

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Par:

ALLAOUI Hana

THEME

Limites Inductives Strictes d' Espaces Localement Convexes

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. Youcef Belabbaci	M.C.A	<i>Président</i>
Mr. Djamel Ouchenane	M.C.A	<i>Examineur</i>
Mr. Amar Belacel	M.C.A	<i>Encadreur</i>

Année Universitaire 2019/2020

Remerciement

Tous les éloges et les remerciements à Allah le tout-puissant qui nous a donné le courage, la patience et la force pour mener ce travail jusqu'à sa fin.

Ce travail a été réalisé malgré les défis auxquels nous sommes confrontés à cause de l'épidémie de **COVID-19**.

Mon remerciement s'adresse à mon encadreur de mémoire Monsieur Belacel Amar, Maître de Conférences" A " à l'Université Amar Thelidji de Laghouat qui a fait preuve de patience, d'enthousiasme, pour leur multiples conseils et pour tout le temps qu'il a consacré à diriger ce mémoire. J'ai pu bénéficier de leur expériences et leur compétences.

Je remercie les membres de jury ; Monsieur Bellabaci Youcef, Maître de Conférences" A " à l'Université Amar Thelidji de Laghouat d'avoir accepté de présider le jury, et Monsieur Ouchenane Djamel, Maître de Conférences" A " à l'Université Amar Thelidji de Laghouat, Examineur, pour avoir accepté d'examiner ce projet.

J'exprime mes sincères remerciements à : Monsieur Rahmoune Abdelaziz, Chef de département de Mathématiques, Monsieur ALLAOUI Omar et Monsieur ALLAOUI Laid Abd El Karim pour leurs aides et conseils, je ne peut pas oublier les enseignants qui ont participé à ma formulation le long de mon cursus en MI.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à mes frères et toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien. Aussi, je remercie tous mes collègues et ceux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce projet.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma mère celle qui ma donné la vie, école de mon enfance, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite.

A mon père, qui a été mon ombre durant toutes les années des études qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager me donner de l'aide et me protéger,

A mes frères, Je vous souhaite du succès et du bonheur.

A toute ma famille mes grand-mères, mes oncles, mes tentes, mes cousins et mes cousines.

A mes amis

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

A tous mes professeurs qui m'ont enseigner le long de mon parcours éducatif.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que dieu les gardes et les protèges.

Allaoui Hana

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	3
1.1 Compléments sur les espaces vectoriels	3
1.1.1 Des parties remarquables dans un espace vectoriel	3
1.1.2 Effet d'une application linéaire	6
1.1.3 Enveloppe convexe	7
1.1.4 Ensembles dirigés	7
1.1.5 Suites généralisées	8
1.1.6 Filtres et base de filtres	8
1.2 Compléments sur la topologie	9
1.2.1 Filtres des voisinages	9
1.2.2 Exemples de topologies	10
1.2.3 Comparaison de la topologie	10
1.2.4 Limite d'une suite généralisée	11
1.2.5 Unicité de la limite	11
1.2.6 Fonctions continues	11
2 Propriétés générales des E.V.T.	13
2.1 Étude des semi-normes	13
2.1.1 Propriété des boules	14
2.1.2 Jauge d'un ensemble	15
2.1.3 Propriétés des boules unités :	19
2.1.4 Caractérisation des semi-normes continues	20
2.1.5 Invariance par translation.	22

2.1.6	Théorème caractéristique	22
2.1.7	Régularité de la topologie d'un E.V.T.	25
2.2	Convexité Locale	25
2.3	Espace de Fréchet	25
3	Limites inductives strictes	27
3.1	Limite inductive stricte d'espace localement convexe	28
3.1.1	Proposition et définition	28
3.1.2	Voisinage dans \mathcal{T}	29
3.1.3	Caractérisation des applications linéaires	30
3.1.4	Topologie induite par \mathcal{T} sur X_n	31
3.2	Limites inductives strictes d'espace de Fréchet	32
3.2.1	Définition	32
3.2.2	Caractérisation des fonctions linéaires continues	32

Notations et significations

Notation	Signification
\mathbb{K}	\mathbb{R} ou \mathbb{C}
X	Un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} ou \mathbb{R} .
A, B, \dots	Des parties de X .
Λ	Un sous-ensemble de \mathbb{K}
λ, μ, \dots	des éléments de \mathbb{C}
$A + B$	$\{ x \in X ; x = a + b, \text{ avec } a \in A \text{ et } b \in B \}$
ΛA	$\{ x \in X ; x = \lambda a, \text{ avec } a \in A \text{ et } \lambda \in \Lambda \}$.
$\mathcal{P}(X)$	l'ensemble des toute parties de X .
$a \wedge b$	$\inf\{a, b\}$
$\overset{\circ}{X}$	l'intérieure de l'ensemble X
\bar{X}	l'adhérent(fermeture) de l'ensemble X

Introduction

Contrairement à ce que beaucoup de gens considèrent les mathématiques sont omniprésentes dans le monde actuel. En effet, les trucs technologiques qui nous entourent ou les processus de communication dont nous ne nous dispensons pas aujourd'hui (les téléphones portables ou de smartphone, TV LCD ou LED, les jeux vidéo, les voitures,...) ne peuvent être pas réalisés sans les mathématiques.

C'est grâce aux gens qui maîtrisent les mathématiques que de telles situations sont rendues possibles. Les nombres spécifiques sont remplacés par des symboles. Un personnage d'un jeu vidéo n'est rien d'autre qu'une chaîne de symboles. Le programmeur utilise sa connaissance pour le mettre en avant. Enfin de compte, l'univers dans un jeu vidéo se résume à des nombres et des équations. La chose qui a poussé Max Tegmark¹ de penser qu'il y a une similarité entre notre monde et celui d'un jeu vidéo. Mais elles le sont généralement de façon invisible.

Les mathématiques offrent des outils d'une manière directe ou indirecte qui permettent de répondre à des problèmes très complexes dans des matières bien différentes, elles travaillent votre manière de penser et d'avoir des raisonnements plus justes, la raison pour laquelle j'ai choisi ce domaine et particulièrement cette filière. Donc, les mathématiques sont la clé de tous les apprentissages.

Ce mémoire étudie, sans l'approfondir, les propriétés des Espaces Vectoriels Topologiques "E.V.T." dont on a besoin pour étudier **les limites inductives strictes** qui est le sujet de ce mémoire.

1. professeur au MIT

Nous allons structurer un espace vectoriel en un espace localement convexe à partir d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel dite la topologie limite inductive stricte, et caractériser les éléments de cet espace (voisinage, les applications continues), puis on définit l'espace limite inductive stricte d'espace de Fréchet " L.F. " et caractérise les fonctions linéaires définies d'un espace L.F. dans un E.V.T. et mentionne les propriétés des bornés dans un L.F.

Ce travail sera présenté en trois chapitres :

- Le premier chapitre comprend des rappels mathématiques, en particulier (les parties remarquables d'un espace vectoriel, enveloppe convexe, suites généralisées, filtres et base de filtres).
- Le deuxième chapitre expose les propriétés générales des E.V.T. (étude de semi-normes, convexité locale, espace de Fréchet).
- Dans le dernier chapitre, on présente les limites inductives strictes (limites inductives strictes d'espace localement convexe, limites inductives strictes d'espace de Fréchet)

Cette notion est utile dans la théorie des distributions et dans la théorie des mesures de Radon sur les espaces localement compacts.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Compléments sur les espaces vectoriels

1.1.1 Des parties remarquables dans un espace vectoriel

On dit que A est un **sous-ensemble** de B , si B est un **sur-ensemble** de A .

Définition 1.1.1.

- i. On dit que A est **équilibrée** si $DA \subset A$ (où D désigne le disque unité fermé de \mathbb{C}).*
- ii. On dit que A est **convexe** si $\lambda x + \mu y \in A$, quelque soient λ et μ positifs et quelque soient x et y des éléments de A , avec $\lambda + \mu = 1$.*
- iii. On dit que A **absorbe** B s'il existe $\alpha > 0$ ($\neq \infty$) tel que $\lambda A \supset B$ pour $\lambda \geq \alpha$.*
- iv. On dit que A est **absorbante** si elle absorbe tout point de X . En d'autres termes, A est absorbante si, pour chaque $x \in X$, il existe un disque D_ε (de centre O^1 , et de rayon $\varepsilon > 0$) tel que $D_\varepsilon x \subset A$.*

