

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LAGHOUAT

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE POUR OBTENIR LE TITRE DE MAGISTER EN MATHÉMATIQUE

OPTION: ANALYSE FONCTIONNELLE ET EDP

Prépare par: ***Bidi Younes***

intitulé

Opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet

Encadreur: Dr.BENDAOUZ ZOHRA

Co-Encadreur: Dr.KORRICHI FATIMA

SOUTENU PUBLIQUEMENT LE ../../2017 À L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE DE LAGHOUAT DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE:

Mr.Mokhtari Abdelkader	Université de Laghouat	Président
Mr.Allaoui Salah-Eddine	Université de Laghouat	Examineur
Mr.Bentobache Mohand	Université de Laghouat	Examineur
Mme.Bendaoud Zohra	Université de Laghouat	Encadreur
Mme.Korricchi Fatima	Université de Laghouat	Co-Encadreur
Mr.Chettih Ali	ENS de Laghouat	invité

Juin 2017

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma sincère reconnaissance à tous ceux qui ont de près ou de loin manifesté leur intérêt, et apporté leur collaboration à ce présent travail, et en particulier à:

Madame ***Bendaoud Zohra***, Maître de Conférences A à l'Université de Laghouat, d'avoir participé à l'encadrement de ce mémoire et de m'avoir permis de l'accomplir grâce à ses conseils précieux, ses qualités scientifiques et sa rigueur dans le travail.

Madame ***Korrichi Fatima***, Maître de Conférences à l'Université de Laghouat, d'avoir accepté à diriger cette mémoire. Ses qualités scientifiques, ses conseils incessants m'ont été d'une aide précieuse pour mener à terme ce travail.

Monsieur ***Mokhtari Abdelkader***, Professeur à l'Université de Laghouat, d'avoir bien voulu présider le jury de soutenance,

Monsieur ***Allaoui Salah-Eddine***, Maître de Conférences A à l'Université à l'Université de Laghouat, d'avoir bien voulu participer au jury de soutenance en qualité d'examineur,

Monsieur ***Bentobache Mohand***, Maître de Conférences A à l'Université à l'Université de Laghouat, d'avoir bien voulu participer au jury de soutenance en qualité d'examineur,

Monsieur ***Chettih Ali***, Maître Assistant A à l'École Normale Supérieure de Laghouat, d'avoir bien voulu participer au jury de soutenance comme invité.

Madame **bendaoud Zohra** directrice de laboratoire de mathématique pure et appliquée d'avoir mes en notre disposition tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants de l'université de laghouat et de l'école Normale Supérieure de laghouat, particulièrement Les enseignants qui participent à la formation de magister: Dr.**Bendaoud Zohra**, Pr.**Abdelkader Mokhtari**, Dr.**Belabbaci Youcef**, Dr.**Bentobache Mohand**, Pr.**Youcef Atik**, Pr.**Mokrane Abdelhafid**, Pr.**Sadallah Aboubaker Khaled**, Dr.**Boukhatem Yamna** et Dr.**Djammel Raho**.

Je n'oublie surtout pas de remercier le directeur Monsieur **Khaled Bouziane** et le directeur adjoint Monsieur **Belakhder Abdelkader**, de l'école normale supérieure de Laghouat d'avoir mis à notre disposition tout ce dont on avait besoin pour muni à bien formation.

Mes vifs remerciements vont aussi à mes amis et collègues de l'école Normale Supérieure de laghouat, particulièrement: **Aissa Bouhali**, **Habbache Abdelhak**, **Hakmi Mouhammed**, **Walid laouigi(Latex)**, **Belile Toufik**, **Said Makhedoa**, **Mohammed**, **Zakaria**, **Hichem**, de m'avoir compris dans les moments difficiles ainsi que pour leurs avis et conseils qui m'ont été d'une aide incontestable.

Je remercie Dieu tout-Puissant Pour son aide. et je remercie Mes parents, ne faut pas oublier, bien sûr, ma chère grand-mère et chers frères.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

- ▶ mon père et ma mère.
- ▶ ma grand-mère et mes frères.
- ▶ ma famille.
- ▶ Mme.Bendaoud Zohra et Mme.Korrichi Fatima.
- ▶ mes amis.

Liste des symboles

$D(z_0, r)$: le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$.

$\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$: l'espace des fonctions holomorphes.

$H^p(\mathbb{D}), 0 \leq p \leq \infty$: l'espace de Hardy sur \mathbb{D} .

$H^2(\mathbb{D})$: l'espace de Hardy sur \mathbb{D} pour $p = 2$.

N_φ : la fonction de comptage de Nevanlinna sur l'espace $H^2(\mathbb{D})$.

C_φ : l'opérateur de composition associé au symbole φ .

$dA(z) = \frac{dx dy}{\pi}, z \in \mathbb{D}$: la mesure de Lebesgue planaire normalisée sur \mathbb{D} .

$N_{\varphi, \alpha}, 0 \leq \alpha \leq 1$: la fonction de comptage de Nevanlinna généralisée sur l'espace \mathcal{D}_α .

n_φ : la fonction de comptage de Nevanlinna sur l'espace \mathcal{D} .

$\mathcal{L}(E, F)$: l'ensemble des opérateurs linéaire de E dans F .

$\mathcal{K}(E, F)$: l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F .

$\varphi_{\Omega, K}$: la fonction distance correspondant à la fonction Ω et l'ensemble K .

$\mathcal{D}_w(f)$: intégrale de Dirichlet pondéré de la fonction $f \in \mathcal{D}_w$.

$S_2(\mathcal{H})$: la classe d'opérateurs de Hilbert-Schmidt.

\mathbb{D} : le disque unité.

\mathbb{T} : le cercle unité $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

$L^2(\mathbb{T})$: l'espace de Lebesgue sur \mathbb{T} .

f^* : la limite radiale de f .

$|E|$: la mesure de E .

\mathcal{D} : l'espace de Dirichlet classique.

$\mathcal{D}_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$: l'espace de Dirichlet.

ϕ_p : transformation de Möbius

$\|\cdot\|_e$: la norme essentielle.

χ : la fonction caractéristique.

k_λ : le noyau reproduisant pour $\lambda \in \mathbb{D}$.

K_t : le t -voisinage d'un ensemble K de \mathbb{T} .

$W(\zeta, \delta)$: La fenêtre de Carleson.

$E_\varphi(1)$ l'ensemble de contact de φ .

Table des matières

Remerciements	I
Dédicaces	III
Liste des symboles	IV
Introduction	1
1 Espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$	6
1.1 Préliminaire	7
1.1.1 Espace de Hilbert	7
1.1.2 Opérateurs sur les espaces vectoriels	9
1.1.3 Fonctions Holomorphes	10
1.1.4 Fonction harmonique et sous-harmonique	13
1.2 Espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$	14
1.2.1 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$	18
2 Opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$	23
2.1 Opérateur de Composition	24
2.2 Compacité des opérateurs de composition	36
2.2.1 Opérateur de Hilbert-Schmidt	37

2.3	Opérateurs de composition non compact	41
2.4	Fonction de comptage de Nevanlinna	43
3	Opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α	56
3.1	Espace de Dirichlet classique	57
3.2	Espaces de Dirichlet pondéré	59
3.3	Espaces de Dirichlet \mathcal{D}_α	61
3.4	Opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α	64
3.4.1	Fonction de comptage généralisée de Nevanlinna	64
3.4.2	La compacité et la bornitude des opérateurs de composition sur les espace de Dirichlet \mathcal{D}_α	68
3.4.3	Normes essentielles d'opérateur de composition	73
3.4.4	La compacité et la bornitude des opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D}	78
3.5	Exemple - La fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$	80
	Bibliographie	91

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des opérateurs de composition qui est un sujet intéressant et d'actualité. Cette étude utilise des techniques de plusieurs parties d'analyse pour prouver les résultats présentés à savoir la théorie des opérateurs, l'analyse fonctionnelle, la théorie de la mesure et la théorie des fonctions analytiques.

L'étude des opérateurs de compositions a été l'objet d'études de plusieurs mathématiciens, voir par exemple le livre de Joel H.Shapiro [10].

Soit E un espace de Banach des fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} de \mathbb{C} . Si φ est une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , l'opérateur de composition de symbole φ est défini par:

$$\begin{aligned} C_\varphi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto C_\varphi(f) = f \circ \varphi \end{aligned}$$

Le but de notre travail est l'étude des opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Le problème auquel nous nous intéressons concerne la compacité d'un opérateur de composition. Il se base essentiellement sur l'article de Z.Bendaoud et F.Korrichi [3], et la thèse du Dr.F.Korrichi qui à été dirigée par E.Strouse et Z.Bendaoud et soutenue en 2016 [18].

On note par $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} . On définit l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par l'espace des fonctions holomorphes

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$

sur le disque unité telle que la norme,

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{it})|^2 dt, \quad \text{avec } \mathbb{T} \text{ le cercle de centre } r$$

est finie. Ou bien, si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on a:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2.$$

On note par $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité du plan complexe \mathbb{C} , $L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Lebesgue sur \mathbb{T} . L'espace $H^2(\mathbb{D})$ peut être identifié à un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ défini par:

$$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, n < 0\}.$$

muni de la norme de $L^2(\mathbb{T})$.

Il s'ensuit par la formule de **Littlewood-Paley** que nous avons une autre expression de la norme de $H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \left(\frac{1}{|w|} \right) dA(w).$$

où $dA(z) = dx dy / \pi$, $z = x + iy$ ($dA(z) = r dr d\theta / \pi$, $z = r e^{i\theta}$).

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, l'opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ de symbole φ est défini par:

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto C_\varphi(f) = f \circ \varphi \end{aligned}$$

La bornitude ou bien la continuité de l'opérateur C_φ est assurée par le **principe de subordination de Littlewood (1925)**.

On définit la fonction de comptage de Nevanlinna de φ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$ par:

$$N_\varphi(z) := \begin{cases} \sum_{w \in \varphi^{-1}(\{z\})} \log \left(\frac{1}{|w|} \right) & , z \in \varphi(\mathbb{D}) \\ 0 & , z \notin \varphi(\mathbb{D}) \end{cases}$$

où $\varphi^{-1}(\{z\})$ désigne l'ensemble des antécédents de z par φ .

La compacité des opérateurs de composition est basée sur la fonction de comptage de Nevanlinna de symbole φ . En 1987, J.H.Shapiro [10] a caractérisé la compacité de l'opérateur de composition dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna comme suit:

$$C_\varphi \text{ est compact} \Leftrightarrow \lim_{|w| \rightarrow 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

Soit $w : \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable telle que

$$\int_{\mathbb{D}} w(z) dA(z) < \infty.$$

Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, On définit son *intégrale de Dirichlet pondérée* par:

$$\mathcal{D}_w(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(z) dA(z).$$

On définit aussi *l'espace de Dirichlet pondéré* correspondant \mathcal{D}_w qui est l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tel que $\mathcal{D}_w(f) < \infty$.

L'espace \mathcal{D}_w est un espace vectoriel normé muni de la norme:

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w}^2 := |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(z) dA(z).$$

Si $w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, on pose:

$$dA_\alpha(z) = (1 + \alpha)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

On définit l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α par l'espace des fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sur le disque unité telle que la norme,

$$\|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) \asymp \sum_{n \geq 0} (1 + n)^{1-\alpha} |a_n|^2,$$

soit finie.

Quand $\alpha = 1$, $\mathcal{D}_1 = H^2$ est l'espace de Hardy, quand $\alpha = 0$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ est l'espace de Dirichlet classique.

La compacité et la bornitude de l'opérateur de composition sur l'espaces de Dirichlet \mathcal{D}_α , pour $0 \leq \alpha \leq 1$, sont caractérisée par la fonction de comptage généralisée de

Nevanlinna associée aux symboles.

Nous donnons un exemple de la fonction distance correspondant à Ω et K qui est définie par:

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \quad p.p \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Pour K un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} , $\Omega \in C^1([0, 2\pi])$ telle que $\Omega(0) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(d(\zeta, K)) |d\zeta| < \infty.$$

Puis, nous donnons une estimation de la fonction généralisée de Nevanlinna, cette estimation nous donne la compacité et la bornitude de l'opérateur de composition associé aux fonctions distance $\varphi_{\Omega,K}$.

1. Soit K le Cantor généralisé associé à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\sup_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, soit Ω une fonction croissante avec $\Omega(0) = 0$ et $\beta < \mu$, alors:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) = O\left((1 - |z|)^{\frac{\mu}{\beta}}\right), \quad |z| \rightarrow 1^-.$$

2. Soit $0 < \alpha < 1$. Soit K le Cantor généralisé associé à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie $\sup_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, telle que $\alpha + \mu \geq 1$. Et soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que

$$\beta < \min\{(1 - \alpha)/2, \alpha + \mu - 1\},$$

alors:

$$N_{\varphi_{\Omega,K,\alpha}}(z) = O\left((1 - |z|)^{\frac{\alpha + \mu - 1}{\beta}}\right), \quad (|z| \rightarrow 1^-).$$

A la fin de l'exemple, nous allons démontrer que l'opérateur de composition de la fonction distance est un opérateur de la classe de Hilbert-Schmidt avec la condition:

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\Omega'(d(\zeta, K))}{(\Omega(d(\zeta, K)))^{2+\alpha}} (d(\zeta, K))^{\alpha+1} |d\zeta| < \infty,$$

où $0 \leq \alpha < 1$.

Notre travail est divisé en trois chapitres:

- Dans le *premier chapitre*, on présente quelques rappels en analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs.
- Dans le *deuxième chapitre*, nous avons donné la définition des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ et leurs propriétés fondamentales, en particulier on a étudié leur compacité.
- Dans le *troisième chapitre*, nous allons étudier les opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet \mathcal{D}_α pour $0 \leq \alpha < 1$. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement, à la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée aux symboles et étudie l'exemple de l'opérateur de composition associé à la fonction distance.

CHAPTER 1

Espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$

1.1 Préliminaire

Dans ce qui suit, nous allons présenter un petit rappel sur l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs.

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} , on appelle **produit scalaire** sur E toute forme symétrie hermitienne, sesquilineaire, définie positive et non dégénéré. C'est à dire,

l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ et qui vérifie:

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in E$ (symétrie hermitienne).
2. $\langle x + ay, z \rangle = \langle x, z \rangle + \bar{a} \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E, a \in \mathbb{C}$ (linéaire à gauche).
3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$ (définie positive).
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (non dégénéré).

Définition 1.1.2.

Un **espace pré-hilbertien** est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

Définition 1.1.3.

Un **espace de Hilbert** est un espace pré-hilbertien complet *i.e.* un espace vectoriel, muni d'un produit scalaire, qui est complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Définition 1.1.4.

On appelle **base hilbertienne** d'un espace de Hilbert séparable H de dimension infinie une suite orthonormée $\{e_n\}_{n \geq 0}$ qui est de plus totale dans H *i.e.*, qui engendre un sous-espace dense dans H . On dit aussi base orthonormée de H .

Noyau Reproductif d'un Espace de Hilbert

Définition 1.1.5.

Soit H un espace de Hilbert des fonctions définies sur \mathbb{D} et à valeurs dans \mathbb{C} , on note \langle, \rangle et $\|\cdot\|$, respectivement le produit scalaire et la norme de H .

On dit qu'une application k de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ est un **noyau reproductif** pour H si,

1. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}, k_z(w) = k(z, w)$ est une fonction de w qui appartient à H .
2. Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $f \in H, f(z) = \langle f, k_z \rangle$.

En particulier pour tous $z, w \in \mathbb{D}, k_z(w) = \langle k_z, k_w \rangle$ et

$$\|k_z\| = \langle k_z, k_z \rangle^{\frac{1}{2}} = k(z, z)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, on dit qu'un espace de Hilbert H admet un noyau reproductif, s'il existe $k \in H$ vérifiant les conditions 1 et 2.

Proposition 1.1.1.

Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur \mathbb{D} admettant un noyau reproductif k . Alors:

1. k est unique.
2. Pour tout $z, w \in \mathbb{D}, k(z, w) = \overline{k(w, z)}$.
3. Soit $z \in \mathbb{D}, k(z, z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = 0$, pour tout $f \in H$.
4. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}, |k(z, w)| \leq k(z, z)^{\frac{1}{2}} \times k(w, w)^{\frac{1}{2}}$.

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'application $k_z = k(z, \cdot)$ est bornée sur tout compact de \mathbb{D} et k est bornée sur tout compact de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

1.1.2 Opérateurs sur les espaces vectoriels

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{C} .

On appelle **opérateur** de E dans F toute application T définie de E dans F par:

$$\begin{aligned} T : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto Tx \end{aligned}$$

tel que $D(T)$ soit le domaine de définition de l'opérateur T .

L'opérateur T est dit linéaire si:

$$\forall x, y \in E, \lambda, \mu \in K, \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaire de E dans F .

Définition 1.1.6.

Un opérateur linéaire T de E dans F est dit borné s'il est défini partout dans E et transforme tout ensemble borné de E en un ensemble borné de F .

Théorème 1.1.1.

Soient E et F des espaces normés, Soit T un opérateur linéaire de E dans F .
Alors:

$$T \text{ continue} \Leftrightarrow T \text{ borné.}$$

Définition 1.1.7.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que T est un opérateur compact si l'image par T d'un ensemble bornée A de E est relativement compacte dans F (l'adhérence de $T(A)$ est compact).

On note par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F .

Définition 1.1.8.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que l'opérateur T est de rang fini si l'image de T est de dimension finie, son rang étant la dimension de l'image de T .

Proposition 1.1.2.

Tout opérateur de rang fini est compact.

Théorème 1.1.2. [10]

Supposons que T est un opérateur linéaire borné de l'espace de Hilbert \mathcal{H} , alors T compact si et seulement s'il existe une suite d'opérateurs bornées $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de rang finie tel que:

$$\|T - F_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

1.1.3 Fonctions Holomorphes

On note par \mathbb{D} le disque unité du plan complexe \mathbb{C} , $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité.

Définition 1.1.9. [9]

Une fonction $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite **\mathbb{C} -dérivable** en un point $a \in \mathbb{D}$ si sa limite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

existe dans \mathbb{C} .

Si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point de \mathbb{D} , la fonction $f' : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée la **dérivée** de la fonction f .

Exemple.

