

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

Domain : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques

Par:

KHITER Khadidja

CHELLAOUA Houria

THEME

Adjoint d'un opérateur borné

Proposé par : Mr Bougoutaia Amar

Année Universitaire 2015/2014

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

En premier lieu, nos remerciements s'adressent à ALLAH le tout puissant pour les chances qui nous sont offertes pour réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements pour notre encadreur, Mr Bougoutaia Amar d'avoir accepté de nous encadrer pour notre projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et son encouragement.

Un remerciement particulier prof Mokhtari Abdelkader qui nous fournissant des informations et des livres.

Nos remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui n'ont soutenus jusqu'au bout, et qui n'ont pas cessé de nous donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicace

Je dédie ce travail à mon père et ma mère pour leurs soutiens et encouragements.

Mes sœurs Saadia et Fatima.

Mes frères Toufik, Saad et Abderrahmane.

Ma famille et mes cousins.

Mes amies particulièrement Miri, Amina, Amina et mon binôme Houria.

Tout ce qui j'aime.

Je dédie à tous les enseignants, les étudiants de 3^{ème} année Mathématique et tous les personnes qui m'encouragé.

Je veut dédier ce travail à ma ville Tiaret.

KHITER Khadidja



Dédicace

Ma dédicace s'adresse d'abord à ma mère et mon père pour leurs confiances et encouragements.

Mes sœurs K G A W B S N D.

Mes frères R A S M.

Ma famille, mes cousins et toutes mes amis.

Je dédie avec ma fidélité à mon binôme K.Khadidja et sa famille.

Je n'oublie pas mes enseignants et les étudiants de Mathématique et Informatique.

Enfin, je envoie ma dédicace à tous et toutes les personnes qui je connais et les habitants de El-Menia.

CHELLAOUA Houria



Table des matières

1	Espace de Hilbert	3
1.1	Rappels	3
1.1.1	Produit scalaire	3
1.1.2	Espace euclidien	4
1.1.3	Espace normé	4
1.1.4	Espace complet	7
1.2	Espace de Hilbert	7
1.2.1	Base hilbertienne	8
2	Opérateur linéaire sur un espace de Hilbert	10
2.1	Opérateur linéaire	10
2.2	Opérateur continue	11
2.3	Opérateur borné	12
2.4	La norme d'un opérateur	13
2.5	Espace dual	16
3	Adjoint d'un opérateur borné	18

Introduction

Ce mémoire représente l'adjoint d'un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert. Pour cela, on a traité notre thème en trois chapitres.

Le chapitre 1 contient un rappel en première partie et la définition d'un espace de Hilbert dans la deuxième.

Le chapitre 2 donne quelques définitions et propriétés concernant les opérateurs linéaires.

Le chapitre 3 est consacré à étudier l'adjoint d'un opérateur linéaire borné et donner leurs propriétés.

CHAPITRE 1

Espace de Hilbert

Ce chapitre contient quelques notions fondamentales qui nous permet de définir l'espace de Hilbert qui vient après.

1.1 Rappels

1.1.1 Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) on appelle produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E , toute application $\{E \times E \rightarrow \mathbb{k} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle\}$, vérifiant:

- $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
- $[\langle x, x \rangle = 0] \iff [x = 0]$
- $\forall x, y \in E, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Exemples:

Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ et $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ deux éléments de \mathbb{R}^n .

L'application: $(x, y) \rightarrow \sum_{k=1}^n x_k y_k$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Un produit scalaire entre applications continues

Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , avec $a < b$. L'application: $(f, g) \rightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire de E .

1.1.2 Espace euclidien

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien.

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Alors $\forall x, y \in E$,

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Preuve.

Pour montrer cette inégalité, on considère l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &\geq 0 \\ \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

On pose $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, alors

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &= \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \left| -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right|^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \\ \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle^2 + \langle x, y \rangle^2 &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle &\geq \langle x, y \rangle^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.1.3 Espace normé

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{k} , on dit que E est un espace normé s'il est muni d'une norme. On appelle une norme, toute application $\{\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{k} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), x \rightarrow \|x\|\}$ vérifiant

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positive)

- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (définie)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité)
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (inégalité triangulaire)

Exemples:

Avec nos deux premiers exemples de produit scalaire, les normes associées s'écrivent:

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ un élément de \mathbb{R}^n

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , avec $a < b$.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}.$$

Proposition 2 (Norme induite par un produit scalaire)

Soit E un espace préhilbertien, l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, donnée par

$$\forall x \in E, \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur E .