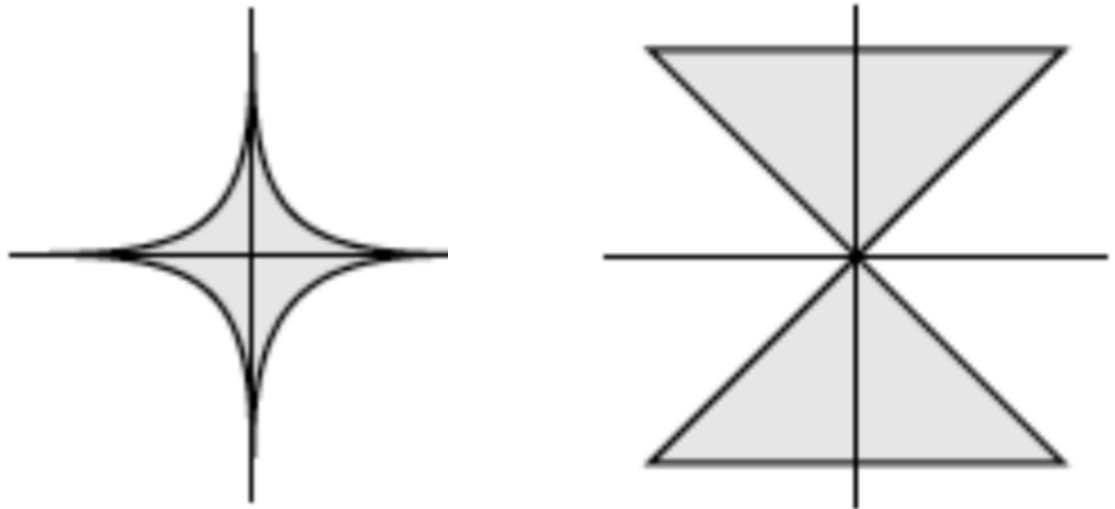
$$\forall x \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ avec } |\lambda| \leq \varepsilon \text{ on a } \lambda x \in A.$$

Il est clair que O^2 appartient à chaque ensemble absorbant ou équilibré.

Définition 1.1.2. On dit qu'un ensemble A de X est **absolument convexe** s'il est convexe et équilibré.

1. signifie l'origine

2. signifie l'origine



(a) Absorbant

(b) équilibré

FIGURE 1.1 – Exemple d'un ensemble absorbant (a), et, équilibré (b)

Exemple.

1. Dans un espace normé les boules unités sont des parties absorbantes et équilibrées.
2. Dans \mathbb{R}^2 , l'ensemble dans la figure 1.1a est absorbante et dans la figure 1.1b est équilibré.
3. Les polynômes $\mathbb{R}[x]$ sont des parties équilibrées mais non pas absorbantes de l'espace des fonctions continues à variables réelles dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. En effet, tout produit des polynômes est un polynôme mais pas toute fonction continue peut s'écrire comme un produit des polynômes.
4. les ensembles convexes de \mathbb{R} sont les intervalles.
5. les boules dans un espace normé sont des convexes.
6. Soit X un espace topologique et $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur X . fixons g dans $\mathcal{C}(X)$, l'ensemble

$$S := \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x) \geq g(x), \forall x \in X\} \text{ est convexe.}$$

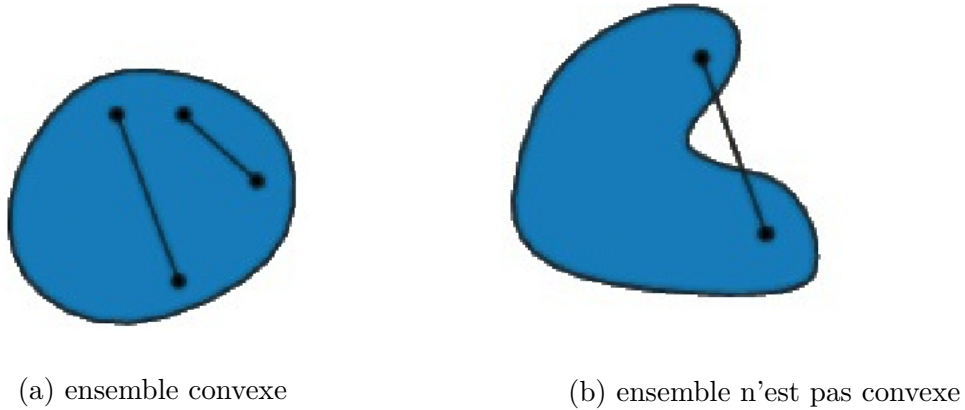


FIGURE 1.2 – Exemple d'un ensemble convexe (a), et, ensemble n'est pas convexe (b)

7.

Proposition 1.1.1.

1. Soit A un ensemble équilibré ; alors $\lambda A = |\lambda|A$, et $|\lambda| \leq |\mu| \Rightarrow \lambda A \subset \mu A$.
2. Soit A un ensemble convexe ; alors pour λ et μ positifs ou nul, on a $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
3. Pour qu'une partie équilibrée A absorbe une partie B , il suffit qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_0 A \supset B$. En particulier, pour qu'une partie équilibrée A soit absorbante, il suffit qu'il existe $\mu_0 \neq 0$ tel que $\mu_0 x \in A$.
4. L'intersection finie d'absorbants est absorbante.
L'intersection d'équilibrées nest équilibrée.
L'intersection de convexes est convexe.

Démonstration.

1. Les résultats sont triviaux pour $\lambda = 0$.

Supposons $\lambda \neq 0$.

$$\lambda A = A \text{ si } |\lambda| = 1.$$

En effet, si $|\lambda| = 1$, on a $\lambda A \subset \mathbf{DA}$ et $\frac{1}{\lambda}A \subset \mathbf{DA}$. Comme $\mathbf{DA} = A$, si A est équilibrée, alors

$$\lambda A \subset A \text{ et } \frac{1}{\lambda}A \subset A,$$

d'où $\lambda A = A$ (si $|\lambda| = 1$).

On déduit alors que $\lambda A = |\lambda|A$.

D'autre part, si $|\lambda| \leq |\mu| \neq 0$, on a $\frac{|\lambda|}{|\mu|} \in D$, donc $\frac{|\lambda|}{|\mu|}A \in A$, car A est équilibrée.

Par conséquent,

$$\lambda A = |\lambda|A \subset |\mu|A = \mu A.$$

2. Si $\lambda = \mu = 0$, le résultat est trivial.

Sinon posons $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et $\beta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$. Alors,

$$\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)\alpha A + (\lambda + \mu)\beta A = (\lambda + \mu)(\alpha A + \beta A).$$

D'autre part, la convexité de A donne

$$\alpha A + \beta A = A, \text{ car } \alpha, \beta \geq 0$$

et

$$\alpha + \beta = 1,$$

d'où $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$.

3. Posons $\alpha = |\lambda_0|$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \geq \alpha$; alors, $\lambda A \supset \lambda_0 A$ (par 1), par suite $\lambda A \supset B$.

4. — $A \cap B$ est absorbante : En effet, pour chaque $x \in X$, il existe $\alpha > 0$ (resp. $\beta > 0$) tel que $\mu x \in A$ (resp. $\mu x \in B$) dès que $|\mu| \leq \alpha$ (resp. $|\mu| \leq \beta$).

Posons alors $\gamma = \alpha \wedge \beta$. Donc $\mu x \in A \cap B$ dès que $|\mu| \leq \gamma$.

— L'intersection d'équilibrés $\bigcap_j A_j$ est équilibré. En effet,

$$D \left(\bigcap_j A_j \right) \subset \bigcap_j D A_j \subset \bigcap_j A_j.$$

— Montrons que l'intersection des convexes est convexe :

si A_j est convexe, on a $(\lambda, \mu \geq 0 \text{ et } \lambda + \mu = 1)$. :

$$\lambda \left(\bigcap_j A_j \right) + \mu \left(\bigcap_j A_j \right) \subset \bigcap_j (\lambda A_j + \mu A_j) \subset \bigcap_j A_j.$$

□

1.1.2 Effet d'une application linéaire

Proposition 1.1.2. *Soit X et Y deux espace vectoriels et soit f une application linéaire de X dans Y .*

Soit $B \subset Y$. Si B est équilibré (resp. convexe, resp. absorbant), alors $f^{-1}(B)$ est équilibré (resp. convexe, resp. absorbant).

Démonstration.

- Soit B équilibré ; alors $Df^{-1}(B) = f^{-1}(DB) \subset f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(B)$ est équilibré.
- Soit B convexe ; alors, pour λ et $\mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$,
 $\lambda f^{-1}(B) + \mu f^{-1}(B) = f^{-1}(\lambda B) + f^{-1}(\mu B) \subset f^{-1}(\lambda B + \mu B) \subset f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(B)$ est convexe.
- Soit B absorbant, soit $x \in X$; posons $y = f(x)$; il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda y \in B$ si $|\lambda| \leq \alpha$; or $\lambda y = f(\lambda x)$, donc $\lambda x \in f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(B)$ est absorbant.

□

Est-ce que la somme de deux convexes sur un espace vectoriel est convexe ?

La réponse est facile après avoir démontré que l'ensemble produit $A = \prod_{j \in J} A_j$ est convexe dans un espace produit $X = \prod_{j \in J} X_j$ si, et seulement si, chaque A_j est convexe dans X_j . (où A_j est une partie non vide de X_j .)

En effet, soit p_j la projection de X sur X_j alors p_j est une application linéaire. On a $A_j = p_j A$ (car aucun des ensembles A_j n'est vide) ; par suite la convexité de A entraîne celle de A_j . D'autre part, $A = \bigcap_j p_j^{-1}(A_j)$, ce qui montre que tous les A_j sont convexes, alors A est convexe.