La fonction $z \rightarrow z$ est \mathbb{C} -dérivable sur \mathbb{C} , et sa dérivée est la fonction constante 1.

Définition 1.1.10. [9]

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est **holomorphe** dans \mathbb{D} si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point.

On note par $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} .

Définition 1.1.11. [9]

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est **\mathbb{C} -analytique** si elle est développable en série entière de la variable z au voisinage de chaque point.

Autrement dit: si pour tout point $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe une suite de coefficients $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (dépendant de z_0) et un nombre $r > 0$ tels que pour $z \in D(z_0, r)$, on a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Corollaire 1.1.1. [9]

Toute fonction \mathbb{C} -analytique si et seulement si holomorphe.

Inégalité de Jensen

Théorème 1.1.3. Inégalité de Jensen [5]

Soit μ une mesure positive sur une tribu \mathcal{M} dans un ensemble mesurable Ω telle que $\mu(\Omega) \in]0, \infty[$. Soit $f \in L^1(\mu)$ une fonction à valeurs réelles telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$. On a l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \left(\int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu\right). \quad (1.1)$$

En particulier si $\mu(\Omega) = 1$ on obtient:

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \left(\int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu\right).$$

Inégalité de Hölder et Minkowski

Théorème 1.1.4.

Soit X un espace mesuré, de mesure μ positive. Soient f et g deux fonctions mesurables sur X à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

1. **Inégalité de Hölder:**

Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) avec $1 < p < \infty$.

Alors:

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. **Inégalité de (Herman) Schwarz:**

L'inégalité de Hölder dans le cas où $p = q = 2$, donc on a:

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. **Inégalité de Minkowski:**

Soit $p \in [1, \infty[$. Alors

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace L^2

Définition 1.1.12.

On définit l'espace L^2 sur Ω par:

$$L^2(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} ; \|f\|_2 < \infty\},$$

$$\text{où } \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace L^2 est un espace complet.

Autrement dit, c'est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg d\mu, f, g \in L^2.$$

Théorème 1.1.5. (Plancherel-Parseval) [5]

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier, tel que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt,$$

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus f est la somme de sa série de Fourier $(S_n(f))_{n \geq 0}$, où

$$S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k| \leq n} a_k e^{ikt}$$

avec,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\| = 0.$$

Théorème 1.1.6. (Riesz-Fischer) [5]

Toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de \mathbb{C} telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$.

1.1.4 Fonction harmonique et sous-harmonique

Définition 1.1.13.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit f une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est *harmonique* sur Ω si f est de classe \mathcal{C}^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω , où Δf est le Laplacien de f défini par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Définition 1.1.14.

Une fonction $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{D} est dite *sous-harmonique* si elle a la propriété suivante:

pour tout domaine (ouvert connexe) Ω de \mathbb{D} , dont la fermeture $\bar{\Omega}$ est inclus dans \mathbb{D} et pour toute fonction U harmonique dans Ω et continue dans $\bar{\Omega}$, vérifiant $f(z) \leq U(z)$ sur la frontière $F_r(\Omega)$ de Ω , on a:

$$f(z) \leq U(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Théorème 1.1.7. [5]

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{D} . Alors f est sous-harmonique si et seulement si, pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(z_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$ avec, de plus,

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt, \quad (1.2)$$

pour tout $\rho < \rho_0$.

Exemple. [5]

1. Soit f analytique dans \mathbb{D} et soit $p > 0$. Alors la fonction g continue sur \mathbb{D} à valeurs réelles définie par $g(z) = |f(z)|^p$ est sous-harmonique.
2. Soit u une fonction harmonique dans \mathbb{D} et soit $p \geq 1$. Alors la fonction g continue sur \mathbb{D} à valeurs réelles définie par $g(z) = |u(z)|^p$ est sous-harmonique.

1.2 Espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$

Dans cette partie, nous commençons par définir l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [0, \infty[$ et donner quelques propriétés fondamentales.

Définition 1.2.1.

Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ on définit les quantités suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt \\ M_p(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} ; 0 < p < \infty \\ M_\infty(f, r) = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(re^{it})| \end{array} \right.$$

tel que la fonction \log^+ est la fonction continue définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\log^+(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $\log^+(x) = \sup(\log(x), 0)$.

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D}), 0 \leq p \leq \infty$, est défini par:

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} M_p(f, r) < \infty \right\}.$$

Proposition 1.2.1. [5]

Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Les fonctions $r \mapsto M_p(f, r)$ (pour $0 < p \leq \infty$) sont des fonctions croissantes sur $[0, 1[$.

Pour démontrer cette proposition, on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.2.2. [5]

Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur \mathbb{D} et soit

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt ; \forall r \in [0, 1[$$

Alors $r \mapsto m(r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

Alors $|f|^p$ et $\log^+ |f|$ sont des fonctions sous-harmoniques sur \mathbb{D} pour $0 < p < \infty$.

D'après la Proposition.1.2.2, $r \mapsto M_p(f, r)$ (pour $0 \leq p \leq \infty$) est une fonction croissante sur $[0, 1[$. □

On peut alors redéfinir les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D}), 0 < p \leq \infty$ de la façon suivante:

Corollaire 1.2.1.

Pour $0 \leq p \leq \infty$ nous avons:

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r \rightarrow 1} M_p(f, r) < \infty \right\}.$$

Notation:

Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $0 < p \leq \infty$, on pose:

$$\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1} M_p(f, r).$$

Le théorème suivant précise le lien entre les différents espaces de Hardy:

Théorème 1.2.1. [5]

On a les inclusions suivantes:

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}),$$

pour $0 < s < p < \infty$.

Démonstration.

- $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$:

Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, pour tout $p \in]0, \infty[$ on a:

$$|f(re^{it})|^p \leq \|f\|_\infty^p$$

pour $r \in [0, 1[$ et $t \in [0, 2\pi[$.

On en déduit que:

$$M_p(f, r) \leq \|f\|_\infty$$

pour $r \in [0, 1[$, ce qui implique que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

et donc $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p > 0$.

- $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$:

Pour $p > s > 0$, d'après l'inégalité de Hölder, pour f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0, 1[$, on a:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^s dt \leq \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{s}{p}} (2\pi)^{1-\frac{s}{p}}$$

D'où $M_s(f, r) \leq M_p(f, r)$.

Et donc $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$ pour $p > s > 0$.

□

Théorème 1.2.2. [5]

Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

Démonstration.

1. $\|\cdot\|_p$ est une norme:

Pour cela il suffit de démontrer que la norme $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire.

D'après **l'inégalité de Minkowski** (si $1 \leq p < \infty$) ou d'après l'inégalité triangulaire que vérifie le module sur \mathbb{C} (si $p = \infty$), pour toutes les fonctions f et g mesurables sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0, 1[$, on a:

$$M_p(f+g, r) \leq M_p(f, r) + M_p(g, r) \text{ pour tout } r \in [0, 1[.$$

Pour toutes les fonctions $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ (avec $1 < p \leq \infty$),
on a dans ce cas

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Donc $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $H^p(\mathbb{D})$.

Pour $p < 1$, $H^p(\mathbb{D})$ est encore un espace vectoriel. Mais le problème est que $\|\cdot\|_p$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

2. Fixons à présent $p \in [1, \infty]$ et montrons que les espaces vectoriels normés $H^p(\mathbb{D})$ sont complets.

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$. Soient r, R tels que $r < R < 1$ et supposons que $|z| \leq r$. On applique la formule de Cauchy à $f_n - f_m$ sur le cercle Γ_R centré en 0 et de rayon R . On obtient alors:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{f_n(\xi) - f_m(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R-r} \int_{-\pi}^{\pi} R |f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| d\theta \end{aligned}$$

Ainsi, pour $|z| \leq r$ on a:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R-r} M_1(f_n - f_m, R)$$

Comme l'application $\phi : x \mapsto x^p$ est convexe pour $p \geq 1$, et d'après **l'inégalité de Jensen** appliquée à la mesure μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} dt$ sur $[-\pi, \pi]$, on obtient:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(f_n - f_m)(Re^{it})|}{2\pi} dt \right)^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f_n - f_m)(Re^{it})|^p dt$$

Et donc

$$M_1(f_n - f_m, R) \leq M_p(f_n - f_m, R).$$

D'après la Proposition.1.2.1, on a:

$$M_p(f_n - f_m, R) \leq \lim_{R \rightarrow 1} M_p(f_n - f_m, R) = \|f_n - f_m\|_p$$

dans ce cas et pour $|z| \leq r$ on a:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R-r} \|f_n - f_m\|_p$$

La suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers une fonction f holomorphe sur \mathbb{D} .

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ébut de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$, et comme $\varepsilon > 0$, il existe $m = m(\varepsilon) \geq 1$ tel que $\forall n > m$ on ait:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Pour $r < 1$ on obtient:

$$M_p(f - f_m, r) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_p(f_n - f_m, r) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Ce qui implique que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_m\|_p = 0.$$

D'autre part, sachant que $\|f\| \leq \|f_n - f\|_p + \|f_n\|$, alors $\|f\| < \infty$

donc La suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $H^p(\mathbb{D})$ qui est dans ce cas un espace de Banach. cqfd,

□

1.2.1 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Définition 1.2.2.

On définit l'espace de Hardy H^2 sur le disque unité \mathbb{D} par:

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r \rightarrow 1} M_2(f, r) < \infty \right\}.$$

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\}.$$

Théorème 1.2.3. [5]

Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{D} de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, on a:

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty \quad (a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt)$$

Démonstration.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour $r \in [0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

En passant à la limite, on a:

$$\infty > \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2.$$

Ce qui termine la preuve. □

Remarque 1.2.1.

Une autre écriture de la norme de $f \in H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.2.3.

On définit l'espace de Hardy H^2 sur le cercle unité \mathbb{T} par:

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) ; a_n = \hat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}.$$

Théorème 1.2.4. (la limite radiale) [10]

Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction dans $H^2(\mathbb{D})$, et f^* une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ tel que:

$$f^*(e^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{int},$$

alors $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) = f^*(e^{it})$ existe presque partout sur \mathbb{T} , de plus

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

f^* est la limite radiale de f .

On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$, d'après le théorème suivants:

Théorème 1.2.5. [5]

L'application:

$$\begin{aligned} \Phi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto \Phi(f) = f^* \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique. Avec f^* sa la limite radial.

Démonstration.

1. Φ est isométrique:

Puisque $\lim_{r \rightarrow 1} \|f^* - f_r\| = 0$, on a:

$$\|f\|_2 := \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r\|_2 = \|f^*\|_2.$$

Comme $\widehat{f^*}(n) = 0$ pour tout $n < 0$, l'application $\Phi : f \mapsto f^*$ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$.

2. l'application Φ est linéaire (**Par définition**).

3. Φ est isomorphisme:

- l'application est automatiquement injective.
- l'application surjective:

Soit $g \in H^2(\mathbb{T})$, donc g est de la forme:

$$g(e^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{int} \text{ avec } \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty.$$

Alors la fonction f est défini sur \mathbb{D} par:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in H^2(\mathbb{D})$$

D'après la définition de Hardy, l'application Φ est surjective. Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

□

Théorème 1.2.6. [5]

$H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f^*, g^* \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt.$$

Démonstration.

Par définition, $\langle f, f \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$. Comme $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé.

De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le Théorème.1.2.2, Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

□

Théorème 1.2.7. (Estimation de Growth) [10]

Pour toute $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a:

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la série de puissance de f on obtient, pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \left| \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 0} |a_n| |z^n| \\ &\leq \left(\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 0} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_2 \times \left(\frac{1}{1-z^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.2. [10]

Toute suite convergente en norme dans $H^2(\mathbb{D})$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Démonstration.

Supposons $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente en norme dans $H^2(\mathbb{D})$ à une fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, i.e. $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$,

pour $0 < R < 1$, et pour n fixe, on utilise **l'estimation de Growth** on obtient:

$$\sup_{|z| \leq R} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_2}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

donc $f_n \rightarrow f$ converge uniformément dans le disque fermé $\{|z| \leq R\}$, comme R est arbitraire, alors $f_n \rightarrow f$ converge uniformément sur tout le compact \mathbb{D} . □

Exemple.

La fonction $z \mapsto \log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n}$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$, car la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2}$ est finie.

Corollaire 1.2.3. [10]

$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$. En générale, si $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et si $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors $bf \in H^2(\mathbb{D})$,
De plus $\|bf\|_2 \leq \|b\|_\infty \|f\|_2$.

Démonstration.

Soit $b \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a donc:

$$\|bf\|_2^2 = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |b(re^{it})f(re^{it})|^2 dt \leq \left(\sup_{z \in \mathbb{D}} \|b(z)\| \right)^2 \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right) < \infty.$$

De plus

$$\|bf\|_2 \leq \|b\|_\infty \|f\|_2.$$

Ce qui termine la preuve. □

Définition 1.2.4.

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on définit le noyau reproduisant en λ qu'on note k_λ , la fonction $k_\lambda \in H^2(\mathbb{D})$ qui est définie par:

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}.$$

On a:

$$\forall f \in H^2, \langle f, k_\lambda \rangle = f(\lambda).$$

De plus,

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = \frac{1}{1 - |\lambda|^2}.$$

CHAPTER 2

Opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux opérateurs de composition associés à des fonctions holomorphes définies sur \mathbb{D} dans lui même. Nous nous intéressons aux principales propriétés de ces opérateurs sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, et nous nous concentrerons à la bornitude et à la compacité.

2.1 Opérateur de Composition

Définition 2.1.1.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, l'opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ de symbole φ est défini par:

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{D}) \\ f &\longmapsto C_\varphi(f) = f \circ \varphi \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1.

Pour $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, Il est à remarqué que C_φ est un opérateurs linéaire.

Démonstration.

Soit $f, g \in H^2$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on a:

$$\begin{aligned} (C_\varphi(af + bg))(z) &= (af + bg)(\varphi(z)) \\ &= (af)(\varphi(z)) + (bg)(\varphi(z)) \\ &= a(f)(\varphi(z)) + b(g)(\varphi(z)) \\ &= a(C_\varphi f)(z) + b(C_\varphi g)(z) \\ &= (aC_\varphi f + bC_\varphi g)(z), \end{aligned}$$

Alors:

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad (C_\varphi(af + bg))(z) = (aC_\varphi f + bC_\varphi g)(z).$$

□

Théorème 2.1.1. [20]

Soit $\varphi, \psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ deux fonctions holomorphe, si C_φ et C_ψ sont des opérateurs de composition, alors

$$C_\varphi C_\psi = C_{\psi \circ \varphi}.$$

Démonstration.

Notons que,

$$(C_\varphi C_\psi f)(z) = (C_\varphi(f \circ \psi))(z) = (f \circ \psi \circ \varphi)(z) = (C_{\psi \circ \varphi} f)(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Donc,

$$C_\varphi C_\psi = C_{\psi \circ \varphi}.$$

□

Exemple.

Soit $\varphi(z) = z^2$. Si f est dans H^2 , alors $C_\varphi f$ est dans H^2 et $\|C_\varphi f\| = \|f\|$. Par conséquent, C_φ est une isométrie de H^2 dans lui même.

Démonstration.

Si f est la série de puissance $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, alors $C_\varphi f$ est la série de puissance

$$(C_\varphi f)(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}.$$

Ainsi $C_\varphi f \in H^2$, et toutes les affirmations ci-dessus sont immédiates. □

L'opérateur de composition C_φ sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est toujours borné si $\varphi(0) = 0$, cela d'après le **principe de subordination de Littlewood**, qui est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. (Principe de Subordination de Littlewood (1925)) [10]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , et $\varphi(0) = 0$, pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a:

$$C_\varphi \in H^2(\mathbb{D}) \text{ et } \|C_\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Démonstration.

La preuve est basée sur l'opérateur de déplacement à gauche (**backward shift operator**) B , définit sur $H^2(\mathbb{D})$ par:

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n+1)z^n,$$

Où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)z^n \in H^2(\mathbb{D})$.

L'opérateur de déplacement:

Le nom vient du fait que B déplace les coefficients de la série de puissance de f par un pas à gauche et élimine le terme constant.

Donc,

$$\forall f \in H^2(\mathbb{D}), \quad \|Bf\|_2 \leq \|f\|_2.$$

On remarque que pour toute fonction holomorphe $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a:

$$f(z) = f(0) + zBf(z) \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.1)$$

$$B^n f(0) = \widehat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

On suppose que f est un polynôme. Il est clair, dans ce cas, que f est bornée sur \mathbb{D} , alors $f \circ \varphi$ est aussi borné. On déduit que $f \circ \varphi \in H^2(\mathbb{D})$.

En remplaçant z par $\varphi(z)$ dans l'équation (2.1), on obtient:

$$f(\varphi(z)) = f(0) + \varphi(z)(Bf)(\varphi(z)) \quad z \in \mathbb{D}, \quad (2.3)$$

On réécrit cette équation avec les notations des opérateurs de composition et de multiplication:

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi Bf, \quad (2.4)$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, le coefficient constant de $M_\varphi C_\varphi Bf$ est nul, donc $M_\varphi C_\varphi Bf$ est orthogonale à la fonction constante $f(0)$ dans $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi,

$$\|C_\varphi(f)\|_2^2 = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi Bf\|_2^2 \leq |f(0)|^2 + \|C_\varphi Bf\|_2^2, \quad (2.5)$$

la dernière inégalité résulte de la propriété de contraction des opérateurs de multiplication puisque $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.

Remplaçons maintenant f , successivement, par $Bf, B^2f, \dots, B^n f$ dans l'équation (2.5) on obtient:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi Bf\|_2^2 &\leq |Bf(0)|^2 + \|C_\varphi B^2f\|_2^2 \\ \|C_\varphi B^2f\|_2^2 &\leq |B^2f(0)|^2 + \|C_\varphi B^3f\|_2^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \|C_\varphi B^n f\|_2^2 &\leq |B^n f(0)|^2 + \|C_\varphi B^{n+1} f\|_2^2 \end{aligned}$$

On déduit que, pour tout entier n positif, on a:

$$\|C_\varphi f\|_2^2 \leq \sum_{k=0}^n |B^k f(0)|^2 + \|C_\varphi B^{n+1} f\|_2^2. \quad (2.6)$$

Rappelons que f est un polynôme, si n est son degré, alors $B^{n+1} f = 0$, donc l'inégalité (2.6) devient:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|_2^2 &\leq \sum_{k=0}^n |B^k f(0)|^2 + \|C_\varphi B^{n+1} f\|_2^2 \\ &= \sum_{k=0}^n |B^k f(0)|^2 \\ &= \sum_{k=0}^n |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

ceci nous montre que C_φ est une contraction de norme dans $H^2(\mathbb{D})$.

