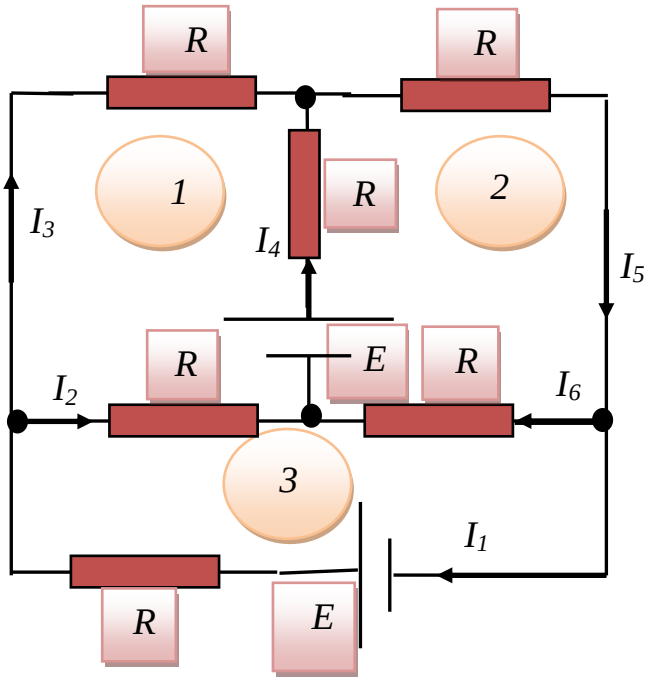
الشكل- 22-

الحل

مثل ما هو مشروح في الدرس. ننصح باستعمال طريقة المصفوفات مباشرة.

التمرين الرابع

لتكن الدارة المبيّنة في الشكل -23- أوجد التيّارات السارية في مختلف الفروع باستعمال طريقة ماكسويل (اكتب المعادلات المصفوفية مباشرة). استعمل الحلقات المبيّنة في الشكل-23-.



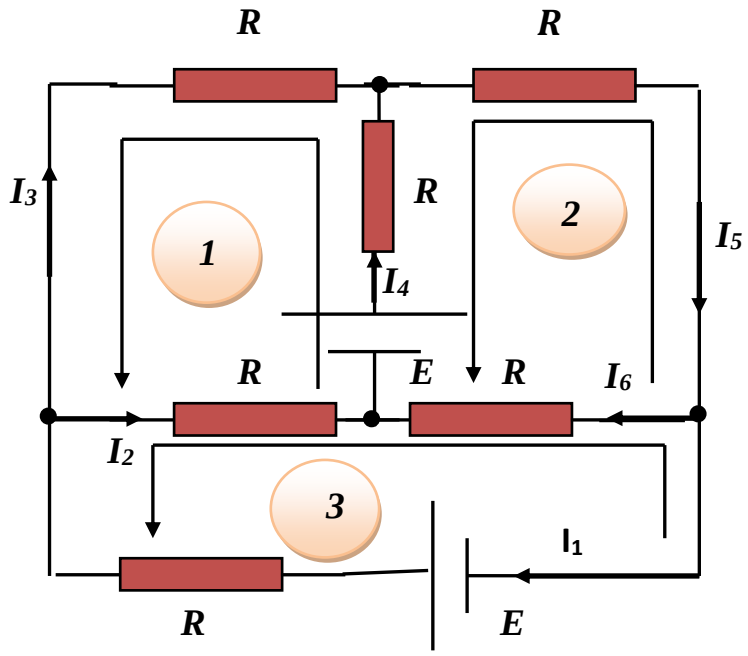
الشكل- 23-

الحل

التطبيق المباشر لطريقة ماكسويل باستعمال المصفوفات ينتج عنه:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3r & -r & -r \\ -r & 3r & -r \\ -r & -r & 3r \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -E \\ -E \end{pmatrix} \quad r.\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = E.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

حيث اعتمدنا على الشكل الموالي الذي اتخذنا فيه تيّارات ماكسويل كلها في عكس إتّجاه عقارب الساعة.



بعد حساب محدد المصفوفة التي تضرب في مصفوفة التيّارات الوهمية، نجد: $\Delta=16$ وهو غير معدوم، إذن يمكن قلب هذه المصفوفة للحصول على:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{r}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ويتم قلب المصفوفة بالبحث أوّلا عن مصفوفة المحددات الصغرى، ثم ضرب كل عنصر في $(-1)^{l+c}$ حيث l هو رقم السطر و c هو رقم العمود. بعد ذلك نحسب المصفوفة المنقولة ونقسم ما نحصل عليه على المحدد السابق، كما يلي:

القسمة على Δ المنقولة الضرب في$(-1)^{l+c}$المحددات الصغرى

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}..\rightarrow...\begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.....\rightarrow.....\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.....\rightarrow$$

$$....\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

إذا، عندنا: $\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{4r}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، وينتج عنه: $\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{4r}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

أي $\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = -\frac{E}{2r} \\ J_3 = -\frac{E}{2r} \end{cases}$

وأخيرا:

$I_1=-J_3=E/2r,\ I_2=J_1-J_3=E/2r,\ I_3=-J_1=0,$

$I_4=J_1-J_2=E/2r,\ I_5=-J_2=E/2r,\ I_6=J_3-J_2=0$

وبما أنّه لا يمر أي تيّار سالب في جهاز الإستقبال (حيث لا يوجد أي جهاز من هذا النوع في الدارة) فيكفي أن نُغير إتّجاه التيّارين I_6 و I_3 في الرسم ولا داعي لإعادة الحسابات.

التمرين الخامس

في الشكل -24- لدينا $e_n=n$ (volts) ، $r_n=n\ (\Omega)$ ، نطلب حساب التيّار الساري في الفرع الذي يحتوي المصدر الرابع وذلك باستعمال نظرية تيفنين.

الحل

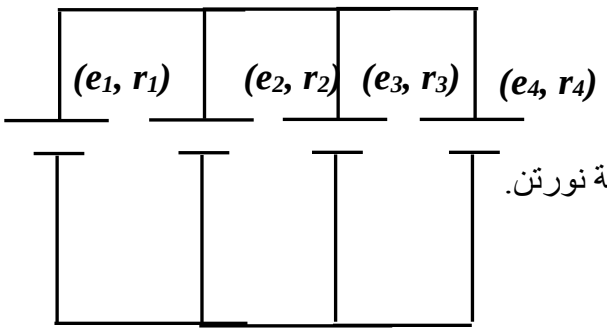
مثل ما هو مشروح في الدرس.

التمرين السادس

نطلب إعادة حل التمرين الرابع ولكن باستعمال طريقة نورتن.

الحل

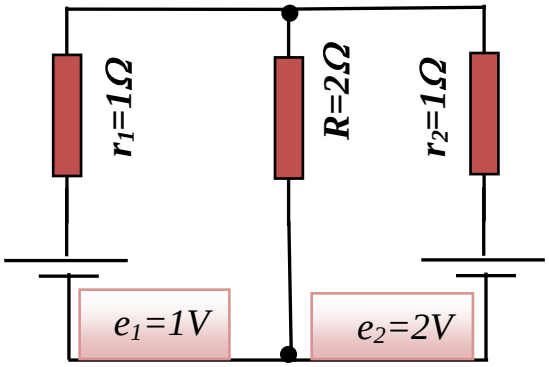
مثل ما هو مشروح في الدرس.



الشكل- 24 -

التمرين السابع

باستعمال نظرية تيفنين ثم نورتن، أوجد التيّار الساري في R للشكل-25-



الشكل- 25-

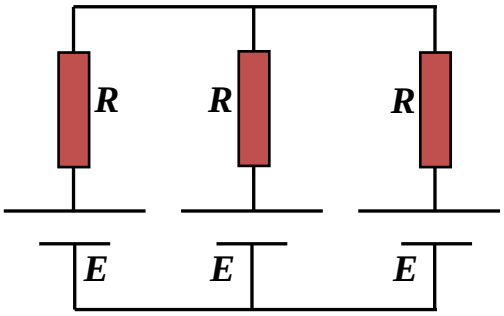
الحل

هونفس الشكل الذي في الدرس، غيرنا فقط الفرع الذي نطبق عليه النظريتين.

التمرين الثامن

1- بين أن الدارة المبيّنة في الشكل-26- تكافئ حلقة واحدة لا يمر فيها أي تيّار.

2- استنتج أنّه لا يوجد أي تيّار في الشبكة الأصلية.

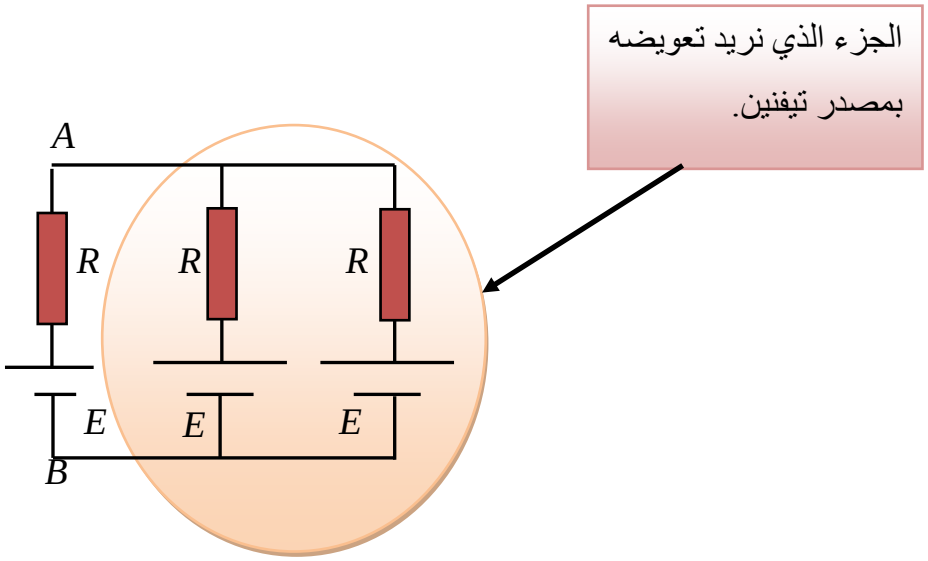


الشكل- 26-

الحل

في هذا التمرين، نستعمل نظرية تيفنين.

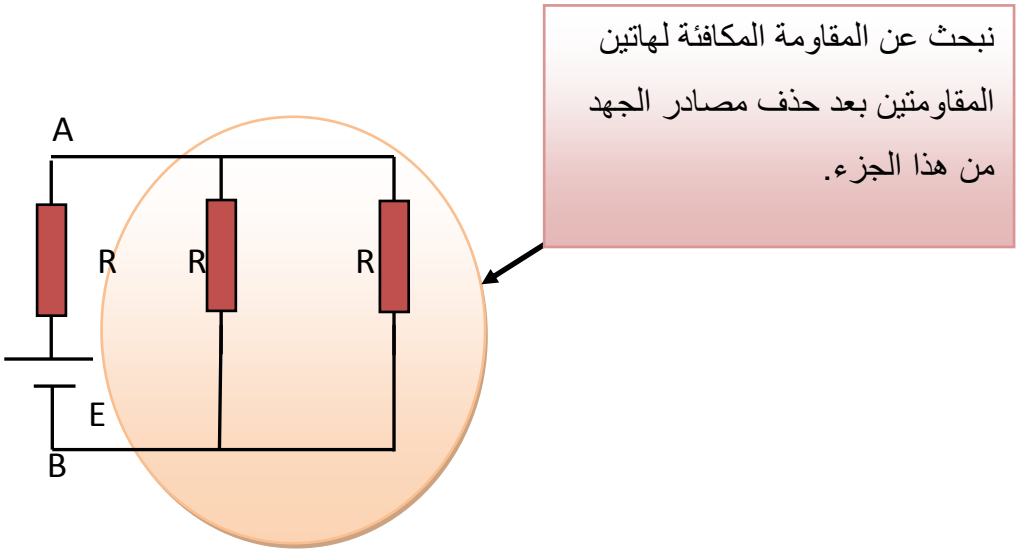
1- لدينا ثلاثة فروع متكافئة (متشابهة)، نحتفظ بفرع واحد ونعوض باقي الدارة بمصدر الجهد (المسمى أيضا بمصدر تيفنين نسبة إلى الطريقة)، كما هو مبيّن في الشكل-26-أ-.



الشكل- 26-أ

أول خطوة تتمثل في البحث عن المقاومة الكهربائية المكافئة للمقاومتين المتواجدتين في الجزءالذي نبغي تعويضه، بعد حذف مصادرالجهد من هذا الجزء، كما هو مبيّن في الشكل ب.

عندئذ يكون من السهل الملاحظة بأن هاتين المقامتين على التفرع ونستنتج أن مقاومتهما المكافئة (المسماة أيضا بمقاومة تيفنين R_{TH}).



الشكل- 26-ب

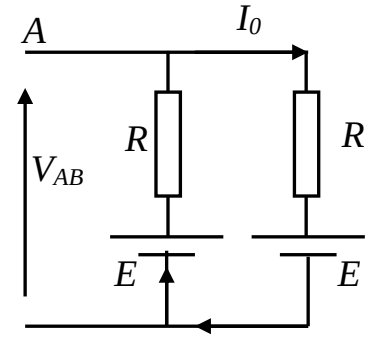
$$\frac{1}{R_{TH}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R} .. \Rightarrow .. R_{TH} = \frac{R}{2}$$

الخطوة الثّانية

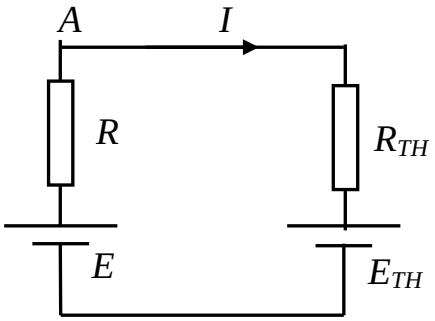
تتمثل في حساب فرق الكمون بين النقطتين A و B بعد فتح الدارة عند هاتين النقطتين، ويتم ذلك بحذف الفرع الذي لا نريد تعويضه، كما هو مبيّن في الشكل-26-ج. في هذه الحالة، يكون لدينا تيّار I_0 يسري في حلقة واحدة دون أن يتفرع بسبب غياب العقد، ولدينا:

$$E - RI_0 - RI_0 - E = 0 \Rightarrow 2RI_0 = 0 \Rightarrow I_0 = 0$$

ونستنتج إذن أن: $V_{AB} = E - RI_0 = E$ وحسب تمثيل تيفنين فإن القوّة الكهرومحركة لمصدر الجهد الذي يكون في الدارة المكافئة هو E_{TH} بحيث: $E_{TH} = V_{AB} = E$



الشكل -26-ج



الشكل-26- د

والشبكة المكافئة حسب تمثيل تيفنين مبيّنة في الشكل-26- د. الأنّ ، يمكننا حساب I:

$$E - RI - R_{TH}I - E_{TH} = 0$$

ونظرا للعلاقة السابقة لدينا:

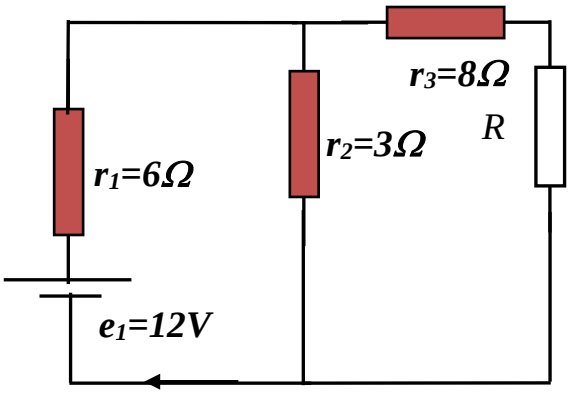
$$(R + R_{TH}).I = 0 \Rightarrow I = 0$$

إذن، الشبكة المبيّنة في الشكل- 26- تكافئ حلقة واحدة لا يمر فيها أي تيّار.

استنتجنا في السؤال السابق أنّه لا يمر أي تيّار في الفرع الذي لم نقم بتعويضه، وبما أن بقية فروع الدارة الأصلية مكافئة له، فنستنتج أنّه لا يسري فيها التيّار، ومنه: لا يوجد أي تيّار في الشبكة الأصلية.

التمرين التاسع

أوجد قيمة R التي من أجلها يحدث التحويل الأعظمي للاستطاعة ثم احسب تلك الاستطاعة.



الحل

من أجل الإجابة، نلجأ أوّلا إلى طريقة تيفنين حيث نبتغي تعويض كل الدارة (ما عدا الفرع الذي يحتوي على R) إلى مصدر مكافئ لتيفنين :

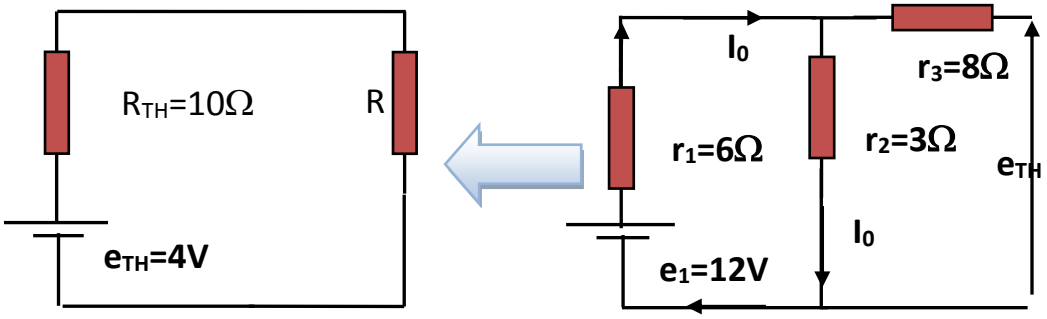
حساب R_{TH}

نتخيل أن تيّارا يخرج من R فإنّه يمر ب r_3 ثم يتفرع على r_2 و r_1 فهاتين الأخيرتين على التفرع ومقاومتهما المكافئة $\frac{r_1.r_2}{r_1+r_2}$ على التسلسل مع r_3: $R_{TH} = r_3 + \frac{r_1.r_2}{r_1+r_2} = 10\Omega$

حساب E_{TH}

بعد فتح الشبكة عند قطبي R (أنظر الشكل في الأسفل)، نجد: $e_1 - (r_1 + r_2).I_0 = 0$

إذن : $I_0 = \frac{e_1}{r_1+r_2} = \frac{12}{9} = 1{,}33A$ ومن ثم: $e_{TH} = r_2.I_0 = 4V$



وأخيرا، نرسم الدارة المكافئة:

إذن، نحصل على التحويل الأعظمي للاستطاعة عندما $R = R_{TH} = 10\Omega$

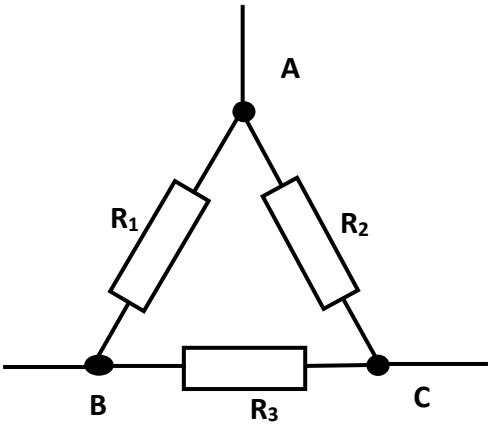
وتكون قيمتها عندئذ: $P\frac{e_{TH}^2}{4.R_{TH}max}$

مسألة:

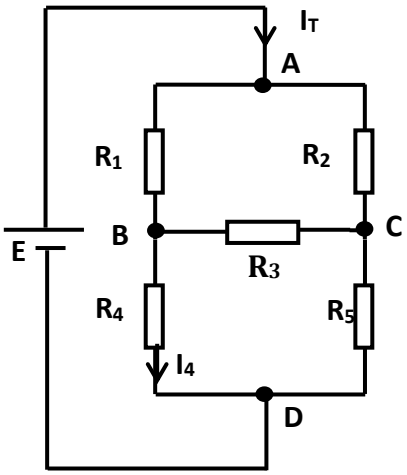
نحن نعتبر شبكة الشكل -1- ب حيث:

($R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R = 10\Omega$ ،$E = 10V$).

1. قمْ بتحويل الشكل 1 أ- من مجموعة المثلث إلى تجميع نجمي.
2. احسب المقاومة المكافئة بين A و D.
3. احسب إجمالي تكنولوجيا المعلومات الحالية في الشبكة (الشكل - 1- ب).
4. استنتج I_4 و I_5 الحاليين
5. احسب الفولتية: VAC، VAB، VCD، VBD



الشكل -1- أ

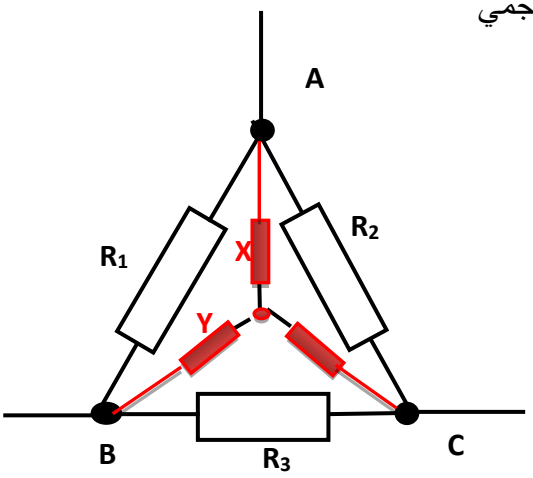


الشكل -1- ب

الحل

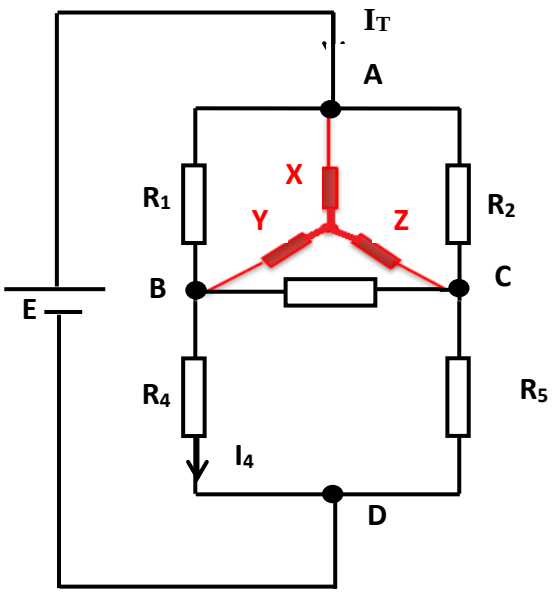
1. تحويل الشكل 1 أ- من الشكل المثلثي إلى الشكل النجمي

$$X = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R^2}{3 * R} = \frac{R}{3} = Y = Z$$

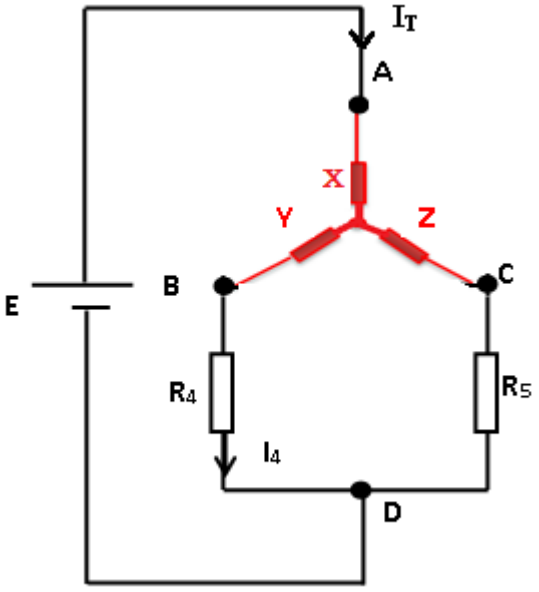


الشكل -1- أ

1. حساب المقاومة بين A وD



الشكل -1- ب



الشكل -1- ب

$$R_{AD} = X + (Y + R_4)//(Z + R_5) = \frac{R}{3} + (\frac{R}{3} + R)//(\frac{R}{3} + R) = R = 10\ \Omega$$

1. احسب التيّار الكلي المار في الشبكة (الشكل -1- ب)

$$E = R_{AD} * I_T \rightarrow I_T = \frac{E}{R_{AD}} = 1\ A$$

2. استنتاج التيّار I_4 وI_5

باستعمال قاسم التيّار نجد:

$$I_4 = \frac{(Z + R_5)}{(Y + R_4) + (Z + R_5)} = \frac{\left(\frac{R}{3} + R\right)}{\left(\frac{R}{3} + R\right) + \left(\frac{R}{3} + R\right)} = 0.5\ A$$

$$I_5 = \frac{(Y + R_5)}{(Y + R_4) + (Z + R_5)} = \frac{\left(\frac{R}{3} + R\right)}{\left(\frac{R}{3} + R\right) + \left(\frac{R}{3} + R\right)} = 0.5\ A$$

3. حساب الجهود: V_{BD}, V_{CD}, V_{AB}, V_{AC}

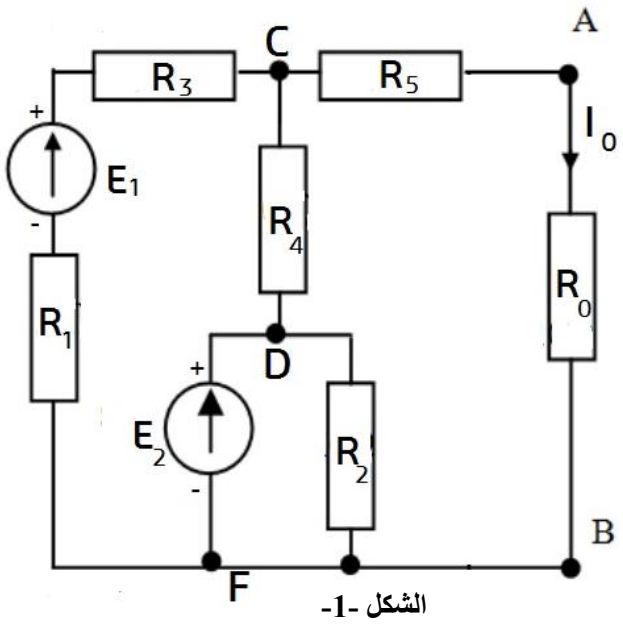
$$V_{BD} = R_4 * I_4 = R * I_4 = 5\,V = V_{CD}$$
$$V_{AB} = E = 10\,V$$
$$\mathbf{V_{AC} = V_{AB} - V_{CD} = 5\,V}$$

مسألة

1. احسب التيار I_0 (الشكل -1) المار عبر المقاوم R_0.