Remarque 1

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit maintenant: $\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Preuve. $\forall x \in E,$ On a $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda \lambda \langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2 \langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|.$$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad \blacksquare$$

Lemme 1

Soit y et z de E ,

$$y = z \iff \langle y, x \rangle = \langle z, x \rangle \quad \forall x \in E.$$

Preuve.

(\implies)

On suppose que $y = z$

$$\forall x \in E : \quad \langle y, x \rangle = \langle z, x \rangle$$

(\impliedby)

On suppose que $\langle y, x \rangle = \langle z, x \rangle$

$$\forall x \in E : \quad \langle y, x \rangle = \langle z, x \rangle$$

$$\langle y, x \rangle - \langle z, x \rangle = 0$$

$$\langle y - z, x \rangle = 0$$

on choisit $x = y - z$

$$\langle y - z, y - z \rangle = 0$$

$$\|y - z\|^2 = 0 \implies y - z = 0$$

$$\implies y = z. \quad \blacksquare$$

Théorème 1 (*Loi de parallélogramme*)

La norme induite par le produit scalaire sur E vérifie l'égalité

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Preuve.

En effet $\forall x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad \blacksquare$$

1.1.4 Espace complet

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy dans E est une suite convergente. Un espace vectoriel normé et complet est appelé espace de **Banach**.

Soit $(x_n)_n$ une suite de E , $(x_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N \implies \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1

Un espace de Hilbert que l'on note H est un espace préhilbertien complet. Autrement dit, un espace de Hilbert est un espace complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire.

Exemples:

Les \mathbb{R}^n espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Hilbert.

L'espace noté l^2 des suites de carrés sommables est un espace hilbertien.

Définition 2

Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

Exemples:

Si (A, μ) est un espace mesuré (par exemple: un intervalle de \mathbb{R} , avec la mesure de Lebesgue), l'espace

$$L^2(A, \mu) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{k} \text{ t.q. } \int_A |f(x)|^2 d\mu < +\infty \right\} / \sim$$

est l'espace des classes d'équivalences de fonctions de carré intégrable, où \sim est la relation d'équivalence définie par

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout sur } A.$$

C'est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_A f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

et la norme induite par il est:
$$\|f\| = \sqrt{\int_A |f(x)|^2 d\mu}.$$

Remarque 2

Nous avons dit que l'espace de Hilbert est un espace de Banach mais un espace de Banach n'est pas nécessairement un espace de Hilbert. Il suffit de prendre l'exemple de $L^1(A, \mu)$, l'ensemble des fonctions intégrables.

1.2.1 Base hilbertienne

Définition 3

Soit E un espace de Hilbert, $(e_n)_{n \in I}$ une famille de vecteurs est dite
 orthogonale si $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, $n \neq m$
 orthonormale si $\|e_n\| = 1 \forall n \in I$.

Exemples:

La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Dans l^2 , la famille formée de vecteurs $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots)$ le 1 étant à la i ème coordonnée, est une famille orthonormale.

Définition 4

On dit qu'une famille $\{x_i, i \in I\}$ d'éléments d'un espace de Hilbert E , est **totale** dans E si le sous-espace de Hilbert qu'elle engendre est égale à E .

Définition 5

Un espace de Hilbert est dit séparable, ou de dimension dénombrable, s'il contient une famille dénombrable totale.

Définition 6

On appelle base hilbertienne une suite (e_n) d'éléments de H tels que

- $\|e_n\| = 1 \ \forall n, \langle e_n, e_m \rangle = 0 \ \forall n, m, n \neq m.$
- *L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H .*

Remarque 3

Un espace de Hilbert qui possède une base hilbertienne est séparable.

CHAPITRE 2

Opérateur linéaire sur un espace de Hilbert

Ce chapitre consiste à étudier les opérateurs dans un espace de Hilbert et énoncer quelques théorèmes qui sont très importants à caractériser l'ensemble des opérateurs linéaires.

2.1 Opérateur linéaire

Définition 7

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Un opérateur u est une application de E dans F : $u : E \rightarrow F$.

On dit que l'opérateur u est linéaire si et seulement si

$$\forall x, y \in E, u(x + y) = u(x) + u(y)$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires de E dans F est noté par $L(E, F)$.

