الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة عمار ثليجي – الأغواط

كلية: العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير.

القسم: الجذع المشترك.

الميدان: العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير.

الشعبة: الجذع المشترك

التخصص: الجذع المشترك.

مطبوعة (دروس)

موجهة لطلبة: السنة الاولى . المستوي.ليسانس.

محاضرات رياضيات 01

من إعداد: عبد الحفيظي عيسى

الرتبة: أستاذ محاضر قسم أ ، جامعة الاغواط

الإيميل: a.abdelhafidi@lagh-univ.dz

السنة الجامعية: 2026/2025

باسم الله الرحمن الرحيم

فهرس
المحتويات

مقدمة

:

يُعد التحليل الرياضي من الركائز الأساسية التي يستند إليها الطالب في ميدان العلوم الاقتصادية والمالية، إذ يمثل أداة فكرية ومنهجية تساعد على فهم الظواهر الكمية وتحليل العلاقات الاقتصادية المعقدة. فبواسطة المفاهيم الرياضية، يمكن تمثيل السلوكيات الاقتصادية في صيغ دقيقة تسمح بالتنبؤ واتخاذ القرار على أسس علمية، وهو ما يجعل من دراسة هذا المقرر خطوة أولى نحو بناء قدرات تحليلية ومنطقية متينة لدى الطلبة.

يهدف الفصل الأول من هذه المطبوعة إلى التعرف على التحليل التوفيقي الذي يشكل مدخلًا أساسياً لفهم طرق العدّ والاحتمالات. إذ يتيح هذا المحور للطلبة تعلم كيفية حساب عدد الإمكانات أو الترتيبات الممكنة في الظواهر الاقتصادية التي تتضمن اختيارًا أو توزيعًا لموارد محدودة، وهو ما يمهد لفهم أعمق لمفاهيم الإحصاء ونظرية الاحتمالات في المراحل اللاحقة.

أما الفصلان الثاني والثالث فيتناولان المتتاليات العددية والدوال الأسية واللوغارتمية، وهما من المواضيع التي تُستخدم بكثرة في تحليل الظواهر الاقتصادية المتغيرة عبر الزمن، مثل النمو الاقتصادي، تطور الأسعار أو الفوائد، وتراكم رأس المال. حيث تسمح المتتاليات بدراسة سلوك الظواهر في الأجل الطويل، بينما تمكّن الدوال الأسية واللوغارتمية من تمثيل وتحليل النمو النسبي والعائد المركب بطريقة دقيقة ومبسطة.

ويتناول الفصلان الرابع والخامس المشتقات والدوال الأصلية وحساب التكاملات، واللذان يمثلان جوهر التحليل الرياضي التطبيقي في المجال الاقتصادي. فالمشتقة تُستخدم لتحليل التغيرات الحدّية ودراسة التوازن الاقتصادي والربحية القصوى، في حين يُعدّ التكامل أداة أساسية لحساب المجاميع والمساحات وتحديد القيم الإجمالية مثل الإيرادات الكلية وفائض المستهلك والمنتج. وبهذا، تُسهم هذه المطبوعة في تزويد الطالب بالأدوات الرياضية الضرورية لفهم وتحليل مختلف الظواهر الاقتصادية والمالية بعمق وموضوعية.

الفصل الأولى:

نظرية المجموعات

تمهيد :

تُعدّ نظرية المجموعات من الركائز الأساسية في الرياضيات الحديثة، إذ توفّر لغةً موحّدة تُستخدم في مختلف الفروع مثل الجبر والتحليل والهندسة. وقد ظهرت هذه النظرية بشكل منهجي في أواخر القرن التاسع عشر على يد عالم الرياضيات Georg Cantor، الذي سعى إلى فهم طبيعة اللانهاية وتصنيفها. تقوم نظرية المجموعات على مفهوم بسيط ظاهريًا، وهو "المجموعة"، أي تجمّع من العناصر المميّزة، لكنها سرعان ما تكشف عن عمق كبير عند دراسة خصائصها والعلاقات بينها.

تعتمد هذه النظرية على مفاهيم أساسية مثل الانتماء (∋)، والاحتواء (⊇)، والعمليات على المجموعات كالاتحاد والتقاطع والمتممة. ومن خلال هذه الأدوات، يمكن تمثيل وبناء معظم الكيانات الرياضية بطريقة دقيقة ومنظمة. كما تتيح نظرية المجموعات صياغة التعاريف والبراهين بأسلوب موحّد، مما يسهم في تقليل الغموض وتحقيق درجة عالية من الصرامة المنطقية، وهو ما جعلها أساسًا للمنطق الرياضي ونظرية البرهان.

علاوةً على ذلك، تلعب نظرية المجموعات دورًا محوريًا في فهم الهياكل الرياضية المعقّدة، كما تُستخدم في مجالات تطبيقية مثل علوم الحاسوب ونظرية الاحتمالات. فهي تمكّن من دراسة العلاقات، والدوال، والبُنى المختلفة بطريقة تجريدية تسهّل تحليلها وتعميمها. لذلك، لا تقتصر أهمية هذه النظرية على كونها فرعًا مستقلًا من الرياضيات، بل تمتد لتشكّل الإطار الذي تُبنى عليه معظم المفاهيم الرياضية الحديثة.

1. مفاهيم أساسية :

1.1 تعريف المجموعة

تُعرَّف نظرية المجموعات بأنها فرع من فروع الرياضيات يدرس المجموعات، وهي كيانات رياضية تُعرَّف على أنها تجمّعات محددة جيدًا من عناصر مميَّزة، بحيث يكون من الممكن تحديد ما إذا كان عنصرٌ معيّن ينتمي إلى مجموعة ما أم لا. وقد وُضعت الأسس الأولى لهذه النظرية بشكل منهجي على يد Georg Cantor، قبل أن تُطوَّر لاحقًا ضمن أطر بديهية دقيقة.

وفي الصياغة البديهية الحديثة، تُبنى نظرية المجموعات على نظام من المسلّمات (Axioms) التي تحدد كيفية تكوين المجموعات والتعامل معها، ومن أشهر هذه الأنظمة نظام Zermelo–Fraenkel set theory، والذي يُرمز له بـ (ZF)، وغالبًا ما يُضاف إليه مسلّمة الاختيار (AC) ليُعرف بالنظام (ZFC). في هذا الإطار، لا تُعرَّف "المجموعة" تعريفًا صريحًا، بل تُفهم من خلال خصائصها والعلاقات التي تحكمها كما تنص عليها هذه المسلّمات.

وبالتالي، فإن نظرية المجموعات تُعدّ إطارًا بديهيًا ومنطقيًا يُستخدم لتأسيس وبناء جميع الكيانات الرياضية تقريبًا، حيث يمكن تمثيل الأعداد، والدوال، والهياكل المختلفة على أنها مجموعات أو علاقات بين مجموعات، مما يجعلها اللغة الأساسية للرياضيات المعاصرة.

1.2 كتابة المجموعة :

يرمز للمجموعة بالأحرف الكبير A، B ..... بينما الاحرف الصغيرة هي رمز العناصر المكونة لهاته المجموعة . مثل : a، b، .....الخ. اين يجب كتابتها بين حاضنتين : { } : مثل مجموعة الاعداد الزوجية Aهي :

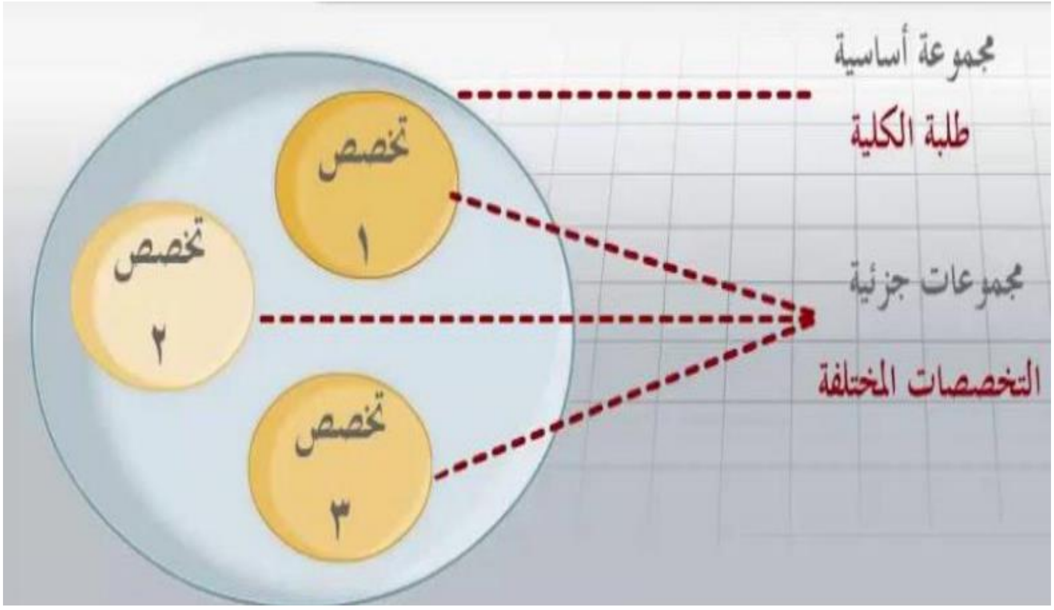
$$A = \{2 , 4, 6, , , , , \}$$

1.3 أنواع المجموعات :

تمثل المجموعات بعديد من الاشكال وهذا بغرض تصنيفها نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر ما يلي :

- **المجموعة الكلية** : هي المجموعة الرئيسية التي تحوي على جميع العناصر التي هي قيد الدراسة و يرمز لها عادة بالرمز: $\boldsymbol{U}$.
- **المجموعة الجزئية** : هي مجموعة مكونة من عناصر تكون ايضا جزء من المجموعة الكلية ، الذي يرمز لها ب A، B، .....الخ.

يمكن تمثيل المجموعة الكلية والمجموعة الجزئية بطلبة العلوم الاقتصادية التي تمثل المجموعة الكلية ، في حسن طلبة الشعب والتخصصات تمثل المجموعات الجزئية



- **المجموعات المتكافئة :** هي المجموعات التي يكون لديها نفس عدد العناصر مثل : عدد طلبة الاقتصاد 1000طالب وعدد طلبة التسيير 1000طالب ، اذا المجموعتين متكافئتين .
- **المجموعات الخالية :** هي المجموعات التي لا يكون لديها اي عنصر وبرمز لها ب Ø او {} : مثال شعبة الاقتصاد في كلية ما لا تحوي على تخصص ادارة الاعمال اذن نقول ان ادارة الاعمال عبار عن مجموعة خالية .
- **المجموعات المنتهية :** هي المجموعات التي تحوي على عدد محدود من العناصر مثل : عدد طلبة الاقتصاد 1000طالب اذا فهي مجموعة منتهية .
- **المجموعات غير المنتهية :** هي المجموعات التي تحوي على عدد غير محدود من العناصر مثل : مجموعة الاعداد الطبيعية .
- **متممة المجموعة :** هي العناصر الموجودة في المجموعة الكلية فقط وغير موجودة في المجموعة A(التي تعتبر مجموعة جزئية) ، ويرمز لها ب $\bar{A}$.

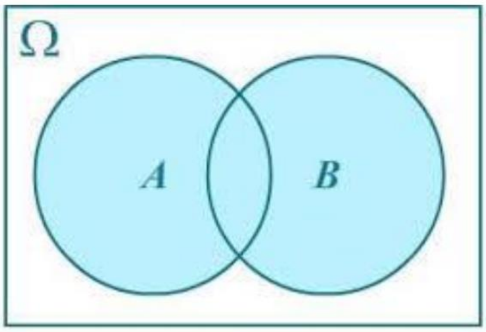
2. **العمليات على المجموعات**

2.1 الاتحاد :

اتحاد المجموعتين الجزئيتين A و B يعطينا مجموعة عناصرها هي كل العناصر التي تنتمي الى A و B.

اي : $A \cup B = \{x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$

والشكل التالي يوضح ذلك:



A U B

مثال 1–01:

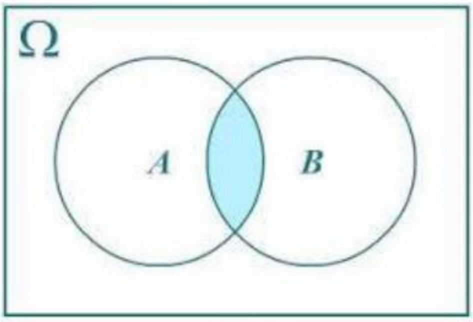
عناصر المجموعة A	عناصر المجموعة B	عناصر اتحاد المجموعتين $A \cup B$	الملاحظة
{1,2,3,4}	{3,4,7,8}	{1,2,3,4,7,8 }	دون تكرار العناصر المشتركة بين المجموعتين: 3,4
{5,7,9,10, 12}	{7,9,10}	{5,7,9,10,1 2}	دون تكرار العناصر المشتركة بين المجموعتين:7,9,10
{2,4,6}	{1,3,5}	{1,2,3,4,5,6 }	جميع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين

2.2 التقاطع:

تقاطع المجموعتين الجزئيتين A و B يعطينا مجموعة عناصرها هي العناصر المشتركة فقط من المجموعتين، اي العناصر التي تنتمي الى A و B معا ،

$$A\bigcap B=\{x\in A \quad \wedge \quad x\in B\}$$

والشكل التالي يوضح ذلك:



$A \cap B$

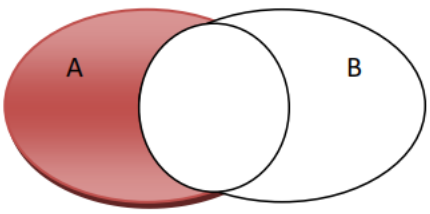
مثال 1–02:

عناصر المجموعة **A**	عناصر المجموعة **B**	عناصر اتحاد المجموعتين $A\bigcap B$	الملاحظة
$\{1,2,3,4\}$	$\{3,4,7,8\}$	$\{3,4\}$	هي العناصر المشتركة بين المجموعتين
$\{5,7,9,10,12\}$	$\{7,9,10\}$	$\{7,9,10\}$	تمثل عناصر المجموعة **B** لأنها محتواة في المجموعة **A**
$\{2,4,6\}$	$\{1,3,5\}$	ϕ	مجموعة خالية

2.3 <u>الفرق بين مجموعتين :</u>

لتكن لدينا المجموعتين الجزئيتين A و B ، اذا قمنا بطرح المجموعة B من المجموعة A اي A-B يعطينا مجموعة عناصرها هي العناصر الموجودة فقط في Aوغير موجودة في B

$$A/B=A-B=\{x: \quad x\in A \quad \wedge \quad x\notin B\}$$



$A-B$

ومن هنا نستنتج آن A-B لا يساوي B-A

مثل :

$$A = \{5;8;9\}$$
$$B = \{5;6;7\}$$
$$A - B = \{8;9\}$$
$$B - A = \{6;7\}$$
$$\Rightarrow A - B \neq B - A$$

2.4 الفرق التناظري

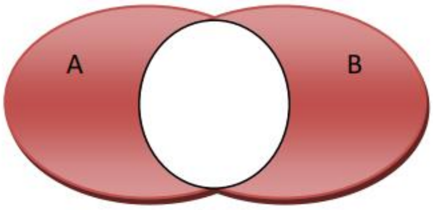
لتكن لدينا المجموعتين الجزئيتين A و B ، اذا قمنا بالفرق التناظر بين المجموعتين يعطينا مجموعة عناصرها هي العناصر الموجودة فقط في A وغير موجودة في B، بالإضافة الى العناصر الموجودة في B وغير موجودة في A ، اي جميع العناصر باستثناء العناصر المشتركة .

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A \Delta B = \{x: \ x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \notin (A \cap B)\}$$

أو:

$$A \Delta B = \{x: \ [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \cup [(x \notin A) \wedge (x \in B)]\}$$

والشكل التالي يوضح ما سبق:



$A \Delta B$

3 . الجداء الديكارتي

لتكن لدينا المجموعتين الجزئيتين A و B ، اذا قمنا بالجداء الديكارتي بين المجموعتين الذي يرمز له بالرمز AxB يعطينا كافة الازواج (a.b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ ، وتكتب العلاقة بالصيغة الجبرية التالية :

$$A \times B = \{(a,b); \ \ a \in A \ \ \wedge \ \ b \in B\}$$

حيث :

$$A\times B \neq B\times A \Leftrightarrow A\neq B$$
$$A\times B = B\times A \Leftrightarrow A = B$$
$$A\times \phi = \phi$$
$$A\times A = A^2$$
$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1\times A_2\times A_3\times \ldots \times A_n$$

وإذا كان عدد عناصر المجموعة A هو m وعدد عناصر المجموعة B هو n فإن عدد عناصر المجموعة $A\times B$ هو $m\times n$

مثال :

لتكن لدينا A و B مجموعتين جزئيتين من المجموعة الكلية U على النحو التالي:

$$\begin{cases} A=\{x,y,z\} \\ B=\{1,2,3\} \end{cases}$$

- أحسب $A\times B$.

- الحل:

نقوم بإيجاد: $A\times B$ على الشكل التالي:

$$A\times B=\{(x,1);(x,2);(x,3);(y,1);(y,2);(y,3);(z,1);(z,2);(z,3)\}$$

خلاصة الفصل :

في ختام هذا الفصل، يتّضح أنّ نظرية المجموعات تُشكّل الأساس الذي تقوم عليه الرياضيات الحديثة، حيث توفّر إطارًا مفاهيميًا موحّدًا يسمح بصياغة مختلف المفاهيم الرياضية بدقّة وصرامة. فمن خلال تعريف المجموعة ككيان يضم عناصر مميّزة، وإرساء العلاقات الأساسية مثل الانتماء والاحتواء، تمكّنا من بناء لغة رياضية واضحة تُستخدم في مختلف الفروع.

وعليه، فإن نظرية المجموعات لا تقتصر على كونها موضوعًا دراسيًا مستقلًا، بل تمثّل حجر الزاوية الذي ترتكز عليه مختلف البنى الرياضية، مما يجعل فهمها ضروريًا لكل دارس للرياضيات، سواء في الجانب النظري أو التطبيقي.

الفصل الثاني:

التحليل التوفيقي

تمهيد:

يُعَدّ التحليل التوفيقي أحد الفروع الأساسية في الرياضيات، ويُعنى بدراسة طرق العدّ وتحديد عدد الإمكانات الممكنة لترتيب أو اختيار عناصر من مجموعة معينة وفق شروط محددة. وتكمن أهميته في كونه يُمكّن الطالب من التعامل مع المشكلات التي تتضمن حالات متعددة أو احتمالات مختلفة، وهو بذلك يشكّل الأساس الذي تُبنى عليه مفاهيم الاحتمالات والإحصاء الرياضي.

في المجال الاقتصادي والمالي، يُعتبر التحليل التوفيقي أداة فعّالة لتحليل الظواهر التي تتطلب التنبؤ بعدد الترتيبات أو التوزيعات الممكنة للموارد أو البدائل. فعلى سبيل المثال، يمكن توظيف مبادئه في دراسة توزيع الاستثمارات على مجموعة من المشاريع، أو في تحليل السيناريوهات الممكنة لاتخاذ القرارات ضمن بيئات تتسم بعدم التأكد. ومن خلال هذا التحليل، يصبح الطالب قادرًا على التفكير بطريقة منهجية ومنظمة عند معالجة المسائل الكمية المعقدة.

يهدف هذا الفصل إلى تمكين الطالب من فهم الأسس الرياضية التي يقوم عليها العدّ المنظم، من خلال دراسة مفاهيم التباديل والتوافيق والمبادئ الأساسية للعدّ، مع توضيح تطبيقاتها العملية في مجالات الاقتصاد والمالية. وبذلك، يشكل هذا الفصل مدخلًا أساسيًا لبناء قاعدة معرفية متينة تُسهم في استيعاب مقررات لاحقة أكثر تعقيدًا مثل الاحتمالات والتحليل الإحصائي والنمذجة الاقتصادية.

1-مفهوم التحليل التوفيقي :

التحليل التوفيقي هو فرع من فروع الرياضيات يهتم بدراسة طرق الاختيار سواء بأخذ الترتيب بعين الاعتبار أم بدون ذلك. اي أنه مجموعة من تقنيات العد التي يمكن أن تكون مفيدة في حساب الاحتمالات عندما بكون من اللازم تحديد عدد النتائج الملائمة لحدث معين .