Répondons maintenant à la question qui se pose :

L'ensemble $\lambda A + \mu B$ est l'image de l'ensemble $A \times B$ (dans $X \times X$) par l'application linéaire $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$ (de $X \times X$ dans X). D'après le résultat précédent, l'ensemble $A \times B$ est convexe ; par conséquent $\lambda A + \mu B$ est convexe.

1.1.3 Enveloppe convexe

Définition 1.1.3. On appelle l'enveloppe convexe $\mathcal{K}(A)$ d'un ensemble A , l'intersection de tous les convexes contenant A . C'est évidemment, le plus petit convexe contenant A .

1.1.4 Ensembles dirigés

Définition 1.1.4. Soit (\mathcal{A}, \prec) un ensemble partiellement ordonné.

On dit que \mathcal{A} est dirigé par \prec , si deux éléments quelconques de \mathcal{A} possèdent toujours un majorant.

Exemple.

1. Tout ensemble totalement ordonné est dirigé ; $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.
2. L'ensemble des parties d'un ensemble ordonné par la relation d'inclusion ou d'inclusion inverse est dirigé.

1.1.5 Suites généralisées

Définition 1.1.5. On appelle suite généralisée, à valeurs dans X , toute application d'un ensemble dirigé \mathcal{A} dans X .

Une suite généralisée se note $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{A}}$, ou $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{A}}$.

Exemple.

1. Toute suite (ordinaire) est une suite généralisée.
2. Toute fonction réelle d'une variable réelle est une suite généralisée.

1.1.6 Filtres et base de filtres

Définition 1.1.6. On dit qu'un ensemble non vide \mathcal{F} de parties X est un filtre sur X si \mathcal{F} possède les trois propriétés suivantes :

- i. l'ensemble \emptyset n'appartient pas à \mathcal{F} ;
- ii. \mathcal{F} est stable par intersection finie ;
- iii. tout $V \in \mathcal{P}(X)$ contenant un $U \in \mathcal{F}$.

On dit qu'une famille non vide \mathcal{B} de parties de X est une base d'un filtre \mathcal{F} sur X si

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ ($B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$);
- tout $F \in \mathcal{F}$ contient un certain $B \in \mathcal{B}$.

Définition 1.1.7. *Pour qu'une famille \mathcal{B} non vide soit **une base d'un filtre \mathcal{F}** , il faut et il suffit que*

- i. \mathcal{B} ne contienne pas la partie \emptyset .
- ii. \mathcal{B} ordonné par inclusion inverse (\prec signifie \supset) soit dirigé.

Exemple.

1. L'exemple le plus simple d'un filtre est la famille de tous les sous-ensembles qui contiennent un sous-ensemble A donné, à condition que ce dernier soit non vide.
2. Un exemple familier d'une base de filtre sur la ligne droite est donné par la famille de tous les intervalles $(-a, a)$ avec $a > 0$: est une base du filtre des voisinages de zéro dans la topologie usuelle sur la ligne réelle.
3. Soit \mathcal{F} le filtre associé à $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Pour chaque $n = 1, 2, \dots$, posons

$$S_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

On a S_n est un sous-ensemble de X . Alors $S = S_1 \supset S_2 \supset \dots S_n \supset \dots$ est une base de \mathcal{F} .

1.2 Compléments sur la topologie

1.2.1 Filtres des voisinages

Définition 1.2.1. *On dit que l'on structure X en **un espace topologique** (ou encore que l'on définit **une topologie \mathcal{T}** sur X) si, à chaque $x \in X$, on se donne un filtre $V(x)$ possédant les propriétés suivantes :*

- i. le point x appartient à tous les éléments $V \in V(x)$;
- ii. étant donnée $V \in V(x)$, il existe $W \in V(x)$ tel que $V \in V(y)$ quel que soit $y \in W$.

On dit alors que $V(x)$ est le **filtre des voisinages de x** , que $V \in V(x)$ est un **voisinage de x** . Si un ensemble V est voisinage de chaque point de A , alors V est dit **voisinage de A** .

Toute **base de filtres** de $V(x)$ s'appelle une **base de voisinages de x** par $B(x)$; on obtient les éléments de $V(x)$ comme sur-ensembles quelconque des éléments de $B(x)$.

Remarque 1.2.1. *La topologie de X est évidemment définie par la donnée d'une base de voisinages de chaque point. Si chaque point possède une base dénombrable de voisinages, alors X est dit à **base locale dénombrable**.*

Définition 1.2.2. *Un espace topologique X est dit **séparé (ou de Hausdorff)** s'il vérifie l'axiome suivant, dit de Hausdorff :*

Soit x et y deux éléments distincts de X . Alors il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

Exemple.

1. *Chaque espace métrique est un espace d' Hausdorff.*

En effet, pour tout $x, y \in (X, d)$ avec $x \neq y$, soit $0 < \epsilon < \frac{1}{2}d(x, y)$ alors $B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \emptyset$.

2. *Chaque espace doté par la topologie discrète est un espace d' Hausdorff.*

En effet, tout singleton est ouvert dans la topologie discrète, donc pour tout x, y distinct, on a x et y sont disjoint et ouvert.

1.2.2 Exemples de topologies

1. **Topologie induite**

Définition 1.2.3. *Soit M un sous-ensemble non vide de X .*

On dit que M est muni de la topologie induite par X si le filtre des voisinages $\mathcal{V}_M(m)$, $m \in M$, est défini par

$$\mathcal{V}_M(m) = \{V_M = M \cap V, V \in \mathcal{V}_X(m)\}.$$

2. **Topologie de la convergence compact**

C'est la σ -topologie quand σ est la famille de tous les sous-ensembles compacts de X ; on l'appelle aussi la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compact de X , ou la convergence compact.

1.2.3 Comparaison de la topologie

• Soit \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux topologies sur un ensemble X .

On dit que la topologie \mathcal{T}_1 est **plus fine** que la topologie \mathcal{T}_2 si pour tout $x \in X$, on

a $\mathcal{V}_1(x) \supset \mathcal{V}_2(x)$, où $\mathcal{V}_i(x)$ désigne le filtre des voisinages de x pour \mathcal{T}_i ($i = 1, 2$),
 Ou équivalent, si tout sous-ensemble ouvert de l'ensemble X pour \mathcal{T}_2 est ouvert
 aussi pour \mathcal{T}_1 . [1]
 On l'écrit $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Il peut arriver qu'aucun n'est plus fin que l'autre.

La topologie discrète est plus fine que toute autre topologie sur X ; la topologie
 trivial est moins fine que tous les autres.

Les topologies sur un ensemble forment donc un ensemble partiellement ordonné,
 ayant un élément maximal, la topologie discret, et un élément minimal, la topologie
 triviale.

La notion de topologie a été introduite afin de munir une base aux notions de
 convergence et de continuité.

1.2.4 Limite d'une suite généralisée

Définition 1.2.4. *On dit qu'une suite généralisée $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers un point $x \in X$
 si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ tel que } \lambda \succ \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V.$$

1.2.5 Unicité de la limite

Proposition 1.2.1. *Dans un espace de Hausdorff, la limite d'une suite généralisée, si
 elle existe, est unique.*

Démonstration.

Par l'absurde, on suppose qu'ils existent deux limites x_1 et x_2 d'une suite généralisée
 $(x_\lambda)_\lambda \in \Lambda$, $x_1 \neq x_2$.

Alors ils existent $V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ tel que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Comme (x_λ) tend vers x_i ($i = 1, 2$), il existe $\lambda_i \in \Lambda$ tel que pour $\lambda \succ \lambda_i$ on a $x_\lambda \in V_i$ ($i = 1, 2$). L'ensemble Λ étant dirigé, il existe $\lambda_0 \succ \lambda_1$ et λ_2 . Dès lors, pour $\lambda \succ \lambda_0$, on a $x_\lambda \in V_1 \cap V_2$, ce qui contredit l'hypothèse $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, donc $x_1 = x_2$.

□

1.2.6 Fonctions continues

Soit f une application de X dans Y et $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$.

Définition 1.2.5. *On dit que f est continue en x_0 si, pour chaque voisinage V de y_0 , il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$*

$$\forall V \in \mathcal{V}(y_0), \exists U \in \mathcal{V}(x_0); f(U) \subset V.$$

Définition 1.2.6. *L'image réciproque (on dit aussi la préimage) d'une partie $A \subset Y$ par une application $f : X \rightarrow Y$ est définie par*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Chapitre 2

Propriétés générales des E.V.T.

Définition 2.0.1. On appelle **espace vectoriel topologique** tout espace vectoriel, X , muni d'une topologie τ compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est à dire,

- i-* l'application $(x, y) \mapsto x + y$ est continue de $X \times X$ dans X ;
- ii-* l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times X$ dans X .

Exemple.

- Lorsque τ est associée à un produit scalaire, on parle d'espace préhilbertien.
- Lorsqu'elle est associée à une norme, on parle d'espace vectoriel normé.

2.1 Étude des semi-normes

Définition 2.1.1. Une fonction p positive finie [$p(x) \neq \infty$ et $p \geq 0$] sur un espace vectoriel X est dite une **semi-norme** si

- p est sous-additive : $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$;
- p est homogène : $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Au lieu de noter $p(x)$, on note aussi $\|x\|$.