Remarque 4 Lorsque $F = \mathbb{k}$ (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) un opérateur est une **forme linéaire** sur E .

2.2 Opérateur continue

Définition 8

Soient E et F deux espaces normés sur \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Un opérateur linéaire u défini de E dans F est dit continu en $x_0 \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\|_E \leq \delta \implies \|u(x) - u(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

Il y a une définition équivalente : l'opérateur u est continu en x_0 si

$$u(x_n) \rightarrow u(x_0) \quad (\text{dans } F) \quad \text{dès que } x_n \rightarrow x_0 \quad (\text{dans } E).$$

L'opérateur u est continu sur A tel que $A \subset E$, s'il est continu en chaque point de A .

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F est noté par $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple:

Opérateur intégral de Fredholm

On considère un intervalle fermé borné $[a, b]$ et une fonction k continue sur $[a, b] \times [a, b]$ à valeur dans \mathbb{C} . A une fonction f de $L^2([a, b], dx)$, on fait correspondre la fonction Kf définie sur l'intervalle $[a, b]$ par

$$Kf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy.$$

Théorème 2

Soient E et F deux espaces normés sur \mathbb{k} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $u : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Si u est continu en x_0 , alors u est continu partout.

Preuve.

On suppose que u est continu en x_0 .

Soit x_n une suite convergente vers x dans E , on doit montrer que $u(x_n)$ converge vers $u(x)$ dans F .

$$\text{On a } x_n = (x_0 + x_n - x) + (x - x_0)$$

$$x_n = y_n + (x - x_0) \quad \text{telle que } y_n = x_0 + x_n - x$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_0 + x_n - x) = x_0$$

d'où
$$u(x_n) = u(y_n) + u(x - x_0)$$

$$u(x_n) = u(y_n) + u(x) - u(x_0)$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u(x_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (u(y_n) + u(x) - u(x_0)) \\ &= u(x_0) + u(x) - u(x_0) \\ &= u(x). \quad \text{C.Q.F.D.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 3

Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$.

Preuve.

On a $\mathcal{L}(E, F) \subset L(E, F)$.

On a $\mathcal{L}(E, F) \neq \emptyset$, car l'opérateur nul est un opérateur linéaire continu.

Car $u : E \rightarrow F$ continu

$v : E \rightarrow F$ continu

on sait que $u + v$ est aussi continu
et $u + v$ est linéaire $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{on sait que } u + v \text{ est aussi continu} \\ \text{et } u + v \text{ est linéaire} \end{array}} \right\} \implies u + v \in \mathcal{L}(E, F)$.

De même pour $\lambda \in \mathbb{k}$,

λu est linéaire car u est linéaire
 λu est continu car u est continu $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda u \text{ est linéaire car } u \text{ est linéaire} \\ \lambda u \text{ est continu car } u \text{ est continu} \end{array}} \right\} \implies \lambda u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Donc $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $L(E, F)$. \blacksquare

Remarque 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, u continu en point 0 donc u est continu partout.

2.3 Opérateur borné

Définition 9

Un opérateur linéaire u défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive M , telle que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

Proposition 3

La plus petite constante des M est la norme de u .

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|u(x)\|_F.$$

Preuve.

En effet, la constante M s'écrit

$$\forall x \in E, \quad \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq M, \quad x \neq 0$$

d'où, la plus petite valeur de M est $\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$

de plus,

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left(\left\| \frac{1}{\|x\|_E} u(x) \right\|_F \right) \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|_F \end{aligned}$$

d'où la deuxième égalité.

Passons sur la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|u(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|_F.$$

Des deux inégalités précédentes, on a

$$\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|u(x)\|_F$$

d'où la troisième égalité

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|u(x)\|_F. \quad \blacksquare$$

2.4 La norme d'un opérateur

Définition 10

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit sa **norme opérateur** par

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Proposition 4

- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$.
- Si $\alpha \in \mathbb{k}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
- Si $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Les trois points de la proposition précédente affirment que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Preuve.

En effet, si $\|u\| = 0$ avec $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$$

donc $u(x) = 0, \forall x \in E$ d'où $u = 0$.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose $w = u + v \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\|w(x)\|_F \leq \|w\| \|x\|_E$$

on a

$$\begin{aligned} \|w(x)\|_F &= \|u(x) + v(x)\|_F \\ &\leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \\ &\leq \|u\| \|x\|_E + \|v\| \|x\|_E \\ &\leq (\|u\| + \|v\|) \|x\|_E \end{aligned}$$

alors $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Car $\|w\|$ est une borne supérieure.