معنى آخر: هو العلم الذي يدرس كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع أو ترتيب أو اختيار العناصر، سواء كان ذلك مع التكرار أو بدونه، ومع مراعاة ما إذا كان الترتيب مهمًا أم لا.

للتحليل التوفيقي استخدامات عدة من بينها :

- **في الاحتمالات :**لحساب احتمالات الأحداث المركبة.
- **في علوم الحاسوب :**لتصميم الخوارزميات ، التشفير، الأمن السيبراني.
- **في الإحصاء :**عند أخذ العينات أو تنظيم البيانات.
- **في البحث العلمي والهندسة :**لتوزيع الموارد، الشبكات، ونظرية الرسوم البيانية.
- **في الادارة والاقتصاد :** التحليل التوفيقي له عدة تطبيقات منها :
- **اتخاذ القرارواختيار البدائل :** مثل شركة لديها 6 مشاريع وتريد اختيار 2 منها للاستثمار، هنا يساعد التحليل التوفيقي على تقييم كل الاحتمالات الممكنة بشكل منهجي .
- **جدولة الأعمال** في توزيع المهام أو المناوبات على الموظفين هناك عدد هائل من الترتيبات الممكنة. التحليل التوفيقي يساعد في: تقليل التعارضات. حساب عدد الجداول الممكنة. اختيار الجدول الأكثر كفاءة.
- **تحليل الأسواق والمنتجات :** عند تصميم منتجات جديدة أو حزم خدمات، الشركات تستخدم التوفيق لمعرفة عدد التركيبات الممكنة.
- **إدارة المخاطروالاحتمالات :** عند تحليل السيناريوهات الاقتصادية (مثل تغير أسعار البترول + أسعار الفائدة + الضرائب). كل حالة = "تركيبة" من الأحداث. التوفيق يساعد في حصر جميع السيناريوهات الممكنة وتقدير احتمالاتها

3- **<u>الترتيبات:</u>**

ويمكن تمييزها من العناصر التالية :

- فقط بعض عناصر n تستعمل في الترتيب (سحب جزء من الكل)

- ترتيب عناصرها مهم .
- تنقسم الترتيبات الى نوعين (بتكرار العناصر ، أو بدون تكرار العناصر).

1-3 الترتيبة مع التكرار

ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة (مع امكانية تكرار العناصر) هو قائمة من k من العناصر المختلفة او المتكررة ، مأخوذة من n عنصر ، اين يمكن لكل عنصر أن يتكرر حتى k مرة ، تحسب وفق القانون التالي : $A_n^k = n^k$.

مثال 01 : ما هو عدد الكلمات المكونة من حرفين الممكن تشكيلها من الاحرف التالية : a.b.c مع امكانية تكرار الاحرف ؟

الجواب : نلاحظ ان بعض عناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل) ، وان ترتيبها مهم ويسمح بتكرارها ، وكل ذلك يعني أننا بصدد **ترتيبة مع التكرار** .

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

مثال 2 : اتفق اساتذة الرياضيات والاحصاء والمحاسبة على منح الطالب المتفوق في كل مقياس جائزة تحفيزية ، مع العلم أن الفوج متكون من 10 طلبة ، بكم طريقة يمكن توزيع الهدايا ؟

الجواب : نلاحظ أننا من 10 طلاب سنختار 3 ، وأن الترتيب مهم ، وأنه يمكن لطالب واحد أن يكون هو الأول في كل المقاييس (ترتيبة مع امكانية التكرار)

$$A_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

2-3 الترتيبة بدون تكرار

ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة (مع عدم امكانية تكرار العناصر) هو قائمة من k من العناصر المختلفة ، مأخوذة من n عنصر ، حيث لا يمكن لأي عنصر أن يتكرر ، تحسب وفق القانون التالي : $\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$.

مثال 01 : : ما هو عدد الكلمات المكونة من حرفين الممكن تشكيلها من الاحرف التالية : a.b.c مع عدم تكرار الاحرف ؟

الجواب : نلاحظ ان بعض عناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل) ، وان ترتيبها مهم و لا يسمح بتكرارها ، وكل ذلك يعني أننا بصدد **ترتيبة مع عدم التكرار** .

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 * 2 * 1 = 6$$

مثال 02 : يتسابق 10 عدائين حيث الفائز الاول يتحصل على ميدالية ذهبية ، أما الفائز الثاني يتحصل على ميدالية فضية ، أما الفائز الثالث يتحصل على ميدالية برونزية ، فماهي عدد الحالات الممكنة ؟

الجواب : نلاحظ أنه من 10 عدائين سيفوز 3 فقط ، وأن الترتيب مهم ، وأنه لا يمكن لعداء واحد أن يفوز بجميع الميداليات (ترتيبة مع عدم امكانية التكرار) ومنه

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 * 9 * 8 = 720$$

4- التبديلات:

وفيها يتم اختيار الكل n من الكل n ، ويرمز لها بالرمز P_n^n، وتتمتع بالخصائص التالية :

- جميع العناصر n تستعمل في التبديل بينها .
- ترتيب عناصرها مهم
- لا يسمح بتكرار العناصر فيما بينها.

1-3 التبديلة الخطية :

هي عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لكن بقارق ان جميع العناصر n داخلة في الترتيب (الكل في الكل)

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n^n$$

مثال 01:

بكم طريقة يمكن لـ10 عدائين أن يصلو لخط النهاية ؟

الجواب : نلاحظ اننا سنرتب 10 عدائين دون تكرار ،

$$P_{10}^{10} = 10! = 3628300$$

2-3 التبديلة الخطية مع وجود المجموعات الجزئية:

هي عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لكن بقارق ان جميع العناصر n داخلة في الترتيب (الكل في الكل) بالاضافة الى وجود مجموعات جزئية ni مكونة من العناصر المتشابهة .

$$P_n^{n_1.n_2.n_3......n_k} = \frac{P_n^n}{P_{n_1}^{n_1} * P_{n_2}^{n_2} * P_{n_3}^{n_3} * .....* P_{n_k}^{n_k}} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3! * ....* n_k!}$$

مثال :

ماهو عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من كلمة mathematics

<u>**الجواب :**</u> العناصر الجزئية هي : $2\mathrm{m} \rightarrow n_1 . 2\mathrm{a} \rightarrow n_2 . 2\mathrm{t} \rightarrow n_3$

$$P_n^{n_1.n_2.n_3} = P_{11}^{2.2.2} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3!} = \frac{11!}{2! * 2! * 2!} = 151200$$

<u>**3-3 التبديلات الدائرية :**</u>

هي عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لكن بقارق ان جميع العناصر n داخلة في الترتيب (الكل في الكل) ويكون الترتيب على شكل دائري . $P_n^n = (n-1)!$

مثال 01:

بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 اشخاص حول طاولة مستديرة؟

$$P_6^6 = (6-1)! = 5! = 120$$

-5 <u>**التوفيقات**</u>

تتمتع التوفيقات بالخصائص التالية :

- فقط بعض العناصر n تستعمل في اختيار التوفيقة .
- ترتيب عناصرها غير مهم .
- منها ما يسمح فيه بتكرار العناصر ومنها ما لا يسمح فيه بتكرار العناصر.

<u>**1-4 التوفيقات بدون تكرار :**</u>

ويكتب وفق القانون التالي:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k^k}$$

مثال :

يتسابق 10 عدائين ، حيث يتأهل 3 الاوائل الى الاولمبياد ، ما هو عدد الحالات الممكنة للتأهل .

الجواب : بما ان الترتيب غير مهم ، ودون تكرار، اذن نحن امام توفيقة دون تكرار وبالتالي عدد الحالات الممكنة هو :

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10*9*8}{3*2*1} = 120$$

<u>2-4 التوفيقات مع تكرار:</u>

اذا كان التكرار مسموح في التوفيقات هنا نحن امام توفيقة بدون تكرار وقانونها كما يلي :

$$C_{n+(k-1)}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} =$$

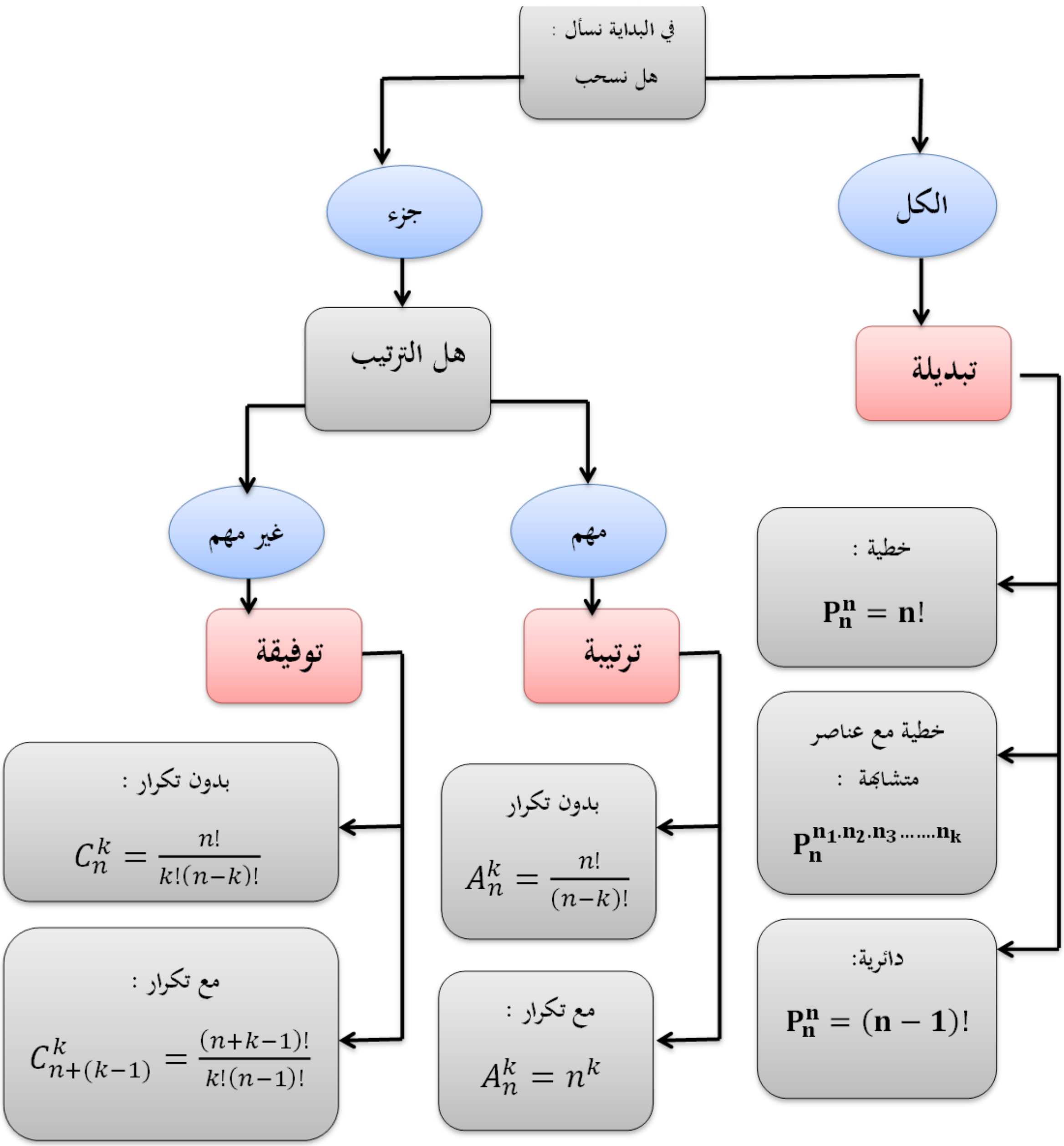
مثال :

صندوق به 3 كرات بها احرف (a وb و c) سحبنا كرتين متتاليتين مع الارجاع ، كم كلمة يمكن تكوينها دون الالتفات للترتيب (ab=ba) ؟

الحل : مادام التكرار مسموح والترتيب غير مهم نحن امام توفيقة مع التكرار ومنه :

$$C_{3+(2-1)}^{2} = C_{4}^{2} = \frac{(4)!}{2!\,(2)!} = \frac{4*3}{2} = 6$$

يمكن تلخيص التحليل التوفيقي ضمن المخطط التالي :



6- تطبيقات التحليل التوفيقي في الجانب الاقتصادي :

للتحليل التوفيقي عدة تطبيقات في المجال الاقتصادي من بينها :

1-5 توزيع الموارد على المشاريع

تواجه المؤسسات الاقتصادية أحيانًا مسألة اختيار عدد معيّن من المشاريع من بين مجموعة مشاريع مقترحة بسبب محدودية الميزانية.

مثال

إذا كان لدى مؤسسة مالية 10 مشاريع استثمارية، وتستطيع تمويل 3 منها فقط، فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه المشاريع يُحسب باستخدام التوافيق:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 * 9 * 8}{3 * 2 * 1} = 120$$

اي توجد 120 لاختيار المشاريع التي يمكن تمويلها .

2-5 اعداد خطط الإنتاج والتوزيع:

تستخدم الشركات التحليل التوفيقي لتحديد جميع الطرق الممكنة لتوزيع الإنتاج بين مصانع متعددة أو لتوزيع السلع على مناطق مختلفة.

مثال :

شركة صناعية تمتلك **3مصانع** A، B، C وتُنتج **4منتجات** مختلفةP1 ، P2، P3، P4.

يُطلب من الإدارة تحديد **أيّ مصنع سينتج أيّ منتج**، مع العلم أن كل مصنع لا يمكنه إنتاج أكثر من منتج واحد.

عدد الطرق الممكنة لتوزيع المنتجات على المصانع هو:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

اذن عدد الطرق الممكنة هي 24 طريقة .

خلاصة الفصل :

يُعدّ التحليل التوفيقي من الأسس الرياضية التي لا غنى عنها في دراسة الظواهر الاقتصادية والمالية ذات الطابع الكمي، إذ يُعنى بتحديد عدد الطرق الممكنة لتنظيم أو اختيار عناصر من مجموعة معينة وفق شروط محددة. ويُعتبر هذا الفرع من الرياضيات أداة مهمة تساعد على التفكير المنطقي والمنهجي في معالجة المشكلات الواقعية التي تتضمن احتمالات أو بدائل متعددة.

من خلال هذا الفصل، تعرّف الطالب على المبادئ الأساسية للعدّ المنظم مثل مبدأ الضرب ومبدأ الجمع، إضافة إلى مفهومي التباديل والتوافيق اللذين يُستخدمان لتحديد عدد الترتيبات أو الاختيارات الممكنة للعناصر. كما تم التطرق إلى كيفية توظيف هذه المفاهيم في مسائل عملية تمسّ الحياة الاقتصادية، مثل توزيع الموارد، واختيار المحافظ الاستثمارية، وتخطيط الإنتاج والتوزيع.

إن أهمية التحليل التوفيقي في المجال الاقتصادي تكمن في كونه يُمكّن الباحث أو متخذ القرار من تقدير عدد السيناريوهات الممكنة قبل اتخاذ أي قرار استراتيجي، مما يساهم في تقليل درجة عدم اليقين وتحسين عملية التخطيط. فهو يشكّل الأساس الرياضي الذي تُبنى عليه لاحقًا دراسات الاحتمالات والإحصاء ونماذج اتخاذ القرار في الاقتصاد الكمي.

وبذلك، يكون الطالب قد اكتسب من خلال هذا الفصل أدواتٍ رياضيةً دقيقة تساعده على تنظيم التفكير الكمي، وتمهّد له لفهم أعمق للفصول اللاحقة التي تتناول المتتاليات العددية، الدوال الأسية واللوغارتمية، المشتقات، والتكاملات، والتي تمثل استمرارًا طبيعيًا للتطور المنهجي في التحليل الرياضي الموجه لخدمة الاقتصاد والمالية.

الفصل الثاني:

التحليل التوفيقي

تمهيد :

يُعَدّ التحليل التوفيقي أحد الفروع الأساسية في الرياضيات، ويُعنى بدراسة طرق العدّ وتحديد عدد الإمكانات الممكنة لترتيب أو اختيار عناصر من مجموعة معينة وفق شروط محددة. وتكمن أهميته في كونه يُمكّن الطالب من التعامل مع المشكلات التي تتضمن حالات متعددة أو احتمالات مختلفة، وهو بذلك يشكّل الأساس الذي تُبنى عليه مفاهيم الاحتمالات والإحصاء الرياضي.

في المجال الاقتصادي والمالي، يُعتبر التحليل التوفيقي أداة فعّالة لتحليل الظواهر التي تتطلب التنبؤ بعدد الترتيبات أو التوزيعات الممكنة للموارد أو البدائل. فعلى سبيل المثال، يمكن توظيف مبادئه في دراسة توزيع الاستثمارات على مجموعة من المشاريع، أو في تحليل السيناريوهات الممكنة لاتخاذ القرارات ضمن بيئات تتسم بعدم التأكد. ومن خلال هذا التحليل، يصبح الطالب قادرًا على التفكير بطريقة منهجية ومنظمة عند معالجة المسائل الكمية المعقدة.

يهدف هذا الفصل إلى تمكين الطالب من فهم الأسس الرياضية التي يقوم عليها العدّ المنظم، من خلال دراسة مفاهيم التباديل والتوافيق والمبادئ الأساسية للعدّ، مع توضيح تطبيقاتها العملية في مجالات الاقتصاد والمالية. وبذلك، يشكل هذا الفصل مدخلًا أساسيًا لبناء قاعدة معرفية متينة تُسهم في استيعاب مقررات لاحقة أكثر تعقيدًا مثل الاحتمالات والتحليل الإحصائي والنمذجة الاقتصادية.

1-مفهوم التحليل التوفيقي :

التحليل التوفيقي هو فرع من فروع الرياضيات يهتم بدراسة طرق الاختيار سواء بأخذ الترتيب بعين الاعتبار أم بدون ذلك. اي أنه مجموعة من تقنيات العد التي يمكن أن تكون مفيدة في حساب الاحتمالات عندما بكون من اللازم تحديد عدد النتائج الملائمة لحدث معين .

معنى آخر: هو العلم الذي يدرس كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع أو ترتيب أو اختيار العناصر، سواء كان ذلك مع التكرار أو بدونه، ومع مراعاة ما إذا كان الترتيب مهمًا أم لا.

للتحليل التوفيقي استخدامات عدة من بينها :

- **في الاحتمالات :**لحساب احتمالات الأحداث المركبة.
- **في علوم الحاسوب :**لتصميم الخوارزميات ، التشفير، الأمن السيبراني.
- **في الإحصاء :**عند أخذ العينات أو تنظيم البيانات.
- **في البحث العلمي والهندسة :**لتوزيع الموارد، الشبكات، ونظرية الرسوم البيانية.
- **في الادارة والاقتصاد :** التحليل التوفيقي له عدة تطبيقات منها :
- **اتخاذ القرارواختيار البدائل :** مثل شركة لديها 6 مشاريع وتريد اختيار 2 منها للاستثمار، هنا يساعد التحليل التوفيقي على تقييم كل الاحتمالات الممكنة بشكل منهجي .
- **جدولة الأعمال** في توزيع المهام أو المناوبات على الموظفين هناك عدد هائل من الترتيبات الممكنة. التحليل التوفيقي يساعد في: تقليل التعارضات. حساب عدد الجداول الممكنة. اختيار الجدول الأكثر كفاءة.
- **تحليل الأسواق والمنتجات :** عند تصميم منتجات جديدة أو حزم خدمات، الشركات تستخدم التوفيق لمعرفة عدد التركيبات الممكنة.
- **إدارة المخاطروالاحتمالات :** عند تحليل السيناريوهات الاقتصادية (مثل تغير أسعار البترول + أسعار الفائدة + الضرائب). كل حالة = "تركيبة" من الأحداث. التوفيق يساعد في حصر جميع السيناريوهات الممكنة وتقدير احتمالاتها

7- **الترتيبات:**

ويمكن تمييزها من العناصر التالية :

- فقط بعض عناصر n تستعمل في الترتيب (سحب جزء من الكل)

- ترتيب عناصرها مهم .
- تنقسم الترتيبات الى نوعين (بتكرار العناصر ، أو بدون تكرار العناصر).