Remarque. Une norme est une semi-norme satisfaisant pour tout x de X : $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Exemple.

1. Le module est une semi-norme sur \mathbb{R}^n et sur \mathbb{C}^n ;
2. $p(x) = \sup\{|x_k| : k = 1, \dots, m\}$ est une semi-norme pour tout $m \in \mathbb{N}$;
3. pour tout fermé F de \mathbb{R}^n et un compact non vide K inclus dans F ,

$$p(f) = \|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

est une semi-norme sur $\mathbf{C}_0(F)$.

2.1.1 Propriété des boules

Définition 2.1.2. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit **borné** s'il est absorbé par tout voisinage U de l'origine.

$$\forall U \in \mathcal{V}(O), \exists \alpha > 0 \text{ tel que } A \subset \lambda U \text{ si } |\lambda| \geq \alpha.$$

Propriétés 2.1.1.

1. Toute partie d'un borné est un borné.
2. L'union finie de bornés est un borné; en particulier, un ensemble fini est borné.
3. L'adhérence d'un borné est un borné.
4. Toute suite (ordinaire) de Cauchy est un borné.
5. Tout compact est borné.

Démonstration.

1. 1 est triviale.
2. Soit $A_i (i = 1, 2)$ deux bornés de X ; soit V un voisinage équilibré de \mathbf{O} ; il existe $\alpha_i > 0$ tels que $\alpha_i V \supset A_i$; posons $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$; alors $\alpha V \supset A_1 \cap A_2$.
3. On utilise la régularité de la topologie d'un E.V.T.(2.1.7) : il existe une base de voisinages fermés \mathcal{F} de \mathbf{O} dans X . Soit A un borné, F un élément de \mathcal{F} ; par définition, A est absorbé par F , donc \bar{A} est absorbé par $\bar{F} \equiv F$, donc \bar{A} est borné.
4. Soit V un voisinage de \mathbf{O} ; il existe toujours W équilibré, voisinage de \mathbf{O} , tel que $W + W \subset V$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : p, q \geq n_0 \Rightarrow x_p - x_q \in W.$$

Comme W est absorbant, il absorbe x_{n_0} ; il existe donc α tel que $x_{n_0} \in \alpha W$ (on supposera que $\alpha \geq 1$). Mais alors, pour $p \geq n_0$, on a

$$x_p \in x_{n_0} + W \subset \alpha W + W \subset \alpha W + \alpha W (\text{W équilibré}) \subset \alpha(W + W) \subset \alpha V$$

ce qui montre que l'ensemble $\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ est borné. Quant à l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$, il est borné car c'est un ensemble fini.

5. Soit K un compact, U un voisinage ouvert équilibré de O .

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU = X$; donc la famille $\{nU\}_{n \in \mathbb{N}}$ recouvre K . Extrayons de cette famille une famille finie $\{n_1U, n_2U, \dots, n_kU\}$ qui recouvre K . Soit

$$n_0 = \sup\{n_1, \dots, n_k\},$$

alors $K \subset n_0U$ (car U est équilibré). Donc K est absorbé par U .

□

Proposition 2.1.1. *Les boules unités B (ouvertes ou fermées) d'une semi-norme p sont des ensembles absorbants, équilibrés et convexes.*

Démonstration.

1. équilibré :

D'homogénéité de semi-norme, on a,

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \leq p(x)$$

si $|\lambda| \leq 1$, d'où la résultat.

2. Soit $x \in X$, on a $x \in (\epsilon + p(x))B$; donc B (et par conséquent \overline{B}) est absorbant.

3. La convexité est immédiate de les propriétés de norme (homogénéité et l'inégalité triangulaire) comme suit :

$$p(\lambda x + \mu y) = |\lambda|p(x) + |\mu|p(y).$$

□

2.1.2 Jauge d'un ensemble

Définition 2.1.3. *Minkowski.*

On appelle **jauge** d'un ensemble A l'application p_A de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$p_A(x) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+^*; x \in \alpha A\}.$$

Est-ce que la jauge est une semi-norme ?

Alors la question qui se pose, est-ce qu'il existe un sous-ensemble sur lequel le fonctionnelle de Minkowski est en fait une semi norme. La réponse est positive comme établi dans les propositions Suivantes.

Proposition 2.1.2.

1. Si A est la boule unité (ouverte ou fermée) d'une semi-norme p alors la jauge de A n'est autre que p .
2. Si A est un ensemble convexe équilibré absorbant, alors sa jauge est une semi-norme dont la boule unité fermée contient A et dont la boule unité ouverte est contenue dans A .

Démonstration.

1. Soit A la boule unité (ouverte ou fermée) d'une semi-norme p .

Si $\alpha > p(x)$, alors $x \in \alpha A$; si $\alpha < p(x)$, alors $x \notin \alpha A$.

Par suite,

$$p_A(x) = p(x).$$

2. **L'homogénéité :**

Comme A est absorbant, p_A est partout finie.

Pour A quelconque, on a $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$, si $\lambda > 0$, ($x \in \alpha A \Leftrightarrow \lambda x \in \lambda \alpha A$);

si A est équilibré, on a de plus $p(\lambda x) = p(x)$ si $|\lambda| = 1$, ($\lambda x \in \alpha A \Leftrightarrow x \in \alpha A$).

la sous-additivité :

Soit $x, y \in X$. Pour $\alpha > p_A(x)$ et $\beta > p_A(y)$, on a

$$x \in \alpha A \quad \text{et} \quad y \in \beta A,$$

d'où

$$x + y \in \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A \quad (\text{car } A \text{ est convexe}),$$

ce qui montre que

$$p_A(x + y) \leq \alpha + \beta.$$

Pour $\epsilon > 0$, prenons $\alpha = p_A(x) + \epsilon$ et $\beta = p_A(y) + \epsilon$ (où $\epsilon > 0$ est arbitraire).

On obtient $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon$.

Comme ϵ est arbitraire, On en déduit que p_A est Sous-additive

$BO \subset A \subset BF$:

En effet, d'une part $x \in A \Rightarrow p_A(x) \leq 1 \Rightarrow x \in BF$.

D'autre part, $x \in BO \Rightarrow p_A(x) < 1 \Rightarrow x \in A$ [on a utilisé $x \in \alpha A, \forall \alpha > p_A(x)$].

□

Proposition 2.1.3. *Si A est un sous-ensemble non vide de X absorbant et absolument convexe, alors le fonctionnelle de Minkowski p_A est un semi-norme et $BO \subseteq A \subseteq BF$. Inversement, si p est une semi-norme sur X alors BO est absorbante et absolument convexe et $p = p_A$.*

Démonstration.

Soit A un sous-ensemble non vide de X absorbant et absolument convexe et désignent par p_A le fonctionnel de Minkowski associé.

montrons que p_A est une semi-norme.

- Tout d'abord, notons que $p_A(x) < \infty$ pour tout $x \in X$ puisque A est absorbant. En effet, par définition, pour tout $x \in X$ il existe $\rho_x > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq \rho_x$ on a $\lambda x \in A$ donc l'ensemble $\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ n'est jamais vide c.à.d. p_A n'a que des valeurs finie non négative. De plus, comme $o \in A$ on a aussi $o \in \lambda A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ donc $p_A(o) = \inf\{\lambda > 0 : o \in \lambda A\} = 0$.
- L'équilibre de A implique que p_A est homogène. Comme on a montré que $p_A(o) = 0$ il reste de montrer l'homogénéité de p_A pour $\lambda \neq 0$. comme A est équilibré on a pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\mu \neq 0$:

$$\mu x \in \lambda A \text{ si et seulement si } x \in \frac{\lambda}{|\mu|} A. \quad (2.1)$$

En effet, l'équilibre de A garantit que $\mu A = |\mu| A$ donc $x \in \frac{\lambda}{|\mu|} A$ est équivalent à $\mu x \in \lambda \frac{\mu}{|\mu|} A = \lambda A$. En utilisant 2.1, obtient que pour tout $x \in X$ et pour tout

$\mu \in \mathbb{K}$ avec $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} p_A(\mu x) &= \text{Inf}\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda A\} \\ &= \text{Inf}\{\lambda > 0 : x \in \frac{\lambda}{|\mu|} A\} \\ &= \text{Inf}\{|\mu| \frac{\lambda}{|\mu|} > 0 : x \in \frac{\lambda}{|\mu|} A\} \\ &= |\mu| \text{inf}\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\} = |\mu| p_A(x). \end{aligned}$$

- La convexité de A assure la sous-additivité de p_A . Prenons $x, y \in X$. Par définition du Jauge, pour tout $\epsilon > 0$ ils existent $\lambda, \mu > 0$

$$\lambda \leq p_A(x) + \epsilon \text{ et } x \in \lambda A$$

et

$$\alpha \leq p_A(y) + \epsilon \text{ et } y \in \alpha A.$$

Alors, par la convexité de A , on obtient que $\frac{\lambda}{\lambda + \alpha} A + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} A \subseteq A$, c.à.d. $\lambda A + \alpha A \subseteq (\lambda + \alpha)A$, et donc $x + y \in (\lambda + \alpha)A$. Par conséquent :

$$p_A(x + y) = \text{inf}\{\delta > 0 : x + y \in \delta A\} \leq \lambda + \alpha \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon$$

ce qui prouve la sous-additivité de p_A dès que ϵ est arbitraire.