Soit

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}(k) z^k$$

On note par f_n la somme partielle de la série de Taylor d'ordre n associé à f .

On a $f_n \rightarrow f$ en norme dans $H^2(\mathbb{D})$, alors $f_n \rightarrow f$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , Dans ce cas $f_n \circ \varphi$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$ sur tout compact de \mathbb{D} . Dans ce cas et pour chaque r , $0 < r < 1$ fixé, on a:

$$\begin{aligned} \|f_r \circ \varphi\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi(re^{i\theta}))| d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(\varphi(re^{i\theta}))| d\theta \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|f_n \circ \varphi\|_2^2 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|f_n\|_2^2 \\ &\leq \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

il suffit de faire tendre r vers 1. □

Opérateurs de composition induit par des automorphismes

Pour prouver que C_φ est bornée même lorsque $\varphi(0) \neq 0$, nous utiliserons les automorphismes conformes pour déplacer des points de \mathbb{D} .

Pour chaque point $p \in \mathbb{D}$, rappelons l'automorphisme spéciale (**transformation de Möbius**):

$$\alpha_p(z) = \frac{p-z}{1-\bar{p}z},$$

qui transforme \mathbb{D} en lui même, il échange p avec l'origine et il est son propre inverse.

Posons $p = \varphi(0)$. La fonction holomorphe $\psi = \alpha_p \circ \varphi$ prend \mathbb{D} en elle même et fixe l'origine.

Par la propriété d'auto-inverse de α_p , nous avons $\varphi = \alpha_p \circ \psi$ et cela se traduit par l'équation de l'opérateur $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$.

On a vu que C_ψ est borné (**Contractante**), et on sait que le produit des opérateurs bornés est toujours borné.

Lemme 2.1.1. [10]

Pour tout $p \in \mathbb{D}$, l'opérateur C_{α_p} est borné dans $H^2(\mathbb{D})$, de plus:

$$\|C_{\alpha_p}\| \leq \left(\frac{1+|p|}{1-|p|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration.

Supposons que f est holomorphe dans une partie du disque fermé, $R\mathbb{D} = \{|z| < R\}$, pour certain $R > 1$. Comme

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty,$$

En passant à la limite à l'intérieur de l'intégrale de sorte que:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Par un simple changement de variable on a:

$$\begin{aligned} \|f \circ \alpha_p\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha_p(e^{i\theta}))|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 |\alpha_p'(e^{it})| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1-|p|^2}{|1-\bar{p}e^{it}|^2} dt \\
 &\leq \frac{1-|p|^2}{(1-|p|)^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt \right) \\
 &= \frac{1+|p|}{(1-|p|)} \|f\|^2.
 \end{aligned}$$

On fait tendre R vers 1, cqfd. □

Le **théorème de Littlewood** suivant donne l'estimation de la norme de l'opérateur de composition C_φ .

Théorème 2.1.3. [10]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} avec $\varphi(0) \neq 0$, alors C_φ est un opérateur borné dans $H^2(\mathbb{D})$, et

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration.

Il a été indiqué précédemment que $C_\varphi = C_\psi C_{\alpha_p}$, où $p = \varphi(0)$, ψ fixé.

D'après **le lemme précédent** et **le principe de subordination de Littlewood**, qui montrent que les deux opérateurs sont bornés dans $H^2(\mathbb{D})$, d'où C_φ est le produit d'opérateurs bornés de $H^2(\mathbb{D})$.

Comme $\|C_\psi\| \leq 1$, on déduit que:

$$\|C_\varphi\| \leq \|C_\psi\| \|C_{\alpha_p}\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

□

Définition 2.1.2. Pour deux fonctions f et g analytiques sur \mathbb{D} , f est **subordonné** à g , s'il existe une fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ avec $\varphi(0) = 0$ telle que $f = g \circ \varphi$.

Corollaire 2.1.1. (*Principe de Subordination de Littlewood (1925)*)[20]

Si f dans H^2 est subordonné à g dans H^2 , alors

$$\|f\| \leq \|g\|.$$

Lemme 2.1.2. [20]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , si C_φ est un opérateur de composition et k_λ le noyau reproduisant, alors:

$$C_\varphi^* k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}.$$

Démonstration.

Pour tout f dans H^2 , on a:

$$(f, C_\varphi^* k_\lambda) = (C_\varphi f, k_\lambda) = (f \circ \varphi, k_\lambda) = f(\varphi(\lambda)).$$

Comme:

$$(f, k_{\varphi(\lambda)}) = f(\varphi(\lambda)),$$

on obtient:

$$(f, C_\varphi^* k_\lambda) = (f, k_{\varphi(\lambda)}), \quad \forall f \in H^2(\mathbb{D})$$

Ce qui implique que $C_\varphi^* k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}$. □

Le théorème suivant donne une estimation de la borne inférieure et la borne supérieure de la norme de l'opérateur de composition C_φ .

Théorème 2.1.4. [20]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , C_φ un opérateur de composition, on a:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - |\varphi(0)|^2}} \leq \|C_\varphi\| \leq \frac{2}{\sqrt{1 - |\varphi(0)|^2}}.$$

Démonstration.

En utilisant le lemme précédent avec $\lambda = 0$, on obtient:

$$C_\varphi^* k_0 = k_{\varphi(0)}.$$

Et, on a:

$$\|k_\lambda\|^2 = \frac{1}{1 - |\lambda|^2},$$

Donc $\|k_0\| = 1$, et $\|k_{\varphi(0)}\| = \frac{1}{\sqrt{1 - |\varphi(0)|^2}}$.

de plus, on a:

$$\|k_{\varphi(0)}\| = \|C_\varphi^* k_0\| \leq \|C_\varphi^*\| \|k_0\|,$$

Donc:

$$\frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}} \leq \|C_\varphi^*\| = \|C_\varphi\|.$$

Pour prouver l'autre inégalité, nous commençons par le résultat précédent,

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Notons que pour $0 \leq r < 1$, on a l'inégalité:

$$\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} = \sqrt{\frac{(1+r)^2}{1-r^2}} = \frac{1+r}{\sqrt{1-r^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1-r^2}},$$

On pose $\varphi(0) = r$, on obtient,

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}} \leq \frac{2}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}}.$$

□

Corollaire 2.1.2. [20]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , la norme de l'opérateur de composition C_φ est égale 1 si et seulement si $\varphi(0) = 0$.

Démonstration.

- Si $\varphi(0) = 0$, alors $1 \leq \|C_\varphi\| \leq 1$, donc on a:

$$\|C_\varphi\| = 1.$$

- Si $\|C_\varphi\| = 1$, alors $|\varphi(0)|^2 \leq 0$, donc on a:

$$\varphi(0) = 0.$$

□

Théorème 2.1.5. [20]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , un opérateur A sur H^2 dans lui-même est un opérateur de composition si et seulement si,

$$A^*k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}.$$

Démonstration.

- Nous avons montré précédent que $A^*k_\lambda = k_{\varphi(\lambda)}$ quand $A = C_\varphi$.
- Inversement, Supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, $A^*k_\lambda = k_{\lambda'}$, Pour certains $\lambda' \in \mathbb{D}$, défini φ par:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \\ \lambda &\mapsto \varphi(\lambda) = \lambda' \end{aligned}$$

Notons que, pour $f \in H^2$, on a:

$$(Af, k_\lambda) = (f, A^*k_\lambda) = (f, k_{\varphi(\lambda)}) = f(\varphi(\lambda)).$$

Si on prend $f(z) = z$, alors $g = Af$ est dans H^2 , donc analytique. Mais alors, par l'équation ci-dessus, nous avons,

$$g(\lambda) = (g, k_\lambda) = (Af, k_\lambda) = \varphi(\lambda).$$

donc $g = \varphi$ et φ est analytique, alors l'opérateur de composition C_φ est bien défini.

On a donc $A = C_\varphi$, puisque, pour tout $f \in H^2$

$$(Af)(\lambda) = (Af, k_\lambda) = f(\varphi(\lambda)) = (C_\varphi f)(\lambda).$$

□

Théorème 2.1.6. [20]

Si $f_n(z) = z^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, si A est un opérateur de composition de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si, $Af_n = (Af_1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Si $A = C_\varphi$, alors

$$Af_1 = C_\varphi f_1 = C_\varphi z = \varphi \text{ et } Af_n = C_\varphi f_n = C_\varphi z^n = \varphi^n,$$

et donc

$$(Af_1)^n = Af_n.$$

- Inversement, Supposons $Af_n = (Af_1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, si $\varphi = Af_1$ alors $\varphi \in H^2(\mathbb{D})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\|\varphi^n\|^{\frac{1}{n}} = \|Af_n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|^{\frac{1}{n}},$$

passant à la limite quand $n \mapsto +\infty$, on obtient:

$$\|\varphi^*\|_\infty \leq 1,$$

où φ^* désigne la limite radiale de φ , qui existe presque partout sur le cercle unité. Ainsi, et par le principe de module φ fonction de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et il ne peut pas être une fonction constante de module unité. Donc φ définit l'opérateur de composition C_φ qui coïncide avec A au point f_n et donc,

$$A = C_\varphi.$$

□

Corollaire 2.1.3. [20]

L'opérateur A sur H^2 est un opérateur de composition si et seulement si A a la propriété multiplicative, *i.e.*, $A(f.g) = Af.Ag$ pour toute fonctions f et g dans H^2 .

Démonstration.

- Il est clair que les opérateurs de composition ont la propriété multiplicative indiquée.
- Inversement, si A a la propriété multiplicative alors, en particulier,

$$Af_n = (Af_1)^n, \quad \forall n,$$

donc le fait que A soit un opérateur de composition découle du théorème précédent.

□

Théorème 2.1.7. [11]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, Si φ n'est pas constant, alors C_φ est injective sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration.

Supposons que, pour certains f et g dans $H^2(\mathbb{D})$, on a:

$$C_\varphi(f) = C_\varphi(g),$$

i.e

$$f(\varphi(z)) = g(\varphi(z)) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Alors $f \equiv g$ sur $\varphi(\mathbb{D})$, mais les fonctions holomorphes ne sont pas constante donc $f \equiv g$ sur une partie ouverte non vide de \mathbb{D} .

Ainsi f et g sont égaux sur un sous-ensemble de \mathbb{D} ayant un point limite dans \mathbb{D} . Donc, par le **théorème caractère unique**, $f \equiv g$ dans \mathbb{D} , ainsi C_φ est injectif. \square

Théorème 2.1.8. [22]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, C_φ est inversible sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si φ est un automorphisme conforme de \mathbb{D} .

Démonstration.

Supposons que A est l'inverse de C_φ et soient f et g des fonctions holomorphes sur $H^2(\mathbb{D})$. Alors:

$$C_\varphi A(fg) = A(fg) \circ \varphi = f.g = (C_\varphi A f)(C_\varphi A g) = (A f.A g) \circ \varphi.$$

Ainsi $(A(f.g) - A f.A g) \circ \varphi = 0$, puisque φ n'est pas constante et C_φ est inversible, on conclut que l'image de φ est un ensemble ouvert.

D'où

$$A(f.g) = A f.A g,$$

d'après le Corollaire.2.1.3, il existe une fonction holomorphe ψ de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , tel que:

$$A = C_\psi.$$

Étant donné que

$$(C_\psi C_\varphi f_1)(z) = (\varphi \circ \psi)(z) = z = (\psi \circ \varphi)(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Nous concluons que φ est inversible et son inverse est analytique. Donc φ est un automorphisme conforme. \square

Remarque 2.1.1.

l'inversibilité de C_φ implique que φ est inversible.

Exemple.

Pour un $\lambda \in \mathbb{D}$ fixe, on définit la fonction ϕ_λ par:

$$\phi_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z},$$

Alors:

$$(C_{\phi_\lambda})^2 = I \text{ (i.e., } C_{\phi_\lambda}^{-1} = C_{\phi_\lambda}).$$

Démonstration.

On a:

$$\phi_\lambda(z) = \phi_\lambda^{-1}(z), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

Donc,

$$\phi_\lambda(\phi_\lambda(z)) = z, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

le théorème.2.1.1 conclure la preuve. □

Théorème 2.1.9. [20]

Si la fonction φ a un point fixe dans \mathbb{D} , alors l'opérateur C_φ est semblable à un opérateur de composition C_ψ , avec $\psi(0) = 0$.

Démonstration.

Soit $\varphi(\lambda) = \lambda$, pour un $\lambda \in \mathbb{D}$. Et soit,

$$\phi_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z},$$

D'après l'exemple précédent, on a: $C_{\phi_\lambda}^{-1} = C_{\phi_\lambda}$, Alors:

$$C_{\phi_\lambda}^{-1}C_\varphi C_{\phi_\lambda} = C_{\phi_\lambda \circ \varphi \circ \phi_\lambda} = C_\psi,$$

et, $\psi(0) = (\phi_\lambda \circ \varphi \circ \phi_\lambda)(0) = 0$. □

2.2 Compacité des opérateurs de composition

Après avoir défini les opérateurs de composition et donner leurs propriétés fondamentales, dans cette section, on va exploiter cette notion et étudier la compacité des opérateurs de composition.

Théorème 2.2.1. [10]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, Si $\|\varphi\|_\infty < 1$ alors C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration.

Pour chaque entier positif n , on définit l'opérateur:

$$T_n f = \sum_{k=0}^n \widehat{f}(k) \varphi^k \quad (f \in H^2(\mathbb{D})),$$

Ainsi T_n envoie $H^2(\mathbb{D})$ à l'ensemble engendré par les n premières puissances de φ . D'après la comparaison des normes de $H^2(\mathbb{D})$ et $H^\infty(\mathbb{D})$, T_n est donc borné et de rang fini sur $H^2(\mathbb{D})$. On affirme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|C_\varphi - T_n\| = 0$.

Cela résulte du calcul ci-dessous:

$$\begin{aligned} \|(C_\varphi - T_n)(f)\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \widehat{f}(k) \varphi^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \|\varphi^k\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \|\varphi\|_\infty^k \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\varphi\|_\infty^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1 - \|\varphi\|_\infty^2}} \|f\|. \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé respectivement: l'inégalité triangulaire, la comparaison des normes de $H^2(\mathbb{D})$ et $H^\infty(\mathbb{D})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et enfin la somme de la série géométrique,

l'hypothèse que $\|\varphi\|_\infty < 1$, Ainsi,

$$\|C_\varphi - T_n\| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1 - \|\varphi\|_\infty^2}} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, cela signifie que C_φ est une limite en norme des opérateurs de rang fini donc C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$. \square

2.2.1 Opérateur de Hilbert-Schmidt

Définition 2.2.1.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

On dit que T est un opérateur de **Hilbert-Schmidt**, s'il existe une base hilbertienne $\{e_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} telle que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

On désigne par $S_2(\mathcal{H})$ la classe des opérateurs de Hilbert Schmidt.

Remarque 2.2.1. [13]

Tout opérateur de rang fini est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Théorème 2.2.2.

On dit que C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H^2 si et seulement si φ satisfait la condition suivante,

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - |\varphi(e^{it})|^2} \right] dt < \infty.$$

Démonstration.

On pose

$$\{e_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{z^n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

une base orthonormée de H^2 , alors C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H^2 si et seulement si,

$$\begin{aligned} \infty > 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \|C_\varphi e_n\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^{2n} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - |\varphi(e^{it})|^{2n}}{1 - |\varphi(e^{it})|^2} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - |\varphi(e^{it})|^2} dt \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Théorème 2.2.3. [10]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, Si

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - |\varphi(e^{it})|^2} \right] dt < \infty.$$

alors C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration.

Pour chaque entier positif n , on définit l'opérateur:

$$T_n f = \sum_{k=0}^n \widehat{f}(k) \varphi^k \quad (f \in H^2(\mathbb{D})),$$

Ainsi T_n envoie $H^2(\mathbb{D})$ à l'ensemble engendré par les n premières puissances de φ .

$$\begin{aligned} T_n : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow \{1, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n\} \\ f &\longmapsto T_n f \end{aligned}$$

D'après la comparaison des normes de $H^2(\mathbb{D})$ et $H^\infty(\mathbb{D})$, T_n est donc borné, et de rang fini sur $H^2(\mathbb{D})$. On affirme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|C_\varphi - T_n\| = 0$.

Cela résulte du calcul ci-dessous:

$$\begin{aligned} \|(C_\varphi - T_n)(f)\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \widehat{f}(k) \varphi^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \|\varphi^k\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \|\varphi\|^k \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\varphi\|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\varphi\|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé respectivement: l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Ainsi que,

$$\|C_\varphi - T_n\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|\varphi\|^{2k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Et, comme précédemment, cela implique la compacité de C_φ à condition que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|\varphi\|^{2k} < \infty.$$

Donc, on a:

$$\begin{aligned} \infty &> \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2} \right] d\theta. \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 2.2.2.

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Théorème 2.2.4. (*Convergence faible*) [10]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1- C_φ un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.
- 2- Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H^2(\mathbb{D})$ et converge uniformément vers zéro sur tout compact de \mathbb{D} , alors $\|C_\varphi f_n\| \rightarrow 0$.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du théorème suivant:

Théorème 2.2.5. (*Théorème de Montel*)[9]

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans Ω . On suppose que la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur les compacts de Ω , autrement dit que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C_K (indépendante de n) telle que:

$$|f_n(z)| \leq C_K \text{ sur } K \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$.

Démonstration.

Soit \mathcal{B} la boule unité fermée dans $H^2(\mathbb{D})$.

- (1) \Rightarrow (2): On suppose que C_φ est un opérateur compact, *i.e.* que $C_\varphi(\mathcal{B})$ est un sous-ensemble relativement compact de $H^2(\mathbb{D})$.

On considère une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $M\mathcal{B}$ (la boule de rayon M), qui converge uniformément vers zéro sur un sous ensemble compact de \mathbb{D} , (en symbole $f_n \rightarrow 0$).