3-3 الترتيبة مع التكرار

ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة (مع امكانية تكرار العناصر) هو قائمة من k من العناصر المختلفة او المتكررة ، مأخوذة من n عنصر ، اين يمكن لكل عنصر أن يتكرر حتى k مرة ، تحسب وفق القانون التالي : $A_n^k = n^k$.

مثال 01 : ما هو عدد الكلمات المكونة من حرفين الممكن تشكيلها من الاحرف التالية : a.b.c مع امكانية تكرار الاحرف ؟

الجواب : نلاحظ ان بعض عناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل) ، وان ترتيبها مهم ويسمح بتكرارها ، وكل ذلك يعني أننا بصدد **ترتيبة مع التكرار** .

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

مثال 2 : اتفق اساتذة الرياضيات والاحصاء والمحاسبة على منح الطالب المتفوق في كل مقياس جائزة تحفيزية ، مع العلم أن الفوج متكون من 10 طلبة ، بكم طريقة يمكن توزيع الهدايا ؟

الجواب : نلاحظ أننا من 10 طلاب سنختار 3 ، وأن الترتيب مهم ، وأنه يمكن لطالب واحد أن يكون هو الأول في كل المقاييس (ترتيبة مع امكانية التكرار)

$$A_{10}^3 = 10^3 = 1000$$

4-3 الترتيبة بدون تكرار

ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة (مع عدم امكانية تكرار العناصر) هو قائمة من k من العناصر المختلفة ، مأخوذة من n عنصر ، حيث لا يمكن لأي عنصر أن يتكرر ، تحسب وفق القانون التالي : $\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$.

مثال 01 : : ما هو عدد الكلمات المكونة من حرفين الممكن تشكيلها من الاحرف التالية : a.b.c مع عدم تكرار الاحرف ؟

الجواب : نلاحظ ان بعض عناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل) ، وان ترتيبها مهم و لا يسمح بتكرارها ، وكل ذلك يعني أننا بصدد **ترتيبة مع عدم التكرار** .

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 * 2 * 1 = 6$$

مثال 02 : يتسابق 10 عدائين حيث الفائز الاول يتحصل على ميدالية ذهبية ، أما الفائز الثاني يتحصل على ميدالية فضية ، أما الفائز الثالث يتحصل على ميدالية برونزية ، فماهي عدد الحالات الممكنة ؟

الجواب : نلاحظ أنه من 10 عدائين سيفوز 3 فقط ، وأن الترتيب مهم ، وأنه لا يمكن لعداء واحد أن يفوز بجميع الميداليات (ترتيبة مع عدم امكانية التكرار) ومنه

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 * 9 * 8 = 720$$

8- <u>التبديلات:</u>

وفيها يتم اختيار الكل n من الكل n ، ويرمز لها بالرمز P_n^n، وتتمتع بالخصائص التالية :

- جميع العناصر n تستعمل في التبديل بينها .
- ترتيب عناصرها مهم
- لا يسمح بتكرار العناصر فيما بينها.

<u>1-3 التبديلة الخطية :</u>

هي عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لكن بقارق ان جميع العناصر n داخلة في الترتيب (الكل في الكل)

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n^n$$

مثال 01:

بكم طريقة يمكن ل10 عدائين أن يصلو لخط النهاية ؟

الجواب : نلاحظ اننا سنرتب 10 عدائين دون تكرار ،

$$P_{10}^{10} = 10! = 3628300$$

<u>2-3 التبديلة الخطية مع وجود المجموعات الجزئية:</u>

هي عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لكن بفارق ان جميع العناصر n داخلة في الترتيب (الكل في الكل) بالاضافة الى وجود مجموعات جزئية ni مكونة من العناصر المتشابهة .

$$P_n^{n_1.n_2.n_3 \ldots\ldots n_k} = \frac{P_n^n}{P_{n_1}^{n_1} * P_{n_2}^{n_2} * P_{n_3}^{n_3} * \ldots\ldots * P_{n_k}^{n_k}} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3! * \ldots\ldots * n_k!}$$

مثال :

ماهو عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من كلمة mathematics

<u>**الجواب :**</u> العناصر الجزئية هي : $2\text{m} \rightarrow n_1 \ . 2\text{a} \rightarrow n_2 . 2\text{t} \rightarrow n_3$

$$P_n^{n_1.n_2.n_3} = P_{11}^{2.2.2} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * n_3!} = \frac{11!}{2! * 2! * 2!} = 151200$$

<u>**3-3 التبديلات الدائرية :**</u>

هي عبارة عن ترتيبة بدون تكرار لكن بفارق ان جميع العناصر n داخلة في الترتيب (الكل في الكل) ويكون الترتيب على شكل دائري . $P_n^n = (n-1)!$

مثال 01:

بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 اشخاص حول طاولة مستديرة؟

$$P_6^6 = (6-1)! = 5! = 120$$

-9 <u>التوفيقات</u>

تتمتع التوفيقات بالخصائص التالية :

- فقط بعض العناصر n تستعمل في اختيار التوفيقة .
- ترتيب عناصرها غير مهم .
- منها ما يسمح فيه بتكرار العناصر ومنها ما لا يسمح فيه بتكرار العناصر.

<u>**1-4 التوفيقات بدون تكرار:**</u>

ويكتب وفق القانون التالي:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k^k}$$

مثال :

يتسابق 10 عدائين ، حيث يتأهل 3 الاوائل الى الاولمبياد ، ما هو عدد الحالات الممكنة للتأهل .

الجواب : بما ان الترتيب غير مهم ، ودون تكرار، اذن نحن امام توفيقة دون تكرار وبالتالي عدد الحالات الممكنة هو :

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10*9*8}{3*2*1} = 120$$

2-4 التوفيقات مع تكرار:

اذا كان التكرار مسموح في التوفيقات هنا نحن امام توفيقة بدون تكرار وقانونها كما يلي :

$$C_{n+(k-1)}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} =$$

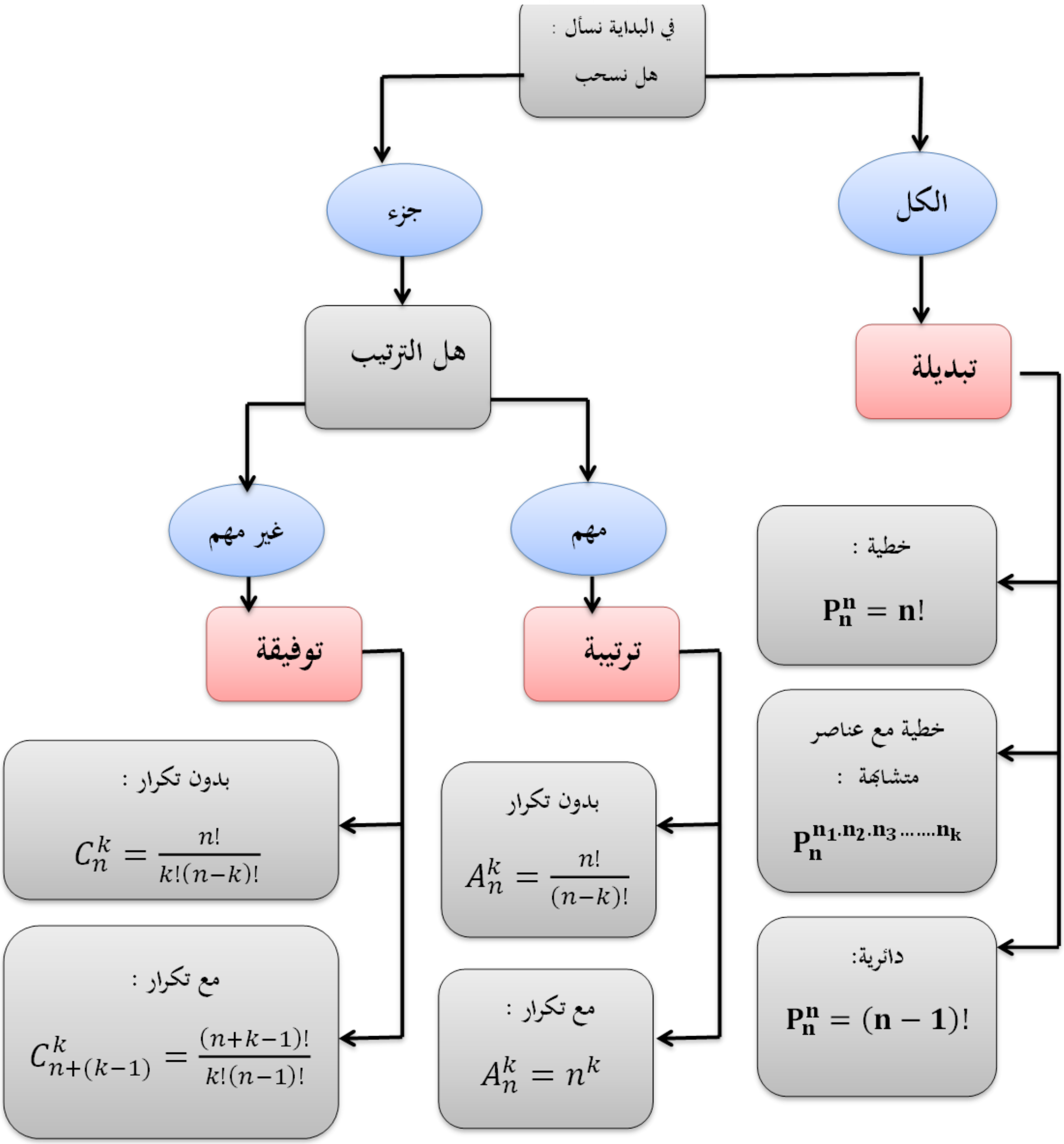
مثال :

صندوق به 3 كرات بها احرف (a و b و c) سحبنا كرتين متتاليتين مع الارجاع ، كم كلمة يمكن تكوينها دون الالتفات للترتيب (ab=ba) ؟

الحل : مادام التكرار مسموح والترتيب غير مهم نحن امام توفيقة مع التكرار ومنه :

$$C_{3+(2-1)}^{2} = C_{4}^{2} = \frac{(4)!}{2!\,(2)!} = \frac{4*3}{2} = 6$$

يمكن تلخيص التحليل التوفيقي ضمن المخطط التالي :



10-تطبيقات التحليل التوفيقي في الجانب الاقتصادي :

للتحليل التوفيقي عدة تطبيقات في المجال الاقتصادي من بينها :

1-5 توزيع الموارد على المشاريع

تواجه المؤسسات الاقتصادية أحيانًا مسألة اختيار عدد معيّن من المشاريع من بين مجموعة مشاريع مقترحة بسبب محدودية الميزانية.

مثال

إذا كان لدى مؤسسة مالية 10 مشاريع استثمارية، وتستطيع تمويل 3 منها فقط، فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه المشاريع يُحسب باستخدام التوافيق:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10 * 9 * 8}{3 * 2 * 1} = 120$$

اي توجد 120 لاختيار المشاريع التي يمكن تمويلها .

<u>2-5 اعداد خطط الإنتاج والتوزيع:</u>

تستخدم الشركات التحليل التوفيقي لتحديد جميع الطرق الممكنة لتوزيع الإنتاج بين مصانع متعددة أو لتوزيع السلع على مناطق مختلفة.

مثال :

شركة صناعية تمتلك **3مصانع** A، B، C وتُنتج **4منتجات** مختلفةP1 ، P2، P3، P4.

يُطلب من الإدارة تحديد **أيّ مصنع سينتج أيّ منتج**، مع العلم أن كل مصنع لا يمكنه إنتاج أكثر من منتج واحد.

عدد الطرق الممكنة لتوزيع المنتجات على المصانع هو:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

اذن عدد الطرق الممكنة هي 24 طريقة .

خلاصة الفصل :

يُعدّ التحليل التوفيقي من الأسس الرياضية التي لا غنى عنها في دراسة الظواهر الاقتصادية والمالية ذات الطابع الكمي، إذ يُعنى بتحديد عدد الطرق الممكنة لتنظيم أو اختيار عناصر من مجموعة معينة وفق شروط محددة. ويُعتبر هذا الفرع من الرياضيات أداة مهمة تساعد على التفكير المنطقي والمنهجي في معالجة المشكلات الواقعية التي تتضمن احتمالات أو بدائل متعددة.

من خلال هذا الفصل، تعرّف الطالب على المبادئ الأساسية للعدّ المنظم مثل مبدأ الضرب ومبدأ الجمع، إضافة إلى مفهومي التباديل والتوافيق اللذين يُستخدمان لتحديد عدد الترتيبات أو الاختيارات الممكنة للعناصر. كما تم التطرق إلى كيفية توظيف هذه المفاهيم في مسائل عملية تمسّ الحياة الاقتصادية، مثل توزيع الموارد، واختيار المحافظ الاستثمارية، وتخطيط الإنتاج والتوزيع.

إن أهمية التحليل التوفيقي في المجال الاقتصادي تكمن في كونه يُمكّن الباحث أو متخذ القرار من تقدير عدد السيناريوهات الممكنة قبل اتخاذ أي قرار استراتيجي، مما يساهم في تقليل درجة عدم اليقين وتحسين عملية التخطيط. فهو يشكّل الأساس الرياضي الذي تُبنى عليه لاحقًا دراسات الاحتمالات والإحصاء ونماذج اتخاذ القرار في الاقتصاد الكمي.

وبذلك، يكون الطالب قد اكتسب من خلال هذا الفصل أدواتٍ رياضيةً دقيقة تساعده على تنظيم التفكير الكمي، وتمهّد له لفهم أعمق للفصول اللاحقة التي تتناول المتتاليات العددية، الدوال الأسية واللوغارتمية، المشتقات، والتكاملات، والتي تمثل استمرارًا طبيعيًا للتطور المنهجي في التحليل الرياضي الموجه لخدمة الاقتصاد والمالية.

الفصل الثالث :

المتتاليات العددية

تمهيد:

تُعدّ المتتاليات العددية من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، إذ تمثل وسيلة منهجية لدراسة تطور القيم العددية وفق نظام محدد أو قاعدة معينة. وتُستخدم المتتاليات لوصف العديد من الظواهر التي تتغير بانتظام مع الزمن، فهي تمكّن من تتبع سلوك كمية ما — مثل الإنتاج، أو الأسعار، أو الدخل — عبر فترات زمنية متتالية، مما يجعلها أداة تحليلية ضرورية في العلوم الاقتصادية والمالية.

في المجال الاقتصادي، تُستخدم المتتاليات بكثرة لتمثيل النمو أو التراجع في المؤشرات الاقتصادية. فمتتالية الناتج المحلي الإجمالي عبر السنوات تعبّر عن تطور النشاط الاقتصادي، ومتتالية معدلات التضخم توضّح حركة الأسعار، كما أن المتتاليات الهندسية تمثل أساس حساب الفائدة المركبة وتراكم رأس المال في التحليل المالي. ومن خلال دراسة حدود المتتاليات، يمكن تحديد اتجاه الظواهر على المدى الطويل، وهل تتجه نحو الاستقرار أم نحو التغير المستمر.

يهدف هذا الفصل إلى تمكين الطالب من فهم أنواع المتتاليات (الحسابية والهندسية) وقواعدها الأساسية، وكيفية دراسة تقاربها أو تباعدها. كما يتعرّف الطالب على تطبيقاتها الاقتصادية والمالية من خلال أمثلة عددية توضح العلاقة بين المفهوم الرياضي والواقع العملي. وبهذا يشكّل هذا الفصل حلقة أساسية في الربط بين التحليل الرياضي المجرد والتحليل الاقتصادي التطبيقي.

2- مفهوم المتتالية العددية :

اذا كان لديك تسلسل الاعداد التالية : 2 4 6 8 ....الخ ، والمطلوب منك هو تخمين الارقام التي تلي الرقم 8 ، هنا ستجيب 10 12 14 ..الخ ، هنا تجد أنك بمجرد الملاحظة اكتشفت النمط التي تتوالى به هاته الارقام، وهو دائما اضافة العدد 2 ، في هاته الحالة انت امام متتالية عددية .حيث المتتالية العددية هي مجموعة من الاعداد المرتبة بنمط خطي وله معنى ، بحيث ظهور رقم بعد الآخر له دلالة ومعنى ويكون وفق دالة محددة ، بحيث يكون الترتيب الاعداد محددا ومميزا ، وهاته الاعداد تسمى بعناصر المتتالية العددية أو بحدود المتتالية العددية .

1-1 تعريف المتتالية العددية

يرمز للمتتالية العددية بالرمز U_n وهي كل تطبيق من مجموعة الاعداد الطبيعية IN الى مجموعة الاعداد الحقيقية IR ، وتكتب في الصورة التالية :

$$\begin{cases} f: IN \rightarrow IR \\ n \rightarrow f(n) = Un = U1, U2, U3, , , , Un \end{cases}$$

حيث :

Un : الحد العام للمتتالية وذلك لان حدود المتتالية تتوالى وفق نمط معين اين يمكن معرفة اي حد اذا عرفنا ترتيب الحد العام .

$U1, U2, U3, , , , Un$: تسمى بحدود المتتالية العددية .

n: يرمز الى رتبة الحد U (موقعه) في المتتالية العدد Un حيث $n \in IN$.لي

مثال 01 :

لتكن لديك المتتالية العددية التالية :

$$U_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \dots \dots$$

هنا نلاحظ ان هاته المتتالية العدد حدودها عبارة عن اعداد كسرية مقامها مكون من الاعداد الزوجية ، وبالتالي يمكن كتابة هاته المتتالية على شكل أحر أكثر تعبيرا ويدلنا عن الحد بمجرد ادخال موقعه ، وهاته الكتابة المعبرة تكون بالشكل التالي :

$$U_n = \frac{1}{2n} \quad ; n \in IN^*$$

فمثلا لو اردنا معرفة الحد الرابع من المتتالية العددية يكفي ان نعوض n بالعدد 4 في الكتابة السابقة فنجد : $U_4 = \frac{1}{2\times4} = \frac{1}{8}$ ، وبالفعل فعند الرجوع الى الكتابة الاصلية للمتتالية العددية وقمت بالنظر الى الحد الرابع منها ستجده $\frac{1}{8}$ ، وهكذا فانه يمكن معرفة اي حد من هاته المتتالية بمجرد التعويض ، وتسمى تلك العبارة بالحد العام للمتتالية العددية .

3- خصائص المتتالية العددية :

1-2 المتتالية العددية المحدودة

نقول أن المتتالية العددية n أنها :

- محدودة من الاعلى اذا وجد العدد الحقيقي $M \in IR$ ، بحيث : $\forall n \in IN \; ; \; U_n \leq M$.
- محدودة من الاسفل اذا وجد العدد الحقيقي $m \in IR$ ، بحيث : $\forall n \in IN \; ; \; U_n \geq m$.
- محدودة من الاعلى و الأسفل اذا تحقق : $\forall n \in IN \; ; \; m \leq U_n \leq M$.

مثال 01 :

$$U_n = \frac{1}{2n} \quad ; n \in IN^*$$

المتتالية العددية: هي متتالية محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ وذلك

لان حدود المتتالية هي : $\boldsymbol{U_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \dots \dots}$ ، حيث نلاحظ ان جميع الحدود التي تلي

الحد الأول هي اصغر من $\frac{1}{2}$ ،

مثال 02 :

المتتالية العددية: $U_n = 2n + 1 \quad ; n \in IN$ هي متتالية محدودة من الاسفل بالعد

1 وذلك لان حدود المتتالية هي : $U_n = 1.3 . 5 . 7 . 9 \dots \dots$

،حيث نلاحظ ان جميع الحدود التي تلي الحد الأول هي أكبر من العدد 1.