On peut alors conclure que p_A est une semi norme. de plus, on a les inclusions suivantes :

$$BO \subseteq A \subseteq BF.$$

Si $x \in BO$ alors $p_A(x) < 1$ et donc il existe $0 \leq \lambda < 1$ dès que $x \in \lambda A$.

Comme A est équilibré, pour tout λ on a $\lambda A \subseteq A$ et donc $x \in A$. D'autre part, si $x \in A$ alors elle est claire que $1 \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ ce qui donne que $p_A(x) \leq 1$ donc $x \in BF$.

Inversement, prenons une semi-norme q sur X . Tout d'abord montrons que BO est absorbant et absolument convexe et alors q coïncide avec le fonctionnel de Minkowski associé à BO .

- BO est absorbant.

soit x un point de X . Si $q(x) = 0$ alors il est clair que $x \in BO$.

Si $q(x) > 0$, on peut prendre $0 < \rho < \frac{1}{q(x)}$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq \rho$ l'homogénéité de q implique que $q(\lambda x) = |\lambda| q(x) \leq \rho q(x) < 1$, C.à.d. $\lambda x \in BO$.

- BO est équilibré.

Pour tout $x \in BO$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq 1$, encore par l'homogénéité de q , on a : $q(\lambda x) = |\lambda| q(x) \leq q(x) < 1$ c.à.d. $\lambda x \in BO$.

- BO est convexe.

Pour tout $x, y \in BO$ et pour tout $t \in [0, 1]$, par les propriétés de semi-norme, on a $q(tx + (1-t)y) \leq tq(x) + (1-t)q(y) < t + 1 - t = 1$ c.à.d. $tx + (1-t)y \in BO$.

De plus, pour tout $x \in X$ on a

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda BO\} = \inf\{\lambda > 0 : q(x) < \lambda\} = q(x).$$

□

2.1.3 Propriétés des boules unités :

Lemme 2.1.1. *Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel topologique X ; soit BO et BF ses boules unités (respectivement) ouverte et fermée.*

Alors, on a $\overset{\circ}{BF} \subset BO \subset BF \subset \overline{BO}$

Démonstration.

1. L'inclusion $BO \subset BF$ est évidente.
2. $BF \subset \overline{BO}$. Par définition, on a

$$BO = \{x \in X; p(x) < 1\}$$

et

$$BF = \{x \in X; p(x) \leq 1\}.$$

Soit $x \in BF$,

on a, pour chaque $\epsilon > 0$: $\frac{x}{1+\epsilon} \in BO$ Faisons tendre ϵ vers 0; la continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ montre que $\frac{x}{1+\epsilon}$ tend vers x (quand ϵ tend vers 0); donc $x \in \overline{BO}$.

3. Posons $AF = BO^c \equiv \{x \in X; p(x) \geq 1\}$ et $AO = BF^c$.

Du même que 2, on montre $\overline{AO} \supset AF$. D'où $BF \subset BO$.

□

Proposition 2.1.4. *Soit p une semi-norme continue sur un E.V.T.*

Alors

1. sa boule unité ouverte, BO , est un ouvert (convexe, équilibré, absorbant),
2. sa boule unité fermée, BF , est un fermé (convexe, équilibré, absorbant),
3. l'adhérence de BO est BF ,
4. l'intérieure de BF est BO .

Démonstration. 1. BO est la préimage (par p) de l'ouvert $] - 1, +1[$.

2. BF est la préimage (par p) du fermé $[-1, +1]$.

3. On a $BO \subset BF \Rightarrow \overline{BO} \subset \overline{BF} = BF$ (car BF est fermé).

Comme $\overline{BO} \supset BF$ pour toute semi-norme (2.1.1), on en déduit $\overline{BO} = BF$.

4. On a $BF \supset BO \Rightarrow \overset{\circ}{BF} \supset \overset{\circ}{BO} = BO$. Comme $\overset{\circ}{BF} \subset BO$ pour toute semi-norme, on en déduit $\overset{\circ}{BF} = BO$.

□

2.1.4 Caractérisation des semi-normes continues

Proposition 2.1.5. *Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel topologique X . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La boule unité ouvert BO de p est un ouvert,
2. La boule unité fermé de p est un voisinage de O ,
3. p est continue en O ,
4. p est continue partout.

Démonstration.

- **(1) implique (2).**

La boule unité fermé BF contient la boule unité ouvert BO , qui est Voisinage de O ; donc BF est voisinage de O .

- **(2) implique (3).**

Soit $J_\epsilon = [-\epsilon, +\epsilon]$ un voisinage de $O \in \mathbb{R}$; la préimage de J_ϵ (par p) est la boule BF qui voisinage de O ; donc p est continue en O .

- **(3) implique (4).**

Soit (x_λ) une suite généralisée tendant vers $x \in X$; alors la suite $(x_\lambda - x)$ tend vers 0 (continuité de l'addition dans un E.V.T.). Mais alors $p(x_\lambda - x)$ tend vers 0

(3)). Comme $|p(x_\lambda) - p(x)| \leq p(x_\lambda - x)$, On en déduit que $p(x_\lambda) - p(x)$ tend vers 0, donc que $p(x_\lambda)$ tend vers $p(x)$.

• (4) implique (1).

D'après la proposition 2.1.4 , on a bien (4) \Rightarrow (1).

□

On dit que deux normes N_1, N_2 sont équivalentes s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, \quad \frac{1}{C}N_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x).$$

Dans ce cas les topologies associées à N_1, N_2 sont les mêmes.

L'espace $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, est un espace vectoriel de dimension infinie qui peut être muni de plusieurs normes non équivalentes.

Définition 2.1.4. Dans un E.V.T. on appelle **tonneau** tout ensemble absorbant équilibré convexe fermé.

Exemple.

- La boule unité fermée de toute semi-norme continue est un tonneau.
- L'adhérence de la boule unité ouverte de toute semi-norme (continue ou non) est un tonneau.
- Soit U un voisinage de 0 sur un E.V.T. X . Notons par $T(U)$ l'enveloppe convexe fermé c'est à dire, la fermeture de l'ensemble convexe) de l'ensemble $\cup_{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1} \lambda U$. Alors $T(U)$ est un tonneau.

En effet, les propriétés (3) et (4) sont évident; le faite que $U \subset T(U)$ on a la propriété (1). Il reste de montrer que $T(U)$ est équilibré. Il suffit de montrer que l'enveloppe convexe est équilibré (la fermeture d'un ensemble équilibré est évidemment équilibré). Chaque point de l'enveloppe convexe peut être écrite comme

$$z = tx + (1 - t)y,$$

avec $x \in \lambda U, y \in \mu U$, pour certains $t, \lambda, \mu, 0 \leq t \leq 1, |\lambda| \leq 1, |\mu| \leq 1$. Si $\xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq 1$, on a

$$\xi z = t(\xi x) + (1 - t)(\xi y) \text{ et } \xi x \in \xi \lambda U, y \in \xi \mu U.$$

Définition 2.1.5. Soient X et Y deux e.v.t sur \mathbb{K} .

- Une **homomorphisme** est une application de X dans Y linéaire.
 - Une **homéomorphisme** de X dans Y est une application linéaire bijective et continue.
 - Une **monomorphisme** de X dans Y est une homomorphisme topologique injective.
 - Une **isomorphisme** de X dans Y est une homomorphisme topologique bijective.
- [?]

2.1.5 Invariance par translation.

Proposition 2.1.6. Le filtre des voisinages $\mathcal{V}(x)$ du point x est la famille des ensembles de la forme $x + V$, où V parcourt le filtre des voisinages $\mathcal{V}(0)$ de l'élément neutre :

$$\mathcal{V}(x) = \{W \in \mathcal{P}(x); \quad W = x + V, \quad \text{avec } V \in \mathcal{V}(0)\}.$$

Autrement dit,

la topologie d'un E.V.T. est invariante par translation.

Démonstration. D'après la définition ??, l'application $y \mapsto y + x$ est continue de X dans X . Soit W un voisinage de x ; l'image réciproque de W par cette application est un voisinage, V , de l'image réciproque de x qui n'est autre que 0 . On a donc $W = V + x$. Réciproquement, soit V un voisinage de 0 ; alors $V + x$ est un voisinage de x

□

2.1.6 Théorème caractéristique

Théorème 2.1.1. 1. l'origine O appartient à tout $V \in \mathcal{F}$;

2. pour tout $V \in \mathcal{F}$, il existe $W \in \mathcal{F}$ tel que $W + W \subset V$;

3. quels que soient $V \in \mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}(\lambda \neq 0)$, on a $\lambda V \in \mathcal{F}$ (invariance de \mathcal{F} par les homothéties non nulles) ;

4. chaque $V \in \mathcal{F}$ est absorbant ;

5. chaque $V \in \mathcal{F}$ contient un certain $W \in \mathcal{F}$ équilibré.