Soient $\alpha \in \mathbb{k}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\alpha u \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{aligned} \|\alpha u(x)\|_F &\leq \|\alpha u\| \|x\|_E \\ \|\alpha u(x)\|_F &= |\alpha| \|u(x)\|_F \leq |\alpha| \|u\| \|x\|_E \end{aligned}$$

d'où $\|\alpha u\| \leq |\alpha| \|u\|$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha u(x)\|_F &= \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha u\| \|x\|_E \end{aligned}$$

d'où $\|u\| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha u\| \Rightarrow |\alpha| \|u\| \leq \|\alpha u\|$. C.Q.F.D. ■

Théorème 4

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Preuve.

Soit (u_n) une suite de Cauchy d'éléments de $L(E, F)$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q > N_\varepsilon \implies \|u_p - u_q\| < \varepsilon$$

on a
$$\|u_p(x) - u_q(x)\| \leq \|u_p - u_q\| \|x\|_E < \varepsilon \|x\|_E$$

la suite $(u_n(x))$ est de Cauchy dans l'espace de Banach F , alors $(u_n(x))$ converge dans F vers un opérateur $u(x)$.

Passant à la limite, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|u_p(x) - u_q(x)\| = \|u(x) - u_q(x)\| < \varepsilon \|x\|_E \quad \forall q > N_\varepsilon$$

d'où l'opérateur $v(x) = u(x) - u_q(x)$ est continu de E dans F , il est donc un élément de $\mathcal{L}(E, F)$,

$$\|u(x) - u_q(x)\| \leq \|u - u_q\| \|x\|$$

avec la condition

$$\|u - u_q\| < \varepsilon$$

donc u_q converge vers u dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On a $u(x) = v(x) - u_q(x) \in \mathcal{L}(E, F)$. ■

Remarque 6

L'ensemble des fonctions linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ est un espace de Banach car l'espace des scalaires \mathbb{k} est complet.

Théorème 5

Un opérateur linéaire u est continu, si et seulement s'il est borné.

Preuve.

(\implies)

On suppose que u est continu alors u est continu en 0,
on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad \|y\|_E \leq \delta \implies \|u(y)\|_F \leq \varepsilon \quad \dashrightarrow (1)$$

On pose $y = \frac{x}{\|x\|_E}$
donc $u(y) = \frac{1}{\|x\|_E} u(x) \implies \|u(y)\|_F = \frac{1}{\|x\|_E} \|u(x)\|_F$
en remplaçant dans (1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|x\|_E} \|u(x)\|_F &\leq \varepsilon \\ \implies \|u(x)\|_F &\leq \varepsilon \|x\|_E \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

il suffit de prendre $\varepsilon = M$

d'où l'opérateur u est borné.

(\Leftarrow)

On suppose que u est borné alors, on a

$$\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E \quad \dashrightarrow (2)$$

de (2), on obtient la continuité en point 0, d'après la remarque (5) u est continu sur E dans F . ■

2.5 Espace dual

Définition 11

Soit E un espace normé sur \mathbb{k} , on appelle dual topologique l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans \mathbb{k} . Cet espace est noté par E' .

Remarque 7

Le dual topologique est normé par la norme d'opérateur

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|_F.$$

On appelle $\|u\|$ la norme duale.

L'espace E' est un espace de Banach d'après le théorème 5.

Théorème 6 Représentation de Riesz

Soit H' le dual topologique de H , soit $a \in H$, on note $\varphi_a : x \in H \rightarrow \langle a, x \rangle \in \mathbb{k}$
alors $\varphi : a \in H \rightarrow \varphi_a \in H'$
est bien définie, et c'est un isomorphisme (application linéaire bijectif) de H sur H' .

Preuve.

φ est linéaire donc est bien définie.

φ est injective:

si $a = 0$ alors en particulier, $\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 = 0$ donc $a = 0$ et $\ker \varphi = \{0\}$.

φ est surjective:

soit $L \in H'$, si $L = 0, L = \varphi(0)$ et c'est bon, sinon notons $E = \ker L$, E est un hyperplan de H .

Ayant $E = L^{\{-1\}}(\{0\})$ et L continue, E est un fermé de H .