مثال 03 :

المتتالية العددية: $U_n = COS(n) \quad ; n \in IN$ هي متتالية محدودة من الاسفل بالعد -1

ومن الاعلى بالعدد 1 وذلك لان حدود المتتالية هي : $U_n = 1. -1 . 1 . -1. 1 \dots \dots$ ،

<u>2-2 رتابة المتتالية العددية :</u>

تهتم الرتابة بمعرفة اتجاه تغير المتتالية وهل هي متزايدة أو متناقصة أ ثابتة ، فمثلا لو كانت لديك حدود

المتتالية U_n التالية : $U_n = 2 , 4 , 6 , 8 ,,,,,,,,,$ سنجد انها متزايدة وكل حد هو أكبر من

سابقه حيث كلما نقوم بطرح اي حد من الحد الذي يليه سنجده موحب (الحد الثالث 6 – الحد الثاني 4

النتيجة هي عدد موجب 2) ومنه يمكن نستنتج قاعدة عامة وهي :

$\boldsymbol{\forall n \in IN \qquad U_{n+1} - U_{n+1} > 0} \rightarrow$ متتالية متزايدة

ونفس الشيء بالنسبة للحالات الاخرى ، وهي كالتالي :

$\boldsymbol{\forall n \in IN \qquad U_{n+1} - U_{n+1} < 0} \rightarrow$ متتالية متناقصة

$\boldsymbol{\forall n \in IN \qquad U_{n+1} - U_{n+1} = 0} \rightarrow$ متتالية ثابتة

مثال :

أدرس رتابة المتتاليات التالية :

$\forall n \in IN \quad U_n = 2n$

$\forall n \in IN \quad U_n = \dfrac{2}{n}$

$\forall n \in IN \quad U_{n+1} = \dfrac{3 + U_n}{2} \quad ; \quad U_n = 3$

الحل :

بالنسبة : $\forall n \in IN \quad U_n = 2n$

$\forall n \in IN \quad U_{n+1} = 2(n+1) = 2n + 2$

$U_{n+1} - U_n = 2n + 2 - 2n = 2 > 0 \rightarrow$ المتتالية متزايدة

بالنسبة : $\forall n \in IN \quad U_n = \frac{2}{n}$

$\forall n \in IN \quad U_{n+1} = \frac{2}{n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n} = \dfrac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} = \dfrac{-2}{n(n+1)} < 0 \rightarrow$ المتتالية متناقصة

دلك لان n دائما موجب لانه ينتمي الى الاعداد الطبيعية ومنه فان المقام موجب ومنه فان الكسر اشارته من اشارة البسط ، وبما ان البسط اقل من الصفر فان الكسر بدوره اقل من الصفر .

بالنسبة :

$\forall n \in IN \quad U_{n+1} = \dfrac{3 + U_n}{2} \quad ; \quad U_n = 3$

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{3 + U_n}{2} - U_n = \dfrac{3 + U_n - 2U_n}{2} = \dfrac{3 - U_n}{2} = \dfrac{3 - 3}{2} = 0 \rightarrow$ المتتالية ثابتة

3-2 خاصية التقارب :

نقول عن المتتالية U_n أنها متتالية متقاربة اذا كانت لديها نهاية منتهية ووحيدة ، بحيث أن :

$$Lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

حيث l : عدد حقيقي .

أي اذا وجد عدد حقيقي n يحقق العلاقة التالية :

$$\forall \varepsilon > 0 \,; \exists n_\varepsilon \in IN \,; \forall\, n > n_\varepsilon ; |U_n - l| < \varepsilon$$

بحيث أن l عدد منهي ووحيد و ε عدد حقيقي متناهي في الصغر .

واذا كانت المتتالية U_n ، غير متقاربة فهي متباعدة .

خواص :

- كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة .
- كل متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى او متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل هي متتالية متقاربة .

مثال :

أدرس نقارب المتتاليات التالية .

$$U_n = 2n + 5$$

$$U_n = \frac{2n + 5}{n}$$

$$U_n = \frac{(-3)^n}{3^n}$$

الحل :

$$Lim_{n\to+\infty}\, U_n = Lim_{n\to+\infty}(2n + 5) = +\infty \to \text{ليست متقاربة}$$

$$Lim_{n\to+\infty}\, U_n = Lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n + 5}{n}\right) = 2 \to \left(\text{عدد وحيد}\right)\text{متقاربة}$$

$$Lim_{n\to+\infty}\, U_n = Lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(-3)^n}{3^n}\right) = Lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(3^n)(-1)^n}{3^n}\right)$$

$$= Lim_{n\to+\infty}((-1)^n) \to \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \left(\text{عددين}\right)\text{ليست متقاربة}$$

ملاحظة :

نقول ان المتتالية ليست متقاربة (متباعدة) في الحالتين التاليتين :

$$Lim_{n\to+\infty} U_n = \pm l$$

$$Lim_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$$

<u>4-2 خاصية التجاور</u>

اذا كان لدينا متتاليتين عدديتين $((U_n, V_n))$ ، نقول أنهما تتمتعان بخاصية التجاور تحقق ما يلي :

- اذا كانت احداهما متزايدة والاخرى متناقصة .
- أن تكون متقاربتين نحو نفس العدد ، ام نهاية الفرق بينهما يكون معدوم لما تؤل n الى المالانهاية

<u>مثال</u>:

أدرس خاصية التجاور للمتتاليتين التاليتين :

$$U_n = \frac{3n}{n+1}$$

$$V_n = \frac{3}{n} + 3$$

الحل :

لدينا ما يلي :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+3}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} \rightarrow \text{متزايدة}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3}{n+1} + 3 - \frac{3}{n} - 3 = \frac{-3}{n(n+1)} \rightarrow \text{متناقصة}$$

ومنه الخاصية الاولى محققة ، ننتقل للتأكد من تحقق الخاصية الثانية :

$$Lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = Lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n}{n+1} - \left(\frac{3}{n} + 3\right)\right) = 0$$

ومنه الخاصية الثانية ايضا محققة ، وبالتالي المتتاليان تتمتعان بخاصية التجاور.

<u>3 - متتاليات خاصة :</u>

<u>1-3 المتتالية الحسابية:</u>

نقول ان المتتالية U_n أنها متتالية حسابية اذا حققت : $U_{n+1} - U_n = r$ بمعنى :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

ولدينا :

$$U_1 = U_0 + r$$
$$U_2 = U_0 + 2r$$
$$U_3 = U_0 + 3r$$

$$\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$$

وهو يعتبر الحد العام

بمكن كتابة عبارة الحد العام في حالة يختلف الحد الاول عن $\boldsymbol{U_0}$ كما يلي:

$$\mathrm{U_n = U_p + (n - p)r}$$

مجموع متتالية محاسبية هو :

$$S = \frac{n-p+1}{2}\left(U_p + U_n\right) \text{ او } S = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

<u>2-3 المتتالية الهندسية :</u>

نقول ان المتتالية U_n أنها متتالية هندسية اذا حققت : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ بمعنى $U_{n+1} = U_n * q$

ولدينا :

$$U_1 = U_0 * q$$
$$U_2 = U_0 * q^2$$
$$U_3 = U_0 * q^3$$

$$\mathbf{U_n = U_0 * q^n}$$

و هو يعتبر الحد العام

وبمكن كتابة عبارة الحد العام في حالة يختلف الحد الاول عن $\boldsymbol{U_0}$ كما يلي:

$$\mathbf{U_p} \text{ } \mathbf{U_n = U_p * } \boldsymbol{q^{(n-p)}}$$

مجموع متتالية هندسية هو : لدينا

$$S - qS = U_0 - U_{n+1}$$
$$(1-q)S = U_0(1-q^{n+1})$$
$$S = U_0\frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$$
$$S = U_p\frac{(1-q^{n-p+1})}{(1-q)}$$

3-3 المتتالية التراجعية

نقول عن متتالية عددية U_n أنها متتالية تراجعية اذا كانت مكتوبة على الشكل التالي :

$$U_0 = a$$
$$U_{n+1} = f(U_n)$$

حيث أن f تطبيق معرف من R نحو R.

مثال :

$$U_0 = 1$$
$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2}$$

1-3-3 رتابة المتتالية التراجعية

لتكن لدينا المتتالية التراجعية n فانه :

- اذا كانت الدالة f متزايدة تماما و $U_1 > U_0$ نقول أن U_n متتالية متزايدة تماما .
- اذا كانت الدالة f متزايدة تماما و $U_1 < U_0$ نقول أن U_n متتالية متناقصة تماما .
- اذا كانت الدالة f متناقصة تماما لا يمكن الجزم حول رتابة المتتالية U_n .

مثال:

أدرس رتابة المتتالية U_n التالية :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} \end{cases}$$

الحل :

إذا كان لدينا :

$$f(x)=\frac{x}{2};$$
$$x\in IR;$$
$$\Rightarrow \forall x\in IR; f'(x)=\frac{1}{2}\succ 0$$

ومنه فإن الدالة f. متزايدة تماما

ثم لدينا: $(U_1=\frac{1}{2})\prec(U_0=1)$

ومنه المتتالية متناقصة تماما .

2-3-3 تقارب متتالية تراجعية:

من أجل دراسة تقارب المتتالية التراجعية نستعين بالفرضية التالي :

اذا كانت المتتالية التراجعية متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى أو متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة .

3-3-3 نهاية المتتالية التراجعية :

اذا كانت لدينا متتالية التراجعية U_n متقاربة نحو العدد l فسيكون هذا العدد هو حل للمعادلة $f(l)=l$ ومنه فان نهاية المتتالية U_n سنكون l,

مثال :

أدرس تقارب ثم أوجد نهاية المتتالية السابقة :

$$\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{U_n}{2} \end{cases}$$

باعتبار أن المتتالية متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل ب العدد 0 اذا فهي متقاربة .

بما ان المتتالية متقاربة نحو العدد 0 فانه :

$$Lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

وبالتالي : $$f(l)=l$$

اي :

$$\frac{l}{2} = l$$

$$l = 2l$$

$$2l - l = 0$$

$$l = 0$$

ومنه :

$$Lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

<u>4 – تطبيقات المتتاليات العددية في المجال الاقتصادي</u>

للمتتاليات العددية تطبيقات عددية في مختلف المجالات من بينها المجال الاقتصادي ، ومن التطبيقات في المجال الاقتصادي ما يلي :

<u>1-4 الفوائد البسيطة (المتتالية الحسابية)</u>

من أهم تطبيقات المتتالية الحسابية في المجال الاقتصادي هو تطبيقات الفوائد البسيطة ، ولتتضح الصورة نأخذ الامثلة التالية:

مثال:

يقوم حساب استثمار بتقديم فائدة بسيطة قدرها 7% من المبلغ المستثمر لكل سنة المطلوب :

- كم سيكون المبلغ الاجمالي بعد 20 سنة عند استثمار مبلغ 30 مليون د ؟
- اذا كان المطلوب أن يكون المبلغ الاجمالي بعد 10 سنوات هو 170 مليون د ، فما هو المبلغ الواجب استثماره ؟

الحل :

بما أن الفائدة بسيطة فنحن أمام متتالية حسابية .

المبلغ الاجمالي بعد 20 سنة :

لدينا $U_0 = 30$ ، و الاساس $r = 30 \times 0.07 = 2.1$ ومنه المتتالية هي :

$$U_n = 30 + 2.1\, n$$

ومنه :

$$U_{20} = 30 + 2.1\ (20) = 30 + 42 = 72$$

أي المبلغ الاجمالي بعد 20 سنة هو 72 مليون د

بالنسبة للمبلغ الواجب استثماره أي ايجاد U_0 :

لدينا : U_0 و $U_{10} = 170$ و:

$$U_{10} = U_0 + (U_0 \times 0.07) \times 10$$

$$U_{10} = U_0 + U_0 \times 0.7 = 1.7\ U_0$$

ومنه : $U_0 = \frac{U_{10}}{1.7} = \frac{170}{1.7} = 100$

أي المبلغ الاجمالي الواجب استثماره هو 100 مليون د

2-4 الزيادات الثابتة (المتتالية الحسابية)

أيضا من تطبيقات المتتالية الحسابية في المجال الاقتصادي هي تقدير الزيادات بالمقادير او النسب الثابتة سواء بالنسبة للأجور او النمو او الديون .

مثال :

اذا كان الراتب في بداية السنة هو 20 الف دينار ، في حين أن الخبرة المهنية كل سنة تقدر ب2000 دينار ، فما هو قيمة الراتب بعد 20 سنة ؟

الحل : بما الراتب يزداد بقيمة ثابتة اذن هي متتالية حسابية حدها الاول $U_0 = 20000$ و الاساس $r = 2000$ ، ومنه : $U_n = 20000 + 2000\ n$

قيمة الراتب بعد 20 سنة : $U_{20} = 20000 + 2000\ (20) = 60000$

اي 60 الف دينار بعد احتساب 20 سنة خبرة مهنية .

3-4 الفائدة المركبة (المتتالية الهندسية)

تعتبر الفائدة المركبة الاكثر انتشارا حاليا وهي من تطبيقات المتتاليات الهندسية في الاقتصاد ونأخذ المثال التالي :

مثال :

أخد احمد قرض بنكي بقيمة 500 الف دينار بفائدة مركبة سنوية تقدر ب5 % ، ومدة الاستحقاق هي 7 سنوات ، حيث يتم دفع المبلغ بالإضافة الى الفوائد يوم الاستحقاق .

المطلوب : ما هو المبلغ الاجمالي الواجب دفعه يوم الاستحقاق ؟

الحل :

بما ان الفائدة مركبة فنحن امام متتالية هندسية حيث : $U_0 = 500000$ و $q = 1.05$

أي : $U_n = 500000 \times (1{,}05)^n$

ومنه : $U_7 = 500000 \times (1{,}05)^7 = 703550$

وبالتالي المبلغ الاجمالي الواجب دفعه للبنك هو 703550 دينار .

4-4 تقدير النمو (متتالية هندسية)

ايضا من اهم تطبيقات المتتالية الهندسية هي تقديرات النمو الاقتصادي او النمو السكاني وكمثال على ذلك :

مثال :

بلغ حجم الاقتصاد الصيني 6 ترليون دولار سنة 2010 وكان معدل النمو السنوي هو 9 % الى غاية 2024 .

المطلوب :

- ما هو حجم الاقتصاد سنة 2024 ؟
- كم سيكون سنة 2050 اذا كان معدل النمو المتوقع خلال الفترة 2024 – 2050 هو 4% ؟

الحل :

نحن أمام متتالية هندسية حيث : ترليون $U_{2010} = 6$ و الاساس : $q = 1{,}09$

اي : $U_n = U_P\ (q)^{n-P} = U_{2010}\ (1{,}09)^{n-2010} = 6\ (1{,}09)^{n-2010}$

ومنه حجم الاقتصاد سنة 2024 هو:

$U_{2024} = 6\ (1{,}09)^{2024-2010} = 6\ (1{,}09)^{14} = 20$ ترليون دولار

اما لحساب حجم الاقتصاد سنة 2050 نلاحظ هنا ان النمو تغير وبالتالية اساس المتتالية يتغير ويصبح q=1.04 بالإضافة الى ان الحد الاول ايضا يتغير ويصبح $U_P = U_{2024} = 20$ ومنه شكل المتتالية هو:

$$U_n = U_{2024}\ (1{,}04)^{n-2024} \rightarrow U_n = \ (1{,}04)^{n-2024}$$

ومنه حجم الاقتصاد الصيني المتوقع سنة 2050 هو :

$U_{2050} = 20\ (1{,}04)^{2050-2024} = 20\ (1{,}04)^{26} = 55{,}5$ ترليون دولار

خلاصة الفصل :

يُعدّ مفهوم المتتاليات العددية من الأدوات الأساسية في التحليل الرياضي التي تتيح دراسة تطور القيم والمتغيرات عبر الزمن بطريقة منظمة ودقيقة. ومن خلال هذا الفصل، اكتسب الطالب فهماً واضحاً لكيفية تكوين المتتالية انطلاقًا من قاعدة أو قانون محدد، مما يساعد على تمثيل الظواهر التي تتغير تدريجيًا مثل الإنتاج، الأسعار، الدخل، أو معدلات الفائدة.

تعرّف الطالب على أنواع المتتاليات، وأهمها **المتتالية الحسابية** التي تتميز بتغير ثابت بين حدودها المتتالية، و**المتتالية الهندسية** التي تتغير بنسبة ثابتة. كما تم التطرق إلى كيفية حساب الحد العام، والمجموع الجزئي، ودراسة **الحدود والنهايات** لمعرفة سلوك المتتاليات عند التقدم نحو اللانهاية، وهو ما يُعدّ خطوة أساسية لفهم مفاهيم الاستمرارية والدوال في الفصول اللاحقة.

من الناحية التطبيقية، أبرز هذا الفصل الدور الكبير للمتتاليات في **تحليل الظواهر الاقتصادية والمالية،** مثل حساب الفائدة البسيطة والمركبة، تقدير النمو الاقتصادي على مدى سنوات، وتحليل تطور الأسعار أو الأرباح في الأسواق. فهي تمكّن الاقتصادي من التنبؤ باتجاهات المستقبل انطلاقاً من البيانات التاريخية، وتوفر أداة رياضية دقيقة لاتخاذ قرارات عقلانية قائمة على التحليل الكمي.

وبهذا يكون الطالب قد كوّن أساسًا رياضيًا متينًا سيساعده على فهم مواضيع أكثر عمقًا في التحليل الرياضي، وعلى رأسها **الدوال الأسية واللوغارتمية** التي تشكّل الامتداد الطبيعي لدراسة المتتاليات عند الانتقال من التغير المتقطع إلى التغير المستمر.

الفصل الرابع :

الدوال الاسية و

اللوغارتمية.

تمهيد :

تُعدّ الدوال الأسية واللوغارتمية من أهم الدوال الرياضية التي تلعب دورًا أساسيًا في دراسة الظواهر المتغيرة باستمرار، خصوصًا تلك التي تنمو أو تتناقص بنسب مئوية ثابتة. وتتميز هذه الدوال بقدرتها على تمثيل العلاقات الكمية غير الخطية، مما يجعلها أداة فعّالة في تحليل الظواهر الاقتصادية والمالية التي تتسم بالتغير التدريجي والمتواصل مع الزمن.

في المجال الاقتصادي، تُستخدم الدوال الأسية لوصف ظواهر النمو الاقتصادي، والتطور السكاني، وتزايد رأس المال، وكذلك في دراسة الفائدة المركبة التي تنمو بوتيرة متسارعة. أما الدوال اللوغارتمية فتُعدّ الأداة العكسية للدوال الأسية، وتُستخدم لتحليل العلاقات التي تتسم بتراجع أو تباطؤ النمو، كما تسهّل تحويل العلاقات المضاعِفة إلى علاقات خطية، وهو ما يجعلها مفيدة جدًا في التحليل القياسي (Econometrics)ودراسة المرونات الاقتصادية.

يهدف هذا الفصل إلى تمكين الطالب من فهم خصائص الدوال الأسية واللوغارتمية، وتمثيلها البياني، والتعرف على أهم قواعدها الحسابية. كما سيتعلم كيفية توظيفها في حل المسائل الاقتصادية والمالية الواقعية، مثل حساب معدلات النمو والعائد النسبي، وتحليل الكلفة والعائد في الزمن، مما يمهّد له الطريق نحو دراسة أكثر عمقًا في الفصول اللاحقة المتعلقة بالمشتقات والتكاملات.

3- الدالة الاسية :

1-1 مفاهيم أساسية

تعرف الدالة الاسية ذات الاساس a اي التي هي من الشكل : a^x على أنها :

$$\begin{cases} f: IR \rightarrow IR \\ f(x) = a^x \end{cases}$$

وهي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على IR

مثال :

الدالة $f(x) = 2^x$ هي دالة اسية أساسها العدد 2 ، ومنه :

$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(10) = 2^{10} = 1024$$

$$f(-10) = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = 0{,}00097$$

ومنه نلاحظ ما يلي :

- اذا كانت قيمة الاساس هي 1 (اي الدالة الاسية تكون من الشكل : $f(x) = 1^x$) فان هاته الدالة تكون ثابتة اي منحناها البياني هو عبارة عن خط مستقيم عند القيمة 1 موازي لمحور الفواصل وذلك لان أي العدد 1 مرفوع بقوة أي عدد فان النتيجة دائما هي العدد 1 .
- اذا كانت قيمة الاساس أكبر من 1 (اي الدالة الاسية تكون من الشكل : $f(x) = a^x$ حيث $a > 1$) فان هاته الدالة تكون متزايدة عند قيم x الموجبة وتكون متناقصة عند قيم x السالبة
- اذا كانت قيمة الاساس محصورة بين 0 و 1 (اي الدالة الاسية تكون من الشكل : $f(x) = a^x$ حيث $0 < a < 1$) فان هاته الدالة تكون متناقصة عند قيم x الموجبة وتكون متزايدة عند قيم x السالبة
- اذا كانت قيمة الاساس أصغر من 0 (اي الدالة الاسية تكون من الشكل : $f(x) = a^x$ حيث $a > 1$ مثل $f(x) = (-2)^x$) فان هاته الدالة تكون معرفة فقط على قيم x الصحيحة ولن تكون معرفة على قيم الاس المحصورة بين 0 و 1 (مثل : $f(x) = (-2)^{0,5}$) وتكون الدالة

الاسية متناوبة في الاشارة حسب حالة العدد الصحيح للاس ، حيث تكون الدالة موجبة في حالة الاس الصحيح الزوجي وتكون سالبة في حالة الاس الصحيح الفردي .