Démonstration.

- Nécessité :

Soit $V \in \mathcal{F}$, et $x \in X$.

1. Triviale ; de plus, notons que (5) implique (1).
2. Soit φ l'application définie par

$$\varphi : (x, y) \mapsto x + y.$$

La préimage sous l'application φ de V doit être un voisinage de $O \in X \times X$. Elle contient donc au moins un rectangle $U \times U'$, où U et U' sont des voisinages de $O \in X$; mais alors il contient le carré $(U \cap U') \times (U \cap U')$ (qui n'est pas vide). Posons $W = U \cap U'$; on a $\varphi^{-1}(V) \supset W \times W$ et par suite,

$$V \supset \varphi(W \times W) = W + W.$$

3. Pour $\lambda \neq 0$ fixé, la continuité de l'application $\psi : x \mapsto \lambda^{-1}x$ assure que la préimage de V par cette application est le voisinage de $O \in X$ qui n'est autre que λV .
4. Soit l'application $x \mapsto \lambda x$ avec x fixé de X . En utilisant la continuité de cette application au point $O \in \mathbb{C}$ on a, la paréimage de V de $O \in X$ est un voisinage de $O \in \mathbb{C}$, qui contient donc un disque fermé D_r de centre O et de rayon r . Par suite, l'image de D_r est contenue dans V ; mais, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leq r$, on a $\lambda x \in V$; donc V est absorbant.
5. Soit $f : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$. f est continue au point $(\lambda, 0)$, donc la préimage de V est un voisinage de $(\lambda, 0)$. Elle contient donc un rectangle de la forme $D \times W_0$ où D est un disque fermé de rayon r , et où W_0 est un voisinage de O ($W_0 \in \mathcal{F}$). Par suite, $f(D \times W_0) \subset V$.
Or $f(D \times W_0) = \cup_{|\lambda| \leq r} \lambda W_0$ (que l'on pose égale à W). l'ensemble W est un voisinage de O d'après (3), W est équilibré, la nécessité de 5 est donc prouvée.

- Suffisance :

Désignons par $x + \mathcal{F}$ l'image de filtre \mathcal{F} par l'application $y \mapsto x + y$; le filtre $x + \mathcal{F}$ est, par définition, le filtre des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de x .

1. La topologie sur X .

L'image $x + \mathcal{F}$ du filtre \mathcal{F} est évidemment un filtre.

— On a $x \in V_0 + x$ si $V_0 \in \mathcal{F}$, en effet, la propriété (1) montre que $O \in V_0$.

— Soit $V \in \mathcal{V}(x)$; donc $V = V_0 + x$ avec $V_0 \in \mathcal{F} \equiv \mathcal{V}(O)$.

D'après la deuxième propriété, il existe W_0 tel que $W_0 + W_0 \subset V_0$. Posons $W = x + W_0$; alors $W \subset V$.

$V \in \mathcal{V}(y)$.

Soit $y \in W$;

on a $y + W_0 \in \mathcal{V}(y)$, donc il suffit de montrer que V contient $y + W_0$. Or

$$V = V_0 + x \supset (W_0 + W_0) + x = W_0 + (W_0 + x) = W_0 + W \supset W_0 + y.$$

2. l'application $(x, y) \xrightarrow{\varphi} x + y$ est continue.

Soit V un voisinage arbitraire de $x + y$. On sait que $V = V_0 + x + y$, où $V_0 \in \mathcal{F}$.

Par la deuxième propriété, on peut choisir $W_0 \in \mathcal{F}$ tel que $W_0 + W_0 \subset V_0$. Alors $(W_0 + x) + (W_0 + y) \subset V$, ce qui montre que l'image de $(W_0 + x) + (W_0 + y)$ (par φ) est dans V .

Comme $(W_0 + x) \times (W_0 + y)$ est justement un voisinage de (x, y) , le résultat précédent montre que φ est continue.

3. La continuité de l'application $(\lambda, x) \xrightarrow{f} \lambda x$ au point $(0, 0)$.

Soit $V_0 \in \mathcal{V}(O)$; il existe, d'après la propriété (5), un W_0 de $\mathcal{V}(0)$, équilibré tel que $W_0 \subset V_0$. Soit D le disque de centre O , de rayon 1 (dans \mathbb{C} .) On a

$$f(D \times W_0) \subset W_0$$

(car W_0 est équilibré),

et

$$f(D \times W_0) \subset V_0$$

(par construction),

d'où la continuité de f au point $(0, 0)$ de $\mathbb{C} \times X$.

4. Cette propriété montre que, pour tout $x \in X$, l'application $\lambda \mapsto \lambda x$ de \mathbb{C} dans X est continue au point $\lambda = 0$.

5. La troisième propriété montre que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ de X dans X est continue au point $x = 0$.

6. Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times X$. Considérons une suite généralisée $[(\lambda_j, x_j)]_{j \in J}$ tendant vers (λ, x) ; évidemment les suites généralisées $(\lambda_j)_{j \in J}$ tendent respectivement vers λ

et x .

$$\Lambda_j x_j = \lambda x + (\lambda_j - \lambda)x + \lambda(x_j - x) + (\lambda_j - \lambda)(x_j - x)$$

Les résultats obtenus montrent que la suite généralisée $(\lambda_j, x_j)_{j \in J}$ tend vers λx .

□

2.1.7 Régularité de la topologie d'un E.V.T.

Proposition 2.1.7. *Dans un E.V.T., il existe une base de voisinages de l'origine formée d'ensembles fermés équilibrés (absorbant).*

Démonstration. Nous allons montrer que tout voisinage, V , de l'origine contient un voisinage fermé équilibré ce qui est suffisant.

En effet, d'après les propriétés 2 et 5 du théorème caractéristique, il existe un voisinage équilibré W de O tel que $W + W \subset V$.

Montrons que $\overline{W} \subset V$. En effet, soit $x \in \overline{W}$; tout voisinage de x (en particulier $x+W$) rencontre W ; il existe donc y et $z \in W$ tels que $x+y = z$. Mais alors $x = z-y \in W-W \subset V$.

□

2.2 Convexité Locale

Définition 2.2.1. *Un espace vectoriel topologique est dit localement convexe E.V.T.L.C. s'il existe une base de voisinages de l'origine qui sont des ensembles convexes.*

2.3 Espace de Fréchet

Définition 2.3.1. *On appelle espace de Fréchet tout espace vectoriel topologique séparé localement convexe, à base dénombrable de voisinages, complet.*

Proposition 2.3.1. *On peut remplacer dans 2.3.1 l'assertion " localement convexe, à base dénombrable de voisinages par " à base dénombrable de semi-normes continues ".*

Démonstration.

(i) Soit X un espace localement convexe possédant une base dénombrable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages de $\mathbf{0}$. Comme X est localement convexe, chaque U_n contient un tonneau. On peut donc supposer que chaque U_n est tonnelé.

Soit p_n la jauge de U_n . Alors, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable de semi-normes continues sur X .

(ii) Réciproquement, si X est définie une base dénombrable de semi-normes $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ alors l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{k} B_{p_n} ; \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

est une base dénombrable de voisinages convexes de X .

□

Un espace localement convexe X est dit *normable* s'il existe une norme $\| \cdot \|$ sur X telle que $\{\| \cdot \| \}$ est une base de semi-normes continues sur X .

Exemple.

1. *Tout espace normable complet s'appelle un espace de Banach.*
2. *Tout espace de Banach est de Fréchet.*
- 3.

Théorème 2.3.1. *L'espace des fonctions holomorphes muni de la topologie τ de la convergence compacte est un E.V.T localement convexe, métrisable et complet (c.à.d., de Fréchet). [2]*

Chapitre 3

Limites inductives strictes

X un E.V.T. (sur \mathbb{C});

M un sous-espace vectoriel de X ;

$\mathcal{V}(O)$ le filtre des voisinages de O dans X ;

$\mathcal{V}_M(O) = \{\mathcal{V}_M \subset M; \exists V \in \mathcal{V}(O) \text{ tel que } \mathcal{V}_M = V \cap M\}$. le filtre des voisinages de O dans M , alors on peut structurer M en E.V.T.

On dit alors que la topologie de M est induite par celle de X .

Lemme 3.0.1.

- Soit X un E.V.T.L.C. (dont le filtre des voisinages de l'origine est $\mathcal{V}(O)$), M un sous-espace vectoriel de X (muni de la topologie induite), U convexe de $\mathcal{V}_M(O)$.

Alors il existe V convexe de $\mathcal{V}(O)$ tel que $V \cap M = U$.

- On suppose, en outre que M soit fermé. Soit $x_0 \notin M$; alors, il existe V convexe dans $\mathcal{V}(O)$ tel que

$$\begin{cases} V \cap M = U, \\ V \not\ni x_0. \end{cases}$$

Démonstration.

- Par définition, de la topologie induite, il existe $W \in \mathcal{V}(O)$ tel que $U = W \cap M$. La convexité locale de X montre que W contient un W_c convexe appartenant à $\mathcal{V}(O)$. Soit V l'enveloppe convexe de $U \cup W_c$.