On veut montrer que $\|C_\varphi f_n\| \rightarrow 0$, pour cela, il suffit de montrer que la fonction zéro est le seule point limite de la suite $\{C_\varphi f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (pour la norme topologique). $C_\varphi f_n \rightarrow 0$, puisque la convergence de $H^2(\mathbb{D})$ implique la convergence simple, zéro est le seule point limite possible.

Par la compacité de C_φ , l'ensemble $\{C_\varphi f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact, alors, Il doit avoir un point limite,.

- (2) \Rightarrow (1): Supposons $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction dans \mathcal{B} , on veut montrer que la suite d'image $\{C_\varphi f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite convergente.

Parce que les fonctions de \mathcal{B} sont uniformément bornées sur un sous-ensemble compact de \mathbb{D} , et d'après le **théorème de Montel** on peut extraire une sous suite $\{g_k = f_{n_k}\}$ qui converge uniformément sur un sous-ensemble compact de \mathbb{D} vers une fonction holomorphe g .

Il est claire que $g \in H^2(\mathbb{D})$. En effet pour chaque $0 < r < 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_k(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sup_k \|g_k\|^2 \leq 1.$$

Cette Inégalité montre que $g \in H^2(\mathbb{D})$ et donc $\|g\| \leq 1$. Ainsi la suite $\{g_k - g\}$ est bornée sur $H^2(\mathbb{D})$ et $g_k - g \rightarrow 0$. De plus l'hypothèse (2) assure que:

$$\|C_\varphi(g_k - g)\| \rightarrow 0.$$

□

2.3 Opérateurs de composition non compact

Exemple. [10]

Pour $0 < \lambda < 1$, soit $\varphi(z) = \lambda z + (1 - \lambda)$, C_φ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Théorème 2.3.1. (*Principe de comparaison pour la compacité*)[10]

Supposons que φ et ψ sont des fonctions holomorphes de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , et φ univalente (**injective**), et $\psi(\mathbb{D}) \subset \varphi(\mathbb{D})$.

Si C_φ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$, alors C_ψ est aussi un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration.

Lorsque φ est univalente et son intervalle contient l'ensemble $\psi(\mathbb{D})$, nous pouvons former la fonction $\chi = \varphi^{-1} \circ \psi$, qui prend \mathbb{D} holomorphiquement sur lui même.

Ainsi, $\psi = \varphi \circ \chi$, alors l'opérateur $C_\psi = C_\chi C_\varphi$.

le résultat qui suit maintenant très simple.

Si S et T sont des opérateurs sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} , avec S bornée et T compact, alors ST et TS sont compact.

La preuve découle immédiatement de la définition de l'opérateur compact, et le fait que les opérateurs bornés préserve à la fois la bornitude et la relative compacité des sous-ensembles d'un espace de Hilbert \mathcal{H} . □

Corollaire 2.3.1. [10]

Supposons que φ soit une fonction univalente de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , que $\varphi(\mathbb{D})$ contient un disque de \mathbb{D} qui est tangent au cercle unité, alors C_φ n'est pas compact.

Démonstration.

On peut supposer, sans perte de généralité, que le disque (noté Δ) est tangent au cercle unité en $+1$, **par conséquent**, si λ est le rayon de Δ , on a:

$$0 < \lambda < 1 \text{ et } \Delta = \lambda\mathbb{D} + (1 - \lambda).$$

Ainsi Δ est l'image de \mathbb{D} par la fonction $\psi(z) = \lambda z + (1 - \lambda)$ qui n'est pas compact.

D'après le **principe de comparaison** C_φ n'est pas compact. □

Exemple.

Soit $\varphi(z) = \frac{1+z}{2}$, alors C_φ est un opérateur qui n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration.

On considère, pour $\alpha < \frac{1}{2}$, la fonction $f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha}$,
d'après **l'exemple 1.1.14** [20] $f \in H^2(\mathbb{D})$ et $\|f_\alpha\| \rightarrow \infty$ quand $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$.

Soit $g_\alpha = \frac{f_\alpha}{\|f_\alpha\|}$, alors g_α est converges uniformément vers zéro sur sous-ensemble compact de \mathbb{D} . Quand $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$.

Chaque f_α est un vecteur propre de C_φ , en fait $C_\varphi f_\alpha = 2^\alpha f_\alpha$.
Ce qui reste vrai pour g_α , quand $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$,

$$\|C_\varphi g_\alpha\| = 2^\alpha \longrightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0.$$

donc d'après le **théorème de Convergence faible**, C_φ n'est pas compact. \square

Les points de contact (Définition.2.3.1) de la fonction φ avec bord joue un rôle essentiel. Alors nous avons besoin d'introduire les ensembles niveaux E_φ .

Définition 2.3.1.

Pour une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ et pour $s \in (0, 1)$, on définit l'ensemble de niveaux de φ par:

$$E_\varphi(s) = \{\theta \in [-\pi, \pi] : |\varphi(e^{i\theta})| \geq s\}.$$

L'ensemble de contact de φ est donné par:

$$E = E_\varphi(1) = \{\theta \in [-\pi, \pi] : |\varphi(e^{i\theta})| = 1\}.$$

La proposition suivante montre que l'ensemble de contact de la fonction φ d'un opérateur de composition compact est de mesure nulle.

Soit $E \subset \mathbb{T}$, on désigne par $|E|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble E .

Proposition 2.3.1. [1]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $E(\varphi)$ l'ensemble de contact de φ .
Si C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$, alors $|E_\varphi(1)| = 0$.

Démonstration.

Supposons que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$, on démontré que $|E_\varphi(1)| = 0$. Pour cela il suffit de démontrer que C_φ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$ quand $|E_\varphi(1)| > 0$,

Soit $\{z^n\}_{n \geq 0}$ une suite de $H^2(\mathbb{D})$, z^n tend vers zéro uniformément sur un sous-ensemble compact de \mathbb{D} . On a:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(z^n)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_E |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} |E| > 0. \end{aligned}$$

La suite $C_\varphi(z^n)$ ne tend pas vers zéro en norme, donc C_φ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$. □

En conséquence de ceci, on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.3.2. [20]

Soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , si C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ alors $|\varphi(e^{it})| < 1$.

2.4 Fonction de comptage de Nevanlinna

Nous allons définir la fonction de comptage de Nevanlinna, qui joue un rôle essentielle dans l'étude des opérateurs de composition.

Définition 2.4.1.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On définit la fonction de comptage de Nevanlinna de φ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$ par:

$$N_\varphi(z) := \begin{cases} \sum_{w \in \varphi^{-1}(\{z\})} \log \left(\frac{1}{|w|} \right) & , z \in \varphi(\mathbb{D}) \\ 0 & , z \notin \varphi(\mathbb{D}) \end{cases}$$

où $\varphi^{-1}(\{z\})$ désigne l'ensemble des antécédents de z par φ , chacun étant compté avec sa multiplicité (en tant que zéro de la fonction $(\varphi - z)$).

Notation:

Soit $dA(z) = \frac{dxdy}{\pi}$, $z \in \mathbb{D}$. (avec $z = x + iy$), la mesure de Lebesgue planaire normalisée sur \mathbb{D} ($dA(z) = \frac{rdrd\theta}{\pi}$ avec $z = re^{i\theta}$).

Le lemme suivant montre l'invariance de la fonction de comptage de Nevanlinna par l'automorphisme spéciale à savoir la **transformation de Möbius**.

Lemme 2.4.1.

Soit $\phi_p = \frac{p-z}{1-\bar{p}z}$ l'automorphisme spéciale (**transformation de Möbius**) de \mathbb{D} , pour tout $p \in \mathbb{D}$, on a:

$$N_\varphi(\phi_p(z)) = N_{\phi_p \circ \varphi}(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Démonstration.

D'après la définition de la fonction de comptage de Nevanlinna, on a:

$$\begin{aligned} N_\varphi(\phi_p(z)) &:= \begin{cases} \sum_{w \in \varphi^{-1}(\{\phi_p(z)\})} \log\left(\frac{1}{|w|}\right) & , \phi_p(z) \in \varphi(\mathbb{D}) \\ 0 & , \phi_p(z) \notin \varphi(\mathbb{D}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{w \in \varphi^{-1}(\phi_p^{-1}(\{z\}))} \log\left(\frac{1}{|w|}\right) & , \phi_p^{-1}(z) \in \varphi(\mathbb{D}) \\ 0 & , \phi_p^{-1}(z) \notin \varphi(\mathbb{D}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{w \in (\phi_p \circ \varphi)^{-1}(\{z\})} \log\left(\frac{1}{|w|}\right) & , z \in \phi_p \circ \varphi(\mathbb{D}) \\ 0 & , z \notin \phi_p \circ \varphi(\mathbb{D}) \end{cases} =: N_{\phi_p \circ \varphi}(z). \end{aligned}$$

□

Dans le théorème suivant, nous avons l'identité de **Littlewood-Paley** qui nous donne une autre expression de la norme de $H^2(\mathbb{D})$.

Théorème 2.4.1. [10]

Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors on a :

$$\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \left(\frac{1}{|w|} \right) dA(w). \quad (2.7)$$

Démonstration.

Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, on écrit $f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} \right|^2 d\theta \right] \log \frac{1}{r} r dr \\ &= 2 \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2(n-1)} \log \frac{1}{r} r dr \right] \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n-1} \log \frac{1}{r} dr \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \left[- \left(\int_0^1 r^{2n-1} \log r dr \right) \right] \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \left[- \left(\left[\frac{1}{2n} r^{2n} \log r \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2n} r^{2n-1} dr \right) \right] \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \left(\frac{1}{2n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} [\|f\|_2^2 - |f(0)|^2] \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \left(\frac{1}{|w|} \right) dA(w).$$

□

Théorème 2.4.2. (Formule de changement de variable) [10]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors :

$$\|C_{\varphi} f\|_2^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_{\varphi}(w) dA(w). \quad (2.8)$$

Démonstration.

Appliquant l'identité de **Littlewood-Paley** a la fonction $f \circ \varphi$,

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi\|_2^2 - |f(\varphi(0))|^2 &= 2 \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z). \end{aligned}$$

La fonction φ est localement univalente sur \mathbb{D} ($\varphi'(z) \neq 0$), sauf sur un nombre dénombrable de points où la dérivée de φ s'annule.

Donc l'ensemble $Z = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D} \setminus Z$ peut s'écrire comme une union de rectangles disjoints R_j où sur chaque rectangle, φ est biholomorphe. On note par ψ_j l'inverse de la restriction de φ sur R_j .

Par la formule de changement de variable usuel, si $w = \varphi(z)$, alors

$$dA(w) = |\varphi'(z)|^2 dA(z),$$

pour tout j on a:

$$\int_{R_j} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\varphi(R_j)} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w)$$

Par sommation sur j , où χ_j est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(R_j)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) &= \sum_j \int_{R_j} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= \sum_j \int_{\varphi(R_j)} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \sum_j \chi_j \log \frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w) \end{aligned}$$

si $w \in \varphi(\mathbb{D}) \setminus \varphi(z)$ chaque point de $\varphi^{-1}(\{w\})$ est de multiplicité 1, donc

$$\sum_j \chi_j \log \frac{1}{|\psi_j(w)|} = N_\varphi(w),$$

pour $w \in \varphi(\mathbb{D})$ presque partout, alors on a:

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w).$$

□

Théorème 2.4.3. [10]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Pour tout $w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$, on a :

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|.$$

Démonstration.

Soit $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $\psi(0) \neq 0$, si $\{z_j\}_{j \in J}$ est l'ensemble de zéros de ψ , alors $\psi(0) \leq \prod_{j \in J} |z_j|$ donc, on a :

$$\log(\psi(0)) \leq \log \left(\prod_{j \in J} |z_j| \right) = \sum_{j \in J} \log |z_j|,$$

D'où

$$N_\psi(0) = \sum_{j \in J} \log \frac{1}{|z_j|} \leq \log \left(\frac{1}{|\psi(0)|} \right). \quad (2.9)$$

Maintenant, on considère la fonction :

$$\psi(z) = \frac{w - \varphi(z)}{1 - \bar{w}\varphi(z)} = \phi_w(\varphi(z)).$$

Puisque φ est holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} et $w \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(0) \neq w$, alors $|\psi(z)| < 1$ et $\psi(0) \neq 0$, l'inégalité (2.9) devient :

$$N_\psi(0) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|,$$

comme $\psi(z) = 0$ si et seulement si $\varphi(z) = w$, on a l'inégalité :

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|.$$

□

Corollaire 2.4.1. [10]

Pour tout $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, on a :

$$N_\varphi(w) \leq \frac{1 + \varphi(0)}{1 - \varphi(0)} \log \frac{1}{|w|}.$$

Démonstration.

On a :

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|,$$

alors:

$$\begin{aligned}
 \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} &\leq \frac{\log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|}{\log \frac{1}{|w|}} \\
 &\leq \frac{\log \left| \frac{1 - \bar{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|^2}{\log \left(\frac{1}{|w|} \right)^2} \\
 &\leq \frac{1 - \left| \frac{w - \varphi(0)}{1 - \bar{w}\varphi(0)} \right|^2}{1 - |w|^2} \\
 &\leq \frac{(1 - |w|^2)(1 - |\varphi(0)|^2)}{|1 - \bar{w}\varphi(0)|^2} \\
 &\leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}.
 \end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} \leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}.$$

□

Corollaire 2.4.2. [10]

Pour tout $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, on a:

1. $N_\varphi(w) = O\left(\log \frac{1}{|w|}\right)$, $w \in \mathbb{D}$.
2. Si $\varphi(0) = 0$ alors, plus précisément $N_\varphi(w) \leq \log \frac{1}{|w|} \quad \forall w \in \mathbb{D}$.

La fonction de comptage de Nevanlinna vérifie l'inégalité de la moyenne dans le théorème suivant.

Théorème 2.4.4. [10]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe avec $\varphi(0) = 0$, alors:

$$N_\varphi(z) \leq \frac{2}{R^2} \int_{D(z,R)} N_\varphi(w) dA(w), \tag{2.10}$$

pour tout disque de centre z et de rayon R , tel que $D(z,R) \subset \mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{2})$.

Pour démontrer le théorème, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.2. [10]

Soit $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe avec $\psi(0) \neq 0$, si $0 < R < |\psi(0)|$ alors:

$$N_\psi(0) \leq \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} N_\psi(z) dA(z).$$

Démonstration.

Pour la suite nous avons besoin de cette formule:

Théorème 2.4.5. (Formule de Jensen)[5]

Soient $0 < r < R$ et soit f holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$ avec $f(0) \neq 0$. Si a_1, \dots, a_N désigne la suite des zéros de f dans le disque fermé $\overline{D(0, r)}$ comptés selon leur multiplicité, alors on a:

$$\log |f(0)| + \sum_{n=1}^N \log \frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

avec la convention $\sum_{n=1}^N \log \frac{r}{|a_n|} = 0$ si f n'a pas de zéro dans $\overline{D(0, R)}$.

Supposons f une fonction holomorphe dans \mathbb{D} avec $f(0) \neq 0$.

Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des zéros de f , on utilise la formule de Jensen sur f , on obtient:

$$\sum_{n=1}^{n(r)} \log \frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Les termes de la somme du premier membre de l'équation sont tous positifs, alors:

$$\log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Si $w \in \mathbb{D}$, alors pour $f(z) = z - w$ l'inégalité précédente devient:

$$\log |w| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |re^{i\theta} - w| d\theta,$$

pour tout $0 \leq r < 1$.

Par intégration sur l'intervalle $[0, R]$ par rapport à la mesure $\frac{2}{R^2} r dr$, on obtient:

$$\log |w| \leq \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} \log |z - w| dA(z), \quad (2.11)$$

Soit

$$N_{\psi,r}(w) := \sum_{j \in J} \log \frac{r}{|z_j(w)|}$$

pour tout $0 \leq r < 1$, avec $\{z_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des zéros de ψ .

Ensuite, la formule de Jensen pour $f = \psi - w$ est

$$N_{\psi,r}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\psi(re^{i\theta}) - w| d\theta - \log |\psi(0) - w|$$

Intégrons les deux membres de cette identité par rapport à la mesure de probabilité $\frac{1}{R^2} dA(w)$ et utilisé le théorème de Fubini, on obtient:

$$\frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r}(w) dA(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} \log |\psi(re^{i\theta}) - w| dA(w) \right\} d\theta - \log |\psi(0)|$$

Nous Utilisons l'équation (2.11) sur l'intégral intérieure, avec $z = \psi(re^{i\theta})$, on obtient, pour tout $0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r}(w) dA(w) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta - \log |\psi(0)| = N_{\psi,r}(0).$$

Puisque, pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$N_{\psi,r}(w) \rightarrow N_{\psi}(w) \text{ quand } r \rightarrow 1,$$

ce qui termine la preuve. □

Démonstration. (du théorème)

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe avec $\varphi(0) = 0$. D'après le lemme.2.4.1, et le lemme.2.4.2, on a:

$$\begin{aligned} N_{\varphi}(z) = N_{\phi_z \circ \varphi}(0) &\leq \frac{2}{R^2} \int_{D(0,R)} N_{\phi_z \circ \varphi}(w) dA(w) \\ &= \frac{2}{R^2} \int_{D(0,R)} N_{\varphi}(\phi_z(w)) dA(w), \end{aligned}$$

avec

$$\phi_z(\varphi(0)) = \frac{z - \varphi(0)}{1 - \bar{z}\varphi(0)},$$

et $0 < R < |\phi_z(\varphi(0))| = |z| < 1$.

On pose: $\zeta = \phi_z(w)$, alors $\phi_z(\zeta) = w$, et

$$dA(w) = |\phi'_z(\zeta)|^2 dA(\zeta) = \left[\frac{(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}\zeta|^2} \right]^2 dA(\zeta).$$

Notons aussi que si $w \in D(0, R)$, alors $\zeta \in \phi_z(D(0, R)) \subset D(z, r)$, Donc:

$$N_\varphi(z) \leq \frac{2}{R^2} \int_{D(z, R)} N_\varphi(\zeta) \left[\frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \bar{z}\zeta|^4} \right] dA(\zeta),$$

Si $|z| > \frac{1}{2} > R$, d'après le **lemme 4.3.3** de [14] on a:

$$N_\varphi(z) \leq \frac{2}{R^2} \int_{D(z, R)} N_\varphi(\zeta) dA(\zeta),$$

□

Pour l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, nous avons deux autres caractérisations de la compacité de l'opérateur de composition, en effet deux points de vue différents, un utilise les mesures de Carleson [1], l'autre utilise les fonctions de comptage de Nevanlinna. La deuxième est donnée par J.Shapiro dans [10] comme suit:

Théorème 2.4.6.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, alors C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si

$$\lim_{|w| \rightarrow 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

Démonstration.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.