2-1 خصائص الدوال الأسية :

من بين الخصائص التي تتمتع بها الدوال الأسية $f(x) = a^x$ ما يلي :

- $f(0) = a^0 = 1$. مثل : $3^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$ مثل : . $2^5 = 2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$
- $a^{x.y} = (a^x)^y = (a^y)^x$ مثل : $2^6 = (2^2)^3 = (2^3)^2 = 64$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ مثل : , $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ مثل : $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3$.
- $(a \times b)^x = a^x \times b^x$ مثل : $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 1296$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ مثل : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.
- $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$ مثل : $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$ مثال اخر : $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[x]{64} = 4$.
- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$ مثل : $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$

3-1 ثابت أويلر (Euler's number)

قدّم ليونهارت أويلر (Leonhard Euler) (1707–1783هو رياضي وفيزيائي سويسري) مفهوم العدد e في الرياضات بشكل رسمي 1727و1731م،

يعتبر العدد e او ما يعرف بثابت اويلر او العدد النيبيري الأساس لواحدة من أشهر الدوال المعروفة ، وهي الدالة الأسية ذات الأساس e والتي تكتب بالشكل التالي : $f(x) = e^x$.

1-3-1 أصل العدد e

العدد e هو عدد غير نسبي (لا يمكن الحصول عليه عن طريق الكسور) يستخدم في حالات النمو والانكماش خلال الفترات المتناهية الصغر. و يمكن أن نحسب الثابت e من خلال المعادلة التالية :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

الان لنآخذ قيم مختلفة للعدد x كما يلي :

$$g(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1} = 2$$

يمكن ان نشبه هاته القيمة بنسبة مضاعفة عدد ما خلال مدة معينة ولتكن مثلا سنة واحدة ، حيث تمثل قسمة x=1 انه تمت مضاعفة القيمة خلال السنة مرة واحدة والنتيجة كانت 2 اي ان النتيجة هي ان القيمة ستتضاعف فبدل القيمة 1 تصبح 2 وهي نتيجة بديهية .

والان لنفرض انه بدلا من مضاعفة العدد مرة واحدة خلال السنة سنقسم التضاعف ، اي يكون مرتين بنسبة 50 % كل 6 أشهر بدل مرة واحدة في السنة ونرى النتيجة المتوصل اليها :

$$g(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2} = 2.25$$

في هاته الحالة نلاحظ ان القيمة تضاعفت بقيمة 2,25 ، وهنا نطرح السؤال التالي وهو مادا لو قمنا بتقسم الزيادة اكثر ، اي يدل المضاعفة مرة واحدة في السنة سنقوم بزبادة بنسبة 25 % اربع مرات في السنة والنتيجة ما يلي :

$$g(4) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{4} = 2.44$$

هنا نلاحظ ان القيمة ازدادت وهنا قد يتصور لنا انه كلما قسمنا نسبة الزيادة أكثر فان القيمة تتضاعف اكثر ولكن في الواقع سنحد ان القيمة ستقترب من عدد معين كما يلي :

$$g(1000) = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.71692393 \ldots \ldots$$

$$g(1000) = \left(1 + \frac{1}{\text{مليون}}\right)^{\text{مليون}} = 2.718280469 \ldots \ldots$$

هنا نلاحظ انه كلما اقتربت X من المالانهاية فان النتيجة تقترب نحو عدد الذي اطلق عليه الرمز e وهي اختصار لكلمة exponentiel والدي يعرف في الرياضيات بثابت اويلر او العدد النيبيري (نسبة لعالم الرياضيات الاسكتلندي (John Napier)جون نايبر الدي عاش بين عامي 1550و1617م. يعرف أساسًا

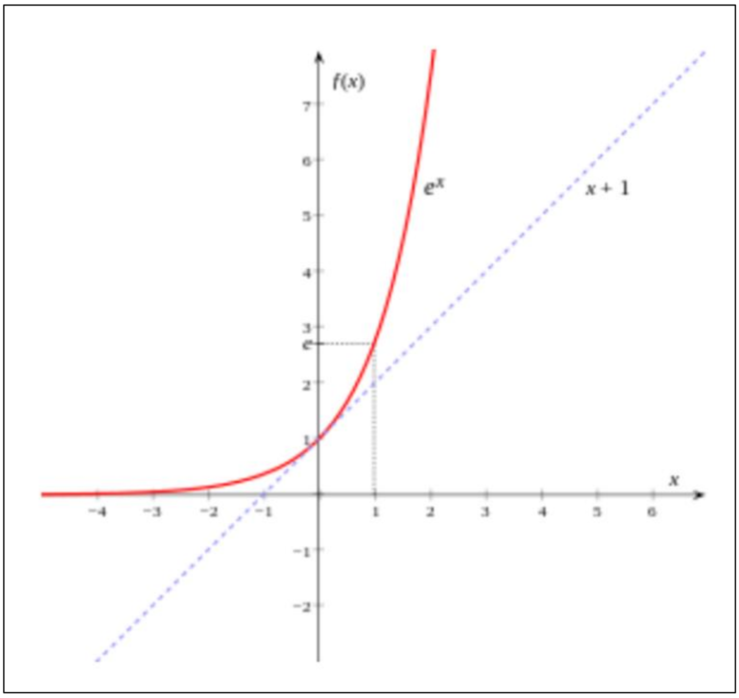
بأنه مخترع اللوغاريتمات، وهي فكرة ثورية سهلت إلى حد كبير العمليات الحسابية المعقدة، خاصة في الفلك والهندسة والفيزياء.) .والذي نحصل عليه عندما تؤول قيمة x الى عدد كبير جدا اي المالانهاية

$$Lim_{x\to+\infty}\ g(x) = Lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 ....= $\boldsymbol{e}$

<u>4-1 خصائص لدالة الاسية ذات الاساس e :</u>

الدالة الاسية ذات الاساس e هي الدالة التي تكتب من الشكل : $f(x) = e^x$ وشكلها البياني هو من الشكل :



الشكل البياني للدالة : $f(x) = e^x$ لا تختلف كثيرا من ناحية الشكل عن الدوال الاسية الاخرى الا أن لديها خصائص مميزة تميزها عن الدوال الاسية الاخرى وهي :

- ميل المماس عند أي نقطة في منحنى الدالة هي نغسها صورة نقطة المماس ، ومنه فان مشتق الدالة الأسية e^x هو نفسه اي : $f'(x) = (e^x)' = e^x$.
- مساحة الحيز المحصور بين المنحنى ومحور الفواصل عند نقطة المبدأ و الفاصلة x هي نفسها صورة النقطة x ، ومنه فان تكامل الدالة الاسية e^x هو نفسه اي : $\int f(x).dx = \int e^x.dx = e^x$.

بالنسبة للعمليات الحسابية للدالة الاسية ذات الاساس e فهي لا تختلف عن الدوال الاسية الاخرى .

5-1 نهاية الدالة الاسية :

تتمتع الدوال الاسية ببعض النهايات الشهيرة أهما ما يلي :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x}$$

$$\lim_{X\to-\infty}e^{x}=0$$

$$\lim_{X\to+\infty}e^{x}=+\infty$$

$$\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)=1$$

4- الدالة اللوغارتمية

1-2 تعريف الدالة اللوغارتمية :

اذا كانت لدينا الدالة الأسية التالية :

$$a^{x}=b$$

فان الدالة اللوغارتمية هي عكسها وتكتب بالشكل التالي :

$$\mathbf{Log}_{\boldsymbol{a}}(\mathrm{x})=\mathrm{b}$$

وهي تقرأ بالشكل التالي : لوغارتيم x للأساس a هو b ، اي أننا اذا طرحنا السؤال التالي: ما هو العدد b الذي اذا رفعناه كقوة (أس) للعدد a تعطينا النتيجة x ؟ هذا السؤال تجيب عليه الدالة اللوغارتمية ,

مثال :

ما هو العدد b الذي اذا رفعناه كقوة للعد 4 تعطينا النتيجة 16 ؟ الجواب هو العدد 2 ، لان $4^{2}=16$ ، ونكتب السؤال السابق رياضيا كما يلي :

$$\mathbf{Log}_{\mathbf{4}}(16)=2$$

اي لوغارتيم العدد 16 للأساس 4 هو 2 .

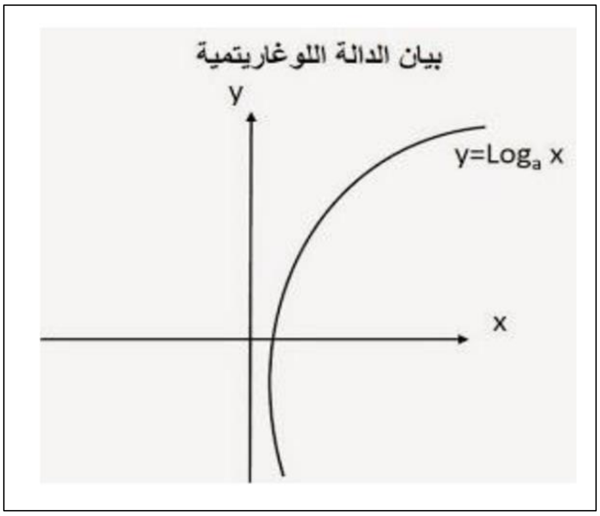
ويعود ابتكار اللوغاريتم (Logarithm) الى العالم الاوسكتلندي جون نابيير (John Napier) عام 1614م، و اطلق هذا الاسم ، وهي مكوّنة من كلمتين من أصل يوناني قديم:

Logos وتعني النسبة أو تناسب أو نسبة منطقية

Arithmos عدد إذن:

Logarithmos تعني نسبة عددية "أو" عدد النسبة"

ومنه فالدالة اللوغارتمية هي الدالة العكسية للدالة الاسية ، وهي دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ ، اما شكلها البياني فهو كالتالي :



2-2 الانواع الرئيسية للدوال اللوغارتمية :

بما ان الدوال اللوغارتمية تحتلف حسب قيمة الاساس a فهذا يعني انه يوجد مالانهاية من الدوال اللوغارتمية ولكن في الرياضيات يتم استخدام دالتين رئيسيتين هما :

1-2-2 اللوغارتيم العشري

اقترح عالم الرياضيات الانجليزي هنري بريغز (**Henry Briggs 1561-1630**) أن يكون الاساس 10 لتسهيل الحسابات وهكذا ولد اللوغاريتم العشري . ويرمز له اختصارا ب Log (x) (اي بدون كتابة الاساس 10) اي ان :

$$Log(x) = y \rightarrow \text{دالتها العكسية} \rightarrow 10^y = x$$

مثال :

عندما نبحث عن القيمة $Log(1000)$ فنحن بصدد ايجاد العدد الذي اذا رفعناه كقوة للعدد 10 فتكون النتيجة هي 1000 ، والذي سنجده يساوي 3 ، ذلك لان $10^3 = 1000$ ومنه : $Log(1000) = 3$

2-2-2 اللوغاريتم الطبيعي (اللوغاريتم النبيري) :

يعتبر ليونهارد أويلر(Leonhard Euler) اول من استخدم الثابت e كأساس في الدالة اللوغارتمية $Log_e(x)$، وتم تسميتها لاحقا باللوغاريتم النيبيري تكريما للعالم جون نايبر مبتكر اللوغارتميات ، وبما ان هذا اللوغاريتم (ذو الاساس e) مميز جدا ويتمتع بخصائص فريدة وظهر في الكثير من العلاقات الرياضية سمي باللوغاريتم الطبيعي ولتمييزه تم ترميزه ب $Ln(x)$

$Ln(x) = y$ → دالتها العكسية → $e^y = x$

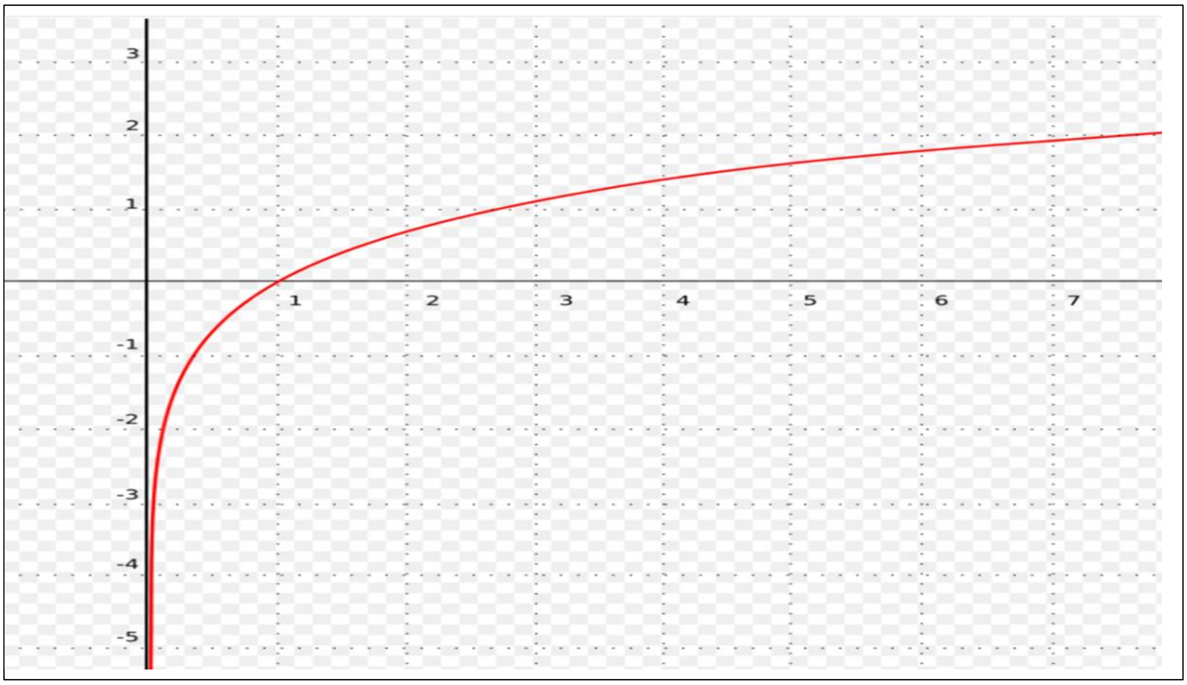
أ- **خصائص الدالة اللوغارتمية الطبيعية**

هي واحدة من أهم الدوال في التحليل الرياضي، ولها خصائص كثيرة تميزها عن باقي اللوغاريتمات ، ومن بين الخصائص التي تتمتع بها الدالة هي :

- معرفة على المجال $]0 , +\infty[$.
- مدى الدالة هو IR اي $y \in IR$.
- $Ln(0) = 1$ لان : $e^0 = 1$.
- **متزايدة تمامًا** على مجال تعريفها $]0 , +\infty[$.
- $Ln(a) + Ln(b) = Ln(ab)$ ، حيث : $a; b \in]0 , +\infty[$.
- $Ln(a) - Ln(b) = Ln\left(\frac{a}{b}\right)$ ، حيث : $a; b \in]0 , +\infty[$.
- $nLn(a) = Ln(a)^n$ ، حيث : $a > 0 ,\ n \in IR$..
- $Ln(e)^x = e^{Ln(x)} = x$.
- $[Ln(x)]' = \frac{1}{x}$ ، حيث : $x > 0$.
- أي لوغاريتم يمكن كتابته بدلالة اللوغاريتم الطبيعي أي : $Log_a(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(a)}$.
- تنمو ببطيء شديد مقارنة باي دالة اخرى ، اي : $Lim_{x\to+\infty} \frac{Ln(x)}{x} = 0$.

ب- الشكل البياني للدالة اللوغارتمية الطبيعية .

تمثل الدالة $Ln(x) = y$ **منحنىً متزايدًا ببطء** يبدأ من جهة اليسارقريب من محور y ويتجه نحو الأعلى ببطء كلما زاد x . كما أن المنحنى يتقاطع مع محور الفواصل عند النقطة (1 . 0). لان : $Ln(0) = 1$.



نلاحظ من الشكل ان في حالة اذا كان x يؤول الى الصفر بالقيم الموجبة فان المنحنى يكون بالأسفل عند $-\infty$ وعند ازدياد قيم x فان المنحنى يتصاعد الى غاية تقاطعه مع محور الفواصل عند قيمة x=1 وذلك لان $Ln(1) = 0$. ومن ثم المنحنى يتزايد ببطء ليؤول الى $+\infty$ عندما تؤول xالى $+\infty$

<u>2-3 الاستخدامات الاقتصادية للدول الأسية واللوغارتمية :</u>

تعتبر الدوال الأسية واللوغاريتمية من أهم الأدوات الرياضية في التحليل الاقتصادي ، إذ تصف كثيرًا من الظواهر الواقعية التي تنطوي على نمو أو تناقص أو تغيّر نسبي. وفيما يلي اهم الاستخدامات الاقتصادية للدوال اللوغارتمية والأسية .

<u>2-3-1 الاستخدامات الاقتصادية للدوال الأسية :</u>

للدالة الأسية تعبّر عن التغيّر النسبي أو النمو المستمر، أي الحالات التي يزيد فيها المتغيّر بنسبة ثابتة وليس بمقدار ثابت.من أبرز التطبيقات الاقتصادية:

<u>أ – الفائدة المركبة المستمرة:</u>

راينا في الفصل السابق آن من تطبيقات المتتالية الهندسية هي تقدير الفائدة المركبة ولكن في حالة اذا كانت الفائدة المركبة مستمرة هنا يتم استخدام الدوال الاسية . حيث تحسب بالمعادلة التالية :

$$y = P.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nx}$$

حيث :

P : المبلغ الاصلي .

y : حجم المبلغ الاجمالي .

n : مبلغ تكرار الفائدة السنوية .

x : عدد السنوات .

وفي حالة اذا كانت تكرار الفائدة مستمر فانه :

$$Lim_{n\to+\infty}\ P.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nx} = P\left(e^{i}\right)^{x} = Pe^{ix}$$

مثال :

بنك لديه حساب استثمار يقدم فائدة مركبة مستمرة تقدر سنويا ب5% , ما هو حجم المبلغ الاجمالي اذا تم وضع 1000 دينار في هذا الحساب لمدة 3 سنوات ؟

الحل :

لدينا :" $y = Pe^{ix}$

أي : $y = 1000e^{0,05\times 3} = 1000e^{0,15} = 1161,83$

ومنه المبلغ الاجمالي بعد 3 سنوات هو 1161,83 د

ب- <u>حساب النمو الاقتصادي والسكاني (المستمر)</u>

راينا في الفصل السابق أن من تطبيقات المتتالية الهندسية هي تقدير معدلات النمو الاقتصادي ولكن في حالة الواقعية فان معدلات النمو سواء للاقتصاد او السكان لا يكون دفعة واحدة في السنة وانما يكون

مستمرا على طول السنة ، ولذلك للدقة يتم استخدام الدالة الاسية بدلا من المتتالية الهندسية حيث تحسب معدلات النمو كما يلي :

$$Q = q.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nx}$$

حيث :

q : هو الحجم في سنة الاساس للسكان او الاقتصاد

Q : الحجم الجديد بعد حساب معدلات النمو .

n : معدل تكرار النمو خلال السنة .

x : عدد السنوات .

وبما أن معدل تكرار النمو خلال السنة في الحالة الواقعية سواء للاقتصاد او السكان هو مستمر فانه :

$$Lim_{n\to+\infty}\ q.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nx} = q\left(e^{i}\right)^{x} = qe^{ix}$$

مثال :

بلغ عدد سكان الجزائر حوالي 47,5 مليون نسمة خلال سنة 2025 ، ويتوقع ان يكون معدل النمو السنوي حوالي 1,51 % خلال 10 السنوات القادمة , فكم سيكون حجم السكان خلال سنة 2035.