Évidemment on a $U \subset V \cap M$. Montrons que $V \cap M \subset U$. Soit donc $x \in V \cap M$; comme U et W_c sont convexes, l'appartenance de x à V montre que x est une combinaison convexe d'un élément $u \in U$ et d'un élément $w \in W_c$:

$$x = \lambda u + \mu w \quad (\lambda, \mu \geq 0; \quad \lambda + \mu = 1).$$

Si $\mu = 0$, alors $x = u \in U$.

Sinon, on a nécessairement $w \in M$ (car $w = \frac{x - \lambda u}{\mu}$, x et $u \in M$). par suite, $w \in W_c \cap M \subset U$ (car $W_c \subset W$). Comme U est convexe, on a $x \in U$.

- L'ensemble $x_0 + M$ est fermé (car c'est la préimage de M par l'application $x \mapsto x_0 + x$). Comme $x_0 \notin M$, on a $O \notin x_0 + M$. Il existe donc un voisinage convexe W' de O (dans X) qui ne rencontre pas $M + x_0$. Posons $V' = (W' + M) \cap V$; alors V' est convexe, appartient à $\mathcal{V}(O)$ et ne contient pas x_0 . (La somme de deux convexes est convexe.)

□

3.1 Limite inductive stricte d'espace localement convexe

X un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels de X , recouvrant X ($\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$).

On suppose que

1. chaque X_n est muni d'une topologie localement convexe \mathcal{T}_n .
2. la topologie \mathcal{T}_n est identique à celle induite par \mathcal{T}_{n+1} .

Nous allons structurer X en un espace localement convexe.

3.1.1 Proposition et définition

Proposition 3.1.1. *Soit \mathcal{B} l'ensemble des parties convexes, absorbantes, équilibrées B de X telles que $B \cap X_n$ soit un voisinage de O dans X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors \mathcal{B} est une base de voisinage de O dans X pour une topologie \mathcal{T} compatible avec la structure d'espace*

vectorel.

Cette topologie \mathcal{T} sera appelée la topologie **limite inductive stricte** des espace (X_n, \mathcal{T}_n) ; la suite $(X_n, \mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle **une suite de définition de** (X, \mathcal{T}) .

Démonstration. **\mathcal{B} une base de filtre invariante par les homothétie de rapports strictement positifs**

— **Invariante par homothétie.**

Soit B un convexe absorbant équilibré tel que $B \cap X$ soit voisinage de O dans X_n (pour chaque $n \in \mathbb{N}$). Alors αB est évidemment convexe absorbant équilibré dans X .

D'autre part, $\alpha B \cap X_n = \alpha(B \cap X_n) \in \mathcal{V}(O)$ dans X_n (invariance de $\mathcal{V}(O)$ par homothéties strictement positives).

— **Base de filtre.**

Soit B' et B'' deux convexes appartenant à \mathcal{B} . L'intersection $B = B' \cap B''$ est évidemment équilibrée, convexe et absorbante. Or,

$$B \cap X_n = (B' \cap X_n) \cap (B'' \cap X_n) \in \mathcal{V}$$

(O) dans X_n (car $\mathcal{V}(O)$ est stable par intersection), d'où le résultat.

□

3.1.2 Voisinage dans \mathcal{T}

Proposition 3.1.2. *Condition pour qu'un ensemble convexe soit un voisinage dans \mathcal{T} .*

Soit V un convexe de X . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. V est voisinage de O (dans X) pour \mathcal{T} ,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $V \cap X_n$ est un voisinage (convexe) de O pour \mathcal{T}_n .

Démonstration. 1. Soit V un convexe appartenant à $\mathcal{V}(O)$ pour \mathcal{T} ; V contient un B convexe équilibré absorbant tel que $B \cap X_n$ soit voisinage de O pour \mathcal{T}_n . Mais alors $V \cap X_n \supset B \cap X_n$ est voisinage de O .

2. Réciproquement, soit V un convexe de X tel que $V_n = V \cap X_n$ soit voisinage de O pour \mathcal{T}_n ; V_n est convexe et contient un équilibré E_n , voisinage de O pour \mathcal{T}_n . Posons $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$; évidemment, E est équilibré. Alors l'enveloppe convexe $K(E)$ de E dans X est équilibré et est évidemment voisinage de O pour \mathcal{T} [car $K(E)$ est convexe, équilibré absorbant et $K(E) \cap X_n \supset E_n$]. Il est clair que $K(E) \subset V$ (car $E \subset V$ et V est convexe; $E \subset V$ car $E \cap X_n \equiv E_n \subset V_n \equiv V \cap X_n$). Donc V est voisinage de O pour \mathcal{T} .

□

3.1.3 Caractérisation des applications linéaires

Proposition 3.1.3. *Soit X une limite inductive stricte d'espaces localement convexes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$,*

- Y un espace localement convexe,
- f une application linéaire de X dans Y ,
- f_n une restriction de f à X_n (muni de la topologie \mathcal{T}_n).

Alors f est continue si, et seulement si, pour tout n , la restriction f_n est continue (de X_n dans Y).

Démonstration. 1. Supposons f continue. Soit V un voisinage de O dans Y ; alors $f^{-1}(V)$ est voisinage de O dans X et, par conséquent, contient un voisinage convexe U de O dans X . Pour chaque n , $U_n = U \cap X_n$ est voisinage de O dans X (d'après la proposition précédente). or,

$$U_n \subset f^{-1}(V) \cap X_n = f_n^{-1}(V) \equiv \{x \in X_n; f(x) \in V\},$$

ce qui montre que f_n est continue en O , donc partout (car f_n est linéaire).

2. Réciproquement, supposons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la restriction f_n est continue. Soit $V \in \mathcal{V}(O)$ dans Y . Alors on peut supposer que V est convexe (en utilisant la convexité locale de Y).

Par suite $f^{-1}(V)$ est convexe (car f est linéaire). Or, pour chaque n on a

$$f^{-1}(V) \cap X_n = f_n^{-1}(V),$$

qui est un voisinage de O dans X_n (par hypothèse); d'après la proposition précédente, $f^{-1}(V)$ est voisinage de O dans X .

□

3.1.4 Topologie induite par \mathcal{T} sur X_n

Proposition 3.1.4. *La topologie \mathcal{T}_n est identique à celle induite par \mathcal{T} sur X_n :*

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{T}|_{X_n}.$$

Démonstration. — $\mathcal{T}_n \supset \mathcal{T}|_{X_n}$.

Soit V_n un voisinage de O (dans X_n) pour la topologie induite $\mathcal{T}|_{X_n}$. Par définition, même de la topologie induite, on a $V_n = V \cap X_n$, avec $V \in \mathcal{V}(O)$ pour \mathcal{T} .

Il existe U , voisinage convexe de O (pour \mathcal{T}), contenue dans V (car \mathcal{T} est localement convexe). D'après la proposition 3.1.2, $U_n = U \cap X_n$ est voisinage de O pour \mathcal{T}_n .

Or $U_n \subset V_n$, donc V_n est aussi voisinage de O pour \mathcal{T}_n .

— $\mathcal{T}|_{X_n} \supset \mathcal{T}_n$.

En utilisant la condition 3.1 on a $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{n+1}|_{X_n}$. Soit U_n un voisinage arbitraire (convexe) de O (dans X_n) pour \mathcal{T}_n . Montrons qu'il existe $U \in \mathcal{V}(O)$ pour \mathcal{T} tel que $U \cap X_n = U_n$.

Par le lemme 3.0.1, il existe un voisinage convexe $U_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}(O)$ (pour \mathcal{T}_{n+1} tel que $U_{n+1} \cap X_n = U_n$.

Par récurrence, on voit qu'il existe, pour tout $k = 1, 2, \dots$ un voisinage convexe (de O) U_{n+k} (dans X_{n+k} , pour \mathcal{T}_{n+k}) tel que $U_{n+k+1} \cap X_{n+k} = U_{n+k}$.

Posons $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{n+k}$.

On voit que $U \cap X_n = U_n$. D'autre part, U est un voisinage de O pour \mathcal{T} , car U est convexe (étant réunion croissante de convexe) et car $U \cap X_n$ est un voisinage de O pour \mathcal{T}_n ($\forall n \in \mathbb{N}$).

□

Corollaire 3.1.1. *Si les topologies \mathcal{T}_n sont séparées, alors \mathcal{T} est une topologie séparée.*

Démonstration. Soit x un élément non nul de X . Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$. Comme \mathcal{T}_n est séparée, il existe un voisinage U_n de O (pour \mathcal{T}_n) ne contenant pas x . Comme \mathcal{T}_n est identique à celle induite par \mathcal{T} , il existe $U \in \mathcal{V}(O)$ pour \mathcal{T} tel que $U \cap X_n = U_n$. Donc $x \notin U$, ce qui prouve que \mathcal{T} est séparée. □

3.2 Limites inductives strictes d'espace de Fréchet

3.2.1 Définition

Définition 3.2.1. On appelle *espace L.F.* toute limite inductive stricte d'espace de Fréchet.

3.2.2 Caractérisation des fonctions linéaires continues

Proposition 3.2.1. Soit X un L.F.,

Y un E.V.T.,

f une application linéaire de X dans Y .

Si Y est localement convexe et si f est séquentiellement continue, alors elle est continue.

Démonstration.

- On utilise le fait que chaque X_n possède une base dénombrable de voisinages.
- On sait que f est continue sur X si $f|X_n$ est continue sur X_n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Or la continuité séquentielle de f sur X entraîne celle de sa restriction $f|X_n$ (sur X_n).

□

Proposition 3.2.2. Lemme de Dieudonné-Schwartz

Soit X un espace L.F., défini par une suite d'espace de Fréchet $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit A un borné dans X ; alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset X_{n_0}$.

Démonstration. (On utilise la complétude de chaque X_n .) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de X_{n_0} contenant A . Donc pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un point $x_n \in A$ tel que $x_n \notin X_n$.

On va construire un voisinage $U \in \mathcal{V}(O)$ dans X qui n'absorbe pas la suite (x_n) .

- Soit U_1 un voisinage arbitraire convexe de O dans X_1 .

Comme $x_1 \notin X_1$ et comme X_1 est fermé dans X_2 (X_1 (muni de \mathcal{T}_1) est complet, donc fermé dans \mathcal{T}_2), il existe un voisinage convexe U_2 (de O) dans X_2 tel que $U_1 = U_2 \cap X_1$ et $x_1 \notin U_2$ (lemme 3.0.1).

- Comme $x_1 \notin U_2$ et comme X_2 est fermé dans X_3 , il existe un voisinage convexe W_3 (de O) dans X_3 tel que

$$U_2 = W_3 \cap X_2 \quad \text{et} \quad x_1 \notin W_3$$

(si $x_1 \in X_2$ est immédiat ; sinon, utilisant le lemme 3.0.1). Comme $\frac{1}{2}x_2 \notin X_2$ et comme X_2 est fermé dans X_3 , il existe un voisinage convexe V_3 (de O) dans X_3 tel que (lemme 3.0.1)

$$U_2 = V_3 \cap X_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}x_2 \notin V_3.$$

En posant $U_2 = U_3 \cap X_2$, on voit alors qu'il existe U_3 tel que

$$U_2 = U_3 \cap X_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}x_2 \notin U_3.$$

- Par induction sur n, on peut donc construire une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n \text{ voisinage de O dans } X_n \\ U_n = U_{n+1} \cap X_n \\ x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n \notin U_{n+1}. \end{array} \right.$$

Posons alors $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$; U est un voisinage de O (dans X) car il est convexe (réunion croissante de convexes) et $U \cap X_n = U_n$ est voisinage de O dans X_n .

Montrons que U ne peut pas absorber l'ensemble $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

En effet, si U absorbait S, il existerait $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $kU \supset S$. Pour une valeur k, on aurait alors $\frac{1}{k}x_k \in U$, ce qui amènerait à une contradiction.

□

Corollaire 3.2.1. Une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans X si, et seulement si,

- il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'ensemble $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ soit contenue dans X_{n_0} ,
- la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans X_{n_0} .

Démonstration. La partie "si" est banale et est valable même pour une suite généralisée.

La partie "seulement si" découle du faite que toute suite convergente est bornée. □

Soit Ω un espace topologique séparé, localement compact et dénombrable à l'infini.

Lemme 3.2.1. Il existe une suite $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'ouvert relativement compact de Ω , formant un recouvrement de Ω et tels que $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Exemple.1. *L'espace des polynômes*

Notons $C[X]$ l'espace vectoriel des polynômes en n variables $X = (X_1, \dots, X_n$ avec des coefficients complexes. Cet espace vectoriel a une base algébrique canonique, la monômes

$$X^p = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Tout polynôme est une combinaison linéaire finie des monômes X^p . Soit \mathcal{P}_n^m l'espace vectoriel couvert par les X^p tel que $|p| = p_1 + \dots + p_n \leq m$. Les éléments de \mathcal{P}_n^m sont les polynômes de degré $\leq m$. Le degré d'un polynôme $P(X)$ est le plus petit entier m tel que $P(X) \in \mathcal{P}_n^m$; on notera $\deg P$ ce entier. Un calcul élémentaire montre qu'il y a exactement $\binom{m+n}{m}$ monômes X^p tel que $|p| \leq m$, autrement dit

$$\dim \mathcal{P}_n^m = (m+n)! / (m!n!).$$

Soit $P(x)$ un polynôme,

$$P(X) = \sum_{|p| \leq \deg P} c_p X^p$$

Il est évident que P peut être vu comme une fonction sur l'ensemble \mathbb{N}^n : précisément la fonction qui, à chaque p , affecte la valeur c_p si $|p| \leq \deg P$ et égal à zéro sinon. Notez que cette application des polynômes en fonctions sur \mathbb{N}^n ne préserve pas la multiplication. Dans tout les cas, si l'on met la topologie discrète sur \mathbb{N}^n et que l'on constate que chaque ensemble est fermé dans cette topologie, on voit que les fonctions correspondant aux polynômes sont exactement les fonctions à support compact : un sous-ensemble de \mathbb{N}^n est compact si et seulement s'il est fini. Les fonctions arbitraires sur \mathbb{N}^n correspondent (via les coefficients) à des séries de puissance formelles ; il est évident que l'on peut considérer $C[X]$ comme un sous-espace vectoriel de l'espace $C[[X]]$ des séries de puissance formelle en n variables (avec des coefficients complexes).

Étant un espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{P}_n^m muni d'une seule topologie de Hausdorff, pour laquelle il devient un espace de Fréchet. On peut alors voir $C[X]$ comme l'union des espaces de Fréchet \mathcal{P}_n^m comme $m = 0, 1, 2, \dots$, et lui munir de la topologie limite inductive ; ainsi $C[X]$ devient un espace LF. Ça devrait être a noté que la topologie ainsi définie sur $C[X]$ est strictement plus fine que la topo-

logie induite sur $C[X]$ par $C[[X]]$, lorsque ce dernier munir de la topologie de convergence simple des coefficients.

2. L'espace $\mathcal{K}(\Omega)$.

On désigne par $\mathcal{K}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω .

Soit, d'après le lemme 3.2.1, une suite $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'ouverts relativement compacts dans Ω , formant un recouvrement de Ω et tels que $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1}$. Posons $K_j = \overline{\Omega_j}$; alors $\mathcal{K}(\Omega) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_{K_j}(\Omega)$.

La topologie naturelle de $\mathcal{K}(\Omega)$ est, par définition, la topologie limite inductive stricte des topologies des $\mathcal{K}_{K_j}(\Omega)$; cette topologie de $\mathcal{K}(\Omega)$ ne dépend pas de la suite $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de recouvrement.

Soit u une application linéaire de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans un espace localement convexe. Alors, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) u est continue ;
- (b) u est séquentiellement continue ;
- (c) pour tout compact K de Ω , la restriction de u à $\mathcal{K}_K(\Omega)$ est continue.

Bibliographie

- [1] *François Trèves. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press New York.London, 1967.*
- [2] *Pierre Dolbeault. Analyse complexe. Issy-les-Moulineaux (Hauts-de-Seine) : Masson, 1990.*
- [3] *Haïm Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. Analyse fonctionnelle : théorie et applications, volume 91. Dunod Paris, 1999.*
- [4] *Nicolas Bourbaki. Éléments de mathématique : Livre V : Espaces vectoriels topologiques. Hermann, 1966.*
- [5] *Vo Khac Khoan. Distributions, analyse de fourier, opérateurs aux dérivées partielles : cours et exercices résolus, avec une étude introductive des espaces vectoriels topologiques. 1972.*

Résumé :

Ce mémoire de Master a pour but, de faire une étude sur les E.V.T, et les semi-normes pour définir les limites inductives strictes.

Ce mémoire n'a pas la prétention d'apporter de nouveaux résultats, mais il présente en détails, quelques résultats obtenus par différents auteurs, dans des travaux présentés en bibliographie.

mots clés : *Espace vectoriel topologique - semi-norme - filtres - convexité locale - espace de Fréchet - espace L.F - limite inductive.*

Abstract :

This Master Memory is intended, to do a study about topological vector space (linear topological space) and seminorms in order to define strict inductive limits. This memory has no claim to bring new results, but it presents in detail, a few results obtained by different authors, in works presented in bibliography.

Keywords : *topological vector spaces - seminorms - filters - locally convex spaces - Frechet space - LF-spaces - inductive limit.*

ملخص :

تهدف هذه المذكرة لإجراء دراسة على الفضاءات الشعاعية الطوبولوجية لدراسة النهايات الاستقرائية التامة.

هذه المذكرة لا تهدف لتحقيق نتائج جديدة، و لكن الغاية منها عرض بعض النتائج بالتفصيل، التي سبق وان توصل اليها العلماء في أعمالهم الموجودة في قائمة المراجع.

الكلمات الدلالية : فضاء شعاعي طوبولوجي - نصف تنظيم - مرشحة - فضاء محدد محليا - فضاء فريشي - النهايات الاستقرائية.