1. Supposons que

$$\lim_{|w| \rightarrow 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

On montre que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de \mathbb{D} .

D'après le théorème de la convergence faible, il suffit de montrer que:

$$\|C_\varphi f_n\| \rightarrow 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, de l'hypothèse de N_φ on choisit $0 < r < 1$ tel que:

$$N_\varphi(w) < \varepsilon \log \frac{1}{|w|} \text{ quand } r \leq |w| < 1.$$

Comme $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} , on peut choisir n_ε tel que $|f_n| < \varepsilon$ sur $r\mathbb{D} \cup \{\varphi(0)\}$, $\forall n > n_\varepsilon$.

Alors pour tout n , on a:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_n\|^2 &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{r\mathbb{D}} + \int_{\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}} |f'_n(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) + \varepsilon \int_{\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}} |f'_n(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f'_n(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} (\|\varphi(z)\|^2 - |\varphi(0)|^2) + \frac{\varepsilon}{2} (\|f_n\|^2 - |f_n(0)|^2) \\ &\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

Où dans l'avant-dernière ligne, nous avons utilisé la **formule (2.8)** deux fois: la première fois avec $f(z) = z$, et la deuxième avec f , et dans la dernière ligne nous avons utilisé le fait que $\|f_n\| \leq 1$ Pour chaque n . Donc:

$$\|C_\varphi f_n\| \rightarrow 0.$$

ce qui montre la compacité de C_φ .

2. On suppose que C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ et on montre que:

$$N_\varphi(w) = o\left(\log \frac{1}{|w|}\right) \text{ quand } |w| \rightarrow 1^-.$$

qui est équivalent à:

$$\lim_{|w| \rightarrow 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{1 - |w|} = 0.$$

Pour $a \in \mathbb{D}$, le noyau reproduisant normalisé est:

$$f_a(z) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - \bar{a}z},$$

Comme $\|f_a\| = 1$, $\forall a$, et $f_a \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} quand $|a| \rightarrow 1^-$, on obtient:

$$\lim_{|a| \rightarrow 1^-} \|C_\varphi f_a\| = 0.$$

Puisque $\phi_\alpha(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ est un automorphisme spéciale de \mathbb{D} ,
pour tout $a \in \mathbb{D}$, alors:

$$N_\varphi(\phi_\alpha(w)) = N_{\phi_\alpha \circ \varphi}(w), \quad \forall w \in \mathbb{D}.$$

Appliquant la **formule de changement de variable (2.7)** et **l'inégalité de la moyenne**, on obtient:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_a\|^2 &\geq 2 \int_{\mathbb{D}} |f'_a(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\ &= 2 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)|a|^2}{|1-\bar{a}w|^4} N_\varphi(w) dA(w) \\ &= \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} \int_{\mathbb{D}} |\phi'_a(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w), \end{aligned}$$

Posons $W = \phi_a(w)$, on a:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_a\|^2 &\geq \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} \int_{\mathbb{D}} N_\varphi(\phi_a(W)) dA(W) \\ &= \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} \int_{\mathbb{D}} N_{\phi_a \circ \varphi}(W) dA(W) \\ &\geq \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} \int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} N_{\phi_a \circ \varphi}(W) dA(W), \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne, lemme.2.4.2 à l'intégrale précédent,
avec

$$\psi = \phi_a \circ \varphi,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_a\|^2 &\geq 4 \frac{2|a|^2}{1-|a|^2} N_{\phi_a \circ \varphi}(0) \\ &= \frac{8|a|^2}{1+|a|} \frac{N_\varphi(a)}{1-|a|}. \end{aligned}$$

On notera que dans la première ligne de l'équation précédente, l'application de l'inégalité de la moyenne sur le disque $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ nécessite que:

$$|\phi_a(\varphi(0))| > \frac{1}{2},$$

Mais $|\phi_a(\varphi(0))| \rightarrow 1$ quand $|a| \rightarrow 1^-$, alors cela reste vrai pour tout a .

Par conséquent, pour toutes ces a ,

$$\|C_\varphi f_a\|^2 \geq c \frac{N_\varphi(a)}{1-|a|}, \text{ où } c \text{ est constant.}$$

Comme la compacité de C_φ implique que $\|C_\varphi f_a\| \rightarrow 0$ quand $|a| \rightarrow 1^-$, alors la dernière inégalité donne l'estimation souhaitée de la fonction N_φ .

□

Théorème 2.4.7.

Supposons φ une fonction univalente de \mathbb{D} dans lui même, ensuite C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si,

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} = \infty.$$

Démonstration.

Comme φ est univalente, alors $N_\varphi(z) = (1 - |\varphi^{-1}(z)|)$ et le résultat est une conséquence immédiate du Théorème précédent. □

Le théorème suivant donné une caractérisation de la bornitude de l'opérateur de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, ceci utilise la fonction de comptage de Nevanlinna.

Théorème 2.4.8.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, alors C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si,

$$\sup_{w \in \mathbb{D}} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} < \infty.$$

Démonstration. \Leftarrow) Supposons que $\sup_{w \in \mathbb{D}} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} < \infty$, (Supposons que $\varphi(0) = 0$ sans perte de généralité), on utilise la **formule de changement de variable** (2.8), on a:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(f)\|_2^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\ &= |f(0)|^2 + C \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &\leq \max\{1, C\} \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

Donc C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$.

\Rightarrow) Supposons que C_φ est borné dans $H^2(\mathbb{D})$. D'après la preuve de théorème.2.4.6, on a:

$$\|C_\varphi f_a\|^2 \geq C \frac{N_\varphi(a)}{1 - |a|},$$

tel que:

$$f_a(z) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - \bar{a}z}.$$

Comme $\|C_\varphi f_a\|^2 < \infty$, on a donc,

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{N_\varphi(a)}{1 - |a|} < \infty.$$

Ce qui termine la preuve. □

CHAPTER 3

Opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α

Dans ce chapitre, nous allons étudier les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée aux symboles.

3.1 Espace de Dirichlet classique

Définition 3.1.1.

Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité \mathbb{D} . L'intégrale de Dirichlet de f est défini par:

$$\mathcal{D}(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z),$$

où $dA(z) = dxdy/\pi$, $z = x + iy$ ($dA(z) = r dr d\theta/\pi$, $z = r e^{i\theta}$).

L'espace de Dirichlet \mathcal{D} est l'espace vectoriel défini par:

$$\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) ; \mathcal{D}(f) < \infty\}.$$

Comme f est holomorphe sur \mathbb{D} , on peut la développer en série de Taylor. Écrivons, donc $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$. On trouve que,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &:= \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f'(z) \cdot \overline{f'(z)} dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{k \geq 1} k a_k z^{k-1} \cdot \overline{\sum_{j \geq 1} j a_j z^{j-1}} dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{k \geq 1} \sum_{j \geq 1} k a_k z^{k-1} \cdot \overline{j a_j z^{j-1}} dA(z) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{j \geq 1} k a_k \cdot \overline{j a_j} \int_{\mathbb{D}} z^{k-1} \overline{z^{j-1}} dA(z). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{D}} z^{k-1} \overline{z^{j-1}} dA(z) = \frac{1}{k}, & j = k \\ \int_{\mathbb{D}} z^{k-1} \overline{z^{j-1}} dA(z) = 0, & j \neq k \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathcal{D}(f) := \sum_{k \geq 1} k^2 a_k \cdot \overline{a_k} \left(\frac{1}{k} \right) = \sum_{k \geq 1} k |a_k|^2.$$

Le calcul précédent, nous montrons que \mathcal{D} est un sous-espace de H^2 .

On peut montrer que $\mathcal{D} \subset \bigcap_{p < \infty} H^p$, $p \in (2, \infty)$. De plus, comme \mathcal{D} contient les polynômes et que ceux-ci sont denses dans H^2 , il suit que \mathcal{D} est un sous-espace dense et propre de H^2 .

Donc, \mathcal{D} n'est pas fermé dans H^2 et n'est pas un espace de Hilbert avec la norme usuelle de H^2 .

Cependant, nous pouvons contourner ce problème en définissant une nouvelle norme sur \mathcal{D} . Pour $f, g \in \mathcal{D}$, posons;

$$\mathcal{D}(f, g) := \int_{\mathbb{D}} f'(z) \cdot \overline{g'(z)} dA(z),$$

Ceci définit un semi-produit scalaire et $\mathcal{D}(f, f) = \mathcal{D}(f)$. $\mathcal{D}(f)^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme sur \mathcal{D} . Ce n'est cependant pas une norme puisque $\mathcal{D}(f) = 0$ pour chaque f constante. En posant pour $f, g \in \mathcal{D}$,

$$(f, g)_{\mathcal{D}} := (f, g)_{H^2} + \mathcal{D}(f, g),$$

on obtient un produit scalaire sur \mathcal{D} . La norme induite devient donc,

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}(f).$$

Ce n'est pas la seule façon de faire de \mathcal{D} un espace de Hilbert. Un autre choix commun est de prendre $\|f\|^2 := |f(0)|^2 + \mathcal{D}(f)$. Cela donne aussi une norme d'espace de Hilbert sur \mathcal{D} , équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$.

Théorème 3.1.1. [17]

Soit \mathcal{D} l'espace de Dirichlet classique, on a $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ l'est un espace de Hilbert.

Démonstration.

En écrivant $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, on obtient $\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{k \geq 0} (k+1) |a_k|^2$.

L'application $f \rightarrow ((k+1)^{\frac{1}{2}} a_k)_{k \geq 0}$ définit donc une isométrie de \mathcal{D} dans l^2 .

Comme l^2 est un espace de Hilbert, donc \mathcal{D} l'est aussi. □

3.2 Espaces de Dirichlet pondéré

Définition 3.2.1.

Soit $w : \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{D}} w(z) dA(z) < \infty$.

Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, On définit son *intégrale de Dirichlet pondérée* par:

$$\mathcal{D}_w(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(z) dA(z).$$

On définit aussi *l'espace de Dirichlet pondéré* correspondant à \mathcal{D}_w , qui est l'espace vectoriel des $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ tel que $\mathcal{D}_w(f) < \infty$.

L'espace \mathcal{D}_w est un espace vectoriel normé muni de la norme:

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w}^2 := |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(z) dA(z).$$

Remarque 3.2.1. [17]

1. Si $w \equiv 1$, alors $\mathcal{D}_w \equiv \mathcal{D}$, tel que \mathcal{D} est l'espace de Dirichlet classique.
2. Si $w(z) = \log\left(\frac{1}{|w|}\right)$, alors $\mathcal{D}_w = H^2$, et:

$$\|f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + \mathcal{D}_w(f) \quad (f \in H^2).$$

Démonstration.

1. Si $w \equiv 1$, on a $\mathcal{D}_w(f) = \mathcal{D}(f) \quad \forall f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, alors $\mathcal{D}_w = \mathcal{D}$.
2. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_w(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \geq 1} k a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta} \right|^2 \log\left(\frac{1}{r^2}\right) d\theta r dr \\ &= 2 \int_0^1 \sum_{k \geq 1} k^2 |a_k|^2 r^{2k-2} \log\left(\frac{1}{r^2}\right) r dr \\ &= 2 \sum_{k \geq 1} k^2 |a_k|^2 \int_0^1 r^{2k-1} \log\left(\frac{1}{r^2}\right) dr \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 \left[- \left(\int_0^1 r^{2k-1} \log r dr \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 \left[- \left(\left[\frac{1}{2k} r^{2k} \log r \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2k} r^{2k-1} dr \right) \right] \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2
 \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Théorème 3.2.1. [17]

Supposons que $\liminf_{|z| \rightarrow 1^-} \left(\frac{w(z)}{1-|z|} \right) > 0$. Alors $\mathcal{D}_w \subset H^2$, et \mathcal{D}_w est un espace de Hilbert par rapport à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_w}$ donné par:

$$\|f\|_{\mathcal{D}_w} := \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}_w(f). \quad (3.1)$$

Démonstration.

Par hypothèse, il existe $c > 0$ et $r < 1$ tels que $w(z) \geq c \log \left(\frac{1}{|z|^2} \right)$ pour tout z , avec $r < |z| < 1$. Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, alors:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_w(f) &\geq \int_{r < |z| < 1} |f'(z)|^2 c \log \left(\frac{1}{|z|^2} \right) dA(z) \\
 &= c \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - r^{2k} - 2kr^{2k} \log \left(\frac{1}{r} \right) \right) |a_k|^2
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{D}_w \subset H^2$.

Il reste à prouver que $(\mathcal{D}_w, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_w})$ est complet.

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_w}$. Alors $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy sur $(H^2, \|\cdot\|_{H^2})$, comme H^2 est un espace de Hilbert, donc il existe $f \in H^2$ tel que $f_n \rightarrow f$ dans H^2 .

f est holomorphe dans \mathbb{D} et $f_n \rightarrow f$ localement uniforme dans \mathbb{D} , par conséquent $f'_n \rightarrow f'$ est localement uniforme dans \mathbb{D} .

Par le **lemme de Fatou**, on a:

$$\mathcal{D}_w(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_w(f_n) < \infty,$$

donc, on obtient: $f \in \mathcal{D}_w$.

Par le **lemme de Fatou** encore, on a:

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{D}_w} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{\mathcal{D}_w},$$

on obtient facilement que $\|f - f_n\|_{\mathcal{D}_w} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$. □

Exemple. [16]

Soit $a > -1$, $w_a(z) = (1 - |z|^2)^a$ tel que $z \in \mathbb{D}$, désignant \mathcal{D}_{w_a} par \mathcal{D}_a , L'espace de Hardy H^2 peut être identifié par \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_0 correspond à l'espace Dirichlet classique \mathcal{D} .

3.3 Espaces de Dirichlet \mathcal{D}_α

Définition 3.3.1.

On pose:

$$dA_\alpha(z) = (1 + a)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

où $dA(z) = dxdy/\pi$, $z = x + iy$ ($dA(z) = r dr d\theta/\pi$, $z = re^{i\theta}$).

Les espaces de Dirichlet sont définis par:

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) ; \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \right\}.$$

Définition 3.3.2.

On désigne par $A \lesssim B$, s'il existe une constante absolue c , telle que:

$$A \leq cB.$$

$A \asymp B$ signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

Proposition 3.3.1. [18]

Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$, si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, alors:

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n \geq 0} (1 + n)^{1-\alpha} |a_n|^2.$$

Pour la preuve de la proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.1. [3]

Soit n un entier positif et $0 < r < 1$, alors:

$$\int_0^1 r^n (1-r)^\alpha dr \asymp \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}.$$

Démonstration.

Soit n un entier positif et $0 < r < 1$, on a:

1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^n (1-r)^\alpha dr &\geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n (1-r)^\alpha dr \\ &\geq \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n dr = \frac{1}{n^\alpha} \left[\frac{r^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1-\frac{1}{n}} \\ &\gtrsim \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &\asymp \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^n (1-r)^\alpha dr &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n (1-r)^{1-(1-\alpha)} dr + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 r^n (1-r)^\alpha dr \\ &\leq n^{1-\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n (1-r) dr + \frac{1}{n^\alpha} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dr \\ &= n^{1-\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n dr - n^{1-\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^{n+1} dr + \frac{1}{n^\alpha} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dr \\ &= n^{1-\alpha} \left(\frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} - n^{1-\alpha} \left(\frac{1}{n+2} \right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2} + \frac{1}{n^{1+\alpha}} \\ &\leq n^{1-\alpha} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{1}{n^{1+\alpha}} \\ &\leq n^{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 2} \right) + \frac{1}{n^{1+\alpha}} \\ &\leq \frac{2}{n^{\alpha+1}} \asymp \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

□

Démonstration. (de la Proposition)

Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$. On a:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \geq 1} a_n n z^{n-1} \right|^2 (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha r \frac{dr d\theta}{\pi} \\
 &= 2(1+\alpha) \int_0^1 \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 n^2 r^{2(n-1)} (1-r^2)^\alpha r dr \\
 &= 2(1+\alpha) \sum |a_n|^2 n^2 \int_0^1 r^{2n-1} (1-r^2)^\alpha dr \\
 &\asymp \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 n^2 \frac{1}{(2n)^{1+\alpha}} \asymp \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 n^2 \frac{1}{n^{(1+\alpha)}} \\
 &\asymp \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 n^{(1-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Donc, on obtient:

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 (n+1)^{(1-\alpha)}.$$

□

Remarque 3.3.1.

D'après la proposition précédente, on peut redéfinir l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α par:

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) ; \|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n \geq 0} (1+n)^{1-\alpha} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Et, on pose,

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

tel que

$$dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

et,

$$dA(z) = dx dy / \pi = r dr d\theta / \pi.$$

3.4 Opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α

Définition 3.4.1.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, l'opérateur de composition sur \mathcal{D}_α de symbole φ est défini par:

$$\begin{aligned} C_\varphi : \mathcal{D}_\alpha &\longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \\ f &\longmapsto C_\varphi(f) = f \circ \varphi. \end{aligned}$$

3.4.1 Fonction de comptage généralisée de Nevanlinna

Définition 3.4.2.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On définit la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α par:

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = \sum_{z=\varphi(w), w \in \mathbb{D}} (1 - |w|)^\alpha, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

pour $0 < \alpha \leq 1$, où chaque w est compté avec sa multiplicité.

Notons que $N_{\varphi,\alpha}(z) = 0$ lorsque $z \notin \varphi(\mathbb{D})$.

Par convention, on considère $N_{\varphi,\alpha}(z) = 0$ lorsque $z = \varphi(0)$.

Remarque 3.4.1.