الحل :

لدينا :" $Q = qe^{ix}$

أي : $Q = 47.5\ e^{0,0151\times10} = 47.5\ e^{0,151} = 55.24$

ومنه عدد السكان المتوقع خلال سنة 2035 هو 55,24 مليون نسمة .

ج - حساب الاستهلاك المستمر

من بين استخدامات الدوال الاسية في الاقتصاد والادارة هي حساب قيم الاستهلاك المستمر للآلات ومعدات الانتاج وغيرها حسب القانون التالي :

$$P = p.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-nx}$$

حيث :

p : هو قيمة الاصل في سنة الاساس ,

P : قيمة الاصل الجديد .

n : معدل الاهلاك خلال السنة .

x : عدد سنوات الاهلاك .

وبما أن معدل الاهلاك خلال السنة في الحالة الواقعية هو مستمر فانه :

$$Lim_{n\to+\infty}\ p.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-nx} = p\left(e^{-i}\right)^{x} = pe^{-ix}$$

مثال :

مؤسسة قامت بشراء الة خلال سنة 2025 بسعر 100 الف دينار معدل اهتلاها في السنة هو 3% كم تكون قيمتها الحقيقية خلال سنة 2040 ؟

الحل :

لدينا :" $P = pe^{-ix}$

أي : $P = 100000\ e^{-0,03\times15} = 100000\ e^{-0,3} = 74081$

ومنه قيمة الالة الحقيقية خلال سنة 2040 هو 74081 مليون نسمة

د- دوال الانتاج

تعتبر دوال الانتاج من اكثر الدوال الاسية استخداما في المجال الاقتصادي ،حيث انها تقدر حجم الانتاج بناء على عوامل الانتاج مثل : العمل ، رأس المال ، الارض ، ,,,الخ ، ولعل اشهر هاته الدوال هي دالة الانتاج من نوع كوب دوغلاص والتي صيغتها كما يلي :

$$Q = f(L\,,K)$$

$$\rightarrow Q = A\,.\,L^{a}.\,K^{1-a}$$

حيث :

Q : حجم الانتاج

A : الحد الثابت و الذي يمثل العامل التقني او التكنولوجي .

L : عنصر العمل ،

K: عنصر راس المال ،

a: مرونة الانتاج ، حيث مجموع المرونات لعناصر الانتاج يجب ان تساوي 1 .

مثال :

مؤسسة انتاجية ، دالة الانتاج التي تمثل نشاطها هي من نوع كوب دوغلاص وهي بالشكل التالي :

$$Q = 5\,.\,L^{0,3}.\,K^{0,7}$$

المطلوب :

- في حالة اعتمدت المؤسسة على 5 وحدات من رأس المال و 7 وحدات من العمالة ، كم سيكون الانتاج ؟
- في حالة قررت المؤسسة زيادة حجم عمالتا ب 50 % و الآلات الانتاجية ب 20 % باي نسبة سيزداد الانتاج ؟

الحل :

- في حالة اعتمدت المؤسسة على 5 وحدات من رأس المال و 7 وحدات من العمالة ، سيكون الانتاج كما يلي :

$$Q = 5\,.\,(7)^{0,3}.\,(5)^{0,7} = 27{,}65$$ وحدة انتاجية

- في حالة قررت المؤسسة زيادة حجم عمالتا ب 50 % و الآلات الانتاجية ب 20 % فان نسبة الزيادة في الانتاج هي :

$$Q^* = 5\,.\,(1{,}5\ L)^{0{,}3}.\,(1{,}2\ K)^{0{,}7}$$

$$Q^* = 5\,.\,(1{,}5)^{0{,}3}\ (L)^{0{,}3}.\,(1{,}2)^{0{,}7}\ (\ K)^{0{,}7}$$

$$Q^* = 5\,.\,(L)^{0{,}3}.\,(\ K)^{0{,}7}(1{,}5)^{0{,}3}.\,(\ 1{,}2)^{0{,}7}$$

$$Q^* = 5\,.\,(L)^{0{,}3}.\,(\ K)^{0{,}7}.\,1{,}2830$$

$$Q^* = Q.\,1{,}2830$$

ومنه فان الانتاج سيزداد بنسبة **% 30. 28**

2-3-2 الاستخدامات الاقتصادية للدوال اللوغارتمية

تعتبر الدوال اللوغاريتمية من أهم الأدوات التحليلية في الاقتصاد، خصوصًا عند التعامل مع النمو غير الخطي والتحليل النسبي.حيث تستخدم لتحديد معلات النمو والتغيرات النسبية ، اضافة الى كونها من اهم الادوات التي تستخدم في تحويل الدوال غير الخطية الى دوال الخطية مما يسهل من عمليات التقدير وحساب المرونات ،

أ- حساب معدلات النمو الاقتصادي

تستخدم الدوال اللوغارتمية في حساب معدلات النمو الاقتصادي المستمر أو المركب عن طريق المعادلة التالية :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{Ln(y_{t-1}) - Ln(y_t)}}{\mathbf{t}}$$

حيث :

g : هو معدل النمو السنوي للاقتصاد

y_t : هو الناتج خلال السنة t

t : السنة التي يحسب عندها معدل النمو

مثال :

نفترض أن الناتج المحلي الإجمالي (GDP) لبلدٍ ما كان كما يلي:

السنة	GDP (مليار دولار آمريكي)
2020	500
2025	800

المطلوب : ما هو معدل النمو الاقتصادي السنوي المستمر خلال هذه الفترة (أي 5 سنوات).

الحل :

لدينا :

$$g = \frac{Ln(y_{t-1}) - Ln(y_t)}{t}$$

$$g = \frac{Ln(500) - Ln(800)}{5}$$

$$g = \frac{6,6846 - 6,2146}{5} = \frac{0,47}{5} = 0,094$$

$$g = 9,4\%$$

ومنه معدل النمو الاقتصادي لهذا البلد خلال هاته الفترة (2020-2025) هو 9,4 % في السنة .

ب- **<u>قياس التغيرات النسبية (النمو النسبي أو العائد النسبي)</u>**

الدوال اللوغاريتمية تقيس التغير النسبي وليس المطلق.لذا نستخدم بشكل كبير في المالية والاقتصاد الكلي لقياس معدل العائد المستمر للسهم أو الاستثمار.

$$r = Ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

حيث:

r : هو معدل العائد المستمر للأصل المالي .

P_t : هو السعر خلال السنة t.

P_{t-1} : هو السعر السابق.

مثال :

نفترض أن تغير سعر سهم شركة ما كان كما يلي:

السنة	سعر السهم (و.ن)
بداية السنة	100
نهاية السنة	120

المطلوب : ما هو معدل العائد السنوي المستمر لهذا السهم ؟

الحل :

لدينا :

$$r = Ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

$$r = Ln\left(\frac{120}{100}\right)$$

$$r = Ln(1{,}2) = 0{,}1823$$

ومنه معدل العائد المستمر لهذا السهم خلال هاته السنة هو 18,23 %. ولو قمنا بحساب العائد السنوي بالطريقة التقليدية لوجدناه 20 % ،حيث العائد اللوغارتمي تعطي نتائج أصغر قليلاً لأنه يفترض نموًا مستمرًا ومركبًا على مدار السنة ,ومنه فانه يعطي النمو النسبي الحقيقي للسهم أو الاستثمار عبر الزمن ، كما أنه قابل للجمع عبر الفترات الزمنية، أي يمكن حساب عائد سنة كاملة بجمع عوائد الأشهر:

$$r_{\text{السنة}} = r_{1_{\text{الشهر}}} + r_{2_{\text{الشهر}}} + \cdots + r_{12_{\text{الشهر}}}$$

وهذا غير ممكن في العائد البسيط .

<u>ج- في التحليل القياسي(Econometrics)</u>

اللوغاريتم يُستخدم بكثرة في النماذج القياسية لأنه:

- **يقلل من تشتت البيانات**.: القيم الاقتصادية مثل الدخل أو الناتج المحلي تختلف بمقادير ضخمة بين الأفراد أو الدول.ةعند أخذ اللوغاريتم $Ln(y)$ تصبح الفروق بين القيم الكبيرة والصغيرة أصغر نسبيًا، مما يجعل البيانات أكثر استقرارًا .التباين أصغر .الانحدار الخطي أكثر دقة . مثل بدل أن يكون الدخل بين 1000و 100000، بعد أخذ اللوغاريتم تصبح بين 6.9 و 11.5، وهي فروقات صغيرة يسهل التعامل معها إحصائيًا.
- **يُفسّر المعاملات بسهولة (كمعدل تغير نسبي) :** إذا استخدمنا نموذجًا لوغاريتميًا مثل: $Ln(y) = B_0 + B_1 Ln(x)$ ، فان المعامل B_1 تمثل المرونة مباشرة اي نسبة التغير في Y الناتج عن التغير في x ب 1% .اي مثلا لو كانت المعادلة كما يلي : $Ln(y) = 2 + 3Ln(x)$ فهذا يعني انه اذا ازدادت x ب 1% فان y ستزداد بنسبة 3% .
- **يُبسّط العلاقات المعقدة**.: كثير من الظواهر الاقتصادية تتبع سلوكًا **أسّيًا أو كسريًا** مثل دالة الانتاج لكوب دوغلاص التي تأخذ الشكل التالي : $Q = A . L^{a} . K^{\beta}$ ، هاته العلاقة غير خطية مما يجعل من الصعب تقدير المرونات ولكن عند ادخال اللوغاريتم في المعادلة تتحول هاته المعادلة الى معادلة خطية كما يلي : $Ln(Q) = Ln(A) + \alpha Ln(L) + \beta Ln(K)$ ، مما يمكننا من استخدام طرق التقدير الخطي مثل نموذج الانحدار الخطي البسيط لتقدير قيم المرونات .

خلاصة الفصل :

يمثّل هذا الفصل خطوة أساسية في فهم العلاقة بين التغيرات الكمية المستمرة في الظواهر الاقتصادية والمالية، إذ مكّن الطالب من التعرف على خصائص الدوال الأسية التي تصف النمو أو التراجع بنسب ثابتة، والدوال اللوغارتمية التي تُعدّ عكسها الرياضي وتُستخدم لتحليل العلاقات النسبية والمرونات. وقد أتاح هذا الفصل الانتقال من دراسة التغيرات المتقطعة في المتتاليات إلى دراسة التغيرات المستمرة التي تعبّر عنها الدوال.

تعرّف الطالب على أهم خصائص الدوال الأسية، مثل تزايدها السريع في حالة الأساس الأكبر من الواحد، وتناقصها عندما يكون الأساس بين الصفر والواحد، إضافة إلى تطبيقاتها في حساب الفائدة المركبة والنمو الاقتصادي. كما تناول الفصل خصائص الدوال اللوغارتمية، خصوصًا اللوغاريتم الطبيعي الذي يُستخدم بكثرة في التحليل الاقتصادي، لما يوفره من تبسيط للعمليات الحسابية وتحويل العلاقات غير الخطية إلى علاقات خطية يمكن تحليلها بسهولة.

من الناحية التطبيقية، أبرز هذا الفصل كيف تُستخدم الدوال الأسية واللوغارتمية في قياس النمو النسبي، والعائد المركب، والمرونة السعرية أو الدخلية للطلب، وكذلك في النماذج القياسية (Econometric Models)التي تعتمد على التحليل اللوغاريتمي للبيانات. وبذلك، يكون الطالب قد اكتسب أدوات رياضية متقدمة تتيح له فهم ديناميكية المتغيرات الاقتصادية وتطورها عبر الزمن بطريقة كمية دقيقة.

ويُعدّ هذا الفصل تمهيدًا مباشرًا للفصل الرابع المتعلق بـ المشتقات، حيث سيُوظّف الطالب المفاهيم المكتسبة هنا لتحليل معدلات التغير الفورية ودراسة السلوك الحدّي للدوال الاقتصادية، بما يعزز قدرته على فهم مفاهيم التوازن والنمو الأمثل في الاقتصاد.

الفصل الخامس :

المشتقات

تمهيد:

تعد **المشتقات** من أهم المفاهيم الأساسية في الرياضيات الحديثة، وبالأخص في **التحليل الرياضي**، إذ تمثل الأداة الرئيسة لدراسة **التغير** في مختلف الظواهر الطبيعية والاقتصادية والهندسية.فبينما تهتم **الدوال** بدراسة العلاقات بين الكميات، فإن **المشتقة** تُمكّننا من فهم كيفية تغيّر هذه الكميات بالنسبة إلى بعضها البعض.

ظهر مفهوم المشتقة نتيجةً لتساؤلات علماء الرياضيات والفيزياء حول **الميل اللحظي** للمنحنيات و**السرعة الفورية** للأجسام المتحركة. فمثلاً، إذا كانت لدينا دالة تصف حركة جسم خلال الزمن، فإن **مشتقة هذه الدالة** تعبّر عن سرعة الجسم في كل لحظة. ومن هنا نشأ علم التفاضل، الذي يُعدّ أحد الركنين الأساسيين في **التحليل الرياضي** إلى جانب التكامل.، و تستخدم المشتقات في ميادين متعددة:

- في **الفيزياء** لحساب السرعات والتسارعات وتوصيف حركة الأجسام.
- في **الاقتصاد** لتحليل الكلفة الحدّية والإيراد الحدّي و القيم الحدية كالربح والخسارة القصوى.
- في **العلوم الهندسية** لدراسة ميل الأسطح والمنحنيات وتصميم النماذج الدقيقة.
- وفي **البيولوجيا** و**البيئة** و**الزراعة** لتحليل معدلات النمو أو التغير في الكائنات أو المحاصيل.

إن دراسة المشتقة تبدأ بفهم مفهوم **معدل التغير المتوسط**، أي التغير في قيمة الدالة عند الانتقال من نقطة إلى أخرى، ثم ننتقل إلى فكرة **معدل التغير اللحظي**، وهو ما نُسميه **المشتقة**. ويهدف هذا الفصل إلى تمكين المتعلم من:

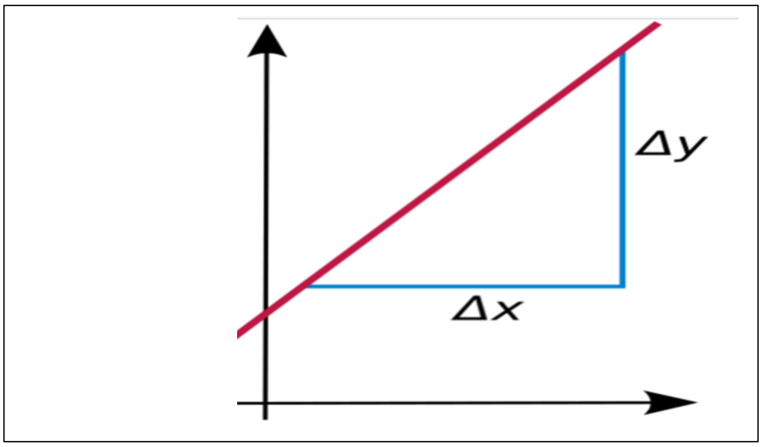
1. فهم المفهوم الهندسي للمشتقة باعتبارها **ميل المماس** للمنحنى في نقطة معينة.
2. إتقان قواعد اشتقاق الدوال الأساسية وتركيباتها.
3. توظيف المشتقة في دراسة **اتجاه تغير الدوال**)تزايد وتناقص(، و**النقاط الحرجة**، و**القيم القصوى**.
4. تطبيق المشتقات في **حل بعض المسائل الاقتصادية** .

1 – مفهوم الاشتقاق :

إذا كانت النقطتين ${}_1(x_1 \,; (x_1))$ ، و $a_2(x_2 \,; f(x_2))$ ، سيكون ميل المستقيم المار بالنقطتين a_1 و a_2 هو كما يلي :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ويمكن تمثيل ذلك بما يلي :



و يمثل m نسبة التغير التي تحصل في $f(x)$ الناتج عن التغير في x

مثال :

لدينا الدالة $f(x) = 2x + 3$ ، وهي معادلة خط مستقيم ميله عند النقطتين : $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ هو :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{13 - 7}{3} = 2$$

والقيمة $m = 2$ ثمثل نسبة الزيادة في $f(x)$ عندما يزداد x بوحدة واحدة ، اي مثلا عندما يزداد x ب 5 وحدات فان $f(x)$ سيزداد ب : وحدات $2 \times 5 = 10$.

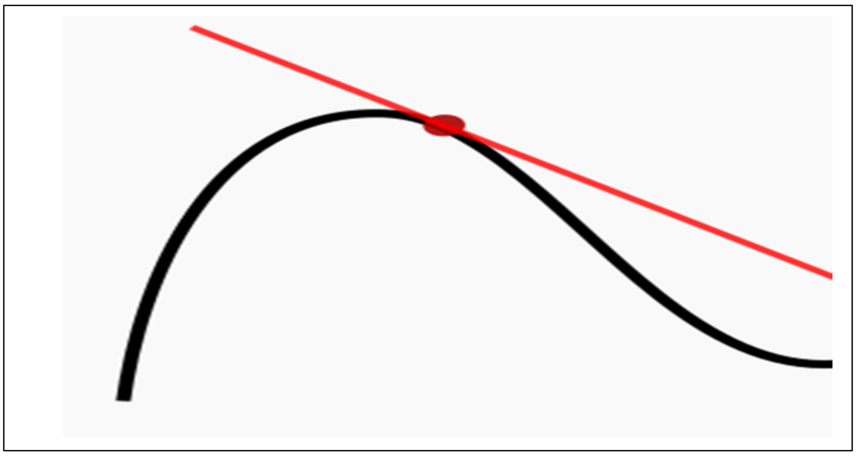
ولكن في حالة اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة ليست خطية (ليست من الدرجة الاولى) اي ان منحناها البياني ليس عبارة عن خط مستقيم ، في هاته الحالة يكون ميل المماس مختلف من نقطة الى اخرى وبالتالي لمعرفة ميل المماس عند كل نقطة من المنحنى البياني ، فانه يجب ان نقيس ميل المماس بين نفطتين من المنحنى المسافة بينهما تؤول الى الصفر اي :

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وبما اننا نقيس ميل المماس عند نقطة ونقطة موالية لها الفرق بينهما يؤول الى الصفر اي $\Delta x \to 0$

$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f(x)'$$

وهنا يتولد مفهوم الاشتقاق ، اي أن الاشتقاق يقيس لنا التغير اللحظي ل $f(x)$ بالنسبة ل x والذي يتمثل أيضا بمعادلة المماس عند النقطة x كما يمثله المنحنى البياني التالي :



مثال :

أوجد من خلال مفهوم الاشتقاق ، مشتقة الدالة التالية : $f(x) = 5x^2$

$$Lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)^2 - 5x^2}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x) \quad - 5x^2}{\Delta x}$$

$$= Lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 5(\Delta x)^2 + 10x\Delta x - 5x^2}{\Delta x}$$

$$Lim_{\Delta x \to 0} [5(\Delta x) + 10x] = 10x$$

ونلاحظ أن مشتقة الدالة هي;

$$\frac{ay}{dx} = f(x)' = 10x$$

ملاحظات :

- نقول أن الدالة $f(x)$ نقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 حيث تنتمي الى مجال التعريف I اذا كان

$$Lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_O)}{x - x_O} =$$ منتهية و موجودة

- اذا كانت الدالة تقبل الاشتقاق عند نقطة معينة فإنها مستمرة عند هاته النقطة والعكس غير صحيح .
- تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند المجال $[a , b]$ اذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في هذا المجال.