On a $E \oplus E^\perp = H$. Ayant L différente de l'application nulle, il existe $u \in E^\perp$ tel que $L(u) \neq 0$.

On a en fait $E = Vect a$:

si on prend $x \in E^\perp$ et si on note $w = x - \frac{L(x)}{L(a)}a$

on a $L(w) = L(x) - \frac{L(x)}{L(a)}L(a)$

par linéarité, on obtient $L(w) = L(x) - L(x) = 0 \quad w \in E$. Or $w \in E^\perp$ par construction, donc

$w = E \cap E^\perp = \{0\}$ d'où $x = \frac{L(x)}{L(a)}a : x \in Vect a$ et par double inclusion (l'autre inclusion étant évidente) on a bien $E^\perp = Vect a$.

On a donc pour tout $x \in H \quad x = \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E, \quad x_E \in E$.

Notons maintenant $b = \frac{L(a)}{\|a\|^2}a$.

On a pour tout $x \in H$

$$\langle x, b \rangle = \left\langle \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E, \frac{L(a)}{\|a\|^2}a \right\rangle = \frac{L(x)}{L(a)} \frac{L(a)}{\|a\|^2} \langle a, a \rangle = L(x)$$

car $x_E \in E$ et $a \in E^\perp$.

D'où, on a $L = \varphi_b$ et φ est surjective donc il y a un isomorphisme entre H et H' . ■

CHAPITRE 3

Adjoint d'un opérateur borné

Dans ce chapitre, on définit un opérateur linéaire continu qui correspond à un autre que l'on appelle l'adjoint et donne leurs propriétés.

Définition 12

Soient E, F deux espaces de Hilbert et soit u un opérateur linéaire borné défini de E dans F , alors il existe un opérateur linéaire borné unique noté u^* défini de F dans E par

$$\text{pour tout } x \in E \text{ et } y \in F \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E.$$

En effet pour tout élément $y \in F$, l'opérateur φ est défini de E dans \mathbb{k} par

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{k} \\ x &\longrightarrow \varphi(x) = \langle u(x), y \rangle \end{aligned}$$

φ est un opérateur linéaire borné, car

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\langle u(x), y \rangle| \leq \|u(x)\| \|y\| \\ &\leq \|u\| \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz, il s'ensuit qu'il existe un élément $\psi \in E$, unique tel que

$$\varphi(x) = \langle u(x), y \rangle = \langle x, \psi \rangle$$

cette égalité définit un opérateur **adjoint** de u noté u^* de F dans E par

$$u^*(y) = \psi$$

Maintenant, on doit vérifier que l'opérateur u^* est unique et linéaire.

Preuve.

1- La linéarité de u^*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y, z \in F$, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in E : \quad \langle x, u^*(y+z) \rangle_E &= \langle u(x), y+z \rangle_F \\ &= \langle u(x), y \rangle_F + \langle u(x), z \rangle_F \\ &= \langle x, u^*(y) \rangle_E + \langle x, u^*(z) \rangle_E \\ &= \langle x, u^*(y) + u^*(z) \rangle_E.\end{aligned}$$

Soit $y \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{k}$, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in E : \quad \langle x, u^*(\alpha y) \rangle_E &= \langle u(x), \alpha y \rangle_F \\ &= \bar{\alpha} \langle u(x), y \rangle_F \\ &= \bar{\alpha} \langle x, u^*(y) \rangle_E \\ &= \langle x, \alpha u^*(y) \rangle_E.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1, on obtient

$$\begin{aligned}u^*(y+z) &= u^*(y) + u^*(z) \\ u^*(\alpha y) &= \alpha u^*(y).\end{aligned}$$

2- L'unicité de u^*

On suppose que u admet deux adjoints différents u^* et v^* tels que $u^* \neq v^*$.

$$\begin{aligned}\text{On a } \forall x \in E : \quad \langle ux, y \rangle_F &= \langle x, u^*y \rangle_E \\ \langle ux, y \rangle_F &= \langle x, v^*y \rangle_E \\ \langle x, u^*y \rangle_E &= \langle x, v^*y \rangle_E.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1, on trouve

$$u^*(y) = v^*(y) \quad (\text{contradiction avec l'hypothèse})$$

Donc u admet un unique adjoint u^* . ■

Exemple:

$$\begin{aligned}E &= (C[0, 1], \mathbb{C}) \text{ muni d'un produit scalaire tel que} \\ \langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(y) \overline{g(y)} dy\end{aligned}$$