المعطيات: $E_1 = 5V$، $E_2 = 8V$

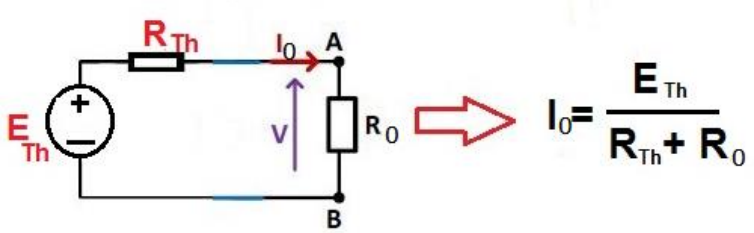
$R_1 = R_3 = R_5 = 5\Omega$، $R_2 = R_4 = R_0 = 10\Omega$ ،



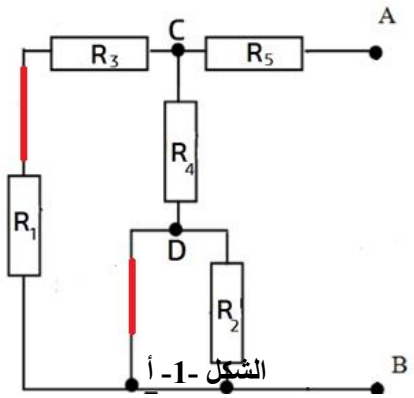
الشكل -1-

الحل:

حسْب نظرية Thévenin ، نقوم بتحويل الدارة (الشكل -1-) إلى مولد Thévenin بمقاومته على التسلسل (انظر أدناه). وبالتالي ، يتم اختزال الدارة إلى شبكة واحدة حيث يكون التعبير عن التيار I_0 :



1. حساب مقاومة تفنين $R_{Th}= R_{AB}$



الشكل -1- أ

$$R_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{Th}} = [(R_1 + R_3)//\, R_4] \; + \; R_5 = 10\ \Omega$$

2. حساب جهد تفنين $E_{Th}= E_{AB}$

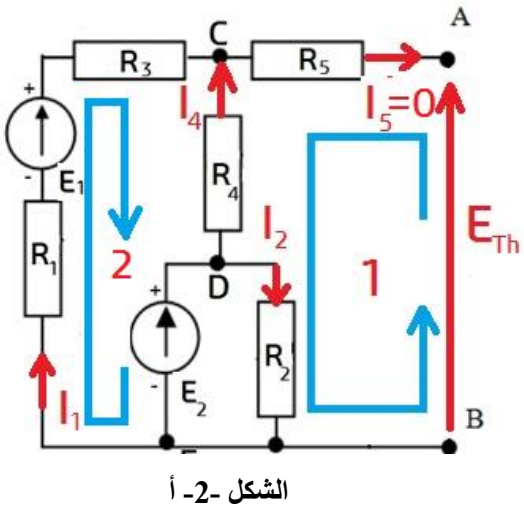
- **من الحلقة 1 (قانون الحلقات)**

$$E_{\mathrm{Th}} + R_5 I_5 + R_4 I_4 - \boldsymbol{E_2}$$

$$E_{\mathrm{Th}} = \boldsymbol{E_2} - R_5 I_5 - R_4 I_4 = \boldsymbol{E_2} - R_4 I_4$$

دارة مفتوحة ($I_5 = 0$)

3. حساب: I_4



الشكل -2- أ

- **من الحلقة 2 (قانون الحلقات) (الشكل -2-أ)**

$$E_1 - \boldsymbol{E_2} + R_4 I_4 - (\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_3})\boldsymbol{I_1} = \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{I_1} = -\boldsymbol{I_4})$$

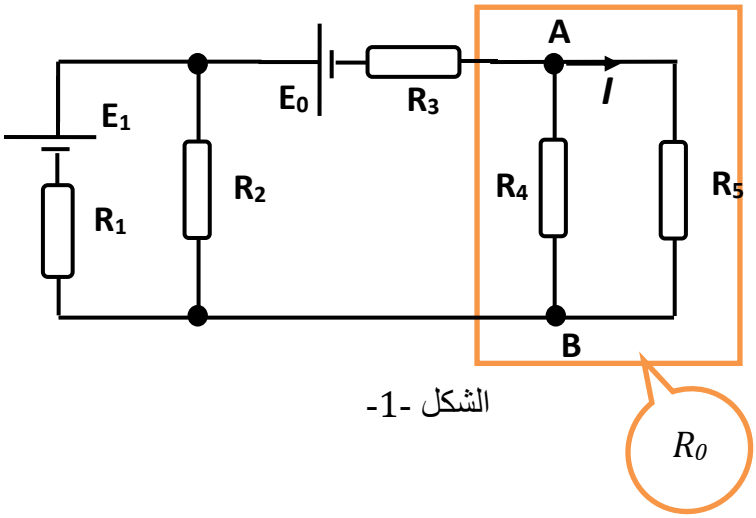
$$E_1 - \boldsymbol{E_2} + R_4 I_4 + (\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_3})\boldsymbol{I_4} = \boldsymbol{0}$$

$$I_4 = \frac{E_2 - \boldsymbol{E_1}}{\boldsymbol{R_1}+\boldsymbol{R_3}+\boldsymbol{R_4}} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{20}} A$$

ومنه: $E_{\mathrm{Th}} = \boldsymbol{E_2} - R_4 I_4 = \boldsymbol{8} - \boldsymbol{10} * \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{20}} = \frac{\boldsymbol{13}}{\boldsymbol{2}} = 6.5\ V$, $\boldsymbol{I_0}$

$$I_0 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_0} = \frac{6.5}{20} = 0.325\ A$$

مسألة :



الشكل -1-

لتكن الدارة الموضّحة في الشكل-1-

المعطيات:

$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 15\Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$,

$R_4 = 15\ \Omega$ et $R_5 = 5\ \Omega$,

$E_1 = 10\ V$ et $E_0 = 1\ V$.

1. أحسب التيّار المار في المقاومة

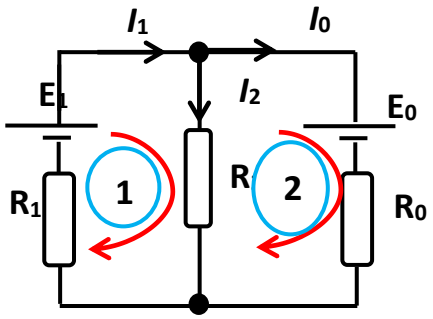
R_5

2. استنتج

a. الجهد V_{AB}

b. التيّار المار في المقاومتين: R_4 وR_3

الحل



الشكل -1- أ

1. حسب قانون العروات لكيرشوف نكتب بناءا على الحلقة (1) و (2):

$$E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \dots\dots (1)$$

$$-E_0 - R_0 I_0 + R_2 I_2 = 0 \dots\dots (2)$$

$$I_1 = I_0 + I_2 \dots\dots\dots (3)$$

نُعوّض I_1 في المعادلة (1)

$$E_1 - R_1(I_0 + I_2) - R_2 I_2 = 0 \dots\dots (1)$$

$$-E_0 - R_0 I_0 + R_2 I_2 = 0 \dots\dots (2)$$

باستعمال الطريقة المصفوفاتية نجد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 25 \\ -13.75 & 15 \end{vmatrix} = 493,75$$

(كرامر محدّدات)

$$\Delta I_0 = \begin{vmatrix} 10 & 25 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 125$$

$$I = \frac{R_4 I_0}{R_4 + R_5} = \frac{15*0.253}{20} \cong 0.19A$$

(التيّار قاسم)

$$V_{AB} = R_4 * I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{V_{AB}}{R_4} = 0.063A$$

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_1 + R_2 \\ -R_0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 25 \\ -13.75 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$R_0 = (R_4 // R_5) + R_3 = 13.75K\Omega$

$$I_0 = \frac{\Delta I_0}{\Delta} = \frac{125}{493,75} = 0.253A$$ (R_3 المقاومة في المار التيّار)

$$V_{AB} = R_5 * I = 0.95V$$

مسألة: 2018-2019

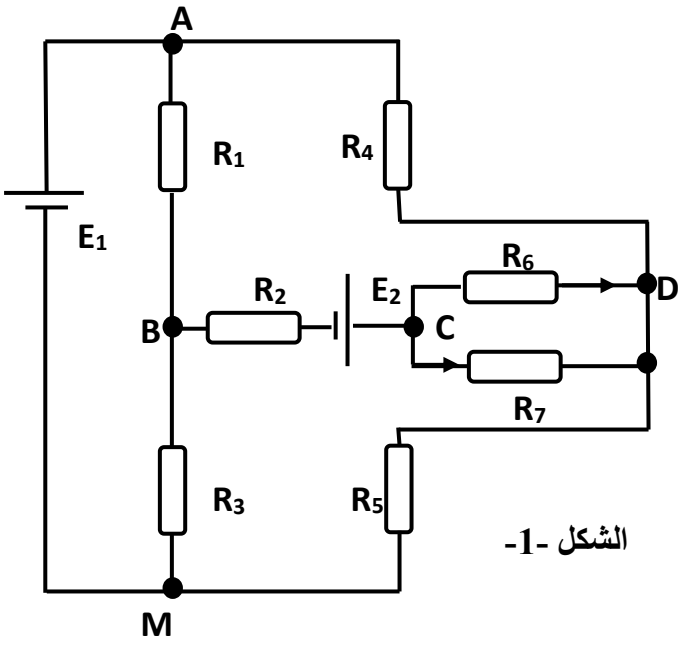
لتكن الدارة الموّضحة في الشكل-1-

المعطيات:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1k\Omega$$

$$R_6 = R_7 = 10\ k\Omega,\ E_1 = 12\ V\ et\ E_2 = 6\ V.$$

1. أحسب التيّار المار في المقاومة R_2
2. استنتج التيار الذي يدور في المقاومة R_6 ، قم بالتطبيق العددي



الشكل -1-

الحل

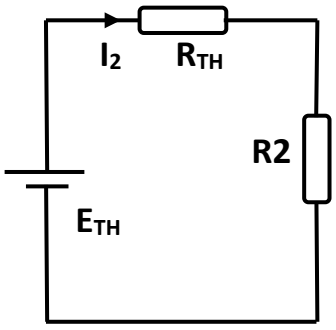
باستعمال نظرية تفنين (الشكل -1-أ)

1. حساب مقاومة R_{TH}

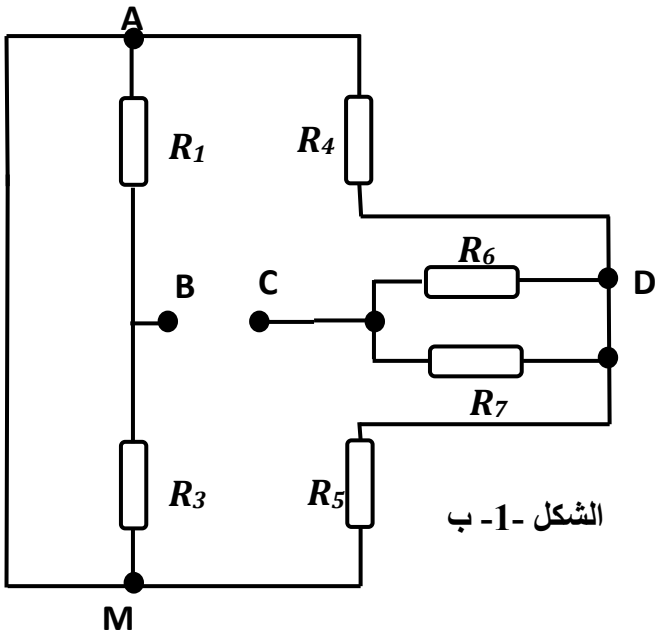
حسب الشكل -1-ب

$$R_{TH} = (R1//R3) + (R4//R5) + R0 =$$

$$6K\Omega\ , avec\ R0 = (R6//R7) = 5\ K\Omega.$$



الشكل -1-أ



الشكل -1- ب

2. حساب جهد E_{TH}

$$E_{TH} = R_1 I_1 - R_4 I_4 - E_2$$

- **حساب التيّار I_1 و I_4**

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1+R_3} = 6mA,\ I_4 = \frac{E_1}{R_4+R_5} = 6mA$$

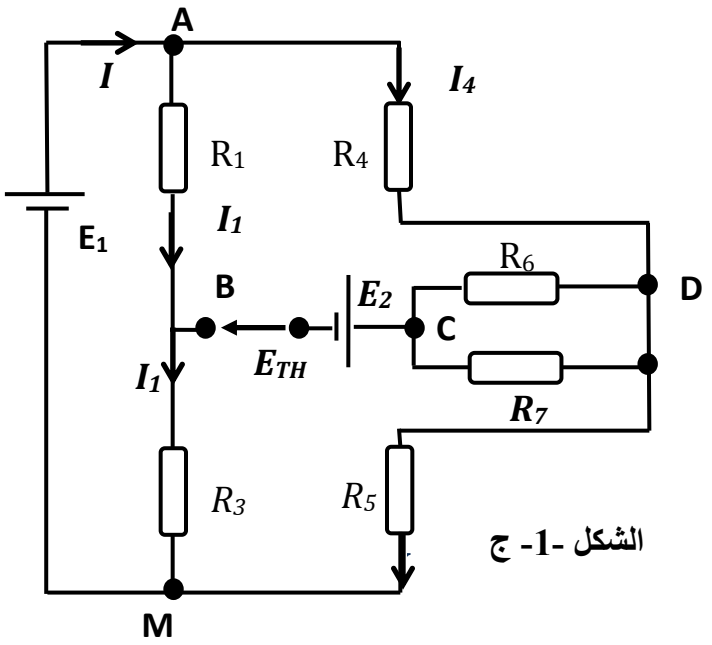
$$E_{TH} - R_1 I_1 - R_4 I_4 - E_2 = 0 \Rightarrow$$

$$E_{TH} = E_2 = 6V\ (Fig-1c)$$

$$I_2 = \frac{E_{TH}}{R_{TH}+R_2} = \frac{6}{7}mA = 0.86mA\ (Fig-1a).$$

- حساب التيّار I_6:

- باستعمال قاسم لتيّار : $I_6 = I_2 \frac{R_7}{R_7+R_6} = \frac{3}{7} = 0.43mA$.



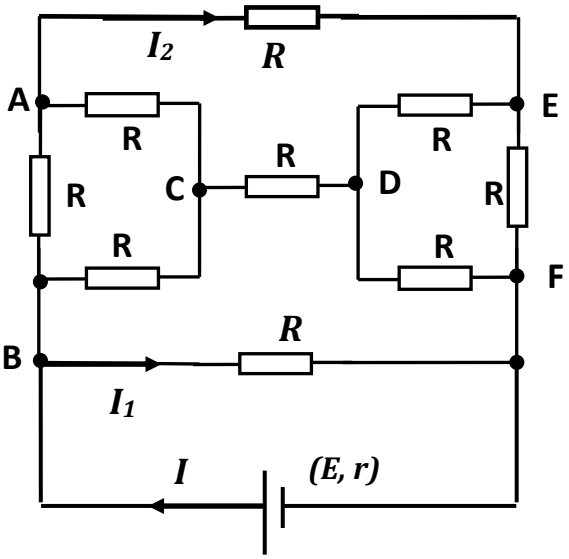
الشكل -1- ج

مسألة 2017-2018 :

ليكن الشكل -1-

$R = r = 10\Omega, \quad E = 12V$

1. احسب التيار الكلّي I في الدارة.
2. استنتج I_1 الحالي.



الشكل -1-

الحل

1. حساب التيّار الكلي في الدارة
2. يجب علينا أولاً حساب المقاومة المكافئة

للدارة الكهربائية (انظر Fig-1-a إلى Fig -1-g)

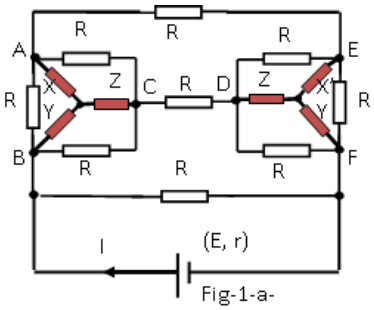


Fig-1-a-

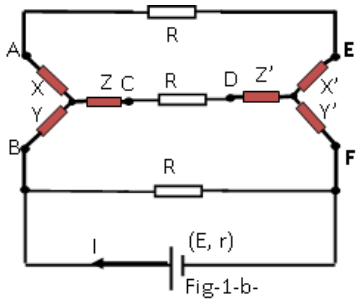


Fig-1-b-

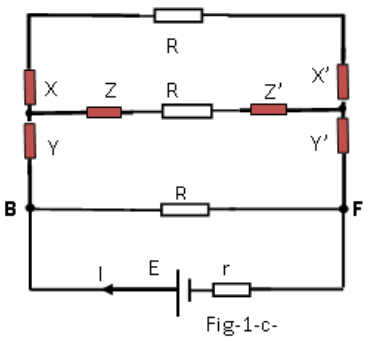


Fig-1-c-

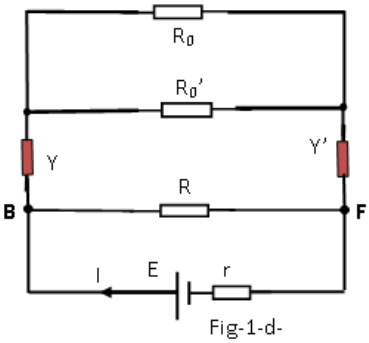


Fig-1-d-

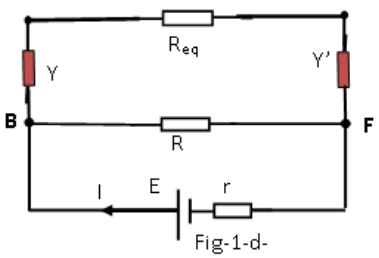


Fig-1-d-

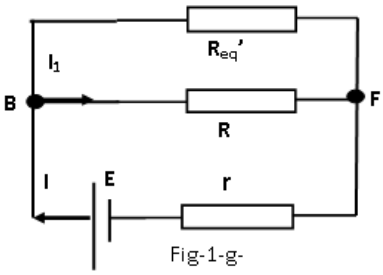


Fig-1-g-

$$X = Y = Z = \frac{RR}{R+R+R} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R = \frac{10}{3}\Omega,$$

$$X' = Y' = Z' = \frac{RR}{R+R+R} = \frac{R^2}{3R} = \frac{1}{3}R = \frac{10}{3}\Omega,$$

$$R_0 = X + R + X' = \frac{10}{3} + 10 + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}\Omega$$

$$R_0{}' = Z + R + Z' = \frac{10}{3} + 10 + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}\Omega,$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0{}'} = \frac{1}{\frac{50}{3}} + \frac{1}{\frac{50}{3}} = \frac{6}{50}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}\Omega,$$

$$R_{eq}{}' = Y + R_{eq} + Y' = \frac{10}{3} + \frac{25}{3} + \frac{10}{3} =$$

$$\frac{45}{3} = 15\Omega \; R_{tot} = (R_{eq}{}'//R) = \frac{R_{eq}{}' * R}{R_{eq}{}' + R} =$$

$$\frac{15*10}{15+10} = \frac{150}{25} = 6\Omega,$$

$$\text{E } -rI - R_{tot}I = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{r + R_{tot}'} = \frac{12}{10 + 6} = 0.75A$$

3. استنتاج I_1

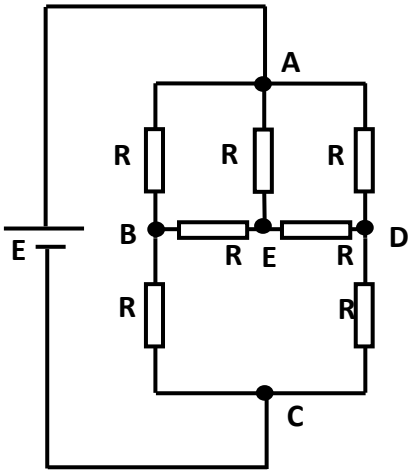
باستعمال قاسم التوتر نجد:

$$I_1 = \text{I}\frac{R'_{eq\cdot}}{R'_{eq}+R} = 0.75\frac{15}{15+10} = 0.45A$$

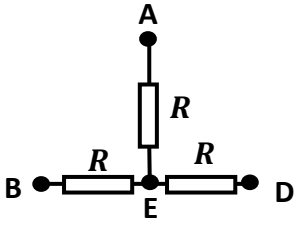
مسألة 2016/2015

ليكن الشكل -2- **(R = 8Ω, E = 7V)**

1. قم بتحويل الشكل -2-أ من الشكل النجمي الى الشكل المثلثي
2. احسب التيّار الكلي في الدارة



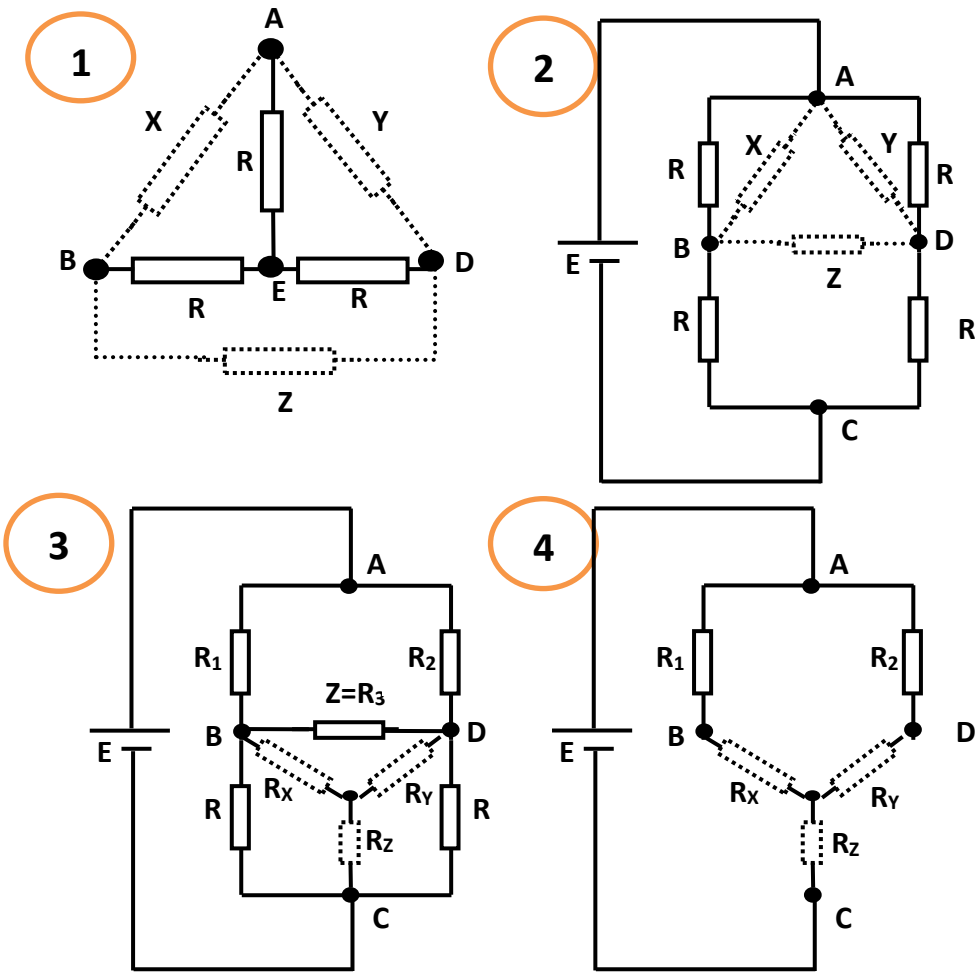
الشكل -2-



الشكل -2- أ

الحل

التيّار الكلي في الدارة $I=1\ A$ و هذا بعد اتباع الخطوات 1، 2، 3، و4



$$X = Y = Z = \frac{R.R+R.R+R.R}{R+R+R} = \frac{3.R^2}{3.R} = R = 8\Omega,$$

$$R_1 = R_2 = X\ //R = Y//R$$

$$Z = R_3,$$

النظام المتغير- الإشارة الكهربائية.