2 – قواعد الاشتقاق

لتكن f و g دالتين حقيقتين قابلتين للاشتقاق على مجال تعريفهما I وليكن k عدد حقيقي , فان

$$(K)' = 0$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$[(ax^n + b)^n]' = n(anx^{n-1})(ax^n + b)^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\sin x = +\cos x$$
$$\cos x = -\sin x$$
$$\sin f(x) = f'(x) \sin' f(x)$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$[\ln (f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arc\ \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arc\ \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f\prime(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$
$$[K.f(x)]' = Kf'(x)$$
$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\rightarrow (e^x)' = e^x$$
$$\rightarrow (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$
$$\rightarrow (a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x\ln(a)})' = ln(a)e^{x\ln(a)} = ln(a)\,a^x$$
$$\rightarrow (a^{u(x)})' = \left(e^{\ln a^{u(x)}}\right)' = (e^{u(x)\ln(a)})' = u'(x)\,ln(a)e^{u(x)\ln(a)} = u'(x)\,ln(a)(e^{ln(a)})^{u(x)} = u'(x)\,ln(a)\,a^{u(x)}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln f(x)^{g(x)}}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = (g(x)\ln f(x))' f(x)^{g(x)} = \left(g'(x).\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) f(x)^{g(x)}$$

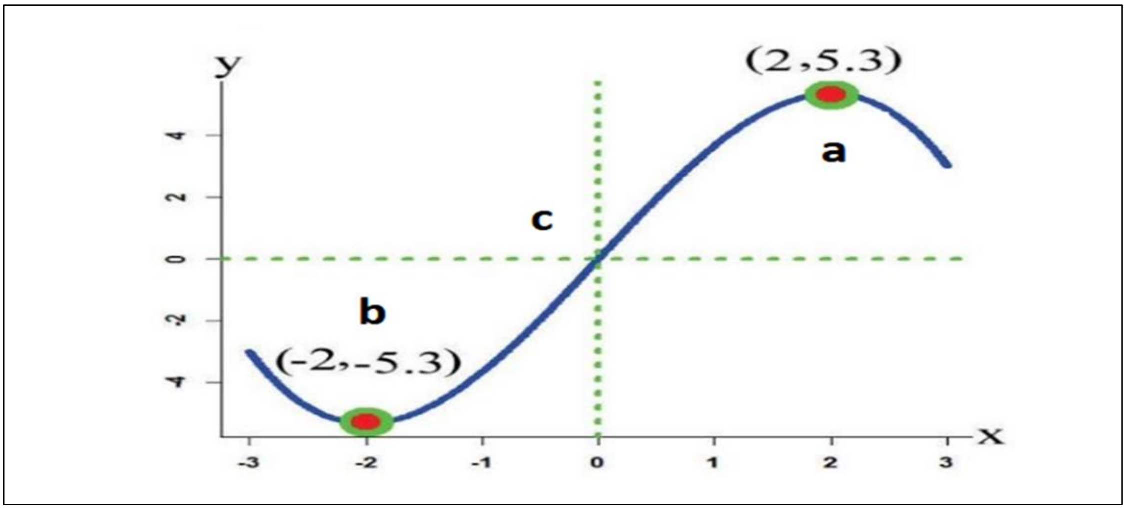
3- النقاط الحرجة للدوال العددية

النقاط الحرجة للدالة f هي النقطة التي يكون فيها المماس موازيا لمحور الفواصل ، أي ان ميل المماس عند هاته النقطة يكون معدوم ، وبالتالي التغير النسبي للدالة f عند هاته النقطة يكون مساويا للصفر اي: $\frac{dy}{dx} = 0$ ، ويمكن التمييز بين ثلاث نقاط حرجة وهي :

- النقطة العظمى : وهي النقطة التي يكون فيها منحنى الدالة عند اعلى قيمة ,
- النقطة الدنيا : وهي النقطة التي يكون فيها منحنى الدالة عند أدنى قيمة ,
- نقطة الانعطاف : وهي النقطة التي فيها منحنى الدالة يغير شكله ,

- **النقطة العظمى:** وهي النقطة التي يكون فيها منحنى الدالة عند اعلى قيمة ، اي المشتقة الاولى للدالة معدوم ، $\frac{dy}{dx} = 0$ ، ومنه $f(x)' = 0$، و مشتقتها الثانية عند هاته النقطة سالبة اي $f(x)'' < 0$.
- **النقطة الدنيا :** و هي النقطة التي يكون فيها منحنى الدالة عند ادنى قيمة ، اي المشتقة الاولى للدالة معدوم ، $\frac{dy}{dx} = 0$ ، ومنه $f(x)' = 0$، و مشتقتها الثانية عند هاته النقطة موجبة اي $f(x)'' > 0$.
- **نقطة الانعطاف :** وهي النقطة التي فيها منحنى الدالة يغير شكله ,اي ينتقل من الشكل المقعر الى الشكل المحدب والعكس ، وتكون ، $\frac{dy}{dx} = 0$ ، ومنه $f(x)' = 0$، و مشتقتها الثانية عند هاته النقطة موجبة اي $f(x)'' = 0$.

والمنحنى البياني يوضح هاته النقاط كما يلي :



حيث :

النقطة a هي نهاية عظمى و b هي نقطة حدية صغرى ، و c هي نقطة انعطاف

مثال :

اوجد النهايات الحدية للدالة التالية مع تحديد طبيعتها :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 5$$

الحل :

1- النهايات الحدية او القيم الحرجة :

لدينا : $f(x)' = 0$ اي :

$$f(x)' = x^2 - 1 = 0$$

ومنه حلول المعادلة هي : $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$ وهي تمثل النقاط الحرجة أو النهايات الحدية :

$$\left(-1\ ,\frac{17}{3}\right) \text{ ، و } \left(1\ ,\frac{13}{3}\right)$$

2- تحديد طبيعة هاته النقاط نقوم بحساب المشتقة الثانية فنجدها :

$$f(x)'' = 2x$$

بالنسبة للنقطة $x_1 = 1$: عند تعويضها في المشتقة السابقة نجد :

$$f(1)'' = 2(1) = 2 > 0 \rightarrow \text{النقطة هي دنيا}$$

بالنسبة للنقطة $x_2 = -1$: عند تعويضها في المشتقة السابقة نجد :

$$f(1)'' = 2(-1) = -2 < 0 \rightarrow \text{النقطة هي عظمى}$$

<u>4 – مشتقة الدوال متعددة المتغيرات :</u>

الدوال متعددة المتغيرات هي الدوال تكون مكتوبة بدلالة أكثر من متغير واحد ، وتكون بالشكل التالي :

$f(x, y, z, \ldots..)$ أو $f(x_1, x_2, x_3, \ldots..)$ ، وتشتق هاته الدول بالطريقة التالية :

- المشتقة من الدرجة الاولى : هنا يتم الاشتقاق لكل متغير على حدى مع تثبيت المتغيرات الاخرى والتعامل معها وكأنها أعداد ثابتة ، وبالتالي نجد الاشتقاق من الدرجة الاولى يكون عدد المعادلات فيه بعدد متغيرات الدالة ، فلو كانت الدالة مثلا مكتوبة بدلالة ثلاثة متغيرات سيكون عدد المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى هو ثلاثة مشتقات ، وهكذا ، أما المشتقة الكلية من الدجة الاولى هي مجموع المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى .
- المشتقة من الدرجة الثانية : هنا يتم اشتقاق كل مشتقة جزئية من الدرجة الأولى بنفس الطريثة السابقة ، حيث يتم اشتقاق كل متغير على حدى مع تثبيت المتغيرات الاخرى والتعامل معها وكأنها أعداد ثابتة ، وبالتالي نجد الاشتقاق من الدرجة الثانية يكون عدد المعادلات فيه بعدد متغيرات الدالة قوة 2 ، فلو كانت الدالة مثلا مكتوبة بدلالة ثلاثة متغيرات سيكون عدد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية هو $3^2 = 9$ مشتقة ، وهكذا

مثال :

لتكن لديك الدالة التالية :

$$f(x,y,z) = x^3 + 2y^2 + z + xy + 2xz - yz$$

- اوجد المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى ثم المشتقة الكلية .
- أوجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية .

الحل :

1- المشتقات الجزئية من الدرجة الاولى:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2 + y + 2z$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 4y + x - z$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 2x - y + 1$$

المشتقة الكلية :

$$\frac{\delta f}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} = 3x^2 + 3x + 4y + z + 1$$

2- المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية :

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 6x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 1$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta z} = 2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 4$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 1$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta z} = -1$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta z^2} = 0$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta z \delta x} = 2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta z \delta y} = 2$$

5-تطبيقات الاشتقاق في المجال الاقتصادي :

يُعدّ الاشتقاق من أهم الأدوات الرياضية التي أسهمت في تطوير الفكر الاقتصادي والإداري الحديث، إذ مكّن الباحثين والمحلّلين من دراسة العلاقات الكمية بين المتغيرات الاقتصادية المختلفة بشكل أدق. فمن خلال مفهوم التغير اللحظي الذي يعبّر عنه الاشتقاق، أصبح بالإمكان قياس تأثير تغير عنصر معين – كالسعر أو الكمية أو الزمن – على عناصر أخرى مثل الإيراد أو التكلفة أو الإنتاج. وهكذا، تحوّل الاشتقاق من مفهوم رياضي تجريدي إلى وسيلة تحليلية تساعد على فهم ديناميكية الظواهر الاقتصادية والإدارية.

ولا يقتصر دور الاشتقاق على دراسة معدلات التغير فحسب، بل يمتد إلى تحديد النقاط المثلى التي تمكّن المؤسسة أو الاقتصاد من تحقيق أهدافه بكفاءة، كتعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف أو تحقيق التوازن بين العرض والطلب. كما يستخدم في تحليل المرونة، والنمو الاقتصادي، ودراسة السلوك الحدي للعوامل الإنتاجية. لذلك، فإن توظيف الاشتقاق في ميادين الاقتصاد والإدارة يُعدّ خطوة أساسية لفهم السلوك الاقتصادي واتخاذ قرارات رشيدة مبنية على أسس علمية دقيقة.

1-5 تعظيم الربح أو تقليل التكلفة:

الهدف في الإدارة والاقتصاد هو **تحقيق أقصى ربح أو أدنى تكلفة**. الاشتقاق يسمح بتحديد:

- النقاط الحرجة $f'(x)=0$
- التحقق من كونها عظمى أو صغرى باستخدام $f''(x)$

مثال:

اذا كانت دالة الايراد والتكاليف لمؤسسة ما بدلالة الانتاج كما يلي :

$$TR = -0.5\,Q^{2} + 200Q.$$

$$TC = -20Q + 500.$$

- ماهي الكمية الانتاج المثلى التي تسمح بتعظيم الربح ؟

الحل :

كمية الانتاج المثلى التي تسمح بتعظيم الربح:

لدينا دالة الربح هي دالة الايرادات مطروح منها دالة التكاليف:

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = -0.5Q^2 + 200Q + 20Q - 500$$

$$\pi = -0.5Q^2 + 220Q - 500$$

الكمية التي تسمح بتعظيم الربح ، هي الكمية التي تمثل النهاية الحدية العظمى و لايجادها نستعين بالاشتقاق :

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = -Q + 220 = 0$$

$$\rightarrow Q = 220$$

التحقق كونها نهاية حدية عظمى نقوم بالانشقاق الثاني فنجد :

$$\pi'' = -1 < 0 \rightarrow \text{نهاية حدية عظمى}$$

ومنه الانتاج الذي يحقق أعظم ربح للمؤسسة هو 220 وحدة .

<u>2-5 ايجاد القيم الحدية (التكلفة الحدية ، الانتاج الحدي ، الايراد الحدي,,,الخ)</u>

تعتبر القيم الحدية في مجال الاقتصاد مثل : التكلفة الحدية ، الانتاج الحدي ، الايراد الحدي, من أهم المفاهيم الاقتصادية التي يتم الاستعانة بها في التحليل الاقتصادي ، ويعبر مفهوم القيمة الحدية عن

التغير اللحظي للظاهرة الاقتصادية بالنسبة للمتغير المستقل ، فمثلا الإنتاج الحدي هو مقدار الزيادة في الإنتاج الكلي الناتجة عن استخدام وحدة إضافية واحدة من أحد عوامل الإنتاج (كالعمل أو رأس المال).

مثال 1 :

ورشة للصناعة اليدوية دالة انتاجها بدلالة عنصر العمل كما يلي :

$$Q = 100L^{0,7} - 5L$$

الانتاج الحدي لهاته الورشة هي :

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = (0,7)(100)L^{-0,3} + 5 = 70L^{-0.3} - 5$$

$$\frac{\delta Q}{\delta L} = 70L^{-0.3} - 5$$

هاته المعادلة تعبر عن كمية تغير الانتاج اللحظي للورشة بدلالة تغير العمال فمثلا لو قررت الورشة زيادة العمالة ب 10 وحدات فان الانتاج سيتغير ب

$$70(10)^{-0.3} - 5 = 30,08$$

اي ان الانتاج سيزداد ب 30 وحدة انتاجية .

مثال 2 :

المعادلة التالية تمثل دالة التكلفة لمؤسسة صناعية ما :

$$TC = 20Q^2 + 7$$

التكلفة الحدية لهاته الورشة هي :

$$\frac{\delta TC}{\delta Q} = (2)(20)Q = 40Q$$

$$\frac{\delta TC}{\delta Q} = 40Q$$

هاته المعادلة تعبر عن حجم تغير التكلفة اللحظي بدلالة تغير الانتاج فمثلا لو قررت المؤسسة زيادة الانتاج ب 10 وحدات فان التكلفة ستزداد ب

$$40(10) = 40$$

اي ان الانتاج سيزداد ب 30 وحدة انتاجية .

2-5 النمو الاقتصادي والتغيرات الاقتصادية عبر الزمن

تستخدم المشتقات في مجال الاقتصاد الكلي بشكل كبير ومن بين هاته الاستخدامات دراسات تغيرات الناتج المحلي الإجمالي (GDP) بدلالة مختلف العوامل الاقتصادية الاخرى ، أو دراسة مختلف الظواهر الاقتصادية كالاستثمار و التضخم عبر الزمن

مثال 01

اذا كانت دالة الناتج المحلي الاجمالي لبلد ما هي بالشكل التالي :

$$y = 500e^{0.03x}$$

حيث x : هو السنوات و y هو الناتج المحلي الاجمالي لهذا البلد

الدالة المشتقة لدالة الانتاج هي :

$$\frac{dy}{dx} = (0.03)500e^{0.03x} = 15e^{0.03x}$$

وهي تعبر عن كمية التغير في الناتج المحلي الاجمالي بدلالة الزمن فمثلا بعد سنة سيزداد الناتج المحلي الاجمالي ب $15e^{0.03} = 15{,}45$

خلاصة الفصل

يُمثّل مفهوم المشتقة أحد الركائز الأساسية في التحليل الرياضي والاقتصادي، إذ يُمكّن من دراسة سلوك الدوال وتحديد اتجاهاتها ومعدلات تغيرها. وقد تعلّمنا في هذا الفصل أن المشتقة تُعبّر عن معدل التغير الفوري لمتغير تابع بالنسبة لمتغير مستقل، سواء في سياقٍ رياضي صرف أو في إطارٍ اقتصادي تطبيقي.

تعرّفنا كذلك على قواعد الاشتقاق الأساسية، التي تُسهّل عملية حساب المشتقات لمختلف أنواع الدوال: الجبرية، المثلثية، الأسية واللوغارتمية. كما تناولنا التفسير الهندسي للمشتقة على أنها ميل المماس لمنحنى الدالة عند نقطة معينة، والتفسير الاقتصادي لها باعتبارها تمثل القيم الحدّية مثل الإيراد الحدي، التكلفة الحدّية، والمنفعة الحدّية.

وقد تم التطرّق إلى استخدام المشتقات في تحليل التغيرات الاقتصادية، كإيجاد نقاط التعظيم والتصغير التي تمثل أقصى ربح أو أدنى تكلفة، وتحديد فترات الزيادة والنقصان، والتقعر والانفراج في الدوال الاقتصادية. كل ذلك يتيح للباحث الاقتصادي فهمًا أدقّ لآليات اتخاذ القرار في الإنتاج، التسعير، والتوزيع.

وبهذا يُختتم هذا الفصل بتأكيد أن المشتقة ليست مجرد أداة رياضية، بل هي وسيلة تحليلية فعّالة تساهم في بناء النماذج الاقتصادية الكمية، وتُعدّ مدخلًا أساسيًا للفصل الموالي الذي يتناول الدوال الأصلية والتكاملات، والذي يُكمل العلاقة العكسية بين المشتقة والتكامل في التحليل الرياضي والاقتصادي.

الفصل السادس: التكاملات والدوال الأصلية

تمهيد:

يُعدّ التكامل أحد أهم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، إذ يُعتبر العملية العكسية للاشتقاق، ويُستخدم لحساب المساحات والتراكمات ومجموع التغيرات الصغيرة عبر فترة معينة. فبينما يمكّننا الاشتقاق من دراسة معدلات التغير اللحظي، يسمح لنا التكامل بفهم القيمة الكلية أو الإجمالية لتلك التغيرات. من خلاله يمكننا حساب المساحات تحت المنحنيات، والكميات الإجمالية الناتجة عن معدلات متغيرة، وهو بذلك أداة أساسية في مجالات العلوم والهندسة والاقتصاد والبحث العملي.

وفي المجال الاقتصادي والإداري، يكتسب التكامل أهمية خاصة، إذ يُستخدم في حساب الإجماليات الاقتصادية الناتجة عن معدلات متغيرة مثل التكلفة الكلية من التكلفة الحدية، أو الإيراد الكلي من الإيراد الحدي، أو حساب الدخل القومي الناتج عن معدل نمو متغير عبر الزمن. كما يُستعمل لتقدير المساحات بين منحنيات العرض والطلب لتحديد فائض المستهلك والمنتج، وتحليل التراكمات في الاستثمار أو الإنتاج خلال فترات زمنية معينة. وهكذا، فإن التكامل يمثل أداة رياضية فعالة تربط بين المفهوم الجزئي للتغير (الحدي) والمفهوم الكلي (الإجمالي)، مما يجعله ضروريًا لفهم وتحليل الظواهر الاقتصادية والإدارية على نحو شامل ودقيق.

2- مفهوم التكامل :

التكامل هو عكس الاشتقاق ، ونقصد بالعملية العكسية هو انه كل عمليتين تقوم احداهما بإلغاء الاخرى ، لذلك قان الاشتقاق والتكامل هما عمليان عكسيتان كل منهما تلغي الاخرى ، لذلك فان العملية العكسية للاشتقاق يسمى التكامل ، ورمزه هو $\int$.

ويقسم التكامل الى نوعين رئيسيين هما : التكامل المحدود والتكامل غير المحدود

3-1 التكامل غير المحدود :

هو التكامل الذي من خلاله نتحصل عليه من خلال على الدالة الاصلية التي كاملناها أي :

$$\int \boldsymbol{f(x).dx = F(x) + c}$$

حيث :

$F(x) + c$: هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$. حيث : $[\boldsymbol{F(x) + c}]' = \boldsymbol{f(x)}$

و C: هو ثابت التكامل .

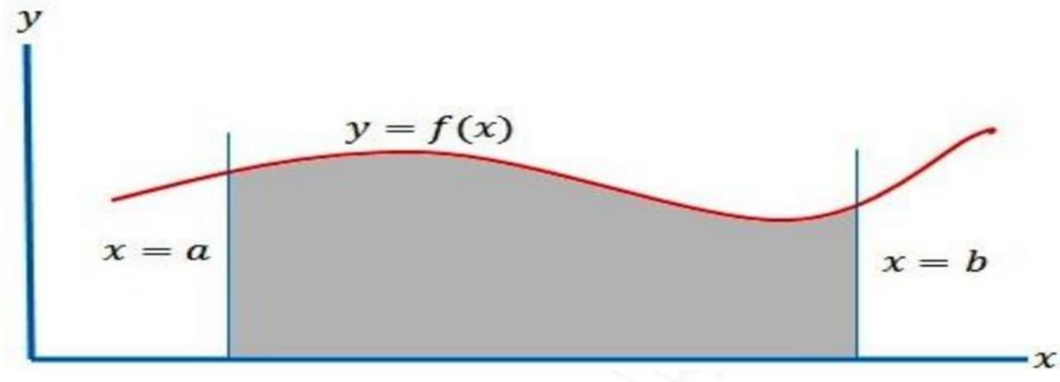
4-1 التكامل المحدود :

يُستخدم التكامل المحدود لإيجاد المساحة تحت منحنى الدالة بين نقطتين على محور الفواصل ، وبصورة أدق يعرف التكامل المحدود للدالة $f(x)$ على المجال $[a . b]$ بأنه :

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x).dx = Lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

$$= [\boldsymbol{F(x) + c}]_{a}^{b} = \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$

حيث يمكن تمثيل التكامل المحدود كما يلي :



3- حساب التكامل غير المحدود (ايجاد الدوال الأصلية)

الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ كما سبق وان تطرقنا لها ، هي الدالة $F(x)$ والتي اذا قمنا باشتقاقها نتحصل على الدالة $f(x)$.