On définit l'opérateur

$$u : E \longrightarrow E$$

$$f \longrightarrow u(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

avec K une fonction de $(C[0, 1]^2, \mathbb{C})$

On voit que u est linéaire et borné, on veut trouver l'adjoint u^* de u

$$\begin{aligned} \forall f, g \in E : \quad \langle u f, g \rangle &= \langle f, u^* g \rangle = \int_0^1 f(y) \overline{u^* g(y)} dy \\ &= \int_0^1 u f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right] \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 K(x, y) \overline{g(x)} dx \right] f(y) dy \end{aligned}$$

(D'après le théorème de Fubini)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 f(y) \left[\int_0^1 K(x, y) \overline{g(x)} dx \right] dy \\ &= \int_0^1 f(y) \overline{\left[\int_0^1 K(x, y) g(x) dx \right]} dy \\ &= \int_0^1 f(y) \overline{\int_0^1 K(x, y) g(x) dx} dy \\ &= \int_0^1 f(y) \overline{u^* g(y)} dy \end{aligned}$$

Par coïncidence, on a $u^*(g)(y) = \int_0^1 \overline{K(x, y) g(x)} dx$ avec $\overline{K(x, y)}$ le conjugué de $K(x, y)$.

Définition 13

Soit u un opérateur linéaire borné, u est dit **auto-adjoint** si $u^* = u$

(i.e) $\forall x, y \in H : \langle u x, y \rangle = \langle x, u y \rangle$.

Remarque 8

- $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, u auto-adjoint est aussi appelé symétrique.
- $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, u est appelé Hermétien.

Théorème 7

Soient E et F deux espaces de Hilbert, u un opérateur linéaire borné défini de E dans F alors on a

$$\|u\| = \|u^*\|.$$

Preuve.

1)- On a

$$\begin{aligned}\|u^*y\|^2 &= \langle u^*y, u^*y \rangle \\ &= \langle uu^*y, y \rangle \\ &\leq \|uu^*y\| \|y\|\end{aligned}$$

u un opérateur borné, alors

$$\|uu^*y\| \leq \|u\| \|u^*y\|$$

donc

$$\begin{aligned}\|u^*y\|^2 &\leq \|uu^*y\| \|y\| \\ &\leq \|u\| \|u^*y\| \|y\|\end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$\|u^*y\| \leq \|u\| \|y\|.$$

D'où l'inégalité suivante

$$\|u^*\| \leq \|u\| \quad \text{---> 1}$$

2)- On a

$$\begin{aligned}\|ux\|^2 &= \langle ux, ux \rangle \\ &= \langle u^*ux, x \rangle \\ &\leq \|u^*ux\| \|x\|\end{aligned}$$

u^* un opérateur borné, alors

$$\|u^*ux\| \leq \|u^*\| \|ux\|$$

donc

$$\begin{aligned}\|ux\|^2 &\leq \|u^*ux\| \|x\| \\ &\leq \|u^*\| \|ux\| \|x\|\end{aligned}$$

après simplification, on obtient

$$\|ux\| \leq \|u^*\| \|x\|.$$

D'où l'inégalité suivante

$$\|u\| \leq \|u^*\| \quad \text{---> 2}$$

De 1 et 2, on obtient l'égalité des normes

$$\|u\| = \|u^*\|. \quad \blacksquare$$

Proposition 5

Soient E et F deux espaces de Hilbert, pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :

- 1- $(u^*)^* = u$.
- 2- $(I^*) = I$.
- 3- $\|u^* \circ u\| = \|u\|$.
- 4- $(u + v)^* = u^* + v^*$.
- 5- $\forall \alpha \in \mathbb{C} : (\alpha u)^* = \bar{\alpha} u^*$.
- 6- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Preuve.

Pour démontrer la proposition précédente, on utilise le lemme 1.

- 1- $(u^*)^* = u$

On a pour tout $x \in E, y \in F$:

$$\langle ux, y \rangle = \langle x, u^*y \rangle$$

$$\langle ux, y \rangle = \langle (u^*)^*x, y \rangle$$

d'où $(u^*)^* = u$.

- 2- $(I^*) = I$

On a pour tout $x \in E, y \in F$:

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{car } Ix = x$$

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, I^*y \rangle$$

d'où $(I^*) = I$.