Si $\alpha = 1$, alors $N_{\varphi,1}$ est comparable à la fonction de comptage de Nevanlinna classique que nous avons définis précédemment, *i.e.*:

$$N_{\varphi,1}(z) = N_\varphi(z) = \sum_{z=\varphi(w), w \in \mathbb{D}} \log \frac{1}{|w|}, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Dans la suite de notre travail, on aura besoin des lemmes suivants. Le premier lemme donne la **formule de changement de variable** en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna généralisée:

Lemme 3.4.1. [3]

Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, soient φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} , et f une fonction mesurable sur \mathbb{D} , alors:

$$\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z) |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} f(z) N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z). \quad (3.2)$$

Démonstration.

On suppose que φ n'est pas constante.

L'ensemble $Z = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D} \setminus Z$ peut s'écrire comme une union de rectangles disjoints R_j où sur chacun d'eux, φ est biholomorphe. On note par ψ_j l'inverse de la restriction de φ sur R_j .

Par la formule de changement de variable usuel, avec $\varphi(z) = w$, pour tout j , on a:

$$\begin{aligned} \int_{R_j} (f \circ \varphi)(z) |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) &= (1 + \alpha) \int_{R_j} f(\varphi(z)) (1 - |z|)^\alpha |\varphi'(z)|^2 dA(z) \\ &= (1 + \alpha) \int_{\varphi(R_j)} f(w) (1 - |\psi_j(w)|)^\alpha dA(w). \end{aligned}$$

Par sommation sur j , on déduit que:

$$\int_{\mathbb{D} \setminus Z} (f \circ \varphi)(z) |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_j \chi_j (1 - |\psi_j(w)|)^\alpha \right) dA(w).$$

Où χ_j est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(R_j)$.

L'ensemble Z est dénombrable, donc, il est de mesure nulle, alors, on a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z) |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{D} \setminus Z} (f \circ \varphi)(z) |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\ &= (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} f(z) \left(\sum_j \chi_j (1 - |\psi_j(w)|)^\alpha \right) dA(w) \\ &= (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} f(z) N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Le deuxième lemme nous affirme que la fonction de comptage généralisée $N_{\varphi, \alpha}$ vérifie l'inégalité de la moyenne.

Lemme 3.4.2. [3]

Soit $0 < \alpha \leq 1$. Si $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe, alors:

$$N_{\varphi, \alpha}(z) \leq \frac{c}{r^2} \int_{D(z, r)} N_{\varphi, \alpha}(w) dA(w), \quad c \in \mathbb{R}^+. \quad (3.3)$$

Pour tout disque $D(z, r)$ tel que $D(z, r) \subset \mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{2})$.

Démonstration.

Soit $w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, on a:

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} w(z) = 0,$$

Par le théorème de Green [P.363 – 364[9]], pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, nous avons:

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log \left| \frac{z - \lambda}{1 - \bar{\lambda}z} \right| dA(z) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log |\phi_z^{-1}(\lambda)| dA(z), \end{aligned}$$

Où

$$\phi_z(\delta) = \frac{z + \delta}{1 - \bar{z}\delta}.$$

et on a aussi:

$$\Delta(w(r)) = \Delta(w(z)) = w'(r)/r + w''(r) < 0,$$

pour $0 < \alpha \leq 1$, d'après la **Définition 1.2** [16] on a:

$$\begin{aligned} N_{\varphi, \alpha}(\zeta) &= \sum_{\zeta = \varphi(\lambda)} w(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{\zeta = \varphi(\lambda)} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log |\phi_z^{-1}(\lambda)| dA(z) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \left(\sum_{\zeta = \varphi(\lambda)} -\log |\phi_z^{-1}(\lambda)| \right) dA(z). \end{aligned}$$

Comme $\zeta = \varphi(\lambda)$ si et seulement si $\varphi \circ \phi_z(\phi_z^{-1}(\lambda)) = \zeta$, on a dans ce cas:

$$N_{\varphi, \alpha}(\zeta) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) N_{\varphi \circ \phi_z}(\zeta) dA(z),$$

où

$$N_{\varphi \circ \phi_z}(\zeta) = \sum_{\zeta = \varphi \circ \phi_z(\lambda)} \log \frac{1}{|\lambda|}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} N_{\varphi, \alpha}(\zeta) &\leq -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \left[\frac{1}{r^2} \int_{D(\zeta, r)} N_{\varphi \circ \phi_z}(\lambda) dA(\lambda) \right] dA(z) \\ &= \frac{1}{r^2} \int_{D(\zeta, r)} \left[-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) N_{\varphi \circ \phi_z}(\lambda) dA(\lambda) \right] dA(z) \\ &= \frac{1}{r^2} \int_{D(\zeta, r)} N_{\varphi, \alpha}(\lambda) dA(\lambda). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. □

Lien entre la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna

$N_{\varphi,\alpha}$ et $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)$

Le théorème suivant donne une majoration de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna $N_{\varphi,\alpha}$ par la norme dans \mathcal{D}_α des itérées de φ .

Théorème 3.4.1. [3]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $\alpha \in (0, 1]$. Alors il existe C une constante et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on a:

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{8C}{1+\alpha} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \quad \frac{1}{n} \leq 1 - |z| \leq \frac{1}{n-1}. \quad (3.4)$$

Démonstration.

Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que si $n \geq n_1$, alors:

$$D\left(1 - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2(n+1)}\right) \subset \mathbb{D} \setminus D(0, 1/2).$$

Pour $n \geq n_1$, supposons que $\frac{1}{n} \leq 1 - |z| \leq \frac{1}{n-1}$, alors par *l'inégalité de la moyenne*, on a:

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(z) &\leq 2 \times 4(n+1)^2 \int_{D\left(z, \frac{1}{2(n+1)}\right)} N_{\varphi,\alpha}(w) dA(w) \\ &\leq 8(n+1)^2 \int_{D\left(z, \frac{1}{2(n+1)}\right)} N_{\varphi,\alpha}(w) \frac{|w|^{2n}}{|w|^{2n}} dA(w) \\ &\leq 8(n+1)^2 \left[\sup_{D\left(z, \frac{1}{2(n+1)}\right)} |w|^{-2n} \right] \int_{D\left(z, \frac{1}{2(n+1)}\right)} N_{\varphi,\alpha}(w) |w|^{2n} dA(w). \end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'il existe $n_0 \geq n_1$ assez grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, on a:

$$\sup_{D\left(z, \frac{1}{2(n+1)}\right)} |w|^{-2n} \leq C.$$

Donc,

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(z) &\leq 8(n+1)^2 C \int_{D\left(z, \frac{1}{2(n+1)}\right)} N_{\varphi,\alpha}(w) |w|^{2n} dA(w) \\ &\leq 8(n+1)^2 C \int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha}(w) |w|^{2n} dA(w). \end{aligned}$$

D'autre part, par la *formule de changement de variable*, il découle que:

$$\int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n}dA(w) = \frac{1}{\alpha+1} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(\eta)|^2 |\varphi(\eta)|^{2n} dA_\alpha(\eta).$$

Donc, on a:

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{8C}{1+a} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \quad \frac{1}{n} \leq 1 - |z| \leq \frac{1}{n-1}.$$

ce qui termine la preuve. □

3.4.2 La compacité et la bornitude des opérateurs de composition sur les espace de Dirichlet \mathcal{D}_α

La fonction de comptage généralisée de Nevanlinna joue un rôle essentiel dans l'étude des opérateurs de composition. En effet, on a déjà vu dans le chapitre précédent que caractériser la compacité et la bornitude de l'opérateur de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par la fonction de comptage Nevanlinna, et sur les espaces de Dirichlet \mathcal{D}_α , pour $0 < \alpha \leq 1$, il a été montré dans le théorème suivant.

Théorème 3.4.2. [3]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < \alpha \leq 1$, on a:

1. C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow N_{\varphi,\alpha}(z) = O(1 - |z|)^\alpha, |z| \rightarrow 1^-$.
2. C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow N_{\varphi,\alpha}(z) = o(1 - |z|)^\alpha, |z| \rightarrow 1^-$.

Démonstration.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.

1. \Leftarrow) Supposons que $N_{\varphi,\alpha}(z) = O(1 - |z|)^\alpha, |z| \rightarrow 1^-$, (Supposons que $\varphi(0) = 0$ sans perte de généralité), on utilise la *formule de changement de variable* (3.2), on a:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(f)\|_\alpha^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f' \circ \varphi(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\ &= |f(0)|^2 + (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &\leq |f(0)|^2 + c(1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) \\ &\asymp \|f\|_\alpha^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow) Supposons maintenant que C_φ est borné dans \mathcal{D}_α . On considère la fonction test donnée par:

$$F_\lambda(z) = \frac{(1 - |\lambda|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1 - \bar{\lambda}z)}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

On a, d'après le **lemme 2.5** de [16]:

$$\|F_\lambda\|_\alpha \asymp 1,$$

Donc:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(F_\lambda)\|_\alpha^2 &\asymp \mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) = \int_{\mathbb{D}} |(F_\lambda(\varphi(w)))'|^2 dA_\alpha(w) \\ &= (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |(F'_\lambda(z))|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &\asymp (1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1 - \bar{\lambda}z|^4} dA(z) \\ &\geq (1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{D(\lambda, (1-|\lambda|)/2)} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1 - \bar{\lambda}z|^4} dA(z) \\ &\geq c_1 (1 - |\lambda|^2)^{-2-\alpha} \int_{D(\lambda, (1-|\lambda|)/2)} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &\geq c_2 \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1 - |\lambda|^2)^\alpha}, \end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont indépendants de λ .

Dans la dernière **inégalité de la moyenne** (3.3) (Lorsque $|\lambda| \rightarrow 1^-$).

Nous concluons que:

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1 - |\lambda|^2)^\alpha} \leq c' \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|C_\varphi(F_\lambda)\|_\alpha^2 \leq c' \|C_\varphi\|^2 \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|F_\lambda\|_\alpha^2,$$

qui est borné par l'hypothèse (C_φ borné dans \mathcal{D}_α) et grâce a $\|F_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha} \asymp 1$.

2. \Leftarrow) Soient $N_{\varphi,\alpha}(z) = o(1 - |z|)^\alpha$, $|z| \rightarrow 1^-$ et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{D}_α , qui converge faiblement vers 0. Il suffit de montrer que:

$$\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

La convergence faible de f_n vers 0 implique que $f_n(x) \rightarrow 0$ et $f'_n(x) \rightarrow 0$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\rho_\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ tel que:

$$N_{\varphi, \alpha}(z) \leq \varepsilon(1 - |z|)^\alpha, \text{ pour } \rho_\varepsilon < |z| < 1.$$

Par un changement de variable on obtient:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(f_n)\|_\alpha &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f'_n \circ \varphi)(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\ &\asymp |f_n(\varphi(0))|^2 + (1 + \alpha) \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'_n(z)|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z) \\ &\leq |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z) + \varepsilon \int_{\varphi(\mathbb{D}) \setminus \rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 (1 - |z|)^\alpha dA(z) \\ &\leq |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons $f'_n(x) \rightarrow 0$ uniformément sur le disque fermé $\rho_\varepsilon \mathbb{D}$, donc $\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.

\Rightarrow) Supposons que $\forall \beta > 0$, la suite $\lambda_n \in \mathbb{D}$ tel que $|\lambda_n| \rightarrow 1^-$ et

$$N_{\varphi, \alpha}(\lambda_n) \geq \beta(1 - |\lambda_n|)^\alpha,$$

On a la fonction test:

$$F_{\lambda_n}(z) = \frac{(1 - |\lambda_n|^2)^{1 - \frac{\alpha}{2}}}{(1 - \overline{\lambda_n}z)}, \text{ pour } z \in \mathbb{D}.$$

C'est une suite bornée dans \mathcal{D}_α , qui converge faiblement vers 0.

D'autre part, par le changement de variable et l'inégalité de la moyenne, on conclut que:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(F_{\lambda_n})\|_\alpha^2 &= \|F_{\lambda_n} \circ \varphi\|_\alpha^2 \asymp \int_{\mathbb{D}} |(F_{\lambda_n}(\varphi(w)))'|^2 dA_\alpha(w) \\ &\asymp (1 - |\lambda_n|^2)^{2 - \alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi, \alpha}(z)}{|1 - \overline{\lambda_n}z|^4} dA(z) \\ &\geq (1 - |\lambda_n|^2)^{2 - \alpha} \int_{D(\lambda_n, \frac{1 - |\lambda_n|}{2})} \frac{N_{\varphi, \alpha}(z)}{|1 - \overline{\lambda_n}z|^4} dA(z) \\ &\geq c_1 (1 - |\lambda_n|^2)^{-2 - \alpha} \int_{D(\lambda_n, \frac{1 - |\lambda_n|}{2})} N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z) \\ &\geq c_2 \frac{N_{\varphi, \alpha}(\lambda_n)}{(1 - |\lambda_n|^2)^\alpha} \geq c_2 \beta, \end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont indépendants de n .

Donc C_φ n'est pas compact, d'où la contradiction.

□

En conséquence de ceci, on obtient le lemme suivant.

Lemme 3.4.3.

Soit $\varphi \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, et $0 < \alpha \leq 1$. Alors:

1. C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|F_\lambda \circ \varphi\|_\alpha < \infty$.
2. C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow \lim_{|\lambda| \rightarrow 1^-} \|F_\lambda \circ \varphi\|_\alpha = 0$.

Le résultat suivant nous donne la relation entre la compacité, et la bornitude, de l'opérateur C_φ et la norme dans \mathcal{D}_α des itérées de φ .

Corollaire 3.4.1.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < a \leq 1$, on a:

1. Si $\sup_{n \geq 1} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) < \infty$, alors C_φ est borné dans \mathcal{D}_α .
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = 0$, alors C_φ est compact dans \mathcal{D}_α .

Démonstration.

1. On a:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) &= \int_{\mathbb{D}} |(F_\lambda(\varphi(w)))'|^2 dA_\alpha(z) \\
 &\leq c_1(1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{(1 - |\lambda\varphi(w)|^2)^4} dA_\alpha(w) \\
 &\leq c_2(1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n \geq 0} (1+n)^3 |\lambda|^{2n} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(w)|^2 |\varphi(w)|^{2n} dA_\alpha(w) \\
 &\leq c_3(1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n \geq 0} (1+n) |\lambda|^{2n} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}) \\
 &\leq c_4 \sup_{n \geq 0} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}) < \infty.
 \end{aligned}$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes positives.

D'après le lemme.3.4.3, C_φ est borné.

2. On suppose que $\varphi(0) = 0$, sans perte de généralité. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) &= \int_{\mathbb{D}} |(F_\lambda(\varphi(w)))'|^2 dA_\alpha(z) \\
 &\leq c_1(1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{(1 - |\lambda\varphi(w)|^2)^4} dA_\alpha(w) \\
 &\leq c_2(1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n \geq 0} (1+n)^3 |\lambda|^{2n} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(w)|^2 |\varphi(w)|^{2n} dA_\alpha(w) \\
 &\leq c_3(1 - |\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n \geq 0} (1+n) |\lambda|^{2n} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}) \\
 &\asymp o(1), \quad |\lambda| \rightarrow 1^-.
 \end{aligned}$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes positives.

D'après le lemme.3.4.3, C_φ est compact.

□

En conséquence, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.4.2. [6]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :

1. Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors C_φ est borné dans \mathcal{D}_α .
2. Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors C_φ est compact dans \mathcal{D}_α .

Démonstration.

La preuve est basée sur le corollaire.3.4.1 :

- Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, donc :

$$\sup_{n \geq 0} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}) < \infty$$

D'après corollaire.3.4.1, C_φ est borné dans \mathcal{D}_α .

- Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = 0$$

D'après corollaire.3.4.1, C_φ est compact dans \mathcal{D}_α .

□

3.4.3 Normes essentielles d'opérateur de composition

Définition 3.4.3.

La *norme essentielle* d'un opérateur linéaire borné T est définie comme la distance aux opérateurs compacts, *i.e.*,

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - K\| : K \text{ compact}\}.$$

Le but de cette sous-section est d'obtenir l'estimation de la norme essentielle de l'opérateur de composition C_φ dans \mathcal{D}_α .

Théorème 3.4.3. [19]

Soit $0 < \alpha < 1$, et $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique. L'opérateur de composition C_φ est borné dans \mathcal{D}_α si et seulement si,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{N_{\varphi, \alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha} < \infty. \quad (3.5)$$

Démonstration.

1. Supposons d'abord que l'opérateur de composition C_φ est borné dans \mathcal{D}_α , *i.e.*,

$$\|C_\varphi f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq C \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \text{ pour tout } f \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Pour $c \in \mathbb{D}$, on applique l'inégalité précédente à la fonction,

$$f_c(z) = (1 - |c|^2)^{1 + \frac{\alpha}{2}} \int_0^z \frac{d\zeta}{(1 - \bar{c}\zeta)^{2+\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}$$

L'utilisation du **lemme 3.10** de [15] donne $\sup_{a \in \mathbb{D}} \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha} \leq C$.

De plus, D'après la **formule de changements de variables**, on obtient:

$$\|C_\varphi f_c\|^2 = |f_c(\varphi(0))|^2 + (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |(f_c)'(z)|^2 N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z),$$

Et par conséquent, nous avons:

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |c|^2)^{2+\alpha}}{|1 - \bar{c}z|^{4+2\alpha}} N_{\varphi, \alpha}(z) dA(z) \leq C, \quad (3.6)$$

Avec la constante C ne dépendant pas de α .

- Pour $c \in \mathbb{D}$ avec $|c| > \frac{1}{2}(1 + |\varphi(0)|)$, on considère

$$D(c) = \{z \in \mathbb{D} : |z - c| < \frac{1}{2}(1 - |c|)\},$$

on a: $(1 - |c|^2) \asymp |1 - \bar{c}z|$, pour $z \in D(c)$.

D'après la formule de la moyenne, et l'inégalité (3.6), on obtient:

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(c) &\leq \frac{4}{(1 - |c|)^2} \int_{D(c)} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &= 4 \int_{D(c)} \frac{(1 - |c|^2)^{2+2\alpha}}{|1 - \bar{c}z|^{4+2\alpha}} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &= 4 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |c|^2)^{2+2\alpha}}{|1 - \bar{c}z|^{4+2\alpha}} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &\leq C(1 - |c|^2)^\alpha. \end{aligned}$$

Où C ne dépend pas du point c . Cela donne:

$$\sup_{|z| > \frac{1+|\varphi(0)|}{2}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha} < \infty. \quad (3.7)$$

- D'autre part, nous avons d'après la preuve de la **Proposition.2.1** [15] qu'il existe une fonction sous-harmonique u_α telle que $N_{\varphi,\alpha} \leq u_\alpha$.