مثال 1 :

أوجد تكامل الدالة $f(x) = x^2$

$$\int x^2.dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

حيث $$\left[\frac{1}{3}\quad{}^{3} + c\right]' = 3.\frac{1}{3}x^{3-1} + 0 \quad = x^2$$

1-2 التكامل غير المحدود للدوال المعروفة :

يمكن حساب التكامل غير المحدود لمجموعة من الدوال دون اللجوء الى اي عملية رياضية ، حيث يمكن استنتاج الدالة الاصلية بشكل مباشر اذا كانت الدالة المعطاة مكتوبة بالصيغ المعروفة ، وهاته الصيغ من بينها ما يلي :

$$\int a.dx = a.\int dx = x + c$$

$$\int [af(x) \pm bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c \dots\dots n \neq -1$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \dots\dots\dots\dots\dots . n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotan} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

مثال :

أوجد قيم التكاملات التالية :

$$\int (2x^2 + 2)dx$$

$$\int \frac{2}{x} dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 6} dx$$

$$\int x^2 e^{x^3-2} dx$$

الحل :

$$\int (2x^2 + 2)dx = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 3$$

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\int \frac{1}{x} dx = 2Ln(x) + c$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 6} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3 + 6} dx = \frac{1}{3}Ln(x^3 + 6) + c$$

$$\int x^2 e^{x^3-2} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3-2} dx = e^{x^3-2} + c$$

2-2 التكامل بالتجزئة

في حالة اذا كانت الدالة غير مكتوبة بالصيغ المعروفة نلجأ الى التكامل بالتجزئة حيث صيغتها الرياضية كما يلي :

لتكن لدينا الدالتين v و u.ولدبنا :

$$(u\,.\,v)' = u'\,.\,v + u\,.\,v'$$

بإدخال التكامل نجد

$$\int (u\,.v)'dx = \int u'\,.v\,dx + \int u\,.v'dx$$

$$(u\,.v) = \int u'\,.v\,dx + \int u\,.v'dx$$

ومنه :

$$\int u'\,.v\,dx = (u\,.v) - \int u\,.v'dx$$

وهو قانون التكامل بالتجزئة

مثال :

باستخدام التكامل بالتجزئة احسب التكاملات التالية :

$$\int Ln(x)\,dx$$

$$\int xLn(x)\,dx$$

$$\int x^2Sin(x)\,dx$$

الحل :

$$\int Ln(x)\,dx$$

$\boldsymbol{u = x}$	$\boldsymbol{u' = 1}$
$\boldsymbol{v = Ln(x)}$	$\boldsymbol{v' = \frac{1}{x}}$

ومنه :

$$\int Ln(x)\,dx = xLn(x) - \int x.\frac{1}{x}\,dx = xLn(x) - x + c$$

بالنسبة للدالة :

$$\int xLn(x)\,dx$$

$u = \frac{1}{2}x^2$	$u' = x$
$v = Ln(x)$	$v' = \frac{1}{x}$

ومنه :

$$\int xLn(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2Ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2Ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$$

بالنسبة للدالة :

$$\int x^2Sin(x)\,dx$$

$u = Cos(x)$	$u' = Sin(x)$
$v = x^2$	$v' = 2x$

$$\int x^2\mathrm{Sin}(x)\,dx = x^2\mathrm{Cos}(x) - 2\int x\mathrm{Cos}(x)\,dx$$

نستحدم التكامل بالتجزئة مرة اخرى بالنسبة ل:

$$\int x\mathrm{Cos}(x)\,dx$$

فنجد :

$u = -sin(x)$	$u' = cos(x)$
$v = x$	$v' = 1$

اي:

$$\int xCos(x)\,dx = -x\sin(x) + \int \sin(x)\,dx$$

$$= -x\sin(x) - Cos(x)$$

وبالتعويض نجد :

$$\int x^2 \text{Sin}(x)\,dx = x^2 \text{Cos}(x) + 2\big(x\,sin(x) + Cos(x)\big) + c$$

4- <u>حساب التكامل المحدود</u>

اذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a\,.\,b]$ فان التكامل المحدود للدالة $f(x)$ الذي يأخذ الشكل التالي :

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x).dx = Lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = [F(x)+c]_a^b = F(b) - F(a)}$$

أي يمثل مساحة الحيز المحصور بين المحنى $f(x)$ ومحور الفواصل عند النقطتين b و a

مثال *01* :

أوجد التكاملات التالية :

$$\int_{1}^{2} \boldsymbol{(2x+1).dx}$$

$$\int_{0}^{3} \boldsymbol{(e^x+1).dx}$$

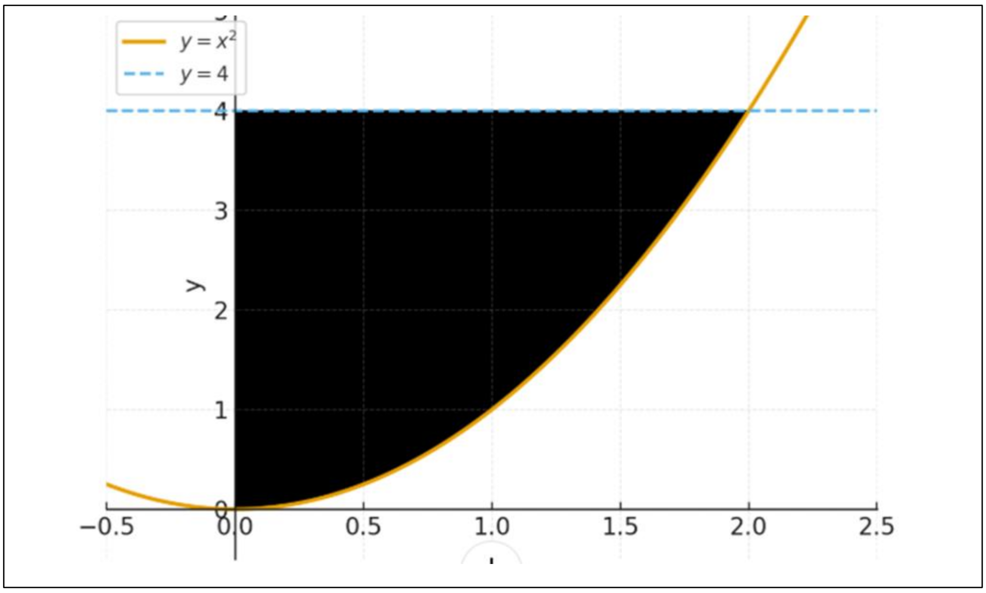
الحل :

$$\int_{1}^{2} \boldsymbol{(2x+1).dx = [x^2+x+c]_1^2 = [(2)^2+2+c] - [(1)^2+1+c] = 4}$$

$$\int_{0}^{3} \boldsymbol{(e^x+1).dx = [e^x+x+c]_0^3 = [e^3+3+c] - [e^0+0+c] = 22,08}$$

مثال 02

أحسب مساحة الحيز الملون التالي :



الحل :

نلاحظ من الشكل أن الحيز محصور بين الخط الدي فاصلته $y = 4$ و $f(x) = x^2$

عند النقطتين $[0 .2]$ ومنه مساحة الحيز هي :

$$\int_{0}^{2} (4 - x^2).\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 + C\right]_1^2 = \left[4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right] = 5,33$$

ملاحظة : في حالة النتيجة سالبة فهي تمثل مساحة الحيز تحت منحنى الفواصل فلإشارة **الموجبة أو السالبة** للتكامل لا تعبّر عن مساحة هندسية، بل عن **اتجاه** المساحة بالنسبة للمحور .$\boldsymbol{x}$لذا، المساحة الفعلية (بالمعنى الهندسي) تُحسب بأخذ القيمة المطلقة:

5- <u>تطبيقات التكامل في المجال الاقتصادي</u>

يُعدّ التكامل من أهم الأدوات الرياضية التي تلعب دورًا أساسيًا في التحليل الاقتصادي الكمي، إذ يمكّن الباحث أو صانع القرار من حساب المجاميع الكلية للظواهر الاقتصادية المتغيرة بصورة مستمرة. فبينما تتيح لنا المشتقات دراسة معدلات التغير اللحظية، فإن التكامل يمكّننا من دراسة القيم التراكمية أو الإجمالية الناتجة عن هذه التغيرات.

في هذا الإطار، يُستخدم التكامل في الاقتصاد والإدارة لتقدير مجموعة واسعة من المفاهيم مثل الإيراد الكلي انطلاقًا من الإيراد الحدي، والتكلفة الكلية انطلاقًا من التكلفة الحدية، إضافة إلى حساب الدخل القومي الإجمالي من معدلات النمو، أو إجمالي الاستهلاك عبر الزمن. كما يُستخدم التكامل في دراسة مساحات الفوائض الاقتصادية مثل فائض المستهلك وفائض المنتج، التي تعبّر عن المكاسب الاجتماعية الناتجة عن التبادل في السوق.

ومنه فإن التكامل لا يمثل مجرد أداة رياضية، بل هو وسيلة تحليلية فعّالة تساعد في تفسير العلاقات الاقتصادية التراكمية وفهم التوازنات الكلية داخل الاقتصاد، ما يجعله أحد الأعمدة الأساسية في النمذجة والتحليل الاقتصادي الحديث.

4-1 حساب فائض المنتج والمستهلك

مثال :

اذا كانت دالة الطلب كما يلي : $P = 50 - 2Q$ و سعر السوق هو : $P = 30$ أوجد فائض المستهلك .

الحل :

فائض المستهلك هندسيا هو مساحة الحيز المحصور بين خط السعر و منحنى دالة الطلب ، و هو الفرق بين المبلغ الذي يكون المستهلك مستعدًا لدفعه لشراء سلعة ما، والمبلغ الذي يدفعه فعلاً في السوق. أي أنه يمثّل المنفعة أو الكسب الذي يحققه المستهلك من المشاركة في السوق.

أولا يجب ايجاد الكمية التوازنية لأنها تمثل حدود الحيز المراد حساب مساحته :

$$P = 50 - 2Q \rightarrow Q = \frac{50 - P}{2} = \frac{50 - 30}{2} = 10$$

ومنه:

$$\int_0^{10} (50 - 2Q - 30).dx = [-Q^2 + 20Q]_0^{10} = [-(10)^2 + 20(10)] = 100$$

أي ان نفائض المستهلك هو 100 وحدة نقدية .

2-4 حساب الناتج المحلي من معدل النمو

اذا كان معدل النمو الاقتصادي خلال 4 سنوات ممثل العلاقة التالية :

$$g(t) = 0.05t + 0.1$$

حيث: t يعبر عن فترة زمنية ،

المطلوب حساب اجمالي الزيادة في الناتج المحلي الاجمالي خلال هاته الفترة

الحل :

$$\int_0^4 g(t).dt = \int_0^4 (0.05t + 0.1).dt = \left[\frac{0.05}{2}t^2 + 0.1t\right]_0^4 = 0.025(4)^2 + 0.1(4) = 0.8$$

ومنه : معدل النمو خلال هاته الفترة بلغ 0.8او 80 % من القيمة الابتدائية للناتج المحلي الاجمالي

<u>2-4 حساب قيمة الاهتلاك</u>

مثال :

مؤسسة انتاجية اشترت ألة نفترض أن قيمة آلة جديدة هي **100,000دينار**، ومعدل اهتلاكها السنوي (كنسبة من القيمة الأصلية) يُعطى بالعلاقة التالية:

$$D(t) = 0.1e^{-0.2t}$$

ما هو قيمة الإهتلاك خلال أول 5 سنوات ؟

الحل :

$$\boldsymbol{D = \int_0^5 0.1e^{-0.2t}.dt = \left[\frac{-0.1e^{-0.2t}}{0.2}\right]_0^5 = [-0.5e^{-1}] + 0.5 = 0.3160}$$

هذا يعني ان الاصل سيفقد حوال 31,60 % من قيمته

<u>3-4 حساب مجموع الأرباح المتغيرة عبر الزمن</u>

مثال :

اذا كان معدل الربح لشركة ما يتغير عبر الزمن من خلال المعادلة التالية :

$$\pi(t) = 100t + 50$$

المطلوب : حساب الربح خلال 3 السنوات الاولى .

الحل :

$$\int_0^3 (100t + 50).\, dt = [50t^2 + 50t]_0^3 = 600$$

ومنه مجمل الربح المحقق خلال الثلاث السنوات الاولى هو 950 و.ن

خلاصة الفصل:

يُعدّ التكامل من أهم المفاهيم الرياضية التي تُكمل دراسة المشتقات، حيث يُمثل العملية العكسية للاشتقاق، ويهدف إلى إيجاد مجموع القيم الجزئية أو المساحات تحت المنحنيات. ومن خلال هذا الفصل، تمّ التعرّف على أنواع التكاملات :التكامل غير المحدود الذي يُعبّر عن مجموعة الدوال الأصلية، والتكامل المحدد الذي يُستخدم في حساب المساحات والكميات الكلية بدقة عددية محددة.

تعرّف الطالب على قواعد التكامل الأساسية وطرق حسابها، إضافة إلى العلاقة الجوهرية بين التكامل والمشتقة التي تُجسّدها النظرية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل .كما تمّ إبراز التفسير الهندسي للتكامل باعتباره مساحة أو تراكمًا، والتفسير الاقتصادي له باعتباره وسيلة لقياس القيم الإجمالية من خلال معدلات التغير الحدّية.

وقد تم تطبيق مفاهيم التكامل على عدد من المجالات الاقتصادية والمالية، من بينها حساب الإيراد الكلي والتكلفة الكلية انطلاقًا من دوالها الحدّية، وتقدير فائض المستهلك والمنتج، وحساب القيم التراكمية مثل الفوائد المستمرة أو تراكم رأس المال عبر الزمن. هذه التطبيقات تُظهر الدور الحيوي للتكامل في التحليل الاقتصادي الكمي وفي دعم اتخاذ القرار القائم على البيانات.

وبذلك يُختتم هذا الفصل ليؤكد أن التكامل لا يُعد مجرد أداة رياضية تجريدية، بل هو أداة تحليلية فعّالة لفهم التراكمات الاقتصادية والمالية، وأن الجمع بين مفهومي الاشتقاق والتكامل يُوفّر إطارًا شاملًا لدراسة الظواهر الاقتصادية ديناميكيًا وكمّيًا، بما يُمكّن الطالب من الانتقال إلى مستويات أعلى من التحليل والنمذجة الاقتصادية.

خاتمة

تَعدّ هذه المطبوعة البيداغوجية محاولة لتقديم مدخلٍ متكاملٍ إلى **التحليل الرياضي في بعده التطبيقي** داخل مجالات **العلوم الاقتصادية والمالية** .فمن خلال الفصول الخمسة التي تناولت مواضيع مترابطة، سعى هذا العمل إلى تمكين الطالب من بناء قاعدة معرفية صلبة تجمع بين الفهم النظري والدقة الرياضية والتطبيق العملي في تحليل الظواهر الاقتصادية.

في **الفصل الأول**، تمّ التعرّف على مبادئ **التحليل التوفيقي** باعتباره أداة مهمة في العدّ والتركيب واتخاذ القرارات الممكنة في المواقف ذات الخيارات المتعددة، مثل تحديد خطط الإنتاج والتوزيع أو تحليل استراتيجيات الأسواق. ثم تناول **الفصل الثاني** دراسة **المتتاليات العددية** لفهم ديناميكية التغير المستمر في الظواهر الاقتصادية، كالادخار والنمو السكاني والفوائد المركبة.

أما **الفصل الثالث**، فقد خصص لدراسة **الدوال الأسية واللوغارتمية** التي تُعتبر أساسًا لتحليل الظواهر الاقتصادية ذات النمو أو الانكماش النسبي، كالأسعار والتضخم والعوائد المالية، لما تمتاز به هذه الدوال من قدرة على تمثيل العلاقات الاقتصادية الواقعية.

وفي **الفصل الرابع**، تم التركيز على **المشتقات** باعتبارها أداة دقيقة لقياس معدلات التغير والتحليل الحدّي، وهي مفاهيم جوهرية في الاقتصاد لفهم الربح الأقصى، التكلفة الدنيا، وسلوك العرض والطلب. ثم جاء **الفصل الخامس** ليُكمل هذا المسار بدراسة **الدوال الأصلية والتكاملات**، التي تُعبّر عن تراكم القيم الجزئية وتحليل الظواهر الكلية، مثل الإيرادات الإجمالية وفوائض السوق وتراكم رأس المال.

إنّ هذا التسلسل من المفاهيم، من التحليل التوفيقي إلى التكامل، يُجسّد تطور الفكر الرياضي من العدّ البسيط إلى التحليل المستمر، ويُبرز الدور المركزي للرياضيات في تفسير وفهم العلاقات الاقتصادية. فكل فصلٍ يُعدّ حلقةً مكملةً لما بعده، ليشكّل في مجموعه **منظومة معرفية مترابطة** تساعد الطالب على الانتقال من التفكير الوصفي إلى **التحليل الكمي الدقيق**، وهو ما يُعتبر شرطًا أساسيًا في تكوين الاقتصادي والمالي المعاصر.

الملاحق والمراجع

قائمة الملاحق والمراجع

- ✓ عبده مصطفى عبد الله، *الرياضيات لطلبة الاقتصاد والإدارة*، دار المريخ للنشر، الرياض، الطبعة الثالثة، 2014.
- ✓ إبراهيم بدوي عبد الحميد، *الرياضيات في العلوم الاقتصادية والإدارية*، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 2012.
- ✓ محمود عبد الفتاح بدوي، *الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم المالية*، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، 2015.
- ✓ نزيه حمدي، التحليل الرياضي في الاقتصاد، دار الفكر العربي، القاهرة، 2009.
- ✓ عبد العزيز السيد عبد الحميد، *الرياضيات في العلوم الإدارية والمالية*، دار الصفاء للنشر، عمان، 2013.
- ✓ حسن أحمد شحاتة، المدخل إلى التحليل الرياضي لطلبة الاقتصاد والإدارة، مكتبة الأنجلو المصرية، 2010.
- ✓ عبد المجيد النجار، *الرياضيات الاقتصادية والتطبيقات الإدارية*، دار صفاء للنشر، عمان، 2018.
- ✓ Chiang, Alpha C., & Wainwright, Kevin. (2005). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (4th ed.). McGraw-Hill Education.
- ✓ Sydsaeter, Knut, Hammond, Peter, Strom, Arne, & Carvajal, Andres. (2016). *Essential Mathematics for Economic Analysis* (5th ed.). Pearson Education.
- ✓ Simon, Carl P., & Blume, Lawrence. (1994). *Mathematics for Economists*. W. W. Norton & Company.
- ✓ Dowling, Edward T. (2001). *Introduction to Mathematical Economics* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.

- ✓ Hoy, Michael, Livernois, John, McKenna, Chris, Rees, Ray, & Stengos, Thanasis. (2011). *Mathematics for Economics* (3rd ed.). MIT Press.
- ✓ Stewart, James. (2015). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.
- ✓ Adams, Robert A., & Essex, Christopher. (2013). *Calculus: A Complete Course* (8th ed.). Pearson.
- ✓ Haeussler, Ernest F., Paul, Richard S., & Wood, Richard J. (2007). *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences* (12th ed.). Pearson Prentice Hall.
- ✓ Chiang, Alpha C. (1984). *Mathematical Economics*. McGraw-Hill.
- ✓ Silberberg, Eugene, & Suen, Wing. (2001). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.
- ✓ *Melkumian, A. (2024). Mathematical Economics (1st ed.). Routledge.*
- ✓ *Vali, S. (2014).* Principles of Mathematical Economics*. Springer.*
- ✓ *Pemberton, M., & Rau, N. (2015). Mathematics for Economists: An Introductory Textbook (4th ed.). Manchester University Press.*
- ✓ *Wisniewski, M. (2013).* Mathematics for Economics: An Integrated Approach *(3rd ed.). Bloomsbury / Macmillan.*
- ✓ *Lis, P., & Rosser, M. (2025). Basic Mathematics for Economists (4th ed.). Routledge.*
- ✓ *Jacques, I. (2023). Mathematics for Economics and Business (10th ed.). Pearson Education.*

- *Dadkhah, K. (2012). Foundations of Mathematical and Computational Economics. Springer.*
- *Vali, S. (2013). Principles of Mathematical Economics (alternative edition/details). [Barnes & Noble / Google Books entries].*
- *Simon, C. P., & Blume, L. (1994).* Mathematics for Economists. *W. W. Norton & Company*