- 3- $\|u^* \circ u\| = \|u\|$

On a $\|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \|u\| = \|u\|^2 \quad \dashrightarrow 1$

De plus, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ on a

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*u(x) \rangle$$

(D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\langle x, u^*u(x) \rangle \leq \|x\| \|u^*u(x)\|$$

et comme $\|x\| \leq 1$ d'où $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\| \quad \dashrightarrow 2$

D'après les relations 1 et 2, on a $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\|$

$$4- (u + v)^* = u^* + v^*$$

On a pour tout $x \in E, y \in F$:

$$\begin{aligned} \langle (u + v)x, y \rangle &= \langle x, (u + v)^*y \rangle \\ &= \langle u(x) + v(x), y \rangle \\ &= \langle u(x), y \rangle + \langle v(x), y \rangle \\ &= \langle x, u^*(y) \rangle + \langle x, v^*(y) \rangle \\ &= \langle x, u^*(y) + v^*(y) \rangle \\ &= \langle x, (u^* + v^*)y \rangle \end{aligned}$$

alors $\langle x, (u + v)^*y \rangle = \langle x, (u^* + v^*)y \rangle$.

Donc $(u + v)^* = u^* + v^*$.

$$5- \forall \alpha \in \mathbb{C} : (\alpha u)^* = \bar{\alpha}u^*$$

On a pour tout $x \in E, y \in F$:

$$\begin{aligned} \langle (\alpha u)x, y \rangle &= \langle x, (\alpha u)^*y \rangle \\ &= \langle (\alpha u)(x), y \rangle \\ &= \alpha \langle u(x), y \rangle \\ &= \alpha \langle x, u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, \bar{\alpha}u^*(y) \rangle \end{aligned}$$

alors $\langle x, (\alpha u)^*y \rangle = \langle x, \bar{\alpha}u^*(y) \rangle$.

Donc $(\alpha u)^* = \bar{\alpha}u^*$.

$$6- (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

On a pour tout $x \in E, y \in F$:

$$\begin{aligned} \langle (u \circ v)x, y \rangle &= \langle x, (u \circ v)^*y \rangle \\ &= \langle u(v(x)), y \rangle \\ &= \langle v(x), u^*(y) \rangle \\ &= \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle \\ &= \langle x, (u^* \circ v^*)y \rangle \end{aligned}$$

alors $\langle x, (u \circ v)^*y \rangle = \langle x, (u^* \circ v^*)y \rangle$.

Donc $(u \circ v)^* = u^* \circ v^*$. ■

Proposition 6

Soit $u \in \mathcal{L}(H)$, alors $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{On a } \quad uu^{-1} &= I \\ (uu^{-1})^* &= (u^{-1})^*(u^*) = I^* = I \\ (u^{-1})^* &= (u^*)^{-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 8

Soit u un opérateur dans $\mathcal{L}(H)$, alors

- 1- $(u^n)^* = (u^*)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2- $\forall x \in H : \langle ux, x \rangle = 0 \implies u = 0$.

Preuve.

$$1- \forall n \in \mathbb{N} : (u^n)^* = (u^*)^n$$

La démonstration se fait par récurrence, soient x et y deux éléments de H .

Pour $n = 2$, on a

$$\langle u^2x, y \rangle = \langle ux, u^*y \rangle = \langle x, (u^*)^2y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

d'autre part,

$$\langle u^2x, y \rangle = \langle x, (u^2)^*y \rangle$$

$$\text{d'où} \quad (u^2)^* = (u^*)^2$$

On suppose qu'elle est vraie pour n , c'est à dire $(u^n)^* = (u^*)^n$ et on doit montrer pour $n + 1$.

$$\langle (u^{n+1})x, y \rangle = \langle (u^n)x, u^*y \rangle = \langle x, (u^n)^*u^*y \rangle$$

d'après l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \langle x, (u^n)^*u^*y \rangle &= \langle x, (u^*)^nu^*y \rangle = \langle x, (u^*)^{n+1}y \rangle \\ \langle (u^{n+1})x, y \rangle &= \langle x, (u^*)^{n+1}y \rangle \quad \forall x, y \in H. \end{aligned}$$