Comme u_α est sous-harmonique donc u_α est semi-continue supérieure (P.386 [9]). Puisque toute fonction semi-continue supérieure est bornée sur des ensembles compacts, on obtient:

$$\sup_{|c| \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{2}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(c)}{(1 - |c|^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(1 - |\varphi(0)|)^\alpha} \sup_{|c| \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{2}} u_\alpha(c) < \infty.$$

Ceci, avec (3.7) termine la preuve.

2. **Inversement**, supposons que (3.5) est vrai. Alors:

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) \leq C \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2,$$

donc, d'après la **formule de changements de variables**, on obtient:

$$\|C_\varphi f\|^2 = |f(\varphi(0))|^2 + (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \leq C_1 \|f\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2.$$

Alors C_φ borné dans \mathcal{D}_α .

Ce qui termine la démonstration. □

L'estimation suivante est de *la norme essentielle d'opérateur de composition* C_φ dans \mathcal{D}_α .

Théorème 3.4.4. [19]

Soit $0 < \alpha < 1$, et $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique, C_φ l'opérateur de composition bornée dans \mathcal{D}_α . Alors, on a :

$$\|C_\varphi\|_e \asymp \lim_{|z| \rightarrow 1^-} \sup \frac{N_{\varphi, \alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha}.$$

Démonstration.

on a ([4] P.136) :

$$\|C_\varphi\|_e \lesssim \lim_{|z| \rightarrow 1^-} \sup \frac{N_{\varphi, \alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha}.$$

Nous allons donc montrer que l'estimation inférieure :

$$\|C_\varphi\|_e \gtrsim \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup \frac{N_{\varphi, \alpha}(c)}{(1 - |c|^2)^\alpha}.$$

pour tout $c \in \mathbb{D}$, on considère la fonction :

$$f_c(z) = \frac{(1 - |c|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1 - \bar{c}z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Il est clair que la suite f_c convergent vers zéro lorsque $|c| \rightarrow 1^-$ uniformément sur des sous-ensembles compacts de \mathbb{D} .

Par conséquent, $\lim_{|c| \rightarrow 1^-} \|K(f_c)\|_{\mathcal{D}_\alpha} = 0$ pour tout opérateur compact K dans \mathcal{D}_α .

Cela implique que :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi - K\| &\geq C \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup \|C_\varphi(f_c) - K(f_c)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \\ &\geq C \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup \|C_\varphi(f_c)\|_{\mathcal{D}_\alpha} \end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout opérateur compact K et

$$\|C_\varphi\|_e = \inf \{ \|C_\varphi - K\| : K \text{ compact} \}.$$

On obtient :

$$\|C_\varphi\|_e \geq C \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup \|C_\varphi(f_c)\|_{\mathcal{D}_\alpha}.$$

Par la formule de changement de variables, on a :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_c\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 &= |f_c(\varphi(0))|^2 + (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} |(f_c)'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\ &= \frac{(1 - |c|^2)^{2-\alpha}}{|1 - \bar{c}\varphi(0)|^2} + (1 + \alpha) |c|^2 (1 - |c|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1 - \bar{c}z|^4} dA(z), \end{aligned}$$

Il est clair que le premier terme tend vers zéro lorsque $|c| \rightarrow 1^-$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup \|C_\varphi(f_c)\|_{\mathcal{D}_\alpha} &\geq (1 + \alpha) \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup |c|^2 (1 - |c|^2)^{2-\alpha} \int_{D(c)} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1 - \bar{c}z|^4} dA(z) \\ &\geq C \lim_{|c| \rightarrow 1^-} \sup \frac{N_{\varphi,\alpha}(c)}{(1 - |c|^2)^\alpha}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

sachant que $\|C_\varphi\|_e = 0$ si et seulement si C_φ est compact, comme conséquence immédiate du théorème précédent, on obtient la description suivante des opérateurs de composition compact sur l'espaces de Dirichlet.

Corollaire 3.4.3. [19]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique, et $0 < \alpha < 1$. Alors C_φ est compact dans \mathcal{D}_α si et seulement si,

$$\frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1 - |z|^2)^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{si } |z| \rightarrow 1^-.$$

En conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.4.4. [19]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique et univalente, et $0 < \alpha < 1$. Alors C_φ est compact dans \mathcal{D}_α si et seulement si,

$$\frac{(1 - |\varphi(z)|^2)}{(1 - |z|^2)} \rightarrow \infty \quad \text{si } |z| \rightarrow 1^-.$$

Démonstration.

Comme φ est univalent, alors $N_{\varphi,\alpha}(z) = (1 - |\varphi^{-1}(z)|^2)^\alpha$ et le résultat est une conséquence immédiate du Corollaire précédent. □

Fonction de comptage de Nevanlinna dans l'espace \mathcal{D} [1]

On associe à toute fonction φ , la fonction de comptage qui est défini par:

$$n_\varphi = \text{card}\{w : \varphi(w) = z\},$$

c'est le nombre de zéros de la fonction $(\varphi - z)$. Rappelons aussi que $N_{\varphi,0} = n_\varphi$.

Nous obtenons une majoration de n_φ par la norme dans l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D} des itérées de φ . Plus précisément, nous montrerons dans le paragraphe suivant que:

$$\inf_{\frac{1}{n+1} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n}} n_\varphi(z) \lesssim \mathcal{D}(\varphi^{n+1}). \quad (3.8)$$

Lien entre la fonction de comptage de Nevanlinna n_φ et $\mathcal{D}(\varphi^n)$

Le résultat suivant est le théorème principale dans ce paragraphe, il donne le lien entre le comportement en moyenne de n_φ et la norme des itérés de φ^n .

Théorème 3.4.5. [3]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors:

$$\inf_{\frac{1}{n+1} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n}} n_\varphi(z) \leq 2^4 \mathcal{D}(\varphi^{n+1}), \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Démonstration.

Pour la démonstration du théorème nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.4.4. [3]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors:

$$\int_{1-\frac{1}{n} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) \leq \frac{2^4}{(n+1)^2} \mathcal{D}(\varphi^{n+1}), \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Démonstration.

Comme $N_{\varphi,0} = n_\varphi$, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varphi^{n+1}) &= \mathcal{D}_0(\varphi^{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |(\varphi^{n+1}(z))'|^2 dA(z) \\ &= (n+1)^2 \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 |\varphi^n(z)|^2 dA(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (n+1)^2 \int_{\mathbb{D}} n_\varphi(w) |w|^{2n} dA(w) \\
 &\geq (n+1)^2 \int_{1-\frac{1}{n} \leq |w| \leq 1} n_\varphi(w) |w|^{2n} dA(w) \\
 &\geq (n+1)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \int_{1-\frac{1}{n} \leq |w| \leq 1} n_\varphi(w) dA(w) \\
 &\geq 2^{-4} (n+1)^2 \int_{1-\frac{1}{n} \leq |w| \leq 1} n_\varphi(w) dA(w) \quad \text{pour } n \geq 2.
 \end{aligned}$$

donc,

$$\int_{1-\frac{1}{n} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) \leq \frac{2^4}{(n+1)^2} \mathcal{D}(\varphi^{n+1}), \quad \text{pour } n \geq 2.$$

□

Preuve du théorème.

On a l'inégalité suivante:

$$\inf_{\frac{1}{n+1} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n}} n_\varphi(z) \leq (n+1)^2 \int_{1-\frac{1}{n} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z),$$

D'après le lemme précédent, pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \inf_{\frac{1}{n+1} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n}} n_\varphi(z) &\leq (n+1)^2 \int_{1-\frac{1}{n} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) \\
 &\leq (n+1)^2 \frac{2^4}{(n+1)^2} \mathcal{D}(\varphi^{n+1}) \\
 &\leq 2^4 \mathcal{D}(\varphi^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Ce qui finit la preuve. □

3.4.4 La compacité et la bornitude des opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D}

Définition 3.4.4.

La fenêtre de Carleson est définie par:

$$W(\zeta, \delta) = \left\{ z \in \mathbb{D} : |z| > 1 - \delta; |\arg(\bar{\zeta}z)| < \delta \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Pour $\zeta \in \mathbb{T}$ et $\delta \in (0, 1)$, on pose:

$$\mathcal{N}(\zeta, \delta) := \int_{W(\zeta, \delta)} n_\varphi(w) dA(w).$$

Le résultat suivant donne une condition pour assurer la compacité et la bornitude de l'opérateur de composition sur l'espace de Dirichlet classique \mathcal{D} .

Corollaire 3.4.5. [3]

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors:

1. Si $\mathcal{D}(\varphi^{n+1}) = O(1)$, alors C_φ est borné sur \mathcal{D} .
2. Si $\mathcal{D}(\varphi^{n+1}) = o(1)$, alors C_φ est compact sur \mathcal{D} .

Démonstration.

on a besoin du lemme de Zorboska [23] suivant:

Lemme 3.4.5.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors:

- C_φ est borné sur $\mathcal{D} \Leftrightarrow \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) = O(\delta^2)$, $\delta \rightarrow 0$.
 - C_φ est compact sur $\mathcal{D} \Leftrightarrow \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) = o(\delta^2)$, $\delta \rightarrow 0$.
1. Supposons que $\mathcal{D}(\varphi^{n+1}) = O(1)$.

Soit $\delta > 0$ et soit $n \geq 1$ tel que $1/(n+1) \leq \delta \leq 1/n$, D'après le lemme.3.4.4,

on a:

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) \leq \int_{1-\frac{1}{n} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) = O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = O(\delta^2).$$

Le lemme.3.4.5, nous permet de conclure.

2. Supposons que $\mathcal{D}(\varphi^{n+1}) = o(1)$.

Soit $\delta > 0$ et soit $n \geq 1$ tel que $1/(n+1) \leq \delta \leq 1/n$, D'après le lemme.3.4.4,

on a:

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) \leq \int_{1-\frac{1}{n} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) = o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o(\delta^2).$$

Le lemme.3.4.5, nous permet de conclure.

□

3.5 Exemple - La fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$

Au début, on va donner quelques définitions ainsi que quelques théorèmes avant de passer à l'exemple.

Définition 3.5.1.

On dit que la fonction f est extérieure si,

$$\log |f(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log |f^*(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

Dans ce cas, f a la représentation intégrale suivante:

$$f(z) = \exp \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log |f^*(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{2\pi} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Définition 3.5.2.

Soit K un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} et soit $\Omega \in C^1([0, 2\pi])$ telle que $\Omega(0) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(d(\zeta, K)) |d\zeta| < \infty.$$

La fonction distance correspondant à Ω et K est une fonction extérieure $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant l'égalité suivante:

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta, K))} \quad p.p \quad \zeta \in \mathbb{T} \tag{3.9}$$

Ainsi,

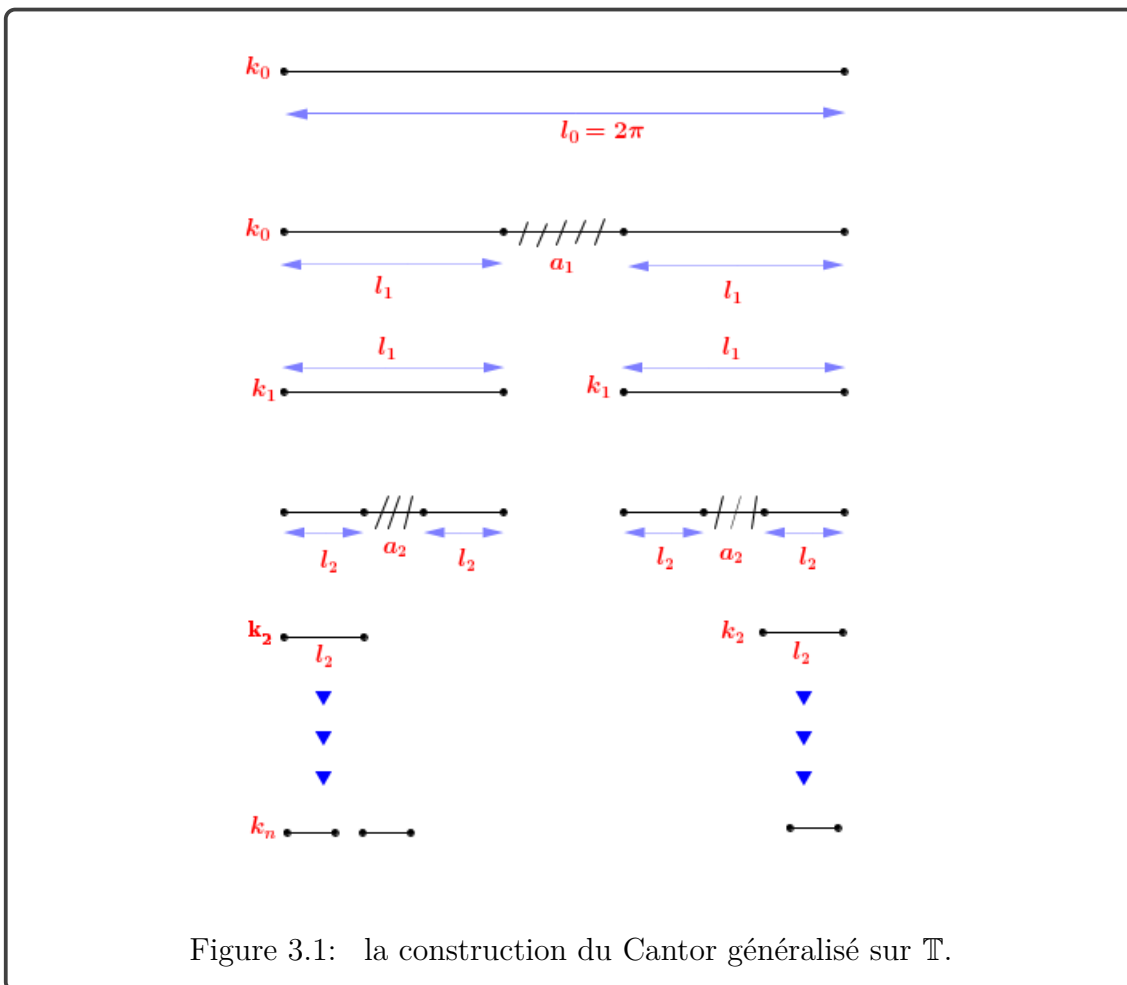
$$\varphi_{\Omega,K}(z) = \exp \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \Omega(d(\zeta, K)) \frac{|d\zeta|}{2\pi} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Cantor généralisé [7]

Soit $K_0 = \mathbb{T}$ et $\ell_0 = 2\pi$.

Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positive avec $a_1 < \frac{1}{2}$. Nous enlevons l'intervalle de longueur a_1 du milieu de K_0 , on obtient deux intervalles de longueur ℓ_1 qu'on notera K_1 .

Puis nous enlevons encore une fois deux intervalles centrés de longueur a_2 de chaque intervalle de K_1 . Soit K_2 l'union de 2^2 intervalles qui restent chacun



de longueur ℓ_2 . A la n 'ième étape nous aurons un ensemble compact K_n de 2^n intervalles de longueur ℓ_n . Notons que

$$2\ell_n + a_n = \ell_{n-1}.$$

Le compact,

$$K = \bigcap_{n \geq 1} K_n.$$

est appelé le *Cantor généralisé*.

il est à remarquer que, lorsque $\ell_n = (1/3)^n$, K est appelé le *Cantor tri-adique*.

Définition 3.5.3.

Soit $t > 0$. Pour K un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} , le t -voisinage de K est donné par:

$$K_t = \{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta, K) \leq t\}.$$

La proposition suivante donne l'estimation de la mesure du t -voisinage K_t d'un ensemble de Cantor généralisé.

Proposition 3.5.1. [7]

Soit K le Cantor généralisé associé à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si

$$\lambda_K := \sup_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

alors,

$$|K_t| = O(t^\mu), \quad t \rightarrow 0,$$

où $\mu = 1 - \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{\lambda_K}\right)}$.

Démonstration.

Soit $t \in (0, a_0]$, on choisit n tel que $a_n < t \leq a_{n-1}$, alors:

$$|K_t| \leq 2^n(a_n + 2t) \leq 3 \times 2^n \times t,$$

on a $2 = \left(\frac{1}{\lambda_K}\right)^{\frac{\log 2}{\log(1/\lambda_K)}}$, car:

$$\begin{aligned} \log 2 &= \frac{\log 2}{\log 1/\lambda_K} \log 1/\lambda_K \\ \log 2 &= \log(1/\lambda_K)^{\frac{\log 2}{\log 1/\lambda_K}} \\ 2 &= \left(\frac{1}{\lambda_K}\right)^{\frac{\log 2}{\log 1/\lambda_K}}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\frac{1}{\lambda_K^{n-1}} \leq \frac{a_0}{t}$$

car:

$$\begin{aligned} \lambda_K := \sup_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} &\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda_K, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow a_{n+1} \leq \lambda_K a_n \Rightarrow a_{n+1} \leq \lambda_K^{n+1} a_0 \\ &\Rightarrow t \leq a_{n-1} \leq \lambda_K^{n-1} a_0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_K^{n-1}} \leq \frac{a_0}{t}. \end{aligned}$$

on a dans ce cas:

$$2^{n-1} = \left(\frac{1}{\lambda_K^{n-1}} \right)^{\frac{\log 2}{\log(1/\lambda_K)}} \leq \left(\frac{a_0}{t} \right)^{\frac{\log 2}{\log(1/\lambda_K)}},$$

on obtient donc:

$$|K_t| \leq c(a_0, \lambda_K) t^{1 - \frac{\log 2}{\log(1/\lambda_K)}}.$$

Ce qui termine la preuve. □

Pour ce qui suit on aura besoin du théorème suivant:

Théorème 3.5.1. [7]

Soit $\alpha \in [0, 1)$. Soit K un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} qui vérifie (3.10), $\Omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \rightarrow \Omega(t^\gamma)$ est concave pour $\gamma > \frac{2}{1-\alpha}$ et soit f_Ω une fonction extérieure vérifiant:

$$|f^*(\zeta)| = \Omega(d(\zeta, K)) \quad \text{p.p sur } \mathbb{T},$$

alors,

$$\mathcal{D}_\alpha(f_\Omega) \leq c(\alpha, \gamma, K) \int_{\mathbb{T}} \Omega'(d(\zeta, K))^2 (d(\zeta, K))^{\alpha+1} |d\zeta|.$$

En particulier $f_\Omega \in \mathcal{D}_\alpha$, si la dernière intégrale est finie.

Lemme 3.5.1. [7]

Soit K un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} et $h : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable, et soit $(I_j)_{j \in J}$ les composantes reliées de $\mathbb{T} \setminus K$ ($\mathbb{T} \setminus K = \bigcup_{j \in J} I_j$).

On pose,

$$\mathcal{N}_K(t) := 2 \sum_{j \in J} \chi_{\{|I_j| > 2t\}} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

On obtient:

$$\int_{\mathbb{T}} h(d(\zeta, K)) |d\zeta| = \int_0^\pi h(t) \mathcal{N}_K(t) dt,$$

Notons que, si $h(t) = \chi_{[0, \delta]}$ alors:

$$\int_0^\delta \mathcal{N}_K(t) dt = \int_{\mathbb{T}} |\{d(\zeta, K) < \delta\}| |d\zeta| = |K_\delta|.$$

En particulier

$$\delta \mathcal{N}_K(\delta) \leq |K_\delta|.$$

La formule énoncée dans le lemme suivant, nous permet d'estimer supérieurement la norme de la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$.

Lemme 3.5.2. [3]

Soit $\alpha \in [0,1)$. Soit K l'ensemble fermé de \mathbb{T} qui vérifie (3.10) et soit

$$\Omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

une fonction croissante telle que $t \rightarrow \Omega(t^\gamma)$ est concave pour $\gamma > \frac{2}{1-\alpha}$. Alors:

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt,$$

avec c une constante positive.

Démonstration.

Soit $\alpha \in [0,1)$. Soit K l'ensemble fermé de \mathbb{T} qui vérifie (3.10) et soit $\Omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \rightarrow \Omega(t^\gamma)$ est concave pour $\gamma > \frac{2}{1-\alpha}$. Soit la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant l'égalité:

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \quad \text{p.p } \zeta \in \mathbb{T}$$

Alors, d'après le théorème 3.5.1 on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) &\leq c \int_{\mathbb{T}} \Omega'(d(\zeta,K))^2 e^{-2\Omega(d(\zeta,K))} (d(\zeta,K))^{\alpha+1} |d\zeta| \\ &\leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^{\alpha+1} \mathcal{N}_K(t) dt \\ &= c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha t \mathcal{N}_K(t) dt \\ &\leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt. \end{aligned}$$

avec c une constante positive.

Où dans la dernière inégalité on utilise le lemme 3.5.1. □

Estimations de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$

Dans ce qui suit, nous allons donner quelques estimations de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$, ce qui nous permet de montrer que l'opérateur de composition associée à la fonction distance est bornés, et compacts, sur les espaces de Dirichlet.

Premier cas: l'espace de Hardy ($\alpha = 1$).

Le résultat suivant sera très utile par la suite.

Lemme 3.5.3. [3]

Soit K un sous-ensemble fermé de \mathbb{T} et soit $\Omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $\Omega(0) = 0$. Alors:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) \lesssim \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ |K_\varepsilon| + \exp \left(-2 \frac{\Omega(\varepsilon)}{1 - |z|} \right) \right\}, \quad |z| < 1.$$

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 3.4.1 et pour

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 - |z| \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

on a:

$$\begin{aligned} N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) &\lesssim \mathcal{D}_1(\varphi_{\Omega,K}^{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |(\varphi_{\Omega,K}(z)^{n+1})'|^2 dA_1(z) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{D}} |\varphi'_{\Omega,K}(z)|^2 |\varphi_{\Omega,K}(z)|^{2n} dA_1(z), \end{aligned}$$

d'après (3.9), on obtient:

$$\begin{aligned} N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) &\lesssim \int_{\mathbb{T}} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \\ &= \int_{K_\varepsilon} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} + \int_{\mathbb{T} \setminus K_\varepsilon} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \\ &\lesssim |K_\varepsilon| + e^{-2(n+1)\Omega(\varepsilon)}, \end{aligned}$$

alors, on a:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) \lesssim \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ |K_\varepsilon| + \exp \left(-2 \frac{\Omega(\varepsilon)}{1-|z|} \right) \right\}.$$

□

Le résultat suivant est le théorème principale dans le cas d'un espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, qui donne la compacité et la bornitude de l'opérateur de composition associée à la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$.

Théorème 3.5.2.

Soit K le Cantor généralisé associé à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (3.10) et soit $\Omega(t)$ une fonction croissante tel que $\Omega(0) = 0$, et $\beta < \mu$, alors:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) = O \left((1-|z|)^{\frac{\mu}{\beta}} \right), \quad |z| \rightarrow 1^-$$

Démonstration.

D'après le lemme.3.5.3, on obtient:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) \lesssim \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ |K_\varepsilon| + \exp \left(-2 \frac{\Omega(t)}{1-|z|} \right) \right\}, \quad |z| < 1.$$

Pour $z \rightarrow 1^-$, on a:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) \lesssim \inf_{\varepsilon > 0} \{ |K_\varepsilon| \},$$

D'après le proposition.3.5.1, on obtient:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) \lesssim \inf_{\varepsilon > 0} \{ \varepsilon^\mu \}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

Il suffit de choisir

$$\varepsilon = (1-|z|)^{\frac{1}{\beta}}, \quad |z| \rightarrow 1^-.$$

Alors, on obtient:

$$N_{\varphi_{\Omega,K}}(z) \lesssim \inf \left\{ (1-|z|)^{\frac{\mu}{\beta}} \right\}.$$

□

Deuxième cas: l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α où $0 < \alpha < 1$.

Le résultat suivant c'est le théorème principale dans le cas d'un espace de Dirichlet \mathcal{D}_α pour $0 < \alpha < 1$, qui donne la compacité et la bornitude d'opérateur de composition associé à la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$.

Théorème 3.5.3. [3]

Soit $0 < \alpha < 1$. Soit K le cantor généralisé associé à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie (3.10) telle que $\alpha + \mu \geq 1$. Soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta < \min\{(1 - \alpha)/2, \alpha + \mu - 1\}$.

Alors:

$$N_{\varphi_{\Omega,K},\alpha}(z) = O\left(\frac{(1 - |z|)^{\frac{\alpha + \mu - 1}{\beta}}}{(1 - |z|)^{\beta}}\right), \quad (|z| \rightarrow 1^-).$$

Démonstration.

Soit $0 < \alpha < 1$, et K le cantor généralisé associé à la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie (3.10) telle que $\alpha + \mu \geq 1$. Et soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta < \min\{(1 - \alpha)/2, \alpha + \mu - 1\}$. Car $\beta < (1 - \alpha)/2$, donc, il existe $\gamma > 2/(1 - \alpha)$ telle que $\Omega(t^\gamma)$ soit concave, notons que:

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}^n) = \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K}).$$

Ainsi, par le lemme.3.5.2, on a:

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}^n) = \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K}) \leq n^2 c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2n\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt,$$

D'après le proposition.3.5.1, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}^n) &\leq n^2 c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2n\Omega(t)} t^\alpha t^\mu dt \\ &\leq n^2 \beta^2 c \int_0^{2\pi} t^{2(\beta-1)} e^{-2nt^\beta} t^\alpha t^\mu dt, \\ &\leq n^2 \beta^2 c \int_0^{2\pi} t^{2(\beta-1)+\alpha+\mu} e^{-2nt^\beta} dt \\ &\leq n^2 c_1 \int_0^\infty u^{(\beta-1+\alpha+\mu)/\beta} e^{-nu} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n^2 c_1 \int_0^\infty u^{(\alpha+\mu-1)/\beta+1} e^{-nu} du \\
 &= n^2 c_1 \frac{\Gamma((\alpha+\mu-1)/\beta+2)}{n^{(\alpha+\mu-1)/\beta+2}} \\
 &= O\left(\frac{1}{n^{(\alpha+\mu-1)/\beta}}\right).
 \end{aligned}$$

Le théorème.3.4.1, nous permet de conclure. □

L'opérateur de composition de la fonction distance $\varphi_{\Omega,K}$ est de la classe de Hilbert-Schmidt

Dans ce qui suit, nous allons démontrer que l'opérateur de composition de la fonction distance est un opérateur de la classe de Hilbert-Schmidt avec la condition:

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\Omega'(d(\zeta, K))}{(\Omega(d(\zeta, K)))^{2+\alpha}} (d(\zeta, K))^{\alpha+1} |d\zeta| < \infty,$$

où $0 \leq \alpha < 1$.

Le lemme suivant sera très utile par la suite.

Lemme 3.5.4. [3]

Soit $0 \leq \alpha < 1$, et soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} . Les assertions suivantes sont équivalentes,

$$C_\varphi \in S_2(\mathcal{D}_\alpha), \tag{3.11}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(n+1)^{1-\alpha}} < \infty, \tag{3.12}$$

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2+\alpha}} dA_\alpha(z) < \infty, \tag{3.13}$$

Démonstration.

Soit $0 \leq \alpha < 1$, et soit φ une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} ,

- (3.11) \Leftrightarrow (3.12)] Soit $e_n = \frac{z^n}{(n+1)^{\frac{1-\alpha}{2}}}$ puisque $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ est une base orthonormale de \mathcal{D}_α , donc:

$$C_\varphi(e_n) = \frac{\varphi^n}{(n+1)^{\frac{1-\alpha}{2}}},$$

alors on a:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \|C_\varphi(e_n)\|_\alpha^2 &= \sum_{n \geq 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{(n+1)^{1-\alpha}} + \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(n+1)^{1-\alpha}} \\ &\asymp \frac{|\varphi(0)|^2}{(1-|\varphi(0)|^2)^\alpha} + \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(n+1)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{|\varphi(0)|^2}{(1-|\varphi(0)|^2)^\alpha} < \infty$, on a $C_\varphi \in S_2(\mathcal{D}_\alpha)$ si et seulement si,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(n+1)^{1-\alpha}} < \infty.$$

- (3.12) \Leftrightarrow (3.13)] Comme

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(n+1)^{1-\alpha}} &\asymp \int_{\mathbb{D}} \sum_{n \geq 1} (n+1)^{1+\alpha} |\varphi'(z)|^2 |\varphi(z)|^{2n-2} dA_\alpha(z) \\ &\asymp \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2+\alpha}} dA_\alpha(z). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Dans ce travail, nous démontrons le théorème suivante:

Théorème 3.5.4.

Soit $0 \leq \alpha < 1$, soit K un sous-ensemble de \mathbb{T} et Ω une fonction croissante tel que $t \rightarrow \Omega(t^\gamma)$ soit concave pour $\gamma > \frac{2}{1-\alpha}$. Alors $C_\varphi \in S_2(\mathcal{D}_\alpha)$ si et seulement si,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\Omega'(d(\zeta, K))}{(\Omega(d(\zeta, K)))^{2+\alpha}} (d(\zeta, K))^{\alpha+1} |d\zeta| < \infty.$$

Démonstration.

D'après le lemme.3.5.4, on a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'_{\Omega, K}(z)|^2}{(1-|\varphi_{\Omega, K}(z)|^2)^{2+\alpha}} dA_\alpha(z) &\asymp \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega, K}^n)}{(n+1)^{1-\alpha}} \\ &\asymp \int_{\mathbb{T}} (\Omega'(d(\zeta, K)))^2 d(\zeta, K)^{\alpha+1} \sum_{n \geq 1} (n+1)^{\alpha+1} e^{-2n\Omega(d(\zeta, K))} |d\zeta| \\ &\asymp \int_{\mathbb{T}} \frac{\Omega'(d(\zeta, K))}{[1 - e^{-2\Omega(d(\zeta, K))}]^{2+\alpha}} (d(\zeta, K))^{\alpha+1} |d\zeta|. \end{aligned}$$

Comme

$$\Omega(d(\zeta, K)) = 1 - e^{-2\Omega(d(\zeta, K))},$$

on obtient:

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'_{\Omega, K}(z)|^2}{(1 - |\varphi_{\Omega, K}(z)|^2)^{2+\alpha}} dA_\alpha(z) \asymp \int_{\mathbb{T}} \frac{\Omega'(d(\zeta, K))}{(\Omega(d(\zeta, K)))^{2+\alpha}} (d(\zeta, K))^{\alpha+1} |d\zeta|.$$

D'après,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'_{\Omega, K}(z)|^2}{(1 - |\varphi_{\Omega, K}(z)|^2)^{2+\alpha}} dA_\alpha(z) < \infty.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Bibliography

- [1] **Hana Benazzouz**, Suites de Fibonacci et chaines de Markov, Opérateurs Analytiques, Opérateurs de Composition, Thèse de Doctorat, sous la direction: Pr. El Hassan ZEROUALI, 2015.
- [2] **H.Benazzouz, O.El-Fallah, K.Kellay, H.Mahzouli**, Contact points and Schatten composition operators: Math. Z. 279, no. 1-2, (2015), 407-422.
- [3] **Z.Bendaoud, F.Korrichi, L.Merghni, A.Yagoub**, Estimates of generalized Nevanlinna counting function and applications to composition operators, extracta Mathematicae, Vol-30(2), (2015), 221-234, (14 page).
- [4] **C. Cowen and B. MacCluer**, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, CRC Press, Boca Raton,Florida, 1995.
- [5] **Isabelle Chalendar**, Cours en ligne: Mathématiques Pures, Université Lyon-2008.
- [6] **O.El-Fallah, K.Kellay, M.Shabankhah, H.Youssfi**, Level sets and Composition operators on the Dirichlet space, J.Funct. Anal 260 (2011),1721-1733, (15 page).
- [7] **O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford**, Cantor sets and cyclicity in weighted Dirichlet spaces, J.Math. Anal. Appl, 372(2), (2010) 565573,(9 page).

-
-
- [8] **O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford**, On the Brown-Shields conjecture for cyclicity in the Dirichlet space: Adv. Math.222 (2009), 2196-2214, (19 page).
- [9] **Eric Amar, Etienne Matheron**, Analyse complexe, Cassini (2003).
- [10] **Joel H.Shapiro**, Composition Operators and Classical Function Theory: pringer Verlag, New York, 1993.
- [11] **Joel H.Shapiro**, Lectures on composition operators and analytic function theory: Online, 28 mai 1998.
- [12] **Joel H.Shapiro**, The essential norm of a composition operator: Annals of Math.125, (1987), 375-404, (30 page).
- [13] **Joel H.Shapiro et P.D.Taylor**, Compact, Nuclear, and Hilbert-schmidt composition operator on Hardy space $H^2(\mathbb{D})$, Indiana University Mathematics Journal, vol 23, No 6.1973.
- [14] **Kehe Zhu**, Operator theory in function spaces, volume 139 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc, New York, 1990.
- [15] **K. Zhu**, Operator Theory in Function Spaces, Second Edition, Math. Surveys and Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, 2007.
- [16] **K.Kellay and P.Lefèvre**, Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions, J. Math. Anal. Appl.386 (2012), 718-727, (10 page).
- [17] **K.Kellay, O.El-fallah, J.Meshrechi and T.Ransford**, A Primer on the Dirichlet Spaces, Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [18] **F.Korrichi**, Produit d'Opérateurs de Toeplitz et Opérateur de Composition: Thèse de Doctorat, sous la direction: Z.bendaoud et Strouse Elizabeth, 2016.

- [19] **Jordi Pau and Patricio A.Perez**, Composition Operators on Weighted Dirichlet Spaces, Departament de Matematica Aplicada I Anàlisi, Universitat de Barcelona, 08007 Barcelona, Spain, (20 page).
- [20] **Rubén A. Martínez-Avendaño, Peter Rosenthal**, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, 2007.
- [21] **Rudin. W**, Real and complex analysis: McGraw Hill, 3e édition, 1987.
- [22] **R.K.Singh et J.S.Manhas**, composition operator on function spaces: Departement of mathematics, university of Jammu Jammu, india, 1993, (19 page).
- [23] **N. Zorboska**, Composition operators on weighted Dirichlet spaces: Proc. Amer.Math. Soc. 126 (1998), no 7, 2013-2023, (11 page).

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet \mathcal{D}_α ($0 \leq \alpha \leq 1$), le problème auquel nous nous intéressons concerne la compacité d'un opérateur de composition et les opérateurs de composition de la classe de Hilbert-Schmidt. La caractérisation de la compacité des opérateurs de composition repose sur l'étude de la fonction de comptage de Nevanlinna de symbole φ . Dans [10] Shapiro a caractérisé la compacité des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ ($\alpha = 1$) à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna de symbole φ . Plus généralement, nous donnons une caractérisation de la compacité et la bornitude sur les espaces de Dirichlet \mathcal{D}_α ($0 \leq \alpha < 1$).

Mots-clés: Espace de Hardy, Espace de Dirichlet, Opérateur de Composition, Opérateur compact, Fonction de comptage de Nevanlinna.

Abstract

In this work, we study the composition operators on Dirichlet space \mathcal{D}_α ($0 \leq \alpha \leq 1$), the problem which we are interested concerns the compactness of composition operator, and the composition operators of the class of Hilbert-Schmidt. The characterization of the compactness of the composition operators is based on the study of the Nevanlinna counting function of the symbol φ . In [10] Shapiro characterized the compactness of the composition operators on the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$ ($\alpha = 1$) using the Nevanlinna counting function of the symbol φ . In general, we give a characterization of the compactness and the boundness on the Dirichlet spaces \mathcal{D}_α ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Keywords: Hardy space, Dirichlet space, Composition operator, Compact operator, Nevanlinna counting function.

ملخص

في هذا العمل سوف ندرس مؤثرات التركيب في فضاءات ديرخلي كما نهتم أكثر بدراسة محدوديتها، تراصها و مؤثرات التركيب من صنف هيربار و سميث، تشخيص التراص و المحدودية في فضاء هاردي تعتمدا على دالة نيفالينا، أكثر من ذلك سنعطي تشخيصا للتراص و المحدودية في فضاء ديرخلي.

كلمات مفاتيحية

فضاء هاردي، فضاء ديركلي، مؤثر التركيب، مؤثر متراس، دالة نيفالينا.