1. تمهيد

الإلكترونيات هي علم يهتم بالتقنيات التي تستعمل تغيرات المقادير الكهربائية مثل فرق الكمون (الجهد) والتيّار وذلك من أجل التقاط ، إرسال واستغلال المعلومة. يُصطلح على تسمية هذه الجهود والتيّارات **بالإشارات**. من أجل التبسيط، سنكتفي فيما يلي بالتحدث عن الإشارات التي على شكل جهود ويمكن التعميم بعد ذلك بسهولة.

الجهد تُميزُه قيمته الأعظمية من جهة ودالته الزمنية (اللحظية) من جهة أخرى، و الاستطاعة متناسبة مع مربع هذا الجهداللحظي (V^2(t)) و اللتي لها قيمة حقيقية (تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re$)، مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل النقاط. وفيما يلي، تعريف القيم المتوسطة لكل من الجهد والاستطاعة:

القيمة المتوسطة للجهد هي : $\langle V \rangle = V_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t).dt$

القيمة المتوسطة للاستطاعة هي : $\langle P \rangle = P_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(t).dt$

وهذه الأخيرة متناسبة مع القيمة المتوسطة لمربع الجهد : $\langle V^2 \rangle = (V^2)_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V^2(t).dt$.

يستعمل رمز **m** أو رمز $\langle\ \rangle$كدليل على القيمة المتوسطة. ونُشير أيضا أنّ القيمة المتوسطة لمربع أي دالة تُسمى أيضا بالقيمة الفعّالة لتلك الدّالة ولذلك نلاحظ أنّ القيمة المتوسطة لمربع الجهد ما هي إلاّ القيمة الفعّالة للجهد V وهذه الأخيرة متناسبة مع القيمة المتوسطة للاستطاعة.

إذا كانت لدينا دالة دورية، فالتكامل يتّم من 0 إلى T حيث هذا الأخير يمثل دور الدّالة.

ورغم أنّ الدوال الرياضية التي تُمثل الإشارات المستمرة إلاّ أنّنا سنضطر في بعض الأحيان إلى تمثيلها بواسطة دوال متقطعة محاولين الاقتراب من النموذج الصحيح قدر الإمكان. ومثل هذا التقريب نلجأ إليه عادة من أجل تبسيط الدراسة.

مثلا لنعتبر أنّ لدينا مدخلا ومخرجا. المدخل هو "المكان" الذي يصدر إشارة إلى الدارة وأمّا المخرج فهو "المكان" الذي نلتقط فيه الإشارة التي نريد استغلالها في تطبيقاتنا الإلكترونية. لكي نفرق بين الإشارتين، نسمي إشارة المدخل بالإثارة (excitation) وسنرمز لها فيما يلي ب e(t) ، بينما نسمي إشارة المخرج بالاستجابة (réponse) وسنرمز لها فيما يلي بـ: *s(t)* . طبعا، هناك علاقة بين الإثارة والاستجابة يمكن كتابتها بشكل عام كما يلي: $s(t) = H[e(t)]$، يعني أنّ *s(t)* يحصل عليها بتطبيق دالة H على *e(t)* أو بعبارة أخرى، أنّ *s(t)* يحصل عليها بتحويل *e(t)* بواسطة الدالة H ولذلك تسمى هذه الأخيرة **بدالة التحويل.**

2. أنواع من الإشارات

يمكن تصنيفها حسب الدوال الزمنية التي تمثلها، فهناك:

1.2 الإشارات الفريدة اللادورية

$v(t)$ تتخذ فيها قيم مختلفة في كل لحظة. هذه الإشارات لا تقع إلا مرة واحدة ولا تتكرر.

2.2 الإشارات العشوائية

هي نوع خاص من الإشارات الفريدة اللادورية. قيمتها اللحظية معرفة بقوانين ولكن هذه القوانين عشوائية.

3.2 الإشارات الدورية

هذه الإشارات تتكرر دوريا مع الزمن، وهي تحقق المعادلة $V(t+k.T)=V(t)$ ، حيث T هو الدور و k عدد صحيح. في هذه الحالة بالذات، يمكننا تعريف ما يسمى بالتردد: ν *(fréquence)* والتواتر : ω *(pulsation)* حيث: $\nu=\frac{1}{T}$ و $\omega=2\pi\nu$ ويمكن أيضا تعريف ما يسمى بطول الموجة λ حيث $\lambda=V.T=\frac{V}{\nu}$، V هي سرعة انتشار الموجة.

وعموما، فإنّ الحديث عن الإشارة يكافئ الحديث عن الدّالة الرياضية التي تمثلها ويتم ذلك تلقائيا في دروس الإلكترونيات.

في مجال الإلكترونيات، يمكن أن نصادف أنواعا كثيرة من الأنظمة مثل الأنظمة ذات الثوابت المحددة، الأنّظمة ذات الثوابت الموزعة، الأنظمة السببية، الأنظمة الثابتة وأيضا الأنظمة المستقرة. ومن أجل تسهيل العمليات، فإنّنا في الإلكترونيات نبحث عن استعمال الدارات الخطّية وهذاالنوع من الدارات يخضع لمبدأ التركيب (Superposition).

3. الأنظمة الإلكترونية

1.3 الأنظمة ذات الثوابت المحددة

في مجال الترددات المنخفضة **($\lambda>>, \nu<<$)**، تنتشر الطاقة بسرعة فائقة (كأنّها آنية)، وعناصر الدارة تكون محددة القيمة والمكان، إذن نسمي هذه الدارة بدارة ذات الثوابت المحددة.

2.3 الأنظمة ذات الثوابت الموزعة

في مجال الترددات المرتفعة **($\lambda<<, \nu>>$)**، تظهر عوامل تشويشية فتُغير قيم العناصر وتَظهر مقادير أخرى مكافئة لذاتيات وسعات ويصبح انتشار الطاقة بطيئا فنعتبر أنّ هذه الدارة مكونة من عناصر صغيرة جدا وموزعة على طول كل الدارة.

3.3 الأنظمة السببية

إذا ارتبط وجود إشارة الاستجابة بوجود إشارة المدخل، فنقول أنّ لنا نظاما سببيا.

$$e(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = H[e(t)] \neq 0$$
$$e(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = H[e(t)] = 0$$

4.3 الأنظمة الثابتة

إذا لم تتغير دالة التحويل مع تغير الزمن: $s(t \pm t_0) =$ $\Rightarrow$ $s(t) = H[e(t)]$

$$H[e(t \pm t_0)] = 0$$

5.3 الأنظمة المستقرة

إذا كانت $e(t)$ محددة، نحصل على $s(t)$ محددة، فإنّ النظام يسمى بالنظام المستقر.

6.3 النظام الخطي

إنّ الدارات الخطّية هي نوع من الشبكات التي تخضع لمبدأ التركيب (Superposition).

الشرح : لتكن إشارات الدخول هي $e_1(t), e_2(t),..$ وإشارات الخروج هي $s_1(t), s_2(t),..$. نقول أنّ لدينا شبكة خطّية إذا حصلنا على إشارة خروج من شكل تركيب خطّي: $\lambda_1.s_1(t) +$ كرد على إشارة دخول مشابهة مكتوبة هي أيضا على نفس شكل $\lambda_2.s_2(t)+\ldots..+\lambda_n.s_n(t)$ التركيب الخطّي : $\lambda_1.e_1(t) + \lambda_2.e_2(t)+\ldots..+\lambda_n.e_n(t)$. في مثل هذه الحالات ، يُمكننا البرهنة على وجود معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة تربط بين مختلف هذه المقادير (لن نقوم بالبرهنة)

$$a_0.e + a_1.\frac{de}{dt}+\ldots+a_m.\frac{d^m e}{dt^m} = b_0.s + b_1.\frac{ds}{dt}+\ldots+b_n.\frac{d^n s}{dt^n}$$

إذن، بعبارة أخرى يمكن القول بأنّ النظام يكون خطّيا إذا كانت المعادلة التفاضلية التي تتحكم فيه لها معاملات ثابتة.

ويمكن البرهنة أيضا أنّ هذا يُؤدي إلى علاقة بين الإثارة والاستجابة على النحو التالي: $s(t) = H[e(t)]$. حيث H هي دالة التحويل (عُرِّفت سابقا). والنظام يكون خطّيا إذا حقّقتْ دالة التحويل العلاقة الآتية:

$$H[\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2+..+\lambda_n e_n]$$
$$= H[\lambda_1 e_1] + H[\lambda_2 e_2]+..+H[\lambda_n e_n]\lambda_1 H[e_1]$$
$$+ \lambda_2 H[e_2]+\ldots..+\lambda_n H[e_n]$$

أخيرا، نشير أنّه يمكن تحقيق النظام الخطّي أو على الأقل الاقتراب منه في بعض الحالات مثل حالة الترددات المنخفضة.

4. مراحل إستجابة الشبكات

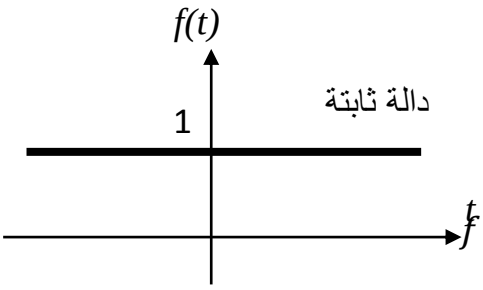
استجابة الشبكة (الدارة) تمر بمرحلتين : مرحلة عابرة (بضع أجزاء من الثّانية)، ومرحلة دائمة حيث تثبت الاستجابة وتأخذ صفتها النهائية.

5. أمثلة عن الإشارات

1.5 الإشارات اللادورية .

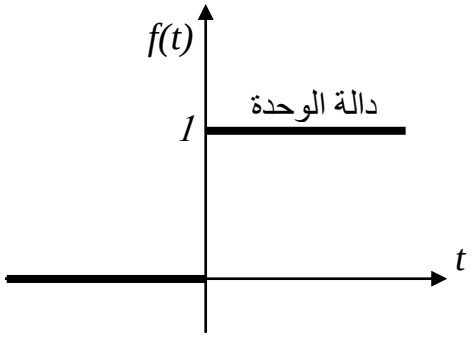
1.1.5 الإشارات الثابتة زمنيا

يقال لها في الكهرباء دوال مستمرة ولكن يجب على القارئ أن لا يخلط مع الدوال المتواصلة، وهي التي نحصل عليها إذا كنّا نستعمل التيّار المستمر أو الجهد المستمر وتكون الدوال الممثلة لها ثابتة زمنيا.



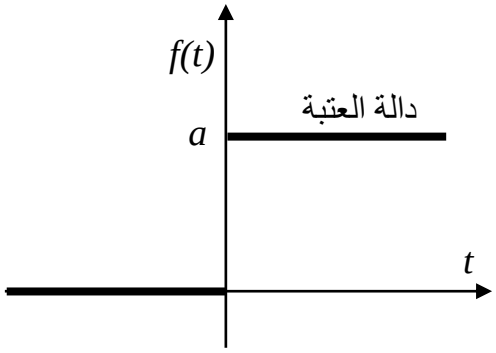
الشكل-27-

نُعرف أيضا دالة الوحدة كما يلي: $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$



الشكل-28-

نعرف أيضا دالة العتبة كما يلي: $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ a & , \quad t > 0 \end{cases}$ ، حيث **a** ثابت. يلاحظ أن هذه الدالة مشابهة تمامًا لدالة الوحدة.



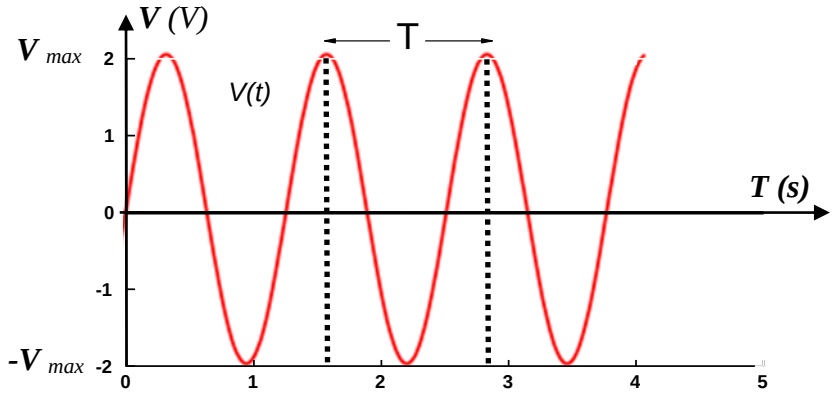
الشكل-29-

مثل هذه الإشارات (الوحدة والعتبة) يمكن الحصول عليها بسهولة باستخدام طريقة السدادة (Interrupteur) حيث لا يمر التيّار في الشبكة عندما نفتحه $I = f(t) = 0$ ثم يمر التيّار بعد إغلاقه $I = f(t) = a = C^{te}$

2.5 الدوال الدورية

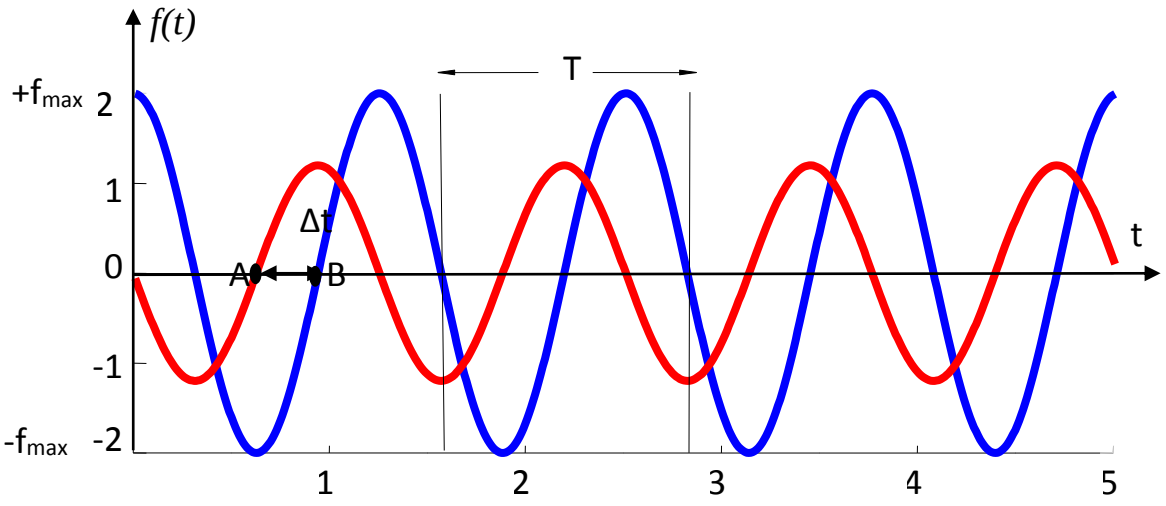
1.2.5 الدّالة الجيبية

هي الدوال التي يُمكن كتابتها بدّالة sinus أو cosinus. هذه الدّالة تتخذ الشكل العام المُبيّن في الأسفل، حيث رسمنا بيان الإشارة التي دالتها $f(t) = 2.cos(5t)$ وقد وضحنا القيمة الأعظمية وهي $Vmin_{max}$ ، أمّا الدورفهو: $T = \frac{2.\pi}{5}$ والصفحة الابتدائية (الطور الابتدائي) معدومة.



الشكل-30-

من المهم أيضا أن نتّعلم كيف نحسب فرق الطور بين إشارتين جيبيتين لأنّنا نحتاج إلى ذلك في الإلكترونيات. لنرسم في الشكل الموالي (الشكل-31-) الدّالة السابقة إلى جانب الدّالة الآتية $g(t) = 1{,}2.cos(5t + \pi/2)$ التي لها نفس الدور ولكنها تتقدم عن الدالة السابقة بالزاوية القائمة.



الشكل-31-
إشارتين جيبيتين

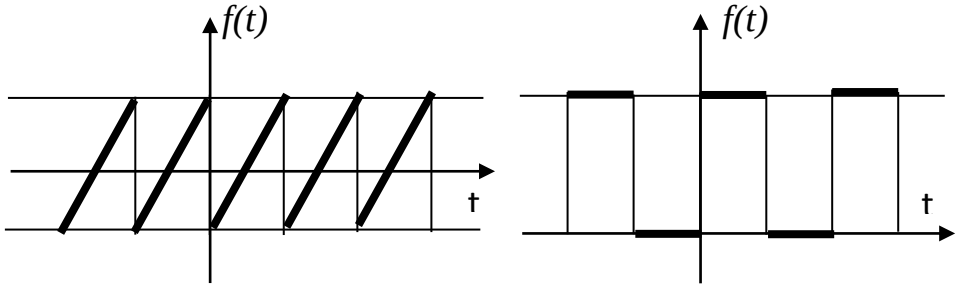
يمكننا ملاحظة أنّ فرق الطور بين الإشارتين يُمكن حسابه بسهولة. إن الإشارتين تنعدمان عند نقطتين متتاليتين مختلفتين A و B وأنّ الفرق بينهما هو Δt فإنّه يمكن إيجاد علاقة تربط بين Δt وبين فرق الطورين φ_1 و φ_2 :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \left(5t + \frac{\pi}{2}\right) - 5t = \frac{\pi}{2}$$

ومن جهة أخرى $\Delta\phi = \omega.\Delta t = 5.\Delta t$ لأنّ $\omega = \frac{2.\pi}{T} = \frac{2.\pi}{(2.\pi/5)} = 5 \quad rad/s$

إذن بعد المقارنة، يأتي: $\Delta t = \frac{\pi}{10} = 0{,}314 \quad s$ وهي بالضبط ما نجده في الرسم. فبصفة عامة، لدينا العلاقة الآتية: $\Delta\phi = \omega.\Delta t = \frac{2.\pi.\Delta t}{T}$

هناك أيضا أنواع أخرى من الدوّال الدورية التي ليست جيبية، أشهرها: الدالة المستطيلة والدالة المثلثية اللتين نبيّن في المنحنيين الآتيين مثالين عنهما وهما تتميزان أيضا بقيمة أعظمية وبدور زمني:



الشكل-32- إشارة مستطيلة

الشكل-33- إشارة مثلثية

وهناك أنواع أخرى من الإشارات مثل المخمدة، الأُسّية، ...إلخ. نفضّل أن نتطرق إليها مباشرة من خلال الدروس التي نحتاجها فيها.

6. تحويلات فوريه (Fourier)

كل الدّوال الدورية يمكن كتابتها بواسطة نشر فوريه، أي على الشكل الآتي:

$$f(t) = f_0 + A_1.sin(\omega t) + B_1.cos(\omega t) + A_2.sin(2\omega t) + B_2.cos(2\omega t) + \ldots + A_n.sin(n\omega t) + B_n.cos(n\omega t) + \ldots..$$

مع $\omega = \frac{2\pi}{T}$ هو التواتر و T يمثل دور الدالة. و $A_1, \quad A_2, \ldots A_n$ و $B_1, \quad B_2, \ldots B_n$ ثوابت.

ويمكن حساب معاملات فوريه بالطريقة الآتية:

$$f_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).sin(n\omega t).dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).cos(n\omega t).dt$$

إذا كانت $f(t)$ زوجية فإن المعاملات $A_1, \quad A_2, \ldots . A_n$ كُلها معدومة.

إذا كانت $f(t)$ فردية فإن المعاملات $B_1, \quad B_2, \ldots . B_n$ كُلها معدومة.

ليس شرطا أن يتم التكامل من 0 إلى T بل يمكن تغيير حدود التكامل لأنّ الشرط هو أن تُحسب التكاملات في الدور كله.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n.e^{jn\omega t}$$

يمكننا أيضا كتابة تحويل فوريه بواسطة الأعداد المركبة دون استعمال الدوال الجيبية:

حيث $C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).e^{-jn\omega t}.dt$ و $j = \sqrt{-1}$

نُذكر بعلاقة موافر (Moivre) للأعداد المركبة: $e^{j\theta} = cos\,\theta + j.sin\,\theta$

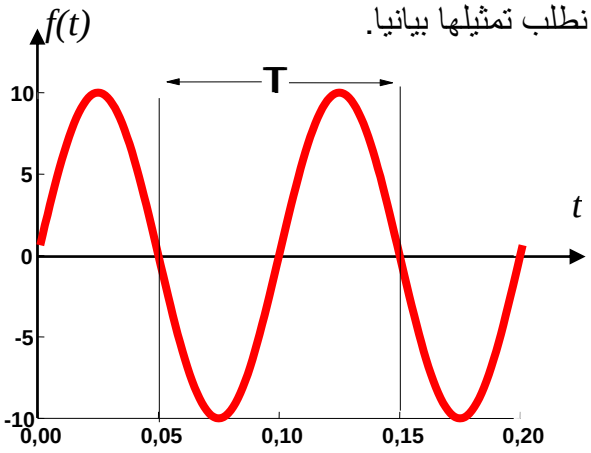
نُنبه في الأخير أنّ تحليل فوريه يُستعمل أيضا للدوال اللادورية. وفي مثل هذه الحالة، نقوم بحساب ما يسمى بتحويل فوريه للدالة. لتكن $f(x)$ دالة لادورية، تحويل فوريه لهذه الدالة يؤدي إلى دالة جديدة نرمز لها بـ: $F[f(x)]$ وتحسب من خلال التكامل الآتي:

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

التمارين

التمرين 1

لتكن الدالة $f(t) = 10.sin(20\pi t)$. نطلب تمثيلها بيانيا.



الشكل -34-إشارة $f(t)$

نطلب عبارة الدالة الجيبية التي لها نفس التردد والقيمة الأعظمية مثل الدالة السابقة ولكنها تتأخر عنها بـ: $\frac{\pi}{4}$. مثّلها بيانيا على نفس الرسم. أحسب الفرق الزمني بين الدالتين.

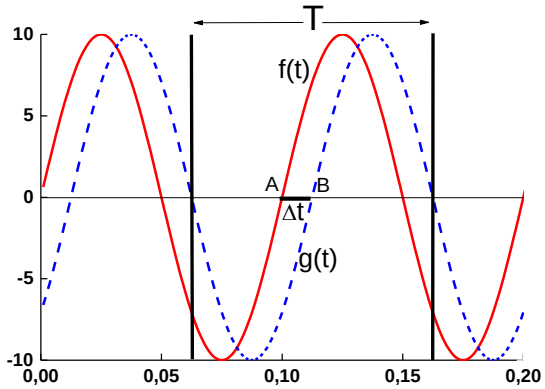
الحل

الدالة $f(t)$ مبيّنة في الشكل-35-

الدالة $g(t)$ مبيّنة في الشكل-35-

بخطوط متقطعة وعبارتها هي:

$g(t) = 10.sin(20\pi t - \pi/4)$.



الشكل-36- إشارة $f(t)$

من العلاقة التالية: $\Delta\phi = \omega.\Delta t = \frac{2.\pi.\Delta t}{T}$ نستنتج أنّ:

$$\Delta t = \frac{T.\Delta\phi}{2.\pi} = \frac{\Delta\phi}{2.\pi.\nu} = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{-\pi/4}{20.\pi} = \frac{-1}{80} = -0.0125s$$

التمرين 2

1) أرسم بيان الدالة $f(x)$ المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

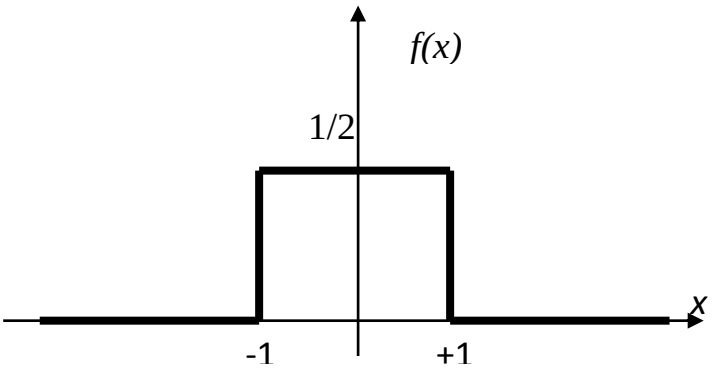
2) أحسب تحويل فوريه $F[f(x)]$ للدالة $f(x)$.

3) مثّل بيانيا الدالة المتحصل عليها $F[f(x)]$.

4) ماذا يحصل في حالة $f(x)$ دورية، حيث يتكرر المجال $[-2, 1]$ إلى ما لا نهاية.

الحل

1) **لدينا** $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \quad \text{أو} \quad x < -1 \end{cases}}$ ، الرسم البياني هو الآتي:



الشكل-37- إشارة $f(t)$

2) الدالة $f(x)$ ليست دورية،لذا سنلجأ إلى حساب تحويل فوريه $F[f(x)]$ لهذه الدالة.

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx + \int_{-1}^{1} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

$$+ \int_{1}^{\infty} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

وبما أن الدالة ليست معدومة في المجال $[-1,1]$ فقط فالتكامل خارج هذا المجال يكون معدوما:

$$F[f(x)] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}.e^{-j2\pi rx}.dx = \frac{1}{2}.\left[\frac{e^{-j2\pi rx}}{-j2\pi r}\right]_{-1}^{+1} = \frac{e^{-j2\pi r} - e^{+j2\pi r}}{-4j\pi r}$$

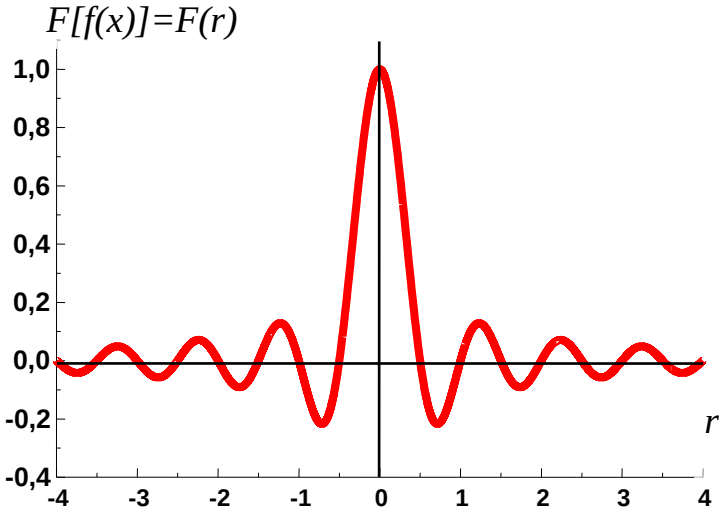
$$= \frac{1}{4j\pi r}\left(e^{+j2\pi r} - e^{-j2\pi r}\right)$$

وكلنا نعلم القانون العام الآتي: $sin\,\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$ ،

ومنه: $F[f(x)] = \frac{1}{4j\pi r}.2.j.sin(2\pi r) = \frac{sin(2\pi r)}{2\pi r}$

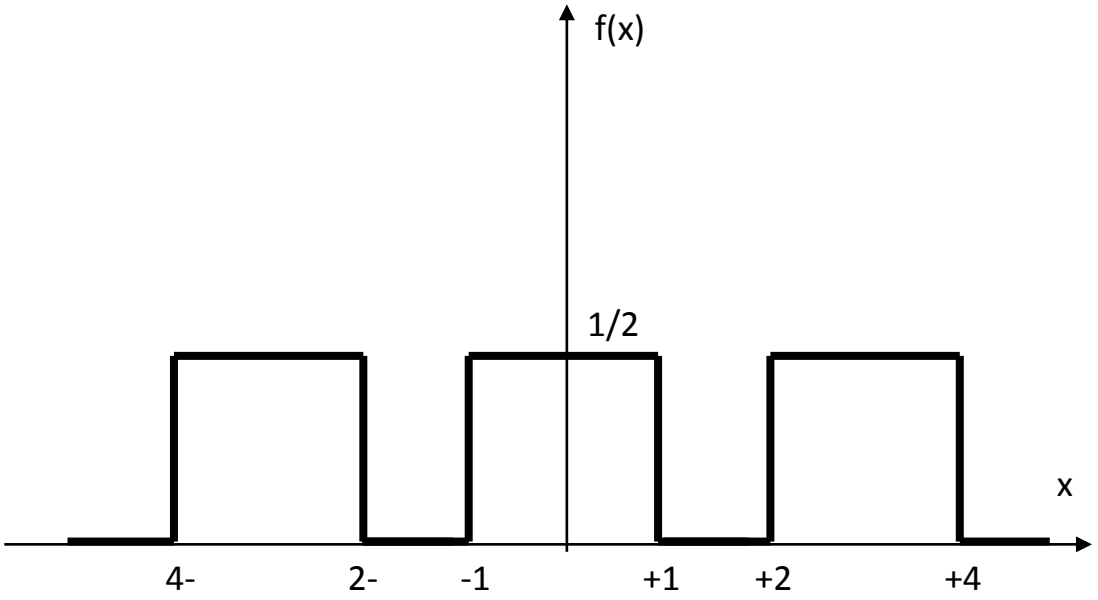
3) وفيما يلي التمثيل البياني للدالة الجديدة F[f(x)] :

(4



الشكل-38- إشارة $f(t)$

5) إذا كانت $f(x)$ دورية ، حيث يتكرر المجال $[-2, 1]$ إلى ما لا نهاية. عندئذ، يصبح بيان الدالة كما يلي:



الشكل-39- إشارة f(t) إذا كانت دورية

في هذه الحالة، لدينا دالة دورية دورها

$$f(x) = f_0 + A_1.sin(\omega x) + B_1.cos(\omega x) + A_2.sin(2\omega x) + B_2.cos(2\omega x) + \ldots + A_n.sin(n\omega x) + B_n.cos(n\omega x) + \ldots..$$

وبما أن الدالة زوجية، فإن المعاملات $A_1, \quad A_2, \ldots A_n$ كلها معدومة ولا داعي لحسابها.

ويمكن حساب معاملات فوريه بالطريقة الآتية:

6) أوّلا، حساب $\boldsymbol{f_0}$: يمكن التكامل من 2- إلى 1 لأنّ $\boldsymbol{f_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x).dx = \frac{1}{T}\int_{-2}^{1} f(x).dx}$ المهم أن التكامل يتم في دور كامل وليس المهم حدود التكامل في حد ذاتها. إذن:

$$f_0 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{1} f(x).dx = \frac{1}{T}\int_{-2}^{-1} f(x).dx + \frac{1}{T}\int_{-1}^{+1} f(x).dx = \frac{1}{T}\int_{-1}^{+1} f(x).dx$$

$f_0 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}.dx = \frac{1}{8}[x]_{-1}^{+1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ يبقى التكامل في المجال الذي لا تنعدم فيه الدالة، ومنه:

7) ثانيا، حساب $\boldsymbol{B_n}$: نغير الحدود والمهم أن نكامل على الدور كله:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x).cos(n\omega x).dx = \frac{2}{T}\int_{-2}^{1} f(x).cos(n\omega x).dx$$

إذن: $B_n = \frac{2}{T}\int_{-2}^{-1} f(x).cos(n\omega x).dx + \frac{2}{T}\int_{-1}^{+1} f(x).cos(n\omega x).dx =$

$\frac{2}{T}\int_{-1}^{+1} f(x).cos(n\omega x).dx$

هنا أيضا، يبقى التكامل في المجال الذي لا تنعدم فيه الدالة، ومنه:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{+1} f(x).cos(n\omega x).dx = \frac{2}{4}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}.cos(n\omega x).dx = \frac{1}{4}.\left[\frac{sin(n\omega x)}{n\omega}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{sin(n\omega) - sin(-n\omega)}{4n\omega} = \frac{2.sin(n\omega)}{4n\omega} = \frac{sin(n\omega)}{2n\omega}$$

إذن: $f(x) = f_0 + B_1.cos(\omega x) + B_2.cos(2\omega x) + \ldots + B_n.cos(n\omega x) + \ldots..$

أي: $f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n.cos(n\omega x)$

وفي الأخير: $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{sin(n\omega)}{2n\omega}.cos(n\omega x)\right]$

التمرين 3

1) أحسب تحويل فوريه للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

2) ماذا يحصل في حالة $f(x)$ دورية، حيث يتكرر المجال $[-L, 1]$ إلى ما لا نهاية، بحيث $L > 1$.

المساعدة:

لدينا

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \quad \text{أو} \quad x < -1 \end{cases}$$

أي $$f(x) = \begin{cases} 1 + x & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 - x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \quad \text{أو} \quad x < -1 \end{cases}$$

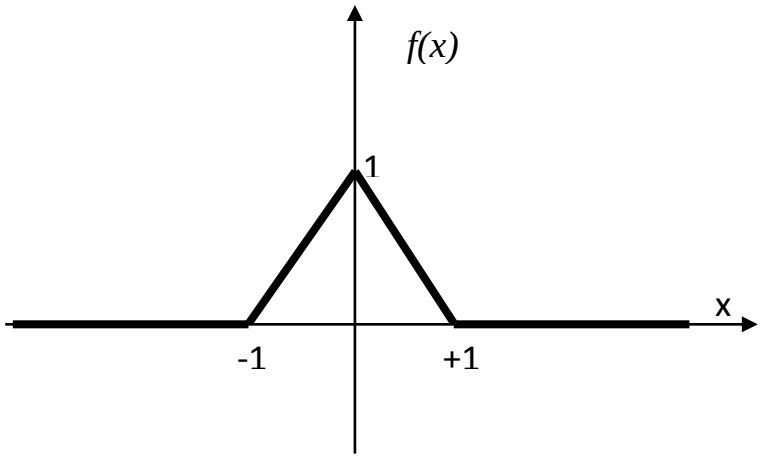
الدالة ليست دورية، ويجب حساب تحويل فوريه $F[f(x)]$ لهذه الدالة.

$$F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx + \int_{-1}^{0} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

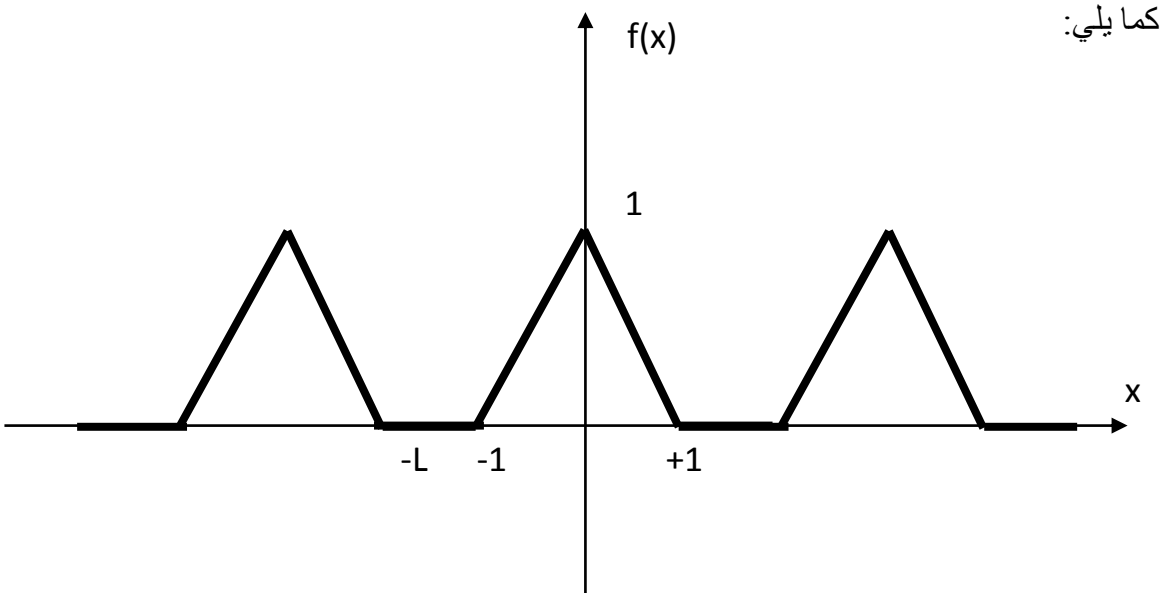
$$+ \int_{0}^{1} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx + \int_{0}^{\infty} f(x).e^{-j2\pi rx}.dx$$

ولا يبقى سوى التكاملان: $F[f(x)] = \int_{-1}^{0}(1 + x).e^{-j2\pi rx}.dx + \int_{0}^{1}(1 -$ $x).e^{-j2\pi rx}.dx$ ، ويمكن حسابهما بسهولة باستعمال طريقة التجزئة مثلا. الرسم البياني هو الآتي:



الشكل-40-

في الحالة التي تكون فيها f(x) دورية ، حيث يتكرر المجال $[-L, 1]$ مع $L > 1$. عندئذ، يصبح بيان الدالة كما يلي:



الشكل-41-

وبما أنّ الدّالة زوجية، فإنّ الحسابات التي لتي في التمرين السابق.

التمرين 4

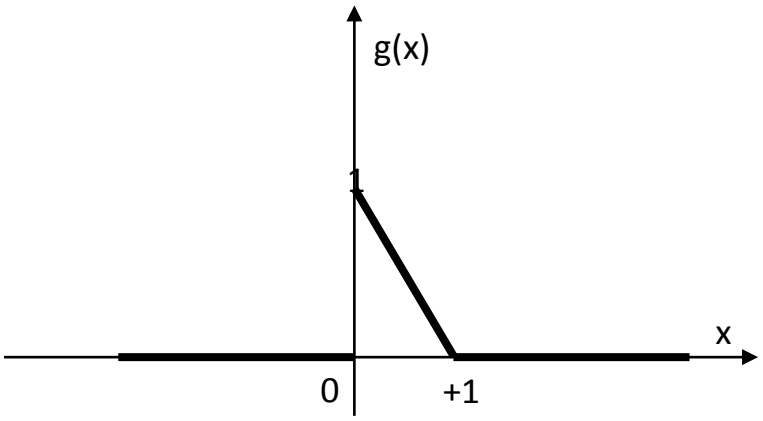
1) أحسب تحويل فوريه للدّالة:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad 0 < x < 1 \\ \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

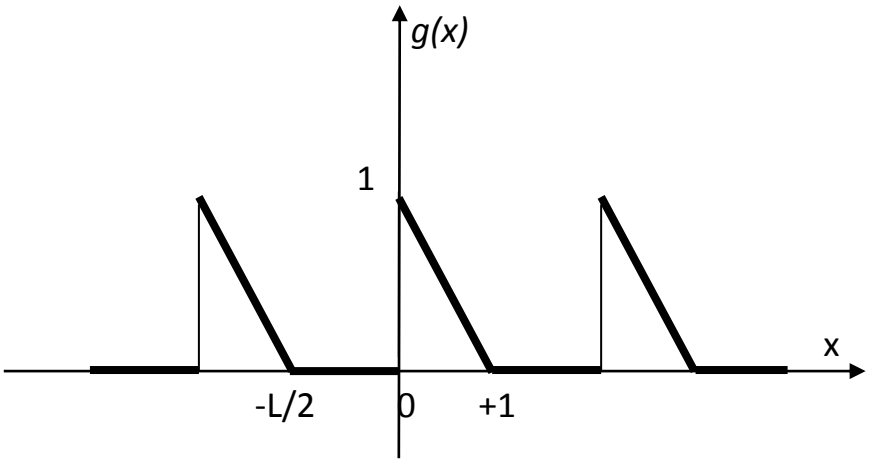
2) ماذا يحدث في حالة g(x) دورية، حيث يتكرر المجال $[-\boldsymbol{L}, \mathbf{1}]$ إلى ما لا نهاية، مع $\boldsymbol{L > 1}$.

المساعدة

يتم العمل كما رأيناه في التمرينين السابقين. في السؤال الثّاني ، تكون لدينا دالة دورية لا زوجية ولا فردية فيتعين علينا حساب كل المعاملات. نحصل على الشكلين الآتيين:



الشكل-42- إشارة g(x)



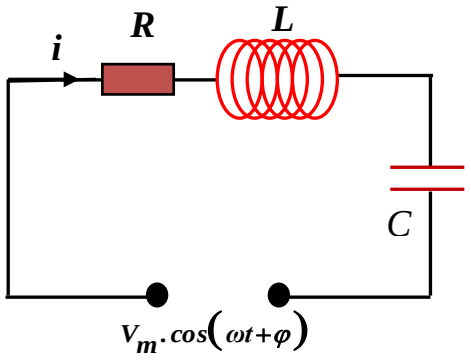
الشكل-43-إشارة g(x)

التيّار المتناوب الجيبي-الدارات الكهربائية

1. تمهيد

نعتبر أن تواتر التيّار المتناوب الجيبي ضعيف بما فيه الكفاية حتى يمكن أن نستعمل القوانين نفسها التي استعملناها في التيّار المستمر، حيث يلزمنا فقط أن نضيف الجهود الناتجة عن التحريض المغناطيسي والتي تنشأ داخل الوشائع (بفعل الذاتية L أو معامل التحريض M).

مثال، لنأخذ الشبكة RLC على التسلسل الآتية :



الشكل -44-

لدينا : $R.i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i.dt = V$

أي: $L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i.dt = V_m.cos(\omega t + \phi)$

نشتق:

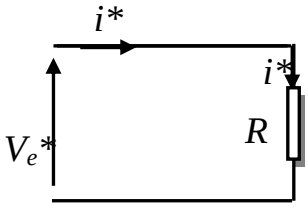
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R.\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega V_m.sin(\omega t + \phi)$$

نقسم على L :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{-\omega V_m}{L}.sin(\omega t + \phi)$$

فهي معادلة تفاضلية سنكتفي بإعطاء حلها مباشرة وهو كما يلي:

$$i = e^{-\frac{R}{2L}t}.f(t) + I_m.cos(\omega t)$$



الشكل -45-

نلاحظ أنّه عندما t >> ، يصبح: $i \approx I_m.cos(\omega t)$ لأنّ

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\frac{R}{2L}t}\right) = 0 .$$

إذن الجهد المتناوب الجيبي ينشأ عنه تيّار متناوب جيبي (بعد مدة قصيرة).

ليكن التيّار $i = I_m.cos(\omega t)$ الذي يمر في كل دارة من الدارات التالية

حينئذ يكون الجهد بين طرفي كل عنصر من العناصر الخاملة

كالتالي:

الجهد عند قطبي المقاومة الكهربائية هو: $\boldsymbol{V_R = R.i = R.I_m.cos(\omega t)}$

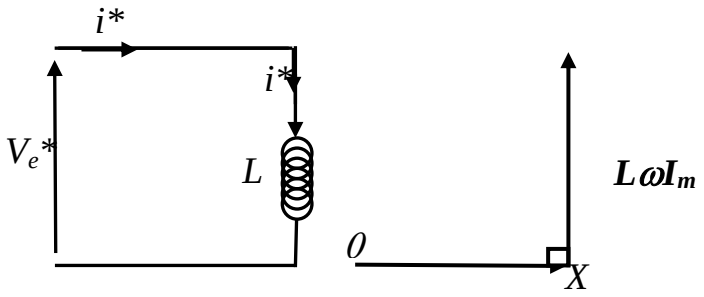
وهو يمثل بواسطة شعاع مبدؤه O، طويلته $\boldsymbol{R.I_m}$ ويصنع الزاوية $\mathbf{0}°$ مع المحور Ox.

الشكل -46-

- الجهد عند قطبي الوشيعة هو:

$$V_L = L.\frac{di}{dt} = -L\omega.I_m.sin(\omega t) = L\omega.I_m.cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

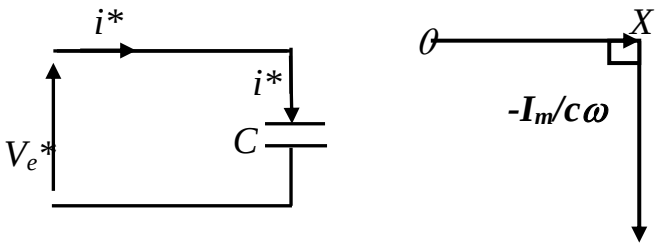
- وهو يُمثل بواسطة شعاع مبدؤه **O**، طويلته $L\omega.I_m$ ويصنع الزاوية $\frac{\pi}{2}$ مع المحور **ox**.



الشكل -47-

- الجهد عند قطبي المكثفة هو: $V_C = \frac{1}{C}.\int i.dt = \frac{I_m}{C\omega}.sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega}.cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

وهو يُمثل بواسطة شعاع مبدؤه **O**، طويلته $\frac{I_m}{C\omega}$ ويصنع الزاوية $\frac{-\pi}{2}$ مع المحور **OX**.



الشكل -48-

2. طريقة الحل الجبري

تعتمد هذه الطريقة على الحساب المباشر مُستعملة في ذلك المعادلات التفاضلية المعقدة التي غالبا ما يتعذر حلُّها جبريا بل تفرض علينا اللجوء إلى الحاسوب. ولكن ورغم ذلك، فإنّها تُعتبر الطريقة العامة الصالحة في جميع الحالات. هذه الطريقة يُمكن تجنُبها واللجوء إلى طُرق أسهل منها في حالة ما إذا كانت كل مصادر الجهد والتيّار المتواجدة داخل الشبكة لها كلها نفس التواتر . سنستعرض فيما يلي طريقتين تدخلانّ في هذا الإطار.

1.2 طريقة تمثيل فرينل Fresnel

في إطار هذه الطريقة، نُمثل كل دالة من النوع $V = V_m.cos(\omega t + \phi)$ ، عند الزمن $t=0$ بواسطة شعاع مبدؤه O، طويلته V_m ويصنع الزاوية ϕ مع المحور Ox (الذي يُمثل محور التيّار).

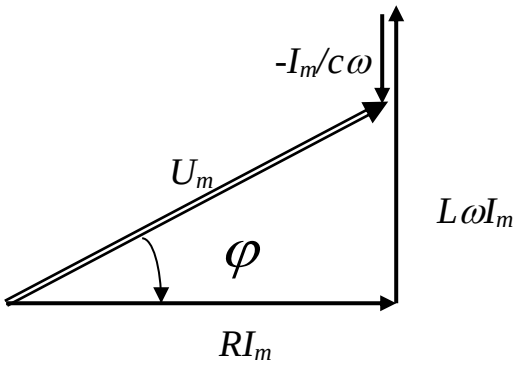
ليكن التيّار $i = I_m.cos(\omega t)$ الذي يصنع الزاوية 0 مع محور الفواصل.

إذن، الجهد عند قطبي المقاومة الكهربائية هو: $V_R = R.i = R.I_m.cos(\omega t)$ وهو يُمثّل بواسطة شعاع مبدؤه O، طويلته $R.I_m$ ويصنع الزاوية 0° مع المحور Ox.

والجهد عند قطبي الوشيعة هو: $V_L = L.\frac{di}{dt} = -L\omega.I_m.sin(\omega t) = L\omega.I_m.cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ وهو يُمثل بواسطة شعاع مبدؤه O، طويلته $L\omega.I_m$ ويصنع الزاوية $\frac{\pi}{2}$ مع المحور Ox.

والجهد عند قطبي المكثفة هو: $V_C = \frac{1}{C}.\int i.dt = \frac{I_m}{C\omega}.sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega}.cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ وهو يمثل بواسطة شعاع مبدؤه O، طويلته $\frac{I_m}{C\omega}$ ويصنع الزاوية $\frac{-\pi}{2}$ مع المحور Ox.

نريد الأنّ الحصول على المحصلة وهنا يمكننا تمثيل فرينل من القيام بذلك بتركيب الأشعة الممثلة لتلك الجهود (الشكل -49-).



الشكل -49-

فنحصل على شعاع المحصلة الذي يمثل V والذي طويلته Vm وصفحته الابتدائية φ ، ونستنتج بسهولة عباراتهم:

$$\begin{cases} V_m = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2}.I_m \\ tg(\phi_m) = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)}{R} \end{cases}$$

حيث $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2}$ تسمى ممانعة الشبكة.

2.2 طريقة الأعداد المركبة

فيما يلي: سنستعمل رمز نجمة * لتعيين الأعداد المركبة.

من أجل تعيين تيّار متناوب جيبي طويلته وصفحته الابتدائية 0 يمكن تجنب استعمال sin و cos ونستعمل الدالة الأسية للأعداد المركبة بدلا منها فنكتب: $i* = I_m.e^{j\omega t}$ مع $j = \sqrt{-1}$

إذن : $\boldsymbol{V_R^* = R.i* = R.I_m.e^{j\omega t}}$

و $\boldsymbol{V_L^* = L.\frac{di*}{dt} = jL\omega.I_m.e^{j\omega t}}$ سنستعمل هذه العبارة فيما بعد ولكن دعونا نلاحظ بأنّه لدينا $j=e^{j\frac{\pi}{2}}$

إذن $\boldsymbol{V_L^* = L\omega.I_m.e^{j.\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}}$ ، إذن $\boldsymbol{V_L^*}$ متقدمة على V_R^* ب $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

وأخيرا $V_C^* = \frac{1}{C}.\int i*.dt = \frac{I_m}{jC\omega}.e^{j\omega t} = \frac{-j.I_m}{C\omega}.e^{j\omega t}$ سنستعمل هذه العبارة أيضا فيما بعد

ولكن حاليا دعونا نلاحظ أنّ $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ، إذن $V_C^* = \frac{I_m}{C\omega}.e^{j.\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$ ، إذن V_C^* متأخرة على V_R^* ب $\frac{\pi}{2}$.

قوانين أوم في التيّار المتناوب الجيبي هي نفسها القوانين في التيّار المستمر شرط أن نستعمل تمثيل الأعداد المركبة (وليس القيم المطلقة): $V* = Z*.i*$

ومن هنا شكل نطبق قانون كيرشوف : $V* = V_R^* + V_L^* + V_C^*$

وبعد التعويض : $V* = R.I_m.e^{j\omega t} + jL\omega.I_m.e^{j\omega t} + \frac{-j.I_m}{C\omega}.e^{j\omega t}$

ومنه : $V* = \left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right].I_m.e^{j\omega t}$

إذن $V* = \left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right].i*$

وهي على شكل $v* = Z*.i*$ ، حيث $Z*$ عدد مركب يسمى الممانعة المركبة للشبكة (يختلف عن الممانعة التي رأيناها في الفقرة السابقة).

هدفنا هو الوصول إلى كتابة الجهد على الشكل الآتي: $V* = V_m.e^{j.(\omega t+\varphi_0)}$، إذن يتوجب علينا البحث عن V_m و φ . لدينا :

$$\phi = arg[V*] = arg[Z*] + arg[i*]$$

$$\phi = arg\left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] + arg\left[I_m.e^{j\omega t}\right]$$

ومنه : $\phi = arctg\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R} + \omega t$

أي $\phi = \omega t + arctg\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$

<u>والصفحة الابتدائية هي:</u>

$$\phi_0 = \phi(t=0) = arctg\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$$

وأخيرا $\phi = \omega t + \phi_0$

ومن جهة أخرى، الطاولة هي :

$$V_m = \|V*\| = \|Z*\|.\|i*\| = \left\|R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right\|.\left\|I_m.e^{j\omega t}\right\|$$

ومنه $V_m = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2} . I_m$

إذن يمكننا الأنّ كتابة مجموع الجهود على شكل $V* = V_m . e^{j.(\omega t + \varphi_0)}$.

3. **القيم المنتجة**

نحصل عليها بتقسيم القيم الأعظمية على $\sqrt{2}$. القيم المنتجة لها علاقة مباشرة بالطاقة المتوسطة التي تستهلكها مقاومة مثلا في إطار التيّار المتناوب الجيبي. وسنكتفي بإعطاء التعريف مباشرة:

القيمة المنتجة للجهد: $V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$

القيمة المنتجة للتيّار : $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

4. **تجميع الممانعات**

الممانعة المكافئة للممانعات الموضوعة على التسلسل : $Z^*_{eq} = \sum_i Z^*_i$

الممانعة المكافئة للممانعات الموضوعة على التفرع : $\frac{1}{Z^*_{eq}} = \sum_i \frac{1}{Z^*_i}$

5. الاستطاعة في التيّار المتناوب الجيبي

1.5 الاستطاعة اللحظية

$P = V.I$ ، لا يمكن قياسها في المخبر

2.5 الاستطاعة المتوسطة

لتكن P هي الاستطاعة اللحظية، فإن الاستطاعة المتوسطة هي: $P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt$ حيث T هو الدور.

إذن :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T V(t).i(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_m.cos(\omega t + \phi).I_m.cos(\omega t).dt$$

أي $P_{moy} = \frac{V_m.I_m}{T}\int_0^T cos(\omega t + \phi).cos(\omega t).dt$

و بما أن $cos(a).cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$

نجد $P_{moy} = \frac{V_m.I_m}{2.T}\left[\int_0^T cos(2\omega t + \phi).dt + \int_0^T cos(\phi).dt + \right]$

ثم $P_{moy} = \frac{V_{eff}.I_{eff}}{T}\left[\left[\frac{sin(2\omega t+\phi)}{2\omega}\right]_0^T + [t\,cos(\phi)]_0^T\right]$

وأخيرا $P_{moy} = \frac{V_{eff}.I_{eff}}{T}\left[\left(\frac{sin(2\omega T+\phi)-sin(\phi)}{2\omega}\right) + T\,cos(\phi)\right]$

وبما أن: $2\omega T = 2\omega.\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$ فإنّ $sin(2\omega T + \phi) = sin(4\pi + \phi) = sin(\phi)$

نجد $\boldsymbol{P_{moy} = \frac{V_{eff}.I_{eff}}{T}\left[\left(\frac{sin(\phi)-sin(\phi)}{2\omega}\right) + T\,cos(\phi)\right] = \frac{V_{eff}.I_{eff}}{T}T\,cos(\phi) = V_{eff}.I_{eff}\,cos(\phi)}$

نلخص : $P_{moy} = V_{eff}.I_{eff}\,cos(\phi)$ وتسمى أيضا الاستطاعة النشطة.

المقدار $V_{eff}.I_{eff}$ يسمى الاستطاعة الظاهرة.

المقدار $cos(\phi) = \frac{P}{V_{eff}.I_{eff}}$ يسمى معامل الاستطاعة للشبكة لأنّ P و V_{eff} معطيات ثابتة عموما وتكون قيمة I_{eff} تابعة لتغيرات $cos(\phi)$.

ملاحظة

قد استعملنا $V_m.cos(\omega t + \phi)$ و $I_m.cos(\omega t)$ ، إذن $Arg[v] = \phi$ و $Arg[i] = 0$، وإذا اعتبرنا أن ممانعة الشبكة هي $Z*$ فإن $v* = Z*.i*$ ومنه $Arg[v*] = Arg[Z*] + Arg[i*]$ أي $Arg[Z*] = \phi$.

وفي الشبكة RLC مثلا، $Z* = R + j.\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)$ ومنه $cos(\phi) = \frac{R}{\|Z*\|}$. فلنعوض قي عبارة الاستطاعة المتوسطة

$$P = V_{eff}.I_{eff}\,cos(\phi) = V_{eff}.I_{eff}.\frac{R}{\|Z*\|}$$

وبما أن $v* = Z*.i*$ فإن $\|v*\| = \|Z*\|.\|i*\|$ أي $V_m = \|Z*\|.I_m$ وأيضا

$$V_{eff} = \|Z*\|.I_{eff}$$

ومنه : $P_{moy} = V_{eff}.I_{eff}.\frac{R}{\|Z*\|} = R.{I_{eff}}^2 = \frac{{V_{eff}}^2}{R}$

3.5 الاستطاعة الإرتكاسية (Puissance réactive) :

حينما تكون لدينا وشائع ومكثفات داخل الشبكة فإن الطاقة التي تعطى لها تخزن ثم ترجع إلى الشبكة لذلك تكون هذه الطاقة سالبة أثناء عملية إرجاع الطاقة. وتسمى هذه بالاستطاعة الإرتكاسية وتعطى بالقانون الآتي: $Q = V_{eff}.I_{eff}.sin(\phi)$.

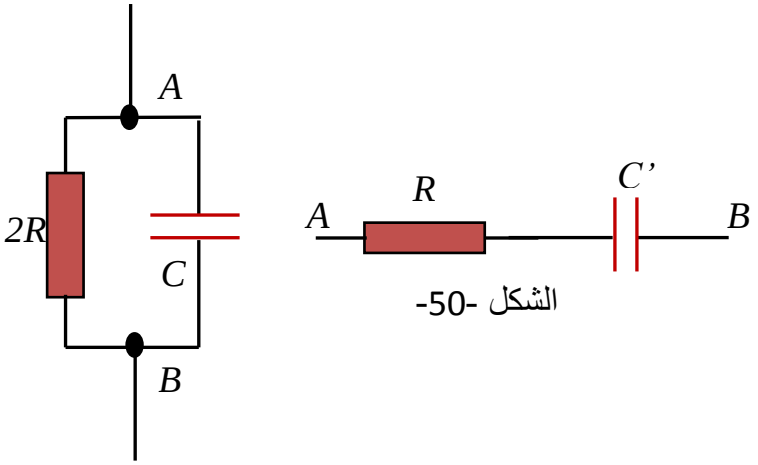
وفي الشبكة RLC مثلا، $Z* = R + j.\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)$ ومنه $sin(\phi) = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)}{\|Z*\|}$.

ومنه: $Q = V_{eff}.I_{eff}\,sin(\phi) = V_{eff}.I_{eff}.\frac{\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)}{\|Z*\|}$

ومنه : $Q = V_{eff}.I_{eff}.\frac{\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)}{\|Z*\|} = \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)..{I_{eff}}^2 = \frac{{V_{eff}}^2}{\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)}$

التمارين

التمرين الأوّل



الشكل -50-

ما هي العلاقة بين C و C' لكي تتكافأ AB مع $A'B'$ ؟ وما هو التواتر عندئذ ؟

الحل

1-لأجل ذلك، يجب على الممانعات أن تكون متساوية:

$$Z_{A'B'} = Z_{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2.R} + jC'\omega} = R - \frac{j}{C\omega}$$

أي:

$$\frac{2.R}{1 + 2jRC'\omega} = \frac{RC\omega - j}{C\omega}$$

ومنه $R\omega.(2C' - C).R + j.(2R^2CC'\omega^2 - 1) = 0$

وبالتالي لدينا عددا مركبا معدوما، مما يدل على أن مركبتيه معدومتين :

$$\begin{cases} 2C' - C = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 2R^2CC'\omega^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

فمن المعادلة الأوّلى : $C' = \frac{C}{2}$

ومن المعادلة الثّانية : $\omega^2 = \frac{1}{2R^2CC'} = \frac{1}{2R^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{1}{R^2C^2}$

ومنه $\omega = \frac{1}{R.C}$ (التواتر موجب)

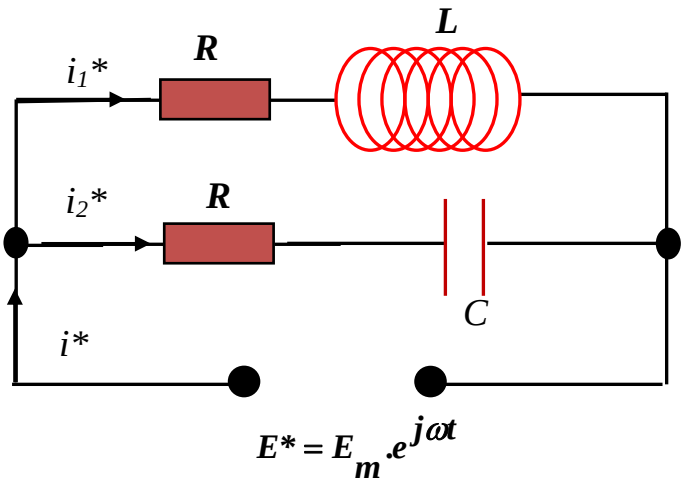
التمرين الثّاني:

لدينا في الشبكة (شكل-51-): $E = E_m.e^{j\omega t}$ *. لاحظ أن المقاومتين متساويتين.

1- ما هي القيم المنتجة (الفعّالة) والصفحات الابتدائية لـ: i_1 و i_2 .

2- ما هي قيم C لتكون i_1 و i_2 متباعدتين بـ $\frac{\pi}{2}$.

3- بالإضافة إلى الشرط السابق، نريد أن تكون القيم المنتجة ل i_1 و i_2 متساوية، فما هي العلاقة التي يجب أن تحققها R، L و ω ؟



الشكل- 51-

الحل

بما أن لنا فرعان متوازيان فنكتب:

$$E^* = (R + jL\omega).i_1^* = \left(R - \frac{j}{C\omega}\right).i_2^*$$

ومنه:

$$\begin{cases} i_1^* = \frac{E^*}{(R+jL\omega)} = \frac{E_m.e^{j\omega t}}{(R+jL\omega)} \\ i_2^* = \frac{E^*}{\left(R-\frac{j}{C\omega}\right)} = \frac{E_m.e^{j\omega t}}{\left(R-\frac{j}{C\omega}\right)} \end{cases}$$

إذن نلاحظ أنّ التيّارين كلاهما عبارة عن قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر. ولذلك فإن طاولة كل تيّار هو قسمة طاولتي البسط والمقام وعمدة كل تيّار هي فرق عمدتي البسط و المقام. إذن الطاولتان هما:

$$\begin{cases} \|i_1^*\| = \frac{E_m}{R^2 + L^2\omega^2} = I_{1,max} \\ \|i_2^*\| = \frac{E_m}{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = I_{2,max} \end{cases}$$

وهي تمثل القيم الأعظمية للتيّارين وتمكننا من إيجاد القيم المنتجة بسهولة :

$$\begin{cases} I_{1,eff} = \dfrac{I_{1,max}}{\sqrt{2}\dfrac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(R^2 + L^2\omega^2\right)}} \\ I_{2,eff} = \dfrac{I_{2,max}}{\sqrt{2}\dfrac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}\right)}} \end{cases}$$

والعمدتان هما:

$$\begin{cases} ARG[i_1^*] = ARG[E^*] - ARG[R + jL\omega] \\ ARG[i_2^*] = ARG[E^*] - ARG\left[R - \dfrac{j}{C\omega}\right] \end{cases}$$

و بما أن $ARG[E^*]=ARG[E_m.e^{j\omega t}]=j\omega t$

و $ARG[R + jL\omega] = Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)$

و $ARG\left[R - \frac{j}{C\omega}\right] = Arctg\left(\frac{-1}{RC\omega}\right)$

يأتي:

$$\begin{cases} ARG[i_1^*] = j\omega t - Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right) \\ ARG[i_2^*] = j\omega t - Arctg\left(\frac{-1}{RC\omega}\right) \end{cases}$$

ومن ثم يمكن الحصول على الصفحتين الابتدائيتين ϕ_1 و ϕ_2 بوضع $t = 0$:

$$\begin{cases} \phi_1 = -Arctg\left(\dfrac{L\omega}{R}\right) \\ \phi_2 = -Arctg\left(\dfrac{-1}{RCC\omega}\right) \end{cases}$$

2-فرق الطور(الصفحة) بين: i_1 و i_2 هو: $\frac{\pi}{2}$ فإذا كان: $\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ أي: $\phi_2 = \frac{\pi}{2} + \phi_1$

أي: $tg(\varphi_1) = -\cot g\,(\varphi_2) = \frac{-1}{tg(\varphi_2)}$

أي: $tg(\phi_1).tg(\phi_2) = -1$ ومنه: $\frac{L\omega}{R} = RC\omega$ أي: $C = \frac{L}{R^2}$

3-وبالإضافة إلى ذلك، نريد أن تكون القيم المنتجة ل i_1 و i_2 متساوية، أي:

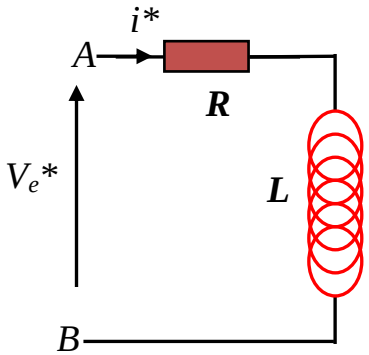
$$I_{1,eff} = I_{2,eff} \Rightarrow \frac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(R^2 + L^2\omega^2\right)} = \frac{\left(\frac{E_m}{\sqrt{2}}\right)}{\left(R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}\right)}$$

أي: $R^2 + L^2\omega^2 = R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}$

أي $LC\omega^2 = 1 d'ou: L^2C^2\omega^4 = 1 \Rightarrow L^2\omega^2 = \frac{1}{C^2\omega^2}$ (الحل السالب مرفوض لأنّ L ، C و ω^2 موجبة)، ونظرا للعلاقة السابقة $\omega = \frac{R}{L} d'ou: \frac{L^2\omega^2}{R^2} = 1, vient: C = \frac{L}{R^2}$

التمرين الثالث:

أوجد عبارات الجهود عند قطبي كل عنصر وكذلك عبارة جهد المصدر الذي يغذي شبكة الشكل-52- علما أنّ: $i* = I_m.e^{j\omega t}$، ثم احسب الاستطاعة المتوسطة والارتكاسية التي بين A و B.



الشكل -52-

الحل

- الجهد عند قطبي R : $V_R^* = R.i^* = R.I_m.e^{j\omega t}$
- الجهد عند قطبي L يمكن الحصول عليه مباشرة باستعمال تمثيل الأعداد المركبة:
- $V_L^* = jL\omega.i^* = jL\omega.I_m.e^{j\omega t}$ وبما أن $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ فإن $V_L^* = L\omega.I_m.e^{j.\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$
- أمّا حساب جهد المصدر الذي يغذي هذه الشبكة فيمكن القيام به بسهولة باستعمال تمثيل الأعداد المركبة. فبعد أن نحسب الممانعة المكافئة للشبكة و هي:

$Z_{eq}^* = R + jL\omega$ ، فنكتب العلاقة

$$V_e^* = Z_{eq}^*.i^* = (R + jL\omega).\left(I_m.e^{j\omega t}\right)$$

ونلاحظ أن $R + jL\omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.e^{j\theta}$ مع $\theta = Arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)$

أخيرا $V_e^* = \left(\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.e^{j\theta}\right).\left(I_m.e^{j\omega t}\right)$ أي $V_e^* = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.I_m.e^{j(\omega t+\theta)}$

- الاستطاعة المتوسطة هي : $P = V_{AB,eff}.I_{eff}\,cos(\phi) = V_{e,eff}.I_{eff}.cos(\phi)$

وبما أن $V_{eff} = \|Z*\|.I_{eff}$ إذن

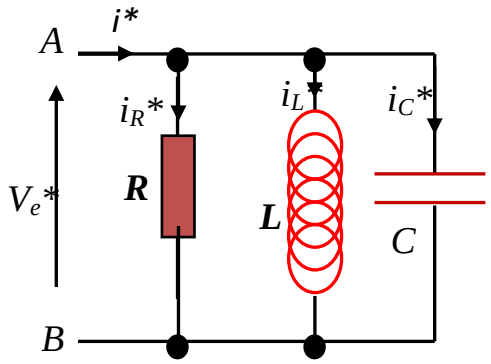
$$P = \|Z*\|.{I_{eff}}^2.cos(\phi) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\ldots{I_{eff}}^2.cos(\phi)$$

والاستطاعة المراكسة هي : $P = V_{AB,eff}.I_{eff}\,sin(\phi) = V_{e,eff}.I_{eff}.sin(\phi)$

أي $P = \|Z*\|.{I_{eff}}^2.sin(\phi) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\ldots{I_{eff}}^2.sin(\phi)$

التمرين الرابع:

أوجد عبارات الجهود عند قطبي كل عنصر (الشكل -53-).



الشكل -53-

الحل

في هذا الشكل، الأمر أبسط من التمرين السابق لأنّ كل العناصر موضوعة على التفرع مع المصدر، إذن الجهود $V_e^* = V_R^* = V_L^* = V_C^*$. إنّه يكفي حساب أحد الجهود وقد اخترنا أن نحسب جهد المصدر.

فباستعمال تمثيل الأعداد المركبة، نحسب الممانعة المكافئة للشبكة كما يلي:

$$\text{أي } \frac{1}{Z_{eq}^*} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{\frac{-j}{C\omega}}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}^*} = \frac{1}{R} + j.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = \frac{1 + jR.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{R}$$

$$\text{ومنه: } Z_{eq}^* = \frac{R}{1 + jR.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

طاولة هذه الممانعة هي قسمة طاولتي البسط والمقام: $\left\|Z_{eq}^*\right\| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$

وعمدة هذه الممانعة هي طرح عمدة المقام من عمدة البسط:

$$Arg\left[Z_{eq}^*\right] = Arg[R] - Arg\left[1 + jR.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]$$

وبما أن: $Arg[R] = Arg[R + j.0] = Arctg\left(\frac{0}{R}\right) = 0$

وكذلك: $Arg\left[1 + jR.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right] = Arctg\left[\frac{R.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{1}\right] = Arctg\left[R.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]$

فإن: $Arg\left[Z_{eq}^{*}\right] = -Arctg\left[R.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]$

ولنسمي: $\theta = Arg\left[Z_{eq}^{*}\right]$

إذن: $Z_{eq}^{*} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}.e^{j\theta}$

وبالتالي: $V_e^{*} = Z_{eq}^{*}.i^{*} = \left(\frac{R}{\sqrt{1+R^2.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}.e^{j\theta}\right).\left(I_m.e^{j\omega t}\right)$

أخيرا: $V_e^{*} = \frac{R.I_m}{\sqrt{1+R^2.\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}.e^{j(\omega t+\theta)} == V_R^{*} = V_L^{*} = V_C^{*}$

رباعي الأقطاب

1. تمهيد

يمثل رباعي الأقطاب كما في الشكل -54-، حيث يتميز بـ: 4 أقطاب، إثنان للدخول و إثنان للخروج.

أمّا المربع الواقع بين V_e و V_S، فإنّنا لا نهتم بما يوجد داخله ويمكن له أن يحتوي على عناصر مختلفة عديدة

الشكل -54-

دراسة إستجابة شبكة كهربائية لإثارة متناوبة جيبية أو مستمرة.

خصائص الدخول هي: i_e و v_e (e=entrée)

خصائص الخروج هي: i_s و v_s (s=sortie)

هذه المقادير الأربعة يمكن ربطها بواسطة معادلتين تسميان "خصائص رباعي الأقطاب".

رباعي الأقطاب الخامل هو الذي لا يحتوي على مصادر للطاقة وإلاّ فهو رباعي أقطاب نشط.

نقول أنّ لدينا رباعي أقطاب خطّي إذا كانت كل عناصره خطّية.

الربح (أو المردود) في الاستطاعة: $\frac{P_S}{P_e}$

الكسب في الجهد : $\frac{v_S}{v_e}$

الكسب في التيّار : $\frac{i_S}{i_e}$

في هذا الدرس كلّه، نهتم فقط برباعي الأقطاب الخامل.

2. رباعي الأقطاب باستعمال وسائط الممانعات Z

1.2 التعريف

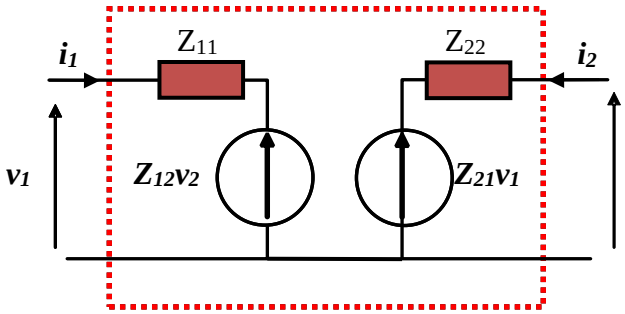
لنضع: $i_2 = i_S$ $v_2 = v_S$, $i_1 = i_e$, $v_1 = v_e$. إذا كانت كل عناصر الشبكة خطّية وكل المصادر مترابطة فيمكن كتابة العلاقات الآتية:

أو بواسطة مصفوفة الممانعات: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} v_1 = Z_{11}.i_1 + Z_{12}.i_2 \\ v_2 = Z_{21}.i_1 + Z_{22}.i_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

المقادير Z_{22} ,Z_{21} ,Z_{12} ,Z_{11} تسمى ممانعات رباعي الأقطاب وتسمى أيضا بالممانعات في الفراغ لأنّ قياسها يتم في حالة الدارة المفتوحة.

$$Z_{22} = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{i_1=0} \text{ ، } Z_{21} = \frac{v_2}{i_1}\Big|_{i_2=0} \text{ ، } Z_{12} = \frac{v_1}{i_2}\Big|_{i_1=0} \text{ ، } Z_{11} = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{i_2=0}$$



2.2 الشبكات التقابلية وغير التقابلية : (Réciproque ou Non)

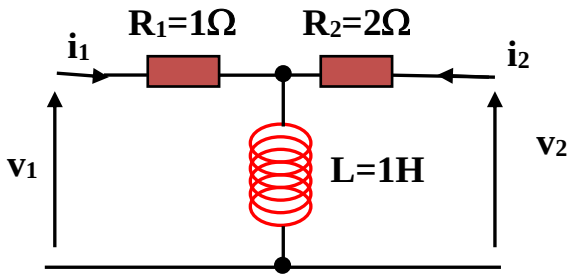
يقال عن رباعي الأقطاب أنّه تقابلي إذا كانت ممانعاته المحسوبة في الدارة المفتوحة متساوية، أي إذا كان: $Z_{12} = Z_{21}$ وفي هذه الحالة، إذا كان التيّار I يسري في إحدى جهتيه فإن الجهد عند الجهة الأخرى تكون هي نفسها : $V = Z_{21}.I = Z_{12}.I$.

رباعي الأقطاب الذي يحتوي على مقاومات، مكثفات و وشائع يكون عموما تقابلي. أمّا إذا كان يحتوي أيضا على مصادر مترابطة فأنّه يكون عموما غير تقابلي.

المثال 1

لتكن الشبكة الممثلة في الشكل -55- والتي تمثل رباعي أقطاب مكون من وشيعة ومقاومتين.

المطلوب: إيجاد الخصائص Z له و هل رباعي الأقطاب هذا تقابلي ؟



الشكل -55-

الحل

نطبق قوانين كيرشوف للعروتين :

$$\begin{cases} v_1 = R_1.i_1 + jL\omega.(i_1 + i_2) \\ v_2 = R_2.i_1 + jL\omega.(i_1 + i_2) \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega).i_1 + jL\omega.i_2 \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2. + jL\omega).i_2 \end{cases}$$

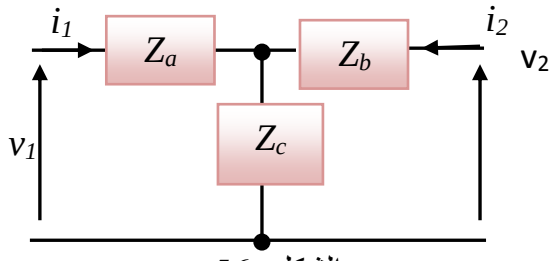
ومنه فإن: $Z_{11} = (R_1 + jL\omega), \quad Z_{12} = Z_{21} = jL\omega \quad , Z_{22} = (R_2 + jL\omega)$

أي : $Z_{11} = (1 + j\omega) \quad (\Omega), \quad Z_{12} = Z_{21} = j\omega \quad (\Omega), Z_{22} = (2 + j\omega) \quad (\Omega)$

- نعم رباعي الأقطاب هذا تقابلي لأنّ: $\boldsymbol{Z_{12} = Z_{21}}$

3.2 الشبكات T المكافئة لرباعي الأقطاب التقابلي

إذا وضعنا : $Z_c = Z_{12} = Z_{21} \quad , \quad Z_b = Z_{22} - Z_{21} \quad , \quad Z_a = Z_{11} - Z_{12}$ ، فإننا نحصل على رباعي أقطاب على شكل T مكافئ لرباعي الأقطاب الأصلي، كما يلي:



الشكل -56-

المثال 2

لتكن شبكة المثال السابق.

المطلوب: إيجاد رباعي الأقطاب على شكل T المكافئ له.

الحل

وجدنا أعلاه أنّ: $Z_{11} = (R_1 + jL\omega), \quad Z_{12} = Z_{21} = jL\omega \quad , Z_{22} = (R_2 + jL\omega)$

نطبّق القوانين السابقة :

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = R_1 \quad , \quad Z_b = Z_{22} - Z_{21} = R_2 \quad , \quad Z_c = Z_{12} = Z_{21} = jL\omega$$

أي $Z_c = Z_{12} = Z_{21} = j\omega \quad (\Omega)$ ، $Z_b = Z_{22} - Z_{21} = 2\Omega$ ، $Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 1\Omega$

3. وسائط المسامحات Y (Paramètres admittances)

1.3 تعريف

كان بالإمكان أيضا كتابة التيّارات بدلالة الجهود على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \text{أو بواسطة مصفوفة المسامحات:} \begin{cases} i_1 = Y_{11}.v_1 + Y_{12}.v_2 \\ i_2 = Y_{21}.v_1 + Y_{22}.v_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

المقادير Y_{22} , Y_{21} , Y_{12} , Y_{11} تسمى مسامحات رباعي الأقطاب وتسمى أيضا بالمسامحات للدارة القصيرة لأنّ قياسها يتم في حالة الدارة القصيرة.

$$Y_{11} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2=0} \text{ ، } Y_{12} = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0} \text{ ، } Y_{21} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0} \text{ ، } Y_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{v_1=0}$$

المثال 3

لتكن شبكة المثال السابق.

المطلوب: إيجاد الخصائص Y له.

الحل

وجدنا أنّ:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega).i_1 + jL\omega.i_2 \ldots\ldots\ldots (1) \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2. + jL\omega).i_2 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

ومن المعادلة الأولى: $i_2 = \frac{1}{jL\omega}v_1 - \frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega}.i_1$ (أ)

نعوض في المعادلة الثّانية للجملة السابقة:

$$v_2 = jL\omega i_1 + (R_2. + jL\omega).\left(\frac{1}{jL\omega}v_1 - \frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega}.i_1\right)$$

أي $$\left(\frac{(R_2.+jL\omega).(R_1+jL\omega)}{jL\omega} - jL\omega\right).i_1 = \frac{(R_2.+jL\omega)}{jL\omega}v_1 - v_2$$

ومنه $$\left(\frac{(R_1R_2-L^2\omega^2)+jL\omega.(R_1+R_2)+L^2\omega^2}{jL\omega}\right).i_1 = \frac{(R_2.+jL\omega)}{jL\omega}v_1 - v_2$$

إذن: $$i_1 = \frac{(R_2.+jL\omega)}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}.v_1 - \frac{jL\omega}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}.v_2$$

وأخيرا:

$$Y_{11} = \frac{R_2.+jL\omega}{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}, Y_{12} = \frac{jL\omega}{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}$$

فنعوض في المعادلة (أ) :

$$i_2 = \frac{1}{jL\omega}v_1 - \frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega}.\left[\frac{(R_2.+jL\omega)}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}.v_1 - \frac{jL\omega}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}.v_2\right]$$

بعد التوزيع:

$$i_2 = \left[\frac{1}{jL\omega} - \frac{(R_1+jL\omega).(R_2.+jL\omega)}{jL\omega.(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right]v_1 + .\left[\frac{jL\omega.(R_1+jL\omega)}{jL\omega.(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}.v_2\right]$$

ومنه:

$$i_2 = \frac{1}{jL\omega}.\left[1 - \frac{(R_1+jL\omega).(R_2.+jL\omega)}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right]v_1 + .\left[\frac{(R_1+jL\omega)}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right].v_2$$

أي

$$i_2 = .\left[\frac{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))-\left(R_1R_2-L^2\omega^2+jL\omega.(R_1+R_2)\right)}{jL\omega.(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right]v_1 + .\left[\frac{(R_1+jL\omega)}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right].v_2$$

وأخيرا:

$$i_2 = \left[\frac{+jL\omega}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right]v_1 + .\left[\frac{(R_1+jL\omega)}{(R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2))}\right].v_2$$

إذن:

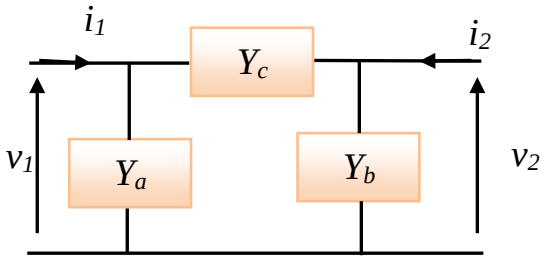
$$Y_{21} = \left[\frac{+jL\omega}{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}\right], Y_{22} = \left[\frac{R_1+jL\omega}{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}\right]$$

التطبيق العددي:

$$Y_{11} = \frac{2+j\omega}{2+3j\omega.}, Y_{12} = Y_{21} = \frac{j\omega}{2+3j\omega}, Y_{22} = \frac{1+j\omega}{2+3j\omega.}$$

2.3 الشبكات Π المكافئة لرباعي الأقطاب التقابلي

إذا وضعنا: $Y_c = -Y_{12} = -Y_{21}$, $Y_b = Y_{22} + Y_{12}$, $Y_a = Y_{11} + Y_{12}$ ، فإنّنا نحصل على رباعي أقطاب على شكل Π مكافئ لرباعي الأقطاب الأصلي، كما يلي:



الشكل -57-

المثال 4

لتكن شبكة التمرين السابق. نطلب إيجاد رباعي الأقطاب من شكل Π المكافئ له.

الحل

وجدنا أعلاه أنّ:

$$Y_{11} = \frac{R_2 + jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)}, Y_{12} = \frac{jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)}$$

$$Y_{21} = \left[\frac{+jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)}\right], Y_{22} = \left[\frac{R_1 + jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)}\right]$$

نطبق القوانين السابقة:

$$Y_a = Y_{11} + Y_{12} = \frac{R_2 + 2jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)} = \frac{2+2j\omega}{2+3j\omega.}$$

$$Y_b = Y_{22} + Y_{12} = \frac{R_1 + 2jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)} = \frac{1+2j\omega}{2+3j\omega.}$$

$$Y_c = -Y_{12} = -Y_{21} = \frac{-jL\omega}{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)} = \frac{-j\omega}{2+3j\omega.}$$

4. الوسائط الهجينة h (Paramètres hybrides)

أحيانا، نحتاج أن نكتب العلاقات بطريقة أخرى مثل v_1 و i_2 بدلالة v_2 و i_1 كما يلي:

أو بواسطة مصفوفة المقادير الهجينة: $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} v_1 = h_{11}.i_1 + h_{12}.v_2 \\ i_2 = h_{21}.i_1 + h_{22}.v_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

المقادير h_{22} ,h_{21} ,h_{12} ,h_{11} تسمى المقادير الهجينة لرباعي الأقطاب.

المثال 5

لتكن شبكة التمرين السابق.

المطلوب:

إيجاد الخصائص h له.

الحل

وجدنا أن:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega).i_1 + jL\omega.i_2 \ldots\ldots (1) \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2. + jL\omega).i_2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

ومن المعادلة الثّانية: $i_2 = -\frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}.i_1 + \frac{1}{R_2.+jL\omega}v_2$

نعوض في المعادلة الأولى: $v_1 = (R_1 + jL\omega).i_1 + jL\omega.\left(-\frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}.i_1 + \frac{1}{R_2.+jL\omega}v_2\right)$

أي: $v_1 = (R_1 + jL\omega).i_1 + \frac{L^2\omega^2}{R_2.+jL\omega}.i_1 + \frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}v_2$

أي: $v_1 = \left(\frac{(R_1+jL\omega).(R_2.+jL\omega)+L^2\omega^2}{R_2.+jL\omega}\right).i_1 + \frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}v_2$

أي: $v_1 = \left(\frac{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}{R_2.+jL\omega}\right).i_1 + \frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}v_2$

إذن:

$$\begin{cases} v_1 = \left(\frac{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)}{R_2.+jL\omega}\right).i_1 + \frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}v_2 \\ i_2 = -\frac{jL\omega}{R_2.+jL\omega}.i_1 + \frac{1}{R_2.+jL\omega}v_2 \end{cases}$$

ومنه:

$$h_{11} = \frac{R_1R_2 + jL\omega.(R_1+R_2)}{R_2 + jL\omega} = \frac{2 + 3j\omega.}{2 + j\omega} \qquad h_{12} = \frac{jL\omega}{R_2 + jL\omega} = \frac{j\omega}{2 + j\omega}$$

$$h_{21} = \frac{-jL\omega}{R_2 + jL\omega} = -\frac{-j\omega}{2 + j\omega} \qquad h_{22} = \frac{1}{R_2 + jL\omega} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

5. الوسائط الهجينة العكسية g (Paramètres hybrides inverses)

أحيانا، نحتاج أن نكتب العلاقات بطريقة معاكسة للفقرة السابقة v_2 و i_1 بدلالة v_1 و i_2 كما يلي:

أو بواسطة المصفوفات: $\begin{cases} i_1 = g_{11}.v_1 + g_{12}.i_2 \\ v_2 = g_{21}.v_1 + g_{22}.i_2 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

المقادير g_{22} ، g_{21} ، g_{12} ، g_{11} تسمى المقادير الهجينة المقلوبة لرباعي الأقطاب.

المثال 6 (بدون حل مقترح)

لتكن شبكة المثال السابق. نطلب إيجاد الخصائص g له.

6. مصفوفة الانتقال T(matrice de transfert)

أحيانا نحتاج أن نكتب i_1 و v_1 بدلالة i_2 و v_2 (لاحظ أنّه يمكن أيضا أن تكتب باستعمال الإشارة السالبة لـ i_2 والتي سببها أنّ في كل الأمثلة السابقة أخذنا التيّارين متعاكسين في الإتّجاه):

$$\begin{cases} v_1 = A.v_2 + B.i_2 \\ i_1 = C.v_2 + D.i_2 \end{cases}$$

أو بواسطة مصفوفة الانتقال: $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$

المثال 7

لتكن شبكة المثال السابق. نطلب إيجاد الخصائص t له.

الحل

وجدنا أن:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + jL\omega).i_1 + jL\omega.i_2 \ldots\ldots (1) \\ v_2 = jL\omega i_1 + (R_2. + jL\omega).i_2 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

ومن المعادلة الثّانية: $i_1 = \frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2.+jL\omega}{jL\omega} . i_2$

نعوض في المعادلة الأولى: $v_1 = (R_1 + jL\omega).\left(\frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2.+jL\omega}{jL\omega} . i_2\right) + jL\omega.i_2$

أي: $v_1 = (R_1 + jL\omega).\left(\frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2.+jL\omega}{jL\omega} . i_2\right) + jL\omega.i_2$

ومنه: $v_1 = \left(\frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega} v_2 - \frac{(R_1+jL\omega).(R_2.+jL\omega)}{jL\omega} . i_2\right) + jL\omega.i_2$

إذن: $v_1 = \frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega} v_2 - \left[\frac{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}{jL\omega}\right] . i_2$

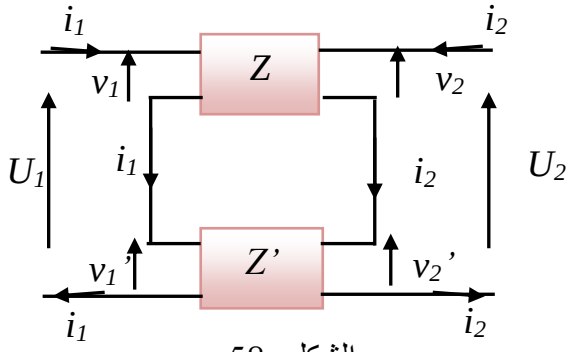
$$\begin{cases} v_1 = \frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega} v_2 - \left[\frac{R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)}{jL\omega}\right].i_2 \\ i_1 = \frac{1}{jL\omega} v_2 - \frac{R_2.+jL\omega}{jL\omega}.i_2 \end{cases}$$

وفي النهاية:

أي: $A = \frac{(R_1+jL\omega)}{jL\omega}$ $B = \frac{-[R_1R_2+jL\omega.(R_1+R_2)]}{jL\omega}$ $C = \frac{1}{jL\omega}$ $D = \frac{-[R_2+jL\omega]}{jL\omega}$

التطبيق العددي: $A = \frac{1+j\omega}{j\omega}$ $B = \frac{-(2+3j\omega)}{j\omega}$ $C = \frac{1}{j\omega}$ $D = \frac{-(2+j\omega)}{j\omega}$

7. تجميع رباعي الأقطاب على التسلسل



الشكل -58-

إذا جمعنا رباعيين للأقطاب على التسلسل كما هو مبيّن في الشكل (58) فإنّنا نحصل على رباعي أقطاب جديد، وبما أنّ $U_1 = v_1 + {v_1}'$ و $U_2 = v_2 + {v_2}'$ والتيّارات هي i_1 من جهة و i_2 من جهة أخرى

فمن الأفضل أن نستعمل الممانعات حيث لدينا: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

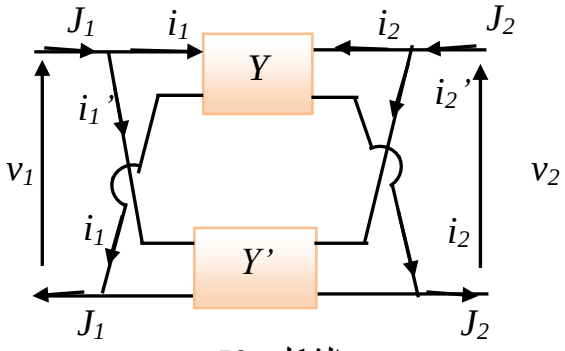
و أيضا $\begin{pmatrix} {v_1}' \\ {v_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {Z'}_{11} & {Z'}_{12} \\ {Z'}_{21} & {Z'}_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

ومن ذلك $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {v_1}' \\ {v_2}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}+{Z'}_{11} & Z_{12}+{Z'}_{12} \\ Z_{21}+{Z'}_{21} & Z_{22}+{Z'}_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

إذن مصفوفة الممانعات المكافئة هي مجموع مصفوفتي الممانعات لكلا الرباعيين.

8. تجميع رباعي الأقطاب على التفرع

إذا جمعنا رباعيين للأقطاب على التفرع كما هو مبيّن في الشكل –59- فإنّنا نحصل على رباعي أقطاب جديد



الشكل -59-

وبما أن $J_1 = i_1 + i_1'$ و $J_2 = i_2 + i_2'$ والجهود هي v_1 من جهة و v_2 من جهة أخرى فمن الأفضل أن نستعمل مصفوفة المسامحات حيث لدينا:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

و أيضا

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

ومن ذلك

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} + Y'_{11} & Y_{12} + Y'_{12} \\ Y_{21} + Y'_{21} & Y_{22} + Y'_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

إذن مصفوفة المسامحات المكافئة هي مجموع مصفوفتي المسامحات لكلا الرباعيين.

9. تجميع رباعي الأقطاب على الطابور (Chaîne)

إذا جمعنا رباعيين للأقطاب الواحد تلو الآخر (على التوالي و ليس على التسلسل) على شكل طابور (chaîne) كما هو مبيّن في الشكل -60- فإننا نحصل على رباعي أقطاب جديد.

وبما أن التيّارات والجهود تختلف من رباعي إلى رباعي فمن الأفضل أن نستعمل مصفوفة الأنّ تقال حيث لدينا :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

و أيضا

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

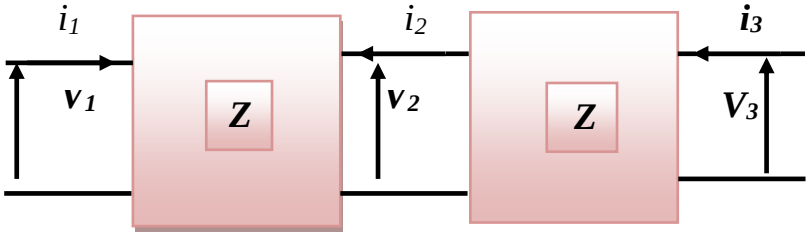
وبالتعديض:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$ أي

إذن معاملات الانتقال الجديدة المكافئة هي:

$$a = AA' + BC' \quad b = AB' + BD' \quad c = CA' + DC' \quad d = CB' + DD'$$



الشكل -60-

التمارين

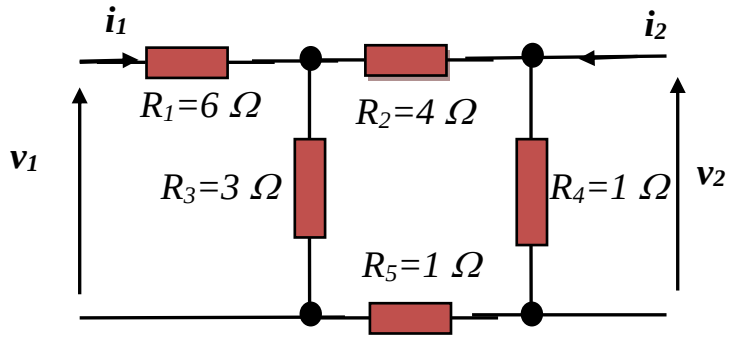
التمرين 1:

لتكن الشبكة المبيّنة في الشكل -61-.

1) أوجد وسائط الممانعات Z الخاصة به.

2) هل هو تقابلي ؟

3) أوجد رباعي الأقطاب على شكل T المكافئ له.



الشكل -61-

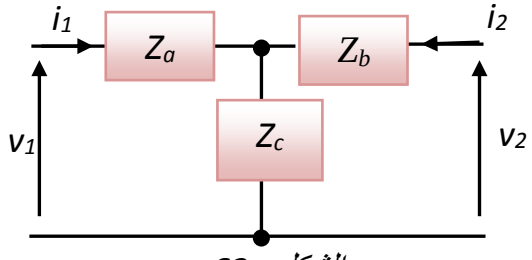
الحل المختصر

1) $\boldsymbol{Z_{11} = 8\ \ \Omega,\ \ Z_{12} = Z_{21} = 0,33\ \ \Omega, Z_{22} = 0,89\ \ \Omega}$

2) نعم، رباعي الأقطاب هذا تقابلي.

3) رباعي الأقطاب على شكل T المكافئ له:

$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 7{,}67\Omega\ \ ,\ \ Z_b = Z_{22} - Z_{21} = 0{,}56\Omega\ \ ,\ \ Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 0{,}33\Omega$

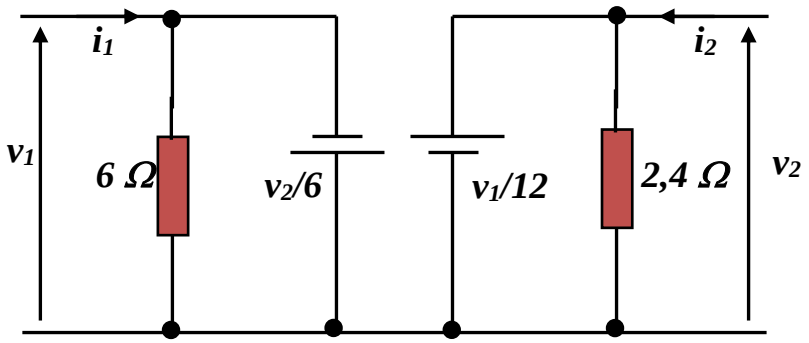


الشكل -62-

التمرين 2:

لتكن الشبكة المبيّنة في الشكل -63-

المطلوب: إيجاد وسائط المسامحات Y الخاصة به.



الشكل -63-

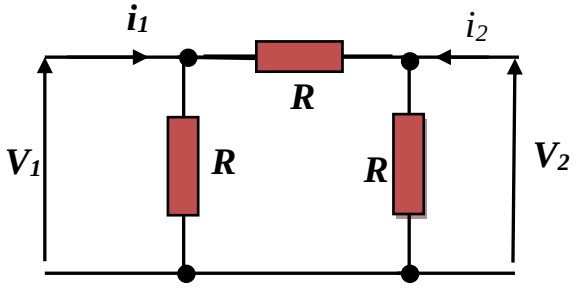
الحل المختصر

$$Y_{11} = 0{,}167\Omega, \quad Y_{12} = 0{,}167\Omega, \quad Y_{21} = 0{,}083 \quad \Omega, \quad Y_{22} = 0{,}417 \quad \Omega$$

التمرين 3:

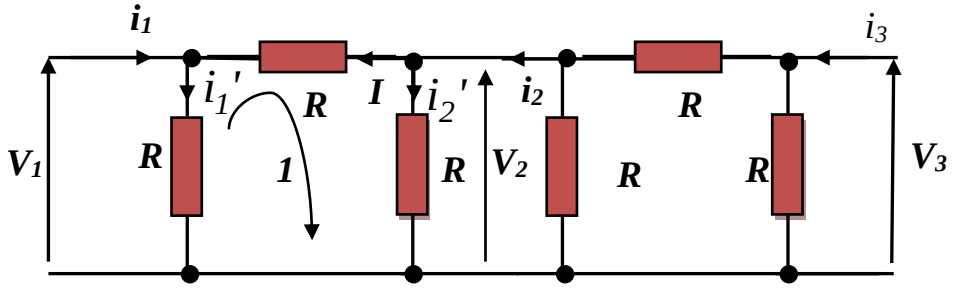
1. ليكن رباعي الأقطاب التالي ، أكتب v_2 و i_2 بدلالة v_1 و i_1 بواسطة المصفوفات على الشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$



الشكل -64-

2. ضع الأنّ الرباعيين السابقين على شكل طابور. باستعمال نتائج السؤال السابق، أوجد v_1 و i_1 بدلالة v_3 و i_3 .



الشكل -65-

الحل

1-لدينا: $\boldsymbol{v_1 = R.i_1'}$.....(1)

وحسب قانون كيرشوف للعروة (1): $\boldsymbol{R.i_1' + R.I - R.i_2' = 0}$.....(2)

- حسب قانون العقد (العقدة A): $\boldsymbol{i_1 = i_1' - I}$.....(3)

من (1) و (3) : $v_1 = R(i_1 + I)$

- حسب قانون العقد (العقدة B): $\boldsymbol{i_2' = i_2 - I}$ إذن $\boldsymbol{v_1 = R(i_2 - 2I)}$.....(4)

من (1): $i_1' = \frac{v_1}{R}$ وأيضا: $v_2 = R.i_2'$ أي $i_2' = \frac{v_2}{R}$

وبعد تعويض i_1' و i_2' بقيمتيهما في (2) : $\frac{v_1}{R} + I - \frac{v_2}{R} = 0 \Rightarrow I = \frac{v_2 - v_1}{R}$.....(4)

فنعوض (4) في (3) : $v_1 = R\left(i_2 - 2\frac{v_2 - v_1}{R}\right)$ أي $v_1 = Ri_2 - 2v_2 + 2v_1$

وأخيرا: $v_1 = 2v_2 - Ri_2$.....(5)

وحسب قانون العقد (العقدة A): $i_1 = i_1' - I$ أي

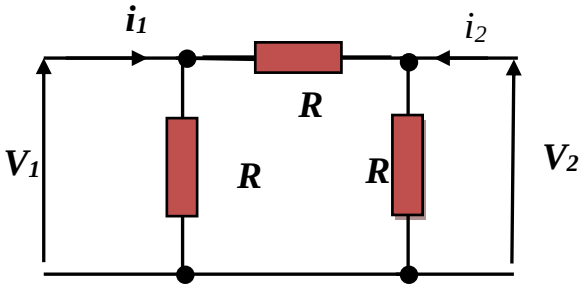
$$i_1 = \frac{v_1}{R} - \frac{v_2 - v_1}{R} = \frac{-v_2 + 2v_1}{R} \text{.....(6)}$$

وبعد تعويض (5) في (6): $i_1 = \frac{-v_2 + 2v_1}{R} = \frac{-v_2 + 2(2v_2 - Ri_2)}{R} = \frac{3}{R}.v_2 - 2i_2$.....(7)

وبفضل (5) و (7)، نحصل على:

أو بواسطة مصفوفة الأنّ تقال: $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{cases} v_1 = 2v_2 - Ri_2 \\ i_1 = \frac{3}{R}.v_2 - 2i_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} A = 2 & B = -R \\ C = \frac{3}{R} & D = -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$



الشكل -66-

لدينا: $\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A=2 & B=-R \\ C=\frac{3}{R} & D=-2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$

لدينا: $\begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'=2 & B'=-R \\ C'=\frac{3}{R} & D'=-2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$

نلاحظ هنا أننا استعملنا $(-i_2)$ لأنّ i_2 و i_3 لهما نفس الإتّجاه ويمكن تغيير إشارة i_2 بشرط تغيير إشارتي C' و D' كما يلي:

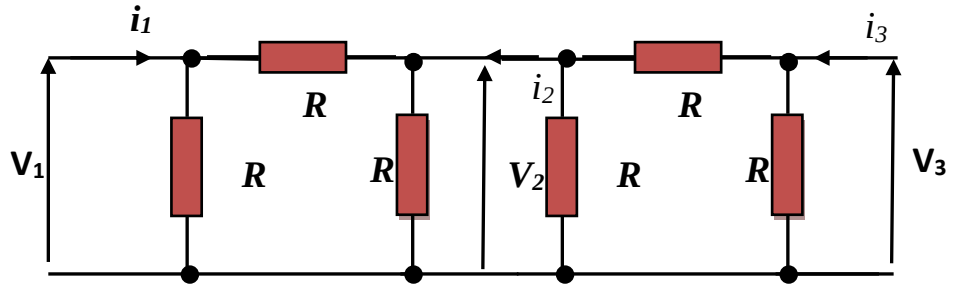
$$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A"=A'=2 & B"=B'=-R \\ C"=-C'=\frac{-3}{R} & D"=-D'=2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

وبالتعويض إذن:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A=2 & B=-R \\ C=\frac{3}{R} & D=-2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A"=A'=2 & B"=B'=-R \\ C"=-C'=\frac{-3}{R} & D"=-D'=2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -R \\ \frac{3}{R} & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -R \\ \frac{-3}{R} & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4R \\ \frac{12}{R} & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_3 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

أي :



الشكل-67-

الاستجابة الترددية والمرشحات

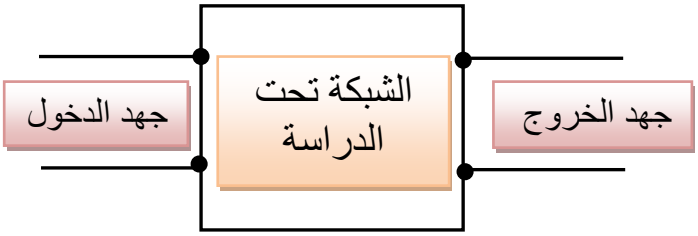
1. تمهيد

في هذا الفصل نحاول تحليل سلوك الدارات الكهربائية من حيث تردد الاشارة، حيث يتم تحليل الجهود والتيّارات عندما يكون التردد متغيرًا. إذا قمنا بتغيير تردد تشغيل دارة ما، فإن ممانعة المكثفة و الوشيعة

سوف يختلف أيضا، و من المهم فهم سلوك هذه العناصرعندما يختلف التردد. سيتبين أن اختيارًا دقيقًا لهذه المكونات يسمح بإنشاء دارات يُمكن بها حظر أو تمرير إشارات من ترددات معينة. يسمى هذا النوع من الدارات بالمرشحات.

في الواقع ، لا يسمح المرشح بالتخلص التام من بعض الترددات و بدلا من ذلك ، هناك اخماد لإشارات التردد غير المرغوب فيها.

في هذا الفصل ، نركز على تحليل الأنواع الأربعة من المرشحات الخاملة: المُرشحات المنخفضة (السفلى) ، المرشحات العالية ، المرشحات ذات الشريط الترددي و مرشحات القص الشريطي. بالاضافة الى استجابة هذه المرشحات وفقا للتردد حسب مخطط بود.



الشكل -68-

دراسة إجابة شبكة كهربائية (رباعي أقطاب) لإثارة متناوبة جيبية وذلك بالنسبة لتغيرات التردد.

في هذا النوع من الدارات تُعرف النسب: $\frac{v_s}{v_e}$ ، : $\frac{i_s}{i_e}$ و: $\frac{P_s}{P_e}$ بدالة التحويل لرباعي الأقطاب (Fonction de transfert)

1- دالة التحويل لرباعيات الأقطاب (Fonction de transfert) :

عموما، هناك اختلاف في الطور بين $\mathbf{v_e}$ و $\mathbf{v_s}$. لتكن V_s و V_e هي القيم المنتجة لكل من V_s* و V_e* ، إذن:

$$V_e^* = Vj\omega t\sqrt{2}_e^{\,j\omega t}{}_{e,max}$$

$$V_s^* = Vj.(\omega t + \phi)\sqrt{2}_s^{\,j.(\omega t+\phi)}{}_{s,max}$$

مع $j = \sqrt{-1}$

تُعرف دالة التحويل كما يلي: $H*(\omega)=\frac{V_s^*}{V_e^*}$

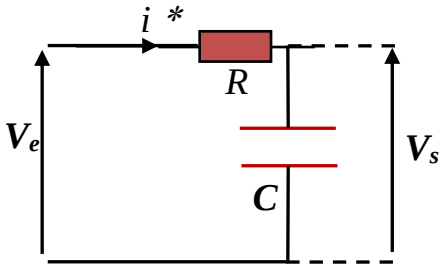
إذن $H*(\omega)=\frac{V_s}{V_e}.e^{j\phi}$

نُعرف التضخيم في الجهد على أنّه طويلة دالة التحويل: $G(\omega)=\|H*(\omega)\|=\frac{V_s}{V_e}$

وطور دالة التحويل هو عمدتها: φ

مثال1

دراسة رباعي الأقطاب RC.



الشكل -70-

لتكن $V_e^*=Vj\omega t\sqrt{2}_e{}^{j\omega t}{}_{e,max}$

للبحث عن V_s. نعتبر أنّ جهاز القياس له ممانعة لانهائية تمنعُ تسرُب التيّار إليه.

لدينا $V_e^*=\left(R-\frac{j}{C\omega}\right).i*$ و $V_s^*=\frac{-j}{C\omega}.i*$

دالة التحويل هي:

$$H*(\omega)=\frac{V_s^*}{V_e^*}=\frac{1}{1+jRC\omega}$$

RC له وحدة الزمن، ومقلوبه له وحدة التواتر ، لنضع $\omega_0=\frac{1}{RC}$

إذن:

$$H*(\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

نضع $x=\frac{\omega}{\omega_0}$ (بدون وحدة) ومنه: $H*(x)==\frac{1}{1+jx}$

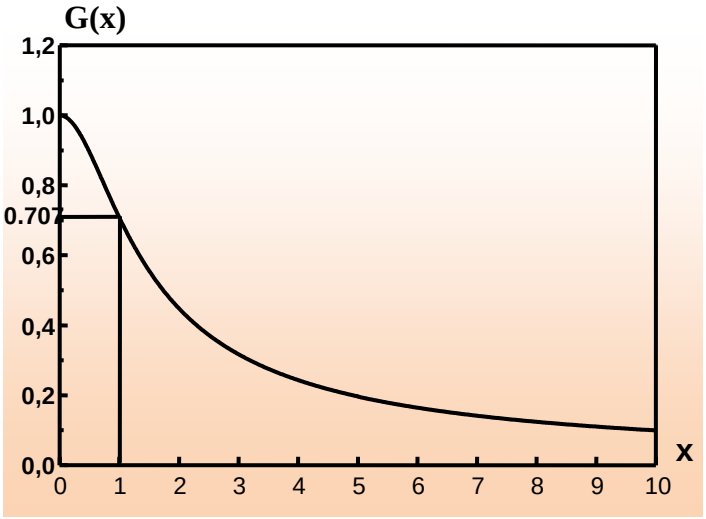
التضخيم في الجهد كما عرّفناه سابقا هو طويلة دالة التحويل:

$$G(x)=\|H*(x)\|=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

وطور دالة التحويل: هو عمدتها كما عرّفناه سابقا: $\phi(x)=arctg(x)$

1.2 دراسة التضخيم في الجهد:

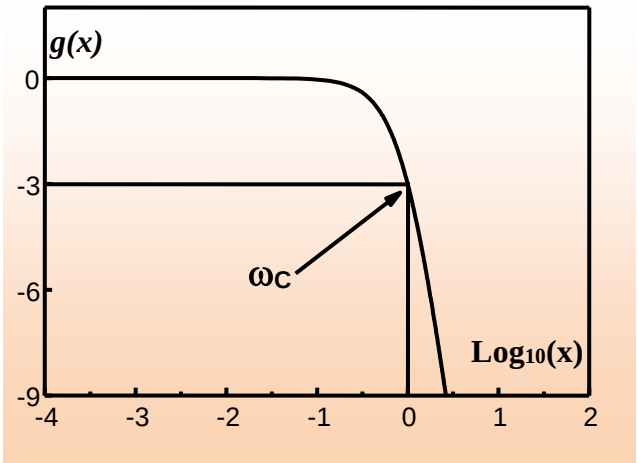
نلاحظ أنّ $G(x) < 1$ وأنّ عبارتها لا تتغير بالنسبة للرباعي RC، شرط أن نستعمل x.



الشكل -71-

2.2 القياس التجريبي للكسب في الجهد

الكسب في الجهد لرباعي الأقطاب يُقاس بالديسبال (décibel). فإذا كان $g(x)$ هو الكسب في الجهد بالديسبال، فالعلاقة بين $g(x)$ و $G(x)$ هي: $g(x) = 20\,log(x)\,[G(x)]$ حيث log يُرمز إلى اللوغاريتم العشري. ولأجل ذلك نستعمل فولت متر له سلم الديسبال.



الشكل -72-

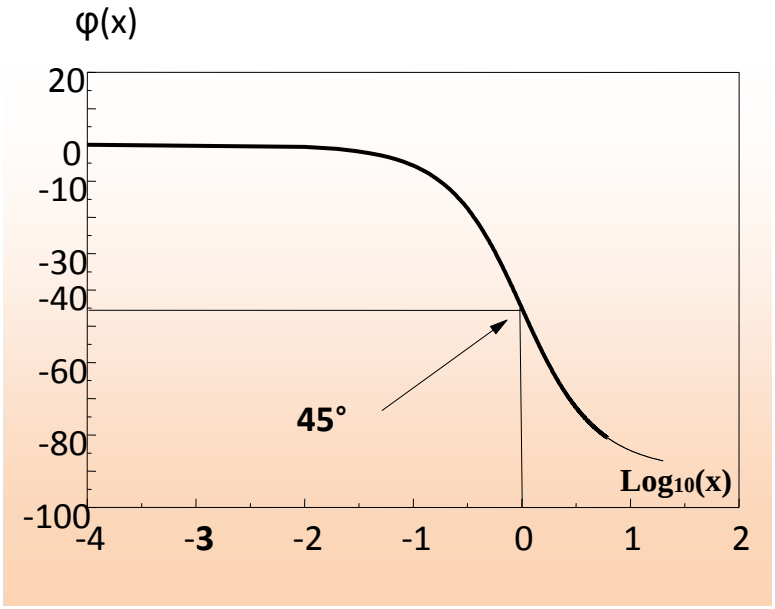
عند: $x = 1 (log_{10}(x) = 0)$ أي: $\omega = \omega_0$، $G = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ و $g = -3dB$ عندنا انخفاض الكسب بـ: 3dB.

من أجل: $x < 1$، $g > -3dB$. نعتبر أنّ رباعي الأقطاب هذا يعمل جيّدا من أجل $x\langle 1$ أي $\log(x) \langle 0$، $g\langle -3dB$ لأنّ الكسب يكون $G\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ أي $g\rangle -3dB$. بعبارة أخرى، نقول أنّ رباعي الأقطاب هذا لا يسمح بمرور الإشارات ذات التواترالأكبر من ω_c. رباعي الأقطاب هذا يستعمل كمرشح للاهتزازات الصغيرة (مرشح سفلي).

وقيمة التواتر الذي من أجله $g = -3dB$ يسمى تواتر القطع ω_c وقيمته $\omega_c = \omega_0$.

3.2 دراسة φ(x)

من أجل تواتر القطع ω_c يكون الطور هو $\phi(x) = \frac{\pi}{4}$ ، وأنّ $\phi(x)$ يتغير بسرعة قرب ω_c (الشكل -73-).



الشكل -73-

4.2 دراسة الجهد عند المقاومة الكهربائية R

لو أعدنا الحسابات السابقة مع وضع V_S عند R بدلا من C لوجدنا بعد وضع $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ و $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ فإنّ دالة التحويل: $G(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ وبهذا تُصبح دالة التحويل كبيرة من أجل القيم الكبيرة لـ: x.

لدينا كسب $g = -3dB$ من أجل $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$ عند $x = 1$ $(log(x) = 0)$. تواتر القطع هو إذن $\omega_c = \omega_0$.

في هذه الحالة، رباعي الأقطاب لا يسمح بمرور الإشارات ذات التواتر الصغير من ω_c. رباعي الأقطاب هذا يستعمل كمرشح للإهتزازات الكبيرة (مرشح علوي).

2- **مُرشح اهتزازات شريطي**

في حالة رباعي الأقطاب RLC على التسلسل حيث نضع V_S عند R، نحصل على مرشح يسمح بمرور الاهتزازات التي يكون تواتر ها محصورا بين قيمتين: $\omega_{01} < \omega < \omega_{02}$ نقول أنّ لدينا إذن شريط (حيّز) يعمل فيه المرشح فهو مرشح شريطي أي يتميز بحيّز تمرير. وفي هذه الحالة يُصبح لدينا تواترين للقطع هما: ω_{01}،ω_{02}

3- **بيان بود للمرشح**

- المرشح هو رباعي أقطاب يسمح بمرور مجموعة من الاهتزازات ذات تواتر مُعين، بتخفيض 3dB مانعا بقّية الاهتزازات الأخرى من المرور.

4- **أنواع المرشحات**

المرشحات السفلية (المنخفضة)، العلوية وشريطية.

بيان بود هو مجموعة المنحنين $g(\omega)$ و $\varphi(\omega)$ بحيث يُمثل $G(\omega)$ بسلم لوغارتمي- لوغارتمي وأمّا $\varphi(\omega)$ فيُمثل بسلم نصف لوغارتمي.

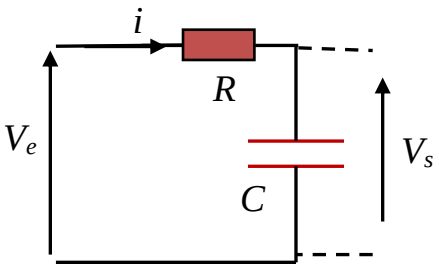
التمارين

التمرين الأوّل:

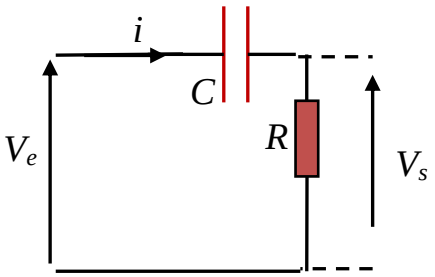
أدرس رباعي الأقطاب الشكل -74- (دراسة G(ω) و φ(ω) ونوعية المرشح).

التمرين الثّاني:

أدرس رباعي الأقطاب الشكل -75- (دراسة G(ω) و φ(ω) ونوعية المرشح).



الشكل -74-



الشكل -75-

الحل

لتكن $\boldsymbol{V_e^* = V_{e,\max}.e^{j\omega t} = \sqrt{2}.V_e.e^{j\omega t}}$

وللبحث عن V_s. نعتبر أنّ جهاز القياس له ممانعة لانّهائية تمنع تسرُب التيّار إليه.

$$V_e^* = \left(R - \frac{j}{C\omega}\right).i*$$

$$V_s^* = R.i*$$

دالة التحويل هي:

$$H*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{R-j\frac{1}{C\omega}} = \frac{1}{1-j\frac{1}{RC\omega}} = \frac{1}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

RC: له وحدة الزمن، ومقلوبه له وحدة التواتر ، لنضع $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

إذن: $H*(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0}-j}$

نضع $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (بدون وحدة) فمنه: $H*(\omega) = \frac{x}{x-j}$

طويلة دالة التحويل: $G(x) = \|H*(x)\| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

وطور دالة التحويل كما عرّفناه سابقا هو عمدتها، ونحصل عليه بسهولة إذا لاحظنا أن: $H*(\omega) =$

$\frac{x.(x+j)}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + j.\frac{x}{1+x^2}$ ومنه $\phi(x) = arctg\left(\frac{1}{x}\right)$

نلاحظ أنّ دالة التحويل أكبر من $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 < G(x)$ من أجل $x\langle 1$ إذن يعمل من أجل التواترات الصغيرة فهو مرشح تواترات سفلي.

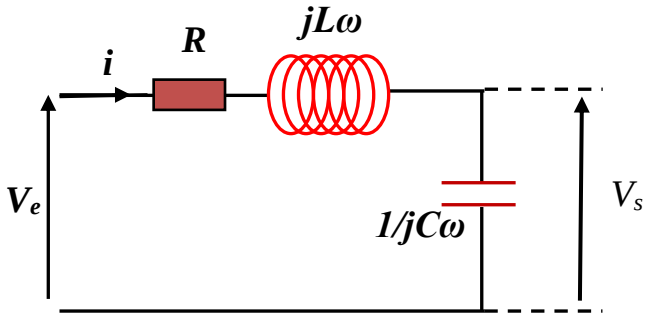
التمرين الثالث:

ليكن رباعي الأقطاب المُمثل في الشكل-76-.

1. أوجد دالة التحويل G(ω) بدلالة التواتر ω.
2. أوجد طور دالة التحويل بدلالة التواتر ω.

بعد وضع $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}$ و $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ،

3. أكتب كلا من دالة التحويل G(x) وطورها بدلالة x.
4. مثّل بيانيا G(x) من أجل Q=1 و من أجل Q=0,5 . ماذا تلاحظ ؟



الشكل -76-

الحل

باستعمال تمثيل الأعداد المركبة:

$$V_e^* = \left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right].i*$$

$$V_s^* = \frac{-j}{C\omega}.i*$$

دالة التحويل هي: $H*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{\frac{-j}{C\omega}}{\left[R+j.\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\right]} = \frac{-j}{[RC\omega+j.(LC\omega^2-1)]}$

نضرب البسط والمقام في j فنجد $H*(\omega) = \frac{1}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega}$

طويلة دالة التحويل (الكسب): $G(\omega) = \|H*(\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}}$

وطور دالة التحويل كما عرّفناه سابقا هو عمدتها، ويساوي عمدة البسط ناقص عمدة المقام. أمّا عمدة البسط فهي: $\phi_1 = Arg[1] = Arg[1+j.0] = Arctg\left(\frac{0}{1}\right) = 0$ ، أمّا عمدة المقام فهي:

$\phi_2 = Arg[(1 - LC\omega^2) + jRC\omega] = Arctg\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right)$ وطور دالة التحويل هي:

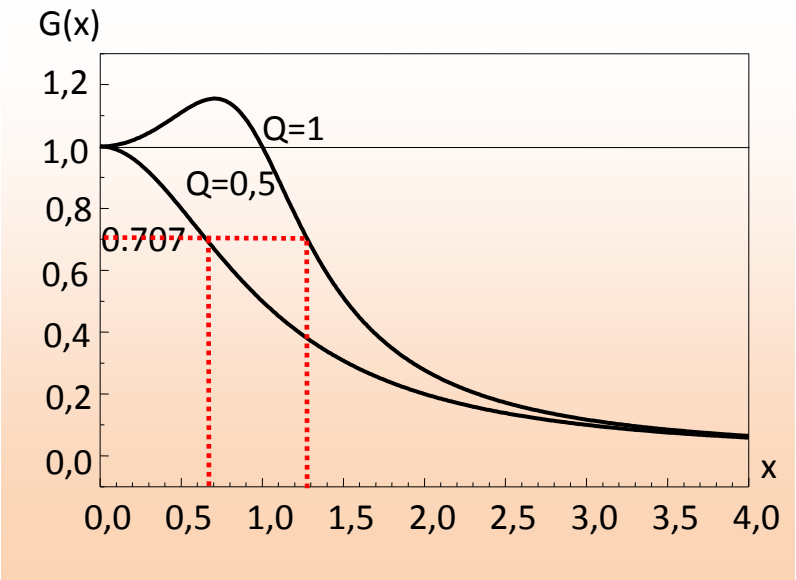
$$\phi(\omega) = \phi_1 - \phi_2 = -Arctg\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right)$$

نضع: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}$

يمكن أن نكتب دالة التحويل على الشكل التالي: $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}.\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$

لنضع $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (بدون وحدة)، فمنه: $G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

لنرسم منحنى دالة التحويل بدلالة x :



الشكل -77-

نلاحظ أنّه في حالة $Q=1$، تكون دالة التحويل تساوي 1 ثمّ تصبح أكبر من 1: لذلك نقول أنّ هناك فرط في الجهد عند قطبي المكثفة *Surtension aux Bornes de C* . بعد ذلك تصبح:< $G(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ وأخيرا تصبح: $G(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ وعندئذ نعتبر أنّ رباعي الأقطاب لا يُرشح التواترات العليا.

أمّا في حالة $Q=0,5$ ، فنلاحظ أنّ دالة التحويل يكون: $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$

$\sqrt{(200,00025).(0,00025)} = 0,2236 rad/s$ ثم تصبح $G(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ولذلك نعتبر أن رباعي الأقطاب لا يرّشح التواترات العليا بل هو مرشح التواترات السفلى.

المقدار Q يسمى معامل فرط الجهد.

التمرين الرابع

ليكن رباعي الأقطاب الممثل في الشكل-78-

1) أوجد عبارة دالة التحويل G(ω) بدلالة التواتر ω.

2) أوجد عبارة طور دالة التحويل بدلالة التواتر ω.

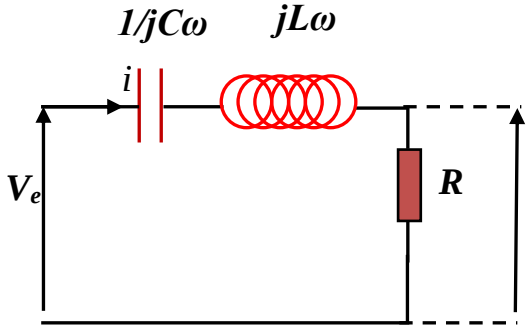
بعد وضع $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}$ و $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ، أكتب كلا من دالة التحويل G(x) وطورها بدلالة x.

3) من أجل أي قيمة لـ: x تكون G(x) أعظمية وما قيمتها عندئذ ؟

4) ابحث عن تواتر القطع

5) أرسم G(x) من أجل Q=1

6) بين أنّه مرشح شريطي ثم أحسب عرض الشريط.



الشكل -78-

الحل

1) باستعمال تمثيل الأعداد المركبة

$$V_e^* = \left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right].i*$$

$$V_s^* = R.i*$$

2) دالة التحويل هي:

$$H*(\omega) = \frac{V_s^*}{V_e^*} = \frac{R}{\left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]}$$

3) طويلة دالة التحويل:

$$G(\omega) = \|H*(\omega)\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

4) طور دالة التحويل كما عرّفناه سابقا هوعمدتها، ويساوي عمدة البسط ناقص عمدة المقام. أمّا عمدة البسط فهي: $\boldsymbol{\phi_1 = Arg[R] = Arg[R + j.0] = Arctg\left(\frac{0}{1}\right) = 0}$، أمّا عمدة المقام

فهي: $\boldsymbol{\phi_2 = Arg\left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] = Arctg\left(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}\right)}$ وطور دالة التحويل هي:

$$\boldsymbol{\phi(\omega) = \phi_1 - \phi_2 = -Arctg\left(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}\right)}$$

لنضع $\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$ و $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}$ و $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (بدون وحدة)،

فمنه : $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2.\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$

وأيضا $\phi(x) = \phi_1 - \phi_2 = -Arctg\left(Q.\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

5) نلاحظ مباشرة وبدون القيام بأيّ حساب أنّ G(x) يكون أعظمي من أجل: $x=1$ $(\boldsymbol{\omega = \omega_0})$

وعندئذ: $\boldsymbol{G(x)_{max}}$

6) يحدث تواتر القطع عندما يكون: $\boldsymbol{G(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ مع: $\boldsymbol{x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}}$، أي عندما: $= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+Q^2.\left(x_c-\frac{1}{x_c}\right)^2}}}$

$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

ومنه: $Q^2.\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q^2.\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[Q.\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) - 1\right] . \left[Q.\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) + 1\right] = 0$

أي: $\frac{(Qx_c{}^2 - x_c - Q).\ (Qx_c{}^2 + x_c - Q).}{x_c{}^2} = 0$

ويحدث هذا من أجل: $\begin{cases} Qx_c{}^2 - x_c - Q = 0 (1 \\ \text{أو} \\ Qx_c{}^2 + x_c - Q = 0 (2 \end{cases}$ وهما معادلتان من الدرجة الثّانية.

- المعادلة الأولى لها الحلاّن التاليان :
- $\boldsymbol{x_{1c} = \frac{1-\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}}$ وهو مرفوض لأنّه سالب و $\boldsymbol{x_{2c} = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}}$ وهومقبول لأنّه موجب .
- أمّا المعادلة الثّانية فلها الحلاّن التاليان: $\boldsymbol{x_{1c}{}' = \frac{-1-\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}}$ وهو مرفوض لأنّه سالب $\boldsymbol{x_{2c}{}'} = \frac{\mathbf{-1+\sqrt{1+4Q^2}}}{\mathbf{2Q}}$ و هومقبول لأنّه موجب .

ملاحظة:

$F(x)$تنعدم من أجل $x_{2c}{}'$ و x_{2c} والذين يسمحان بحساب تواتري القطع:

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 . \omega_2}$ ومنه: $\omega_{2c} = \omega_0 . x_{2c} = \omega_0 . \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} = \omega_0 . \frac{1+\sqrt{1+4\left(\frac{L\omega_0}{R}\right)^2}}{2\frac{L\omega_0}{R}}$

- التواتر الأوّل هو: $\boldsymbol{\omega_{2c} = \frac{R}{2L} . \left(1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{R} . \sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}\right) = \frac{R}{2L} . \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{R^2 C}}\right)}$

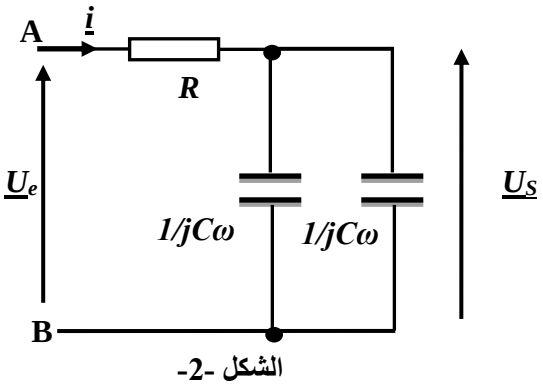
- التواتر الثّاني هو: $\boldsymbol{\omega_{2c}{}' = \omega_0 . x_{2c}{}' = \omega_0 . \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} = \omega_0 . \frac{-1+\sqrt{1+4\left(\frac{L\omega_0}{R}\right)^2}}{2\frac{L\omega_0}{R}}}$

إذن $\omega_{2c}{}' = \frac{R}{2L} . \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{R^2 C}}\right)$

وعُرض الشريط هو $\Delta\omega = \omega_{2c} - \omega_{2c}{}' = \frac{4R}{L}$ و يسمى الشريط المار(حيّز التمرير) (Bande Passante).

مسألة

ليكن المرشح الخامل الموّضّح في الشكل 2-:



الشكل -2-

1. **بيّن أن الممانعة المكافئة للمكثفين على التوازي تُكتب على الشكل:**

$$\underline{Zc} = \frac{1}{2jC\omega}$$

2. **أعط عبارة الممانعة المرئية بين A و B**
3. **أعط عبارة دالة التحويل:**

$\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}}$ كدالة لـ R و C و ω.

4. **أكتب عبارة دالة التحويل على الشكل:**

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{1}{1+j2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad avec\ \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

5. **احسب تردد القطع ω_C**
6. **ارسم دالة التحويل: $\left|\underline{G(j\omega)}\right| = f(\omega)$، واستنتج طبيعة المرشح.**

AN: R = 10KΩ ،C = 10µF

الحل

1. الممانعة المكافئة لمكثفتين على التفرعتُكتب على الشكل:

$$\underline{Zc} = \frac{\frac{1}{jC\omega}*\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}*\frac{1}{jC\omega}}{2*(\frac{1}{jC\omega})} = \frac{1}{2jC\omega}$$

2. عبارة ممانعة المكثفة A وB

$$\underline{Z_{AB}} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} = R + \frac{1}{2jC\omega}$$

3. عبارة دالة التحويل

4. $$\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_e}} = \frac{\frac{1}{2jC\omega}}{R+\frac{1}{2jC\omega}} = \frac{\frac{1}{2jC\omega}}{\frac{2jRC\omega+1}{2jC\omega}} = \frac{1}{1+2jRC\omega}$$

5. كتابة عبارة دالة التحويل على الشكل:

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{1}{1+2jRC\omega} = \frac{1}{1+j2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \; avec\; \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

6. حساب تواتر القطع ω_C، عند تواتر القطع لدينا:

$$|G(j\omega_C)| = \frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \; avec\; |G(j\omega)|_{max} = 1 \; quand(\omega = 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+4*\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \; d'ou: \sqrt{1+4*\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2},$$

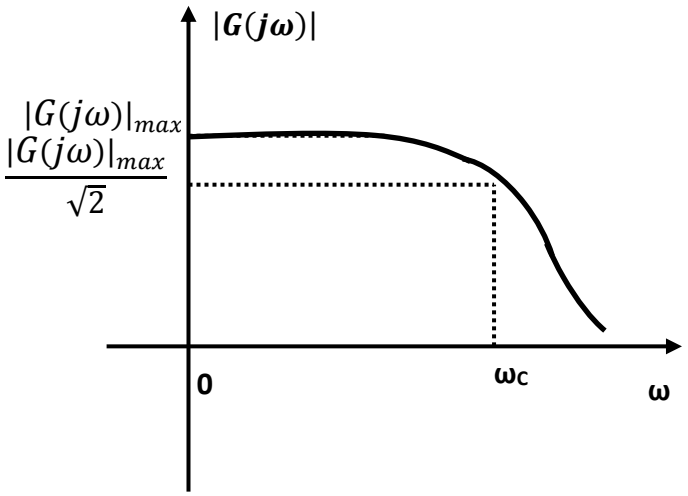
$$1+4*\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4*\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2 = 2-1 = 1 \Longrightarrow 2*\left(\frac{\omega_C}{\omega_0}\right) = 1 \Longrightarrow \omega_C = \frac{\omega_0}{2} = 5rd/s$$

7. منحنى دالة التحويل:

$$\left|\underline{G(j\omega)}\right| = f(\omega)$$

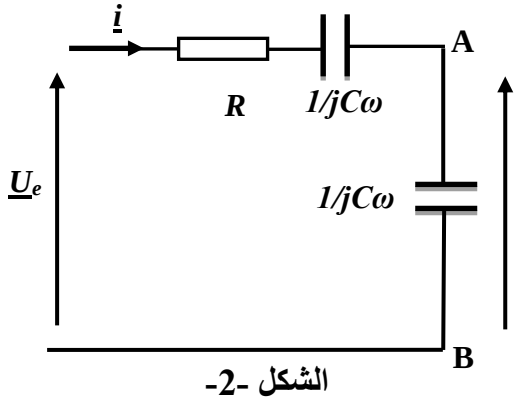
1. طبيعة المرشح

مُرشّح سفلي خامل



مسألة

ليكن المرشح الخامل الموّضّح في الشكل 2-:



الشكل -2-

1. أعط عبارة دالة التحويل: $\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$

كدالة لـ R و C و ω.

2. أكتب عبارة دالة التحويل على الشكل:

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{H_0}{1+jH_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \; avec\; \omega_0 = \frac{1}{RC} et\; H_0 = \frac{1}{2}$$

3. احسب تردد القطع ω_C

4. ارسم دالة التحويل: $\left|\underline{G(j\omega)}\right| = f(\omega)$، **واستنتج طبيعة المرشح.**

AN: R = 10KΩ ،C = 10µF

الحل

1. عبارة دالة التحويل: $\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$ بدلالة R, C وω

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}\underline{i}}{\left[\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) + \frac{1}{jC\omega}\right]\underline{i}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\left(R + \frac{2}{jC\omega}\right)}$$

2. كتابة عبارة دالة التحويل على الشكل

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\left(R + \frac{2}{jC\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{jC\omega R + 2}{jC\omega}} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{jRC\omega}{2}\right)} = \frac{H_0}{1 + jH_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$avec\ \omega_0 = \frac{1}{RC}\ et\ H_0 = \frac{1}{2}$$

2. حساب تواتر القطع ω_C

عند تواتر القطع لدينا:

$$|G(j\omega_C)| = \frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}\ avec\ |G(j\omega)|_{max} = H_0 quand(\omega = 0)$$

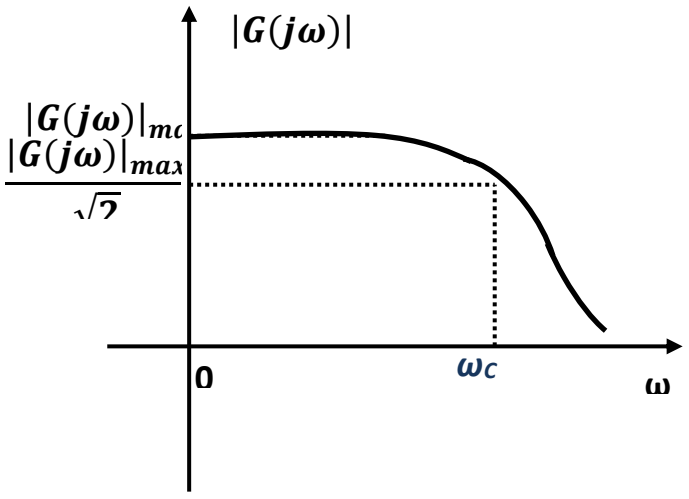
$$\frac{H_0}{\sqrt{1+\left(H_0\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}\ d'ou: \sqrt{1 + \left(H_0\frac{\omega_C}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\omega_C = \frac{\omega_0}{H_0} = 2\omega_0 = 20rd/s$$

3. منحنى دالة التحويل

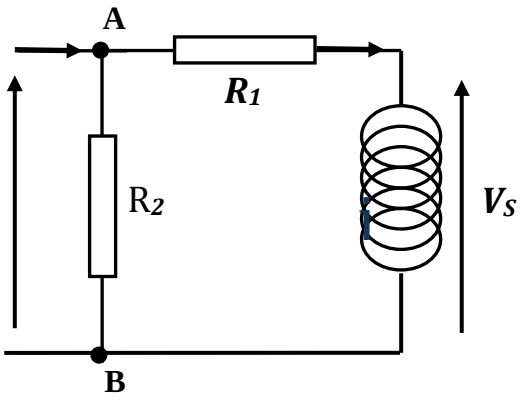
4. طبيعة المرشح

مرشح سفلي خامل



مسألة

ليكن المرشح الخامل الموّضّح في الشكل 2-:



5. **أعط عبارة دالة التحويل:** $\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$

بدلالة : R و L و ω.

6. **احسب تردد القطع** ω_C

7. **ارسم دالة التحويل:** $\left|\underline{G(j\omega)}\right| = f(\omega)$، **واستنتج طبيعة المرشح.**

A.N : R_1=R_2 820Ω, L= 2mH

الحل

1. عبارة دالة التحويل: $\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$ بدلالة **R, L** وω

$$\underline{G(j\omega)} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{(jL\omega)\underline{i_1}}{(R_1+jL\omega)\underline{i_1}} = \frac{(jL\omega)}{(R_1+jL\omega)} = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{jL\omega}+1\right)} = \frac{1}{\left(1-j\frac{R_1}{L\omega}\right)}$$

طويلة دالة التحويل : $$\underline{|G(j\omega)|} = \left|\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(-\frac{R_1}{L\omega}\right)^2\right)}}$$

3. حساب تواتر القطع ω_C

عند تواتر القطع لدينا:

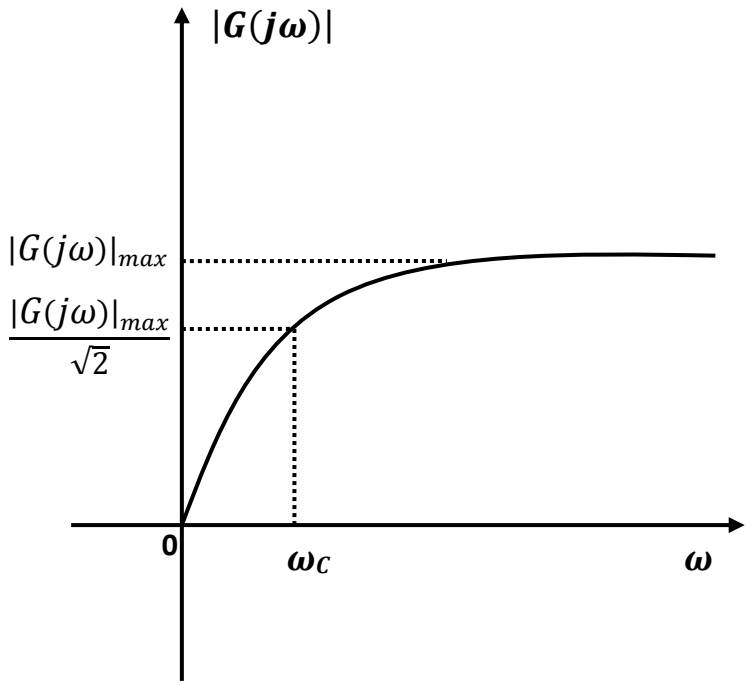
$$|G(j\omega_C)| = \frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} \; avec \; |G(j\omega)|_{max} = 1 \; quand(\omega \to \infty)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{R_1}{L\omega_C}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ حيث: } \left(1+\left(\frac{R_1}{L\omega_C}\right)^2 = \sqrt{2}, \omega_C = \frac{R_1}{L} = \frac{820}{2*10^{-3}} = 410*10^3 rd/s\right.$$

4. منحنى دالة التحويل

5. طبيعة المرشح

مرشح علوي خامل


$|G(j\omega)|$
$|G(j\omega)|_{max}$
$\frac{|G(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}$
0
ω_C
ω

الخاتمة

بعد هذا الجهد المتواضع أكون قد وصلت إلى نهاية الجزء الأوّل من كتاب الإلكترونيك الأساسية - 1- آملا أن أكون قد وُفقت في إختيار الموضوع و في تحليل محاوره (المصفوفات، الدارات الكهربائية ثنائية القطب، تحليل الدارات الكهربائية، النظام المتغيّر، التيّار المتناوب الجيبي، رباعيات الأقطاب و أخيرا المرشّحات) و لو بالإيجازالذي لا يُفقد للمضمون نكهته و لا بالإسهاب المُمّل و قد أكْثرت من الأمْثلة على حدّ قوْل القائل بالمثال يتّضح المقال و يكون الدارس(ة) لعلم الإلكترونيك قد نال إعجابه و إستفاد مما ورد فيه ، و أكون بذلك قد ساهمت بالعطاء ولو بالقليل من العلم والمعرفة في تسليط الضوء على بعض المفاهيم الأساسية في عالم الهندسة الكهربائية (الإلكترونيك) وأُشير هنا أنّي تعمّدْتُ إستعمال الألوان في رسم الدارات الكهربائية لشدّ إنتباه الطالب (ة) وإضفاء نوع من الجاذبية تُجاه الموضوع مع الإكثار من الأمثلة المحلولة و إضافة تمارين تطبيقية مع نهاية كل فصل لتترسّخ الفكرة ويتم إستيعابها بشكل واضح لالبس فيه و لا غبارعليه.

1. الكتاب: تحليل الشبكات ، مقدمة. (Analyse des circuits, Introduction)

للمؤلف: (Robert L. Boylestad)

للناشر: Editions du Renouveau Pédagogique inc (ERPI)

السنة: 1985.

الطبعة: الثانية.

2. الكتاب: الدقيق في الفيزياء، كهرباء 1. (Précis de physique, Electricité 1)

للمؤلفين: (J.L.Queyrel & J.Mesplède)

للناشر: Bréal

السنة: 1985.

3. الكتاب: Electronique des signaux analogiques

للمؤلف: (J.Auvray)

للناشر: Dunod Université

السنة: 1985.

الطبعة: الأولى.

4. الكتاب: Electronique Fondamentale

للمؤلف: (Stéphane Glavan)

للناشر: ديوان المطبوعات الجامعية (OPU)

5. الكتاب: Circuits Electriques (série Schaum)

للمؤلفين: (Mahmood Nahvi & Joseph A.Edminister)

للناشر: EdiScience

السنة: 2002.

الطبعة: الرابعة