$$2- \forall x \in H : \langle ux, x \rangle = 0 \implies x = 0$$

$$\text{On a } \forall x, y \in H : \langle u(x+y), (x+y) \rangle = 0$$

$$\text{ce qui implique } \langle ux, x \rangle + \langle ux, y \rangle + \langle uy, x \rangle + \langle uy, y \rangle = 0$$

on a $\forall x, y \in H : \langle ux, x \rangle = \langle uy, y \rangle = 0$ donc

$$\langle ux, y \rangle + \langle uy, x \rangle = 0 \quad \text{---} \rightarrow 1$$

en remplaçant y dans 1 par iy

$$-i \langle ux, y \rangle + i \langle uy, x \rangle = 0 \quad \text{---} \rightarrow 2$$

on multiplie 2 par i , on trouve

$$\langle ux, y \rangle - \langle uy, x \rangle = 0 \quad \text{---} \rightarrow 3$$

en additionnant 1 et 3, on obtient

$$\langle ux, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in H.$$

On peut remplacer y par ux

$$\begin{aligned} \langle ux, ux \rangle = 0 \quad \forall x \in H &\implies \|ux\|^2 = 0 \\ &\implies ux = 0 \quad \forall x \in H \\ &\implies u = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 9

Soient E et F deux espaces de Hilbert et u un opérateur linéaire borné, alors

- 1) $(\text{Im } u)^\perp = \ker u^*$.
- 2) $(\text{Im } u^*)^\perp = \ker u$.

Preuve.

1)

$$\begin{aligned} \forall y \in (\text{Im } u)^\perp &\iff \langle ux, y \rangle = 0 \quad \forall x \in E \\ &\iff \langle x, u^*y \rangle = 0 \quad \forall x \in E \\ &\iff u^*y = 0 \\ &\iff y \in \ker u^*. \end{aligned}$$

D'où $(\text{Im } u)^\perp = \ker u^*$.

2)

$$\begin{aligned} \forall y \in (\text{Im } u^*)^\perp &\iff \langle u^*x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in E \\ &\iff \langle x, (u^*)^*y \rangle = 0 \quad \forall x \in E \\ &\iff (u^*)^*y = 0 \quad (\text{on a } (u^*)^* = u) \end{aligned}$$

$$\iff uy = 0$$

$$\iff y \in \ker u.$$

D'où $(\operatorname{Im} u^*)^\perp = \ker u.$ ■

Proposition 7

Soient E et F deux espaces de Hilbert et u un opérateur linéaire borné, alors

1) $\operatorname{Im} u$ est dense dans F si et seulement si u^* est injectif.

1) $\operatorname{Im} u^*$ est dense dans F si et seulement si u est injectif.

Preuve.

1) Si u^* est injectif $\iff \ker u^* = \{0_F\} \iff (\operatorname{Im} u)^\perp = \{0_F\}$

$$\iff ((\operatorname{Im} u)^\perp)^\perp = (\{0_F\})^\perp = F$$

on a $((\operatorname{Im} u)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im} u}$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} u} = (\{0_F\})^\perp = F$$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} u} = F.$$

2) Si u est injectif $\iff \ker u = \{0_E\} \iff (\operatorname{Im} u^*)^\perp = \{0_F\}$

$$\iff ((\operatorname{Im} u^*)^\perp)^\perp = (\{0_F\})^\perp = F$$

on a $((\operatorname{Im} u^*)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im} u^*}$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} u^*} = (\{0_F\})^\perp = F$$

$$\iff \overline{\operatorname{Im} u^*} = F. \quad \blacksquare$$

Conclusion

L'étude des opérateurs linéaires continus occupe une partie importante en analyse hilbertienne. L'un de ces opérateurs est l'adjoint qui associé à un opérateur linéaire borné. Grâce à cette notion, on peut définir plusieurs des classes particulières d'opérateurs bornés.

Bibliographie

- [1] F.BAYER-C.MARGARIA, Espace de Hilbert et opérateurs, Tome 2.
- [2] H.BREZIS, Analyse Fonctionnelle théorie et applications, Masson Paris 1987.
- [3] H.CHEBLI, Analyse Hilbertienne, Centre de publication universitaire Tunis 2001.
- [4] D.FEYEL, Espace de Hilbert, University d'Evry M 52 2008-09.
- [5] L.KANTOROVITCH, D.AKILOV, Analyse Fonctionnelle Tome 1, Tome 2, Editions Mir 1981.
- [6] M.NADIR, Cours d'Analyse Fonctionnelle, University de Msila Algérie